منطق ریاضی

محسن خانی
دانشگاه صنعتی اصفهان

۱۱ دی ۱۴۰۲

۱.۰ پیش‌گفتار

۱.۱.۰ پیش‌گفتار عمومی

هدفم از نگارش این کتاب، آشتی دادن دو علاقهٔ بزرگم به هم است؛ علاقه به نوشتن و علاقه به ریاضیات. در نوشتن این کتاب، زیبائی و کوتاهی و خوشخوانی را اولویت قرار داده‌ام. از نگارش به در آوردن همهٔ چیزهائی که می‌دانم و طول و تفصیلهای بی‌اهمیت حذر کرده‌ام. ضمناً هر آنچه را که دانستنش برای یک ریاضیدان حیاتی است به نگارش در آورده‌ام.

مشخصهٔ اصلی روش من در تدریس و نگارش منطق ریاضی این است که منطق تافته‌ای جدابافته از سایر بخشهای ریاضیات نمی‌بینم و در سرتاسر این کتاب، ریاضیات روزمره، به نحوی که دانشجویان ریاضی آن را فرامی‌گیرند جاری است. خوانندهٔ حرفه‌ای تر می‌داند که این که گرایش تخصصی من «نظریهٔ مدلها» است تأثیر این چنین بر شیوهٔ نگارش این کتاب گذاشته است؛ و البته این حدس درست است! این رهیافت نباید برای خوانندهٔ ریاضی‌دان عجیب باشد؛ عموماً هر کتاب ریاضی، دارای یک بخش اول است که در آن مقدماتی از منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها ریخته شده و تأکید شده است که دانستن آنها حیاتی است و بقیهٔ کتاب بر پایهٔ آنهاست. طبیعی است که رهیافت کتاب پیشِ رو برعکسِ این باشد: مطالب حیاتی در تمام کتاب جاریند و جذابیتهای ریاضیاتی که در مثالهای جبری دیده می‌شوند، به عنوان محصولات جانبی در نظر گرفته شده‌اند.

نحوهٔ نگارش این کتاب به گونه‌ای است که باید اهداف زیر را برآورده کند:

۱. به خواننده‌ای که هیچ آشنائی با ریاضیات و منطق ریاضی ندارد، دربارهٔ قضایای مهم در منطق ریاضی دید و شهود ببخشد.

۲. دانشجوی ریاضی را به نحوی زوتر به آخر قصه برساند.

۳. برای یک ریاضیدان که علاقه‌مند به نقش منطق ریاضی در سایر بخشهای ریاضیات و تفهیم مبانی ریاضیات است سودمند باشد.

از این رو، محتوای این کتاب به سه قسمت دسته‌بندی شده است:

۱. محتوای داخل کادر، که فقط برای یک خوانندهٔ عمومی نوشته شده است و عاری از محتوای ریاضی است. برای خوانندهٔ آشنا برای ریاضی نیز این محتوا می‌تواند در جمع‌بندی و خلاصه‌سازی خوانده‌ها کمک کند.

۲. محتوای مورد نیاز دانشجوی کارشناسی ریاضی که عمدهٔ مطالب این کتاب است و از هیچ علامتی برای مشخص کردن آن استفاده نشده است.

۳. محتوای ستاره‌دار، که دانشجو می‌تواند برای سریع‌تر رسیدن به انتها، از آنها حذر کند ولی خوانندهٔ ریاضیدان بهتر است آنها را مطالعه کند. ممکن است کلِ یک فصل یا بخشهایی از آن، و یا تنها یک مثال و تمرین در یک بخش، ستاره‌دار باشد.

۲.۰ پیشگفتار علمی

داوید هیلبرت، ۱۸۶۲-۱۹۴۳، یک ریاضیدانی بزرگ آلمانی است که در شاخه‌های مختلف ریاضی تأثیرگذار بوده است. در بین سالهای ۱۹۰۰ تا ۱۹۰۲، هیلبرت فهرستی از ۲۳ مسئلهٔ ریاضی در شاخه‌های گوناگون آن منتشر کرد که تا آن زمان پاسخ آنها دانسته نبود. برخی از این مسائل، بعدها حل شدند، برخی حلشان به حل برخی دیگر گره خورد و برخی تا هنوز، حل نشده باقی مانده‌اند.

یکی از این مسائل که طبیعتی هم نظریهٔ اعدادی و هم علوم کامپیوتری دارد، «مسئلهٔ دهم» است. مسئلهٔ دهم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

> آیا یک الگوریتم کامپیوتری وجود دارد که به عنوان ورودی، یک معادلهٔ دیوفانتی را بگیرد؛ اگر این معادله در اعداد طبیعی پاسخ داشت، در خروجی «بله» و اگر این معادله در اعداد طبیعی جواب نداشت در خروجی «خیر» چاپ کند؟

منظور از یک معادلهٔ دیوفانتی، یک معادلهٔ چندجمله‌ای است که ضرایب آن، اعداد صحیح هستند و به دنبال یافتن پاسخ آن نیز در اعداد صحیح هستیم. معادلهٔ $5x^2 - 4xy - y^2z = 11$ مثالی از یک معادلهٔ دیوفانتی است.

ریاضیدانان بزرگی برای پاسخ دادن به مسئلهٔ هیلبرت تلاش کردند که از میان آنها می‌توان به «جولیا رابینسون» و «یوری ماتیاسویچ» اشاره کرد. پاسخی که آنها به این مسئله دادند، پاسخی منفی بود: چنین الگوریتمی وجود ندارد.

مسئلهٔ پیدا کردن جواب برای یک معادله در اعداد طبیعی، یک مسئلهٔ بسیار طبیعی ریاضی است. اما این که ماهیت بررسی حل‌پذیری چنین معادلاتی از توان یک الگوریتم کامپیوتری خارج است، هم از نظر علمی و هم نظر از فلسفهٔ علمی اهمیت دارد؛ خصوصاً در این زمان که به نظر می‌رسد «الگوریتمی شدن همه چیز» با نوعی شوق و ذوق دنبال می‌شود و برخی ممکن است این تصورایجاد شده باشد که این ایده، تازه است.

پاسخ کامل به مسئلهٔ دهم در سال ۱۹۷۰ داده شد، اما پیش از آن هیلبرت در سال ۱۹۲۰ مسئله را به گونه‌ای بلندپروازنه‌تر مطرح کرده بود. در آن زمان که پارادوکسهای کوچک و بزرگ، توجه بخشهای مختلف ریاضی را به خود جلب کرده بود، هیلبرت پرسید:

> آیا الگوریتمی وجود دارد که به عنوان ورودی، یک جمله ریاضی را بگیرد، اگر این جمله یک قضیه ریاضی بود، بله، و اگر نبود خیر را چاپ کند.

مسئلهٔ بالا که Entscheidungsproblem [1] یا مسئلهٔ تصمیم‌پذیری نام دارد، بخشی از «برنامهٔ هیلبرت» نامیده می‌شود. می‌توان مسئلهٔ بالا را به صورت زیر بازنویسی کرد:

> آیا امکان دارد که یک مجموعه از اصول موضوعهٔ اولیه برای ریاضیات تثبیت کرد به طوری که فهرست این اصول موضوعه قابل چاپ توسط یک الگوریتم باشد و هر جملهٔ ریاضی، یا خودش و یا نقیضش با استفاده از این اصول موضوعه اثبات شود؟

اگر پاسخ به سوال بالا مثبت می‌بود، عملاً آنچه بشر ریاضیات، یا شاید حتی «علم» می‌خواند، همه، خروجی یک کامپیوتر است که مانند آتش زرتشتیان، آن را در گوشه‌ای روشن نگه داشته‌ایم!

پاسخی منفی به سوال بالا، در سال ۱۹۳۱ توسط «کورت گودل» داده شد، و البته این جواب منفی، که به نام «قضیهٔ ناتمامیت گودل» معروف است، و اثبات آن، نقطهٔ عطفی برای علم منطق ریاضی است. لذت بردن از درک درست این قضیه تنها با گذراندن یک دورهٔ درست و اصولی منطق ریاضی امکان‌پذیر است. امیدواریم که در این کتاب بتوانیم خواننده را درک مناسبی از این قضیه برسانیم.

اما پیش از درک قضیهٔ تمامیت، و شاید در راستای آن، خواننده باید با قضیهٔ دیگری از گودل، به نام «قضیهٔ تمامیت» آشنا شود. بنا بر این قضیه، هر جمله‌ای که در تمام جهانهای ریاضی درست باشد، اثباتی برایش وجود دارد. بنابراین بخشهای زیادی از این کتاب، به تشریح این قضیه اختصاص یافته است. تمامیت نیز نه تنها به عنوان یک قضیه در منطق ریاضی مهم است بلکه نمودهای جذابی در سایر گرایشهای ریاضیات دارد که خواهیم کوشید برخی از آنها را بیان کنیم.

اهمیت دو قضیهٔ تمامیت و ناتمامیت فراتر از محدودهٔ علم ریاضی است؛ این دو قضیه، موضوع مورد علاقه بسیاری در فلسفه و بخصوص فلسفهٔ علم است. اما، همان طور که در بالا هم اشاره کردیم، رسیدن به نقطه‌ای که در آن بتوان صورت دقیق، و فارغ از جلوه‌های ظاهری پرطمطراق آنها، دو قضیهٔ تمامیت و ناتمامیت را بیان کرد، پس از گذراندن یک دورهٔ کامل درس منطق امکان‌پذیر است. خواننده‌ای که با این دو قضیه، در قالب دو قضیه در علم ریاضی، و اثبات آنها آشنا شود، خودْ قادر به درک اهمیت فلسفی و گسترهٔ کاربرد آنها در علوم دیگر نیز خواهد شد.

شیوه‌هایی که در اثبات قضایای تمامیت و ناتمامیت گودل به کار گرفته شده است، منجر به نتایج ارزشمندی در بخشهای مختلف ریاضی بخصوص جبر و نظریهٔ اعداد شده است. این شیوه‌ها، در بخشی از علم منطق ریاضی به نام «نظریهٔ مدلها» به طور جداگانه مطالعه می‌شوند. در این کتاب، کوشیده شده است، به نحوی که قابل درک برای دانشجوی دورهٔ کارشناسی باشد، به نظریهٔ مدلها نیز پرداخته شود. در عین حال، علاقهٔ نگارنده جبر، او را به سمتی برده است که در یک فصل به نتایج جذابی در جبر بپردازد. این فصل به گونه‌ای نوشته خواهد شد که به تنهایی و مستقل از باقی کتاب، قابل تدریس و مطالعه باشد.

[1] بخوانید: اِنتْ شای دونگز پغُبلم.

فصل ۱

دستور زبان

اولین توانائی مورد نیاز یک منطقدان، رعایت دستور زبان در سخن گفتن است. برای سخن گفتن قاعده‌مند در هر زبانی، داشتن سه چیز اجتناب‌ناپذیر است: مجموعه‌ای از الفبا، روشی برای ساختن کلمات با استفاده از حروف الفبا، و روشی برای ساختن جملات با استفاده از کلمات. اینها بخشی از **دستور زبان** هستند که به علاوه، تعیین می‌کند که چه جملاتی را اجازه داریم بسازیم و چه جملاتی از نظر ساخت نادرست هستند.

برای مثال در زبان فارسی، مجموعهٔ الفبای ما متشکل از حروف الف، ب، پ، ت و .. است. با کنار هم گذاشتن برخی این حروف می‌توان کلمه سازی کرد؛ مثلاً «آب»، «بابا» و «میز» کلمه هستند. در عین حال هر کنار هم گذاشتنی از حروف منجر به کلمه نمی‌شود. برای مثال «تپچ» کلمه‌ای در زبان فارسی نیست. نیز هر کنار هم گذاشتنی از کلمات منجر به جمله نمی‌شود، مثلاً «دانشجو من» یک جمله نیست. در واقع، قواعد دستوری به طور کاملاً مشخصی به ما می‌گویند که مثلاً « «من دانشجو هستم» یک جمله (درست به لحاظ دستوری) است ولی «هستم دانشجو من» جمله‌ای درست به لحاظ دستوری نیست.

مقدمه را اینگونه جمع‌بندی می‌کنم که برای مطالعهٔ منطقی هر پدیده‌ای به الفبا، قواعد کلمه‌سازی و جمله‌سازی، و در یک کلام دستور زبان، نیازمندیم. اینها موضوع این فصل کتاب هستند. مانند طبیعت هر «دستورزبان»، دستور زبانی که ما در این فصل معرفی می‌کنیم نیز ممکن است برای برخی‌ها کمی ملال‌آور و حوصله‌سربر باشد؛ ولی گریزی از آن نیست! برای کاستن از این درد، این فصل را کوتاه و مختصر کرده‌ایم.

۱.۱ زبان مرتبهٔ اول

در منطق ریاضی، برای سخن گفتن دربارهٔ هر پدیده‌ای، نخستْ الفبای مخصوص به آن را معرفی می‌کنیم؛ یعنی یک مجموعه از نمادها معرفی می‌کنیم که از کنار هم چیدن آنها برای نوشتن کلمات و جملات دربارهٔ آن پدیده استفاده کنیم. پیچیدگی جملاتی که خواهیم ساخت محدود به امکاناتی است که الفبای انتخاب شده در اختیارمان قرار می‌دهد. مثلا وقتی می‌خواهیم دربارهٔ یک گروه [۱] صحبت بکنیم، الفبا را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که نمادی برای جمع گروه داشته باشد، و وقتی دربارهٔ یک گروه مرتب صحبت می‌کنیم علاوه بر نماد جمع، نیازمند نمادی برای ترتیب گروه نیز هستیم. انتخاب زبان برای گفتگو، کار عجیبی نیست، در علوم مختلف انسانی نیز برای صحبت کردن دربارهٔ هر پدیده‌ای نیاز به آشنائی با **ترمینولوژی** آن موضوع داریم. [۲]

تعریف ۱ (زبان مرتبهٔ اول). منظور از یک زبان مرتبهٔ اول، یک مجموعهٔ L متشکل از سه نوع نماد است: نمادهای تابعی، نمادهای رابطه‌ای، و نمادهای ثابت. همراه با هر نماد تابعیِ $f \in L$ یک عدد طبیعی n_f به عنوان «تعداد مواضع تابع f» در نظر گرفته می‌شود. نیز همراهِ هر نماد رابطه‌ایِ $R \in L$، یک عدد طبیعی n_R به عنوان تعداد مواضع رابطهٔ R در نظر گرفته می‌شود.

تعریف بالا ممکن است کمی ناگهانی به نظر برسد اما به مرور با آن خو خواهیم گرفت. هنگام معرفی یک زبانِ مرتبهٔ اولِ L، هر نماد تابعی یا رابطه‌ای باید به همراه تعداد مواضع آن معرفی شود، هر چند تعداد این مواضع را در مجموعهٔ L نمی‌نویسیم.

[۱] گروه یک شی ریاضی است که از یک مجموعه به همراه یک عمل جمع تشکیل شده است. این عمل جمع، باید ویژگی‌های مطلوبی داشته باشند. در نخستین درس جبر، با گروه‌ها آشنا می‌شوید.

[۲] گاهی نیز پیش می‌آید که ما دربارهٔ موضوعی، شهود و اطلاعات داریم، اما ترمینولوژی لازم برای بحث دربارهٔ آن موضوع، به سبک متخصصان آن، را در اختیار نداریم.

مثال ۲. مجموعهٔ $L = \{f, g, R, c\}$ یک زبانِ مرتبهٔ اول است. در این مثال، f یک نماد تابعی دو موضعی است، یعنی $n_f = 2$. نیز g یک نماد تابعی تک موضعی است، یعنی $n_g = 1$؛ و R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است، یعنی $n_R = 2$.

در مورد یک زبان مرتبهٔ اول، توجه به نکات زیر حائز اهمیت است:

۱. یک «نماد تابعی» با یک «تابع» فرق دارد. تابع یک ماشین است که برخی اشیاء را تبدیل به اشیای دیگری می‌کند، اما یک نماد تابعی صرفاً یک علامت است که می‌توان از آن (در صورت نیاز!) برای اشاره به یک تابع خاص استفاده کرد. مشابه همین گفته دربارهٔ نمادهای رابطه‌ای و نمادهای ثوابت نیز برقرار است.

۲. نیازی نیست که یک زبان، هر سه نوع نماد را داشته باشد؛ برای مثال $L = \emptyset$ که هیچ نمادی ندارد نیز یک زبان مرتبهٔ اول است. همچنین $L = \{h\}$ که در آن h یک نماد تابعی سه موضعی است ($n_h = 3$) نیز یک زبان مرتبهٔ اول است.

۳. لازم نیست فقط از حروف انگلیسیِ $f, g, \ldots$ در زبان استفاده شود؛ برای مثال $L = \{*, \lhd\}$ را به عنوان یک زبان مرتبهٔ اول در نظر بگیرید که در آن $*$ را یک نماد تابعی دو موضعی و $\lhd$ را یک نماد رابطه‌ای دوموضعی گرفته‌ایم.

۴. یک زبان مرتبهٔ اول را خودمان و به منظور مطالعهٔ منطقی یک پدیدهٔ ریاضی معرفی می‌کنیم. بنابراین باید مشخص کنیم که کدام نماد، از چه نوعی است و تعداد مواضع آن چقدر است.

۵. لازم نیست که یک زبان مرتبهٔ اول، یک مجموعهٔ متناهی از نمادها باشد. می‌تواند شمارا و یا از هر اندازه‌ای باشد. مثلاً ممکن است زبانی، $2^{\aleph_0}$ نماد تابعی داشته باشد.

۲.۱ کلمه‌سازی

فرض کنید L یک زبان مرتبهٔ اول، آنگونه که در بخش قبل معرفی کردیم، باشد. در این بخش، قوانین ساده‌ای را معرفی کرده‌ایم که با به‌کارگیری آنها می‌توان با استفاده از الفبای موجود در L، کلمه‌سازی کرد. به هر کلمه‌ای که با استفاده از الفبای زبانِ L خواهیم ساخت یک L**ترم** گفته می‌شود.

قرارداد ۳. یک مجموعهٔ شمارای $var = \{x, y, z, \ldots\}$ را به نام «مجموعهٔ متغیرها» در نظر بگیرید. دقت کنید که هر چند اعضای این مجموعه در ساخت کلمات به یاری ما خواهند آمد، اما اعضای این مجموعه جزو نمادهای زبان (که تابعی، رابطه‌ای و ثابت هستند)به حساب نمی‌آیند. مشابهاً دو نمادِ (,) (بخوانید پرانتزها) و نیز نمادِ , (بخوانید کاما یا ویرگول) در کنار یک زبان مرتبهٔ اول برای کلمه‌سازی به یاری ما می‌آیند.

حال آمادهٔ توضیحِ روش ترم‌سازی هستیم: به طور خلاصه، وقتی L یک زبان مرتبهٔ اول باشد، L ترمها، یعنی ترمها در L، دنباله‌هایی متناهی هستند که با استفاده از ترکیبهای مجاز نمادهای تابعی با ثوابت زبان، متغیرها و پرانتزها ساخته می‌شوند. برای مثال اگر L یک زبان مرتبهٔ اول و $f \in L$ یک نماد تابعی سه موضعی و $c \in L$ یک نماد ثابت باشد، آنگاه $f(x, y, c)$ یک Lترم است. همچنین اگر h یک نماد تابعی تک موضعی دیگر در زبان L باشد، آنگاه $h(f(x, y, c))$ نیز یک Lترم است. تعریف دقیق L ترمها که در زیر آمده است ماهیتی استقرائی دارد و نحوهٔ ساخته شدن آنها از اجزای ساده تر را توضیح می‌دهد.

تعریف ۴ (L ترمها)**.** فرض کنید L یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد. Lترمها به صورت استقرائی زیر به دست می‌آیند:

۱. هر متغیر، یک Lترم است.

۲. هر نمادِ ثابتِ c که در زبانِ L قرار دارد، یک Lترم است.

۳. اگر $t_1, \ldots, t_n$ به تعدادِ n تا Lترم باشند (یعنی چیزهایی باشند که می‌دانیم جزو Lترمها هستند) و $f \in L$ یک نماد تابعیِ n موضعی باشد، آنگاه دنبالهٔ $f(t_1, \ldots, t_n)$ نیز یک Lترم است.

مثال ۵. زبانِ $L = \{f, g, R, c_1, c_2\}$ را در نظر بگیرید که در آن f, g دو نماد تابعی هستند به طوری که $n_f = 2, n_g = 1$. همچنین R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است و c_1, c_2 نمادهایی برای دو ثابت هستند. چند L ترم برای نمونه در زیر نوشته شده است:

$$x, \quad y, \quad f(x, y) \quad g(f(x, y)), \quad g(c_1), \quad g(z), \quad f(c_1, g(c_2)), \quad f(f(c_1, c_2), g(z)).$$

مثال ۶. زبانِ $L_1 = \{+\}$ را در نظر بگیرید که در آن $+$ یک نماد تابعی دو موضعی است. چند L_1 ترم در زیر نوشته شده است:

$$+(x,y), \quad +(+(x,y),z), \quad +(+(x,x),x).$$

در مورد L ترمها نکات زیر حائز اهمیت هستند.

۱. هر Lترم یک دنبالهٔ متناهی از علائم است. وقتی که زبان مورد نظرمان مشخص باشد، به جای Lترم می‌گوییم ترم. همان طور که در مثال ۵ مشاهده می‌کنید، علائم رابطه‌ای زبان در ساخت ترمها استفاده نمی‌شوند؛ برای نمونه در مثالِ ۵، عبارتِ $R(x,y)$ یک ترم محسوب نمی‌شود.

۲. هر Lترم به صورت یکتا خوانش می‌شود. یعنی دو دنبالهٔ متفاوت از علائم، نمی‌توانند نمایش یک ترم یکسان باشند. این گفته، یک قضیهٔ ساده (قضیهٔ خوانش یکتای ترمها) است که نیاز به اثبات دارد ولی از اثبات آن صرف نظر می‌کنیم و آن را بدون اثبات در پایان این بخش آورده‌ایم.

۳. ترمهائی که در مثالِ ۶ آمده‌اند را در ریاضی روزمره به صورت زیر می‌نویسند:

$$x+y, \quad x+y+z, \quad 3x$$

به بیان دیگر، هر ترم در زبانِ L_1 در مثالِ ۶ می‌تواند اشاره به یک ترکیب خطی از متغیرها به صورت زیر کند:

$$n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k.$$

اما از آن جا که خوانش یکتای ترمها برایمان اهمیت دارد، بهتر است ترمها به صورت دقیق مطابق با نحوهٔ ساخت استقرائی آنها بنویسیم برای نمونه از خوانش نایکتا، دقت کنید که $x+2y$ در مثال زبان بالا هم می‌تواند ترم $+(x,+(y,y))$ باشد و هم ترم $+(+(x,y),y)$.

۴. وقتی می‌گوییم $t(x_1,\ldots,x_n)$ یک ترم است؛ یعنی وقتی نام متغیرها را جلوی ترم می‌نویسیم، دو منظور داریم: نخست این که متغیرهائی که در ترم t استفاده شده‌اند از بین متغیرهای $x_1,\ldots,x_n$ انتخاب شده‌اند. دوم این که لزوماً همهٔ n متغیرِ $x_1,\ldots,x_n$ در این ترم به کار نرفته‌اند. برای مثال اگر t ترمِ $+(x,y)$ باشد، می‌توانیم آن را به صورت $t(x,y,z)$ نمایش دهیم.

تمرین ۱. زبانِ $L = \{<\}$ را در نظر بگیرید که در آن $<$ یک نماد رابطه‌ای دوموضعی است. Lترمها به چه صورتی هستند؟

تمرین ۲. تعداد Lترمها در زبان متناهی چقدر است؟ در یک زبان شمارا چه طور؟ یک زبان به اندازهٔ $2^{\aleph_0}$ حداکثر چه تعداد ترم داریم؟

تمرین ۳. فرض کنید $L = \{+\}$ یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد که در آن $+$ یک نماد تابعیِ دو موضعی است. نشان دهید که هر متناظر با هر ترکیبِ خطی از متغیرها، مانندِ $n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k$ که در آن n_i ها اعداد طبیعی هستند، یک Lترم (غیر یکتا) داریم.

***تمرین ۴.** فرض کنید $L = \{+,\times\}$ یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد که در آن، $+,\times$ دو نماد تابعیِ دوموضوعی هستند. نشان دهید که به ازای هر چندجمله‌ای به صورت $n_0 + n_1x + n_2x^2 + \ldots + n_kx^k$ یک Lترم (غیر یکتا) وجود دارد. همچنین نشان دهید که به ازای هر چندجمله‌ای چندمتغیرهٔ $\sum_{i_1+\ldots+i_n\leqslant k} n_{(i_1,\ldots,i_n)}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$ که در آن $n_{\ldots}$ یک عدد طبیعی است، یک Lترم داریم.

تمرین ۵. فرض کنید $L = \{+,\times,\exp\}$ یک زبان مرتبهٔ اول باشد که در آن $+$ یک نماد تابعی دوموضعی، $\times$ یک نماد تابعی دو موضعی و $\exp$ یک نماد تابعی تک موضعی است. ترمهای این زبان به چه صورت هستند؟

***تمرین ۶.** فرض کنید $L = \{f\}$ که در آن f یک نماد تابعی دوموضعی است. نشان دهید که دنبالهٔ $f(x,y,z)$ یک Lترم نیست.

راهنمایی. فرض کنید $Term$ مجموعهٔ همهٔ Lترمها باشد. نشان دهید که $Term - \{f(x,y,z)\} = Term$. واضح است که از این نتیجه خواهد شد که $f(x,y,z)$ جزو Lترمها نیست.

برای این که نشان دهید $Term - \{f(x,y,z)\} = Term$ بدین صورت عمل کنید: نخست نشان دهید که ثوابت و متغیرها در مجموعهٔ $Term - \{f(x,y,z)\}$ هستند. سپس نشان دهید که اگر t_1,t_2 دو ترم در این مجموعه باشند آنگاه $f(t_1,t_2)$ هم در این مجموعه است. از این نتیجه بگیرید که همهٔ Lترمها در مجموعهٔ $Term - \{f(x,y,z)\}$ هستند.

دقت کنید که به همین روش مشابه می‌توان نشان داد که دنباله‌های $f)xy$ و $f \square y$ و بسیاری دنباله‌های دیگر نیز جزو Lترمها نیستند. □

قضیهٔ «خوانش یکتا»ی ترم‌ها را، همان طور که وعده کرده بودیم در زیر آورده‌ایم. [۳]

قضیه ۷ (خوانش یکتای ترمها). در ساختِ استقرایی ترم‌ها، هیچ ترمی دوبار ایجاد نمی‌شود، به بیان دیگر اگر $t_1 = a_1 \dots a_n$ و $t_2 = b_1 \dots b_m$ دو Lترم یکسان باشند، آنگاه $m = n$ و برای هر i داریم $a_i = b_i$.

***تمرین ۷.** قضیهٔ بالا را ثابت کنید.

۳.۱ جمله‌سازی

مرحلهٔ بعدی کارِ دستور زبان، قرار دادن کلمات در کنار هم و ساختن جملات است. به جای واژهٔ جمله، درمنطق مرتبهٔ اول از واژهٔ «فرمول» استفاده می‌کنیم (و البته واژهٔ جمله نیز برای اشاره به نوع خاصی فرمول استفاده می‌شود). برای ساختن فرمولها، نیاز به استفاده از برخی نمادهای دیگر در کنار زبان مرتبهٔ اول داریم.

قرارداد ۸. برای ساختن فرمولهای مرتبهٔ اول در یک زبانِ مرتبهٔ اولِ L، علاوه بر امکانات زبان، به موارد زیر نیاز داریم:

- متغیرهای موجود در مجموعهٔ var،
- علامت نقیض: $\neg$
- علامت عطف $\wedge$،
- سور وجودی $\exists$،
- علامت تساوی $\doteq$. [۴]
- پرانتزهای باز و بسته [۵]

علائم بالا با کمک امکانات زبانی، به ما اجازهٔ ساختن فرمولها را می‌دهند. پیش از ارائهٔ روش دقیق فرمول‌سازی، یک مثال می‌زنیم. در زبانِ L که شامل یک نماد تابعیِ تک‌موضعی f است، عبارت زیر یک Lفرمول است:

$$\forall x \quad \exists y \quad f(x) \doteq y$$

تعریف دقیق نحوهٔ فرمول‌نویسی در یک زبانِ مرتبهٔ اول در زیر آمده است و این تعریف، یک ماهیت استقرائی دارد؛ یعنی نحوهٔ ساخته شدنِ فرمولها از اجزای ساده‌تر را بیان می‌کند. نخست، نحوهٔ ساختِ «فرمولهای اتمی» را توضیح داده‌ایم. به هر فرمولِ اتمی در زبانِ L یک **معادله** در زبانِ L گفته می‌شود.

تعریف ۹ (L فرمولهای اتمی). فرض کنید L یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد. Lی‌فرمولها اتمی (یا معادله‌ها) به صورت استقرائی زیر حاصل می‌شوند:

- اگر t_1 و t_2 دو Lترم باشند، آنگاه دنبالهٔ $t_1 \doteq t_2$ یک Lفرمولِ اتمی است.
- اگر $t_1, \dots, t_n$ به تعداد n تا Lترم باشند و R یک نماد رابطه‌ایِ n موضعی در L باشد، آنگاه دنبالهٔ $R(t_1, \dots, t_n)$ یک Lفرمول اتمی است.

مثال ۱۰. فرض کنید $L = \{+, <, 0\}$ یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد که در آن $+$ یک نماد تابعی دوموضعی، $<$ یک نمادِ رابطه‌ای دوموضعی و 0 یک نماد ثابت است. چند فرمول اتمی (معادله) در این زبان، به صورت زیر هستند:

$$+(x, y) \doteq z, \quad +(+(x, x), x) \doteq 0, \quad < \big(+ (x, y), z \big)$$

[۳] اثبات این قضیه، با استقراء روی ساخت ترمها ساده است، اما آوردن آن در این لحظه خواننده را گرفتار جزئیاتی می‌کند که فعلاً قصد ورود به آنها را نداریم.

[۴] در ادامهٔ درس متوجه خواهیم شد که چرا بهتر است روی این علامت تساوی، نقطه قرار دهیم!

[۵] شاید بهتر بود میان این پرانتزها و پرانتزهایی که از آنها برای ساختن ترمها استفاده کردیم تمایز قائل شویم، اما برای سادگی، از این کار صرف نظر می‌کنیم.

در زبانِ ریاضی روزمره، معادلات بالا را عموماً به صورت زیر می‌نویسند (و البته تا زمانی که ملاحظات خاص منطقی در میان نباشد، این امر ایرادی ندارد!)

$$x + y = z, \quad 3x = 0, \quad x + y < z$$

حال زبانِ $L' = \{\times, <, 1\}$ را در نظر بگیرید که در آن $\times$ یک نماد تابعی دوموضعی است، $<$ همان نماد قبلی و 1 یک نماد ثابت است. واضح است که مشابه بالا، موارد زیر مثالهایی از L'فرمولها هستند:

$$\times(x, y) \doteq z, \quad \times(\times(x, x), x) \doteq 1, \quad < \big(\times (x, y), z\big)$$

اما در زبان روزمره ریاضی فرمولهای بالا را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$x \times y = z, \quad x^3 = 1, \quad x \times y < z.$$

تمرین ۸. در ریاضیات روزمره، صورت کلی معادلات در زبانِ $L = \{+, <, 0\}$ که در مثال بالا معرفی شده است، چگونه است؟

تمرین ۹. در زبانِ $L = \{+, \times, 0\}$ چند معادله بنویسید. صورت کلی معادلات در این زبان چگونه است؟

تمرین ۱۰. تمرین بالا را برای زبانِ $L = \{+, \times, <, 0\}$ پیاده کنید.

تمرین ۱۱. فرض کنید $L = \{h, u, c\}$ یک زبان مرتبهٔ اول باشد که در آن یک h و u به ترتیب یک نماد تابعی و یک نماد رابطه‌ای سه‌موضعی هستند و c یک نماد ثابت است. صورت کلی معادلات در این زبان را بنویسید. در زیر تعریف یک **دستگاه از معادلات** آمده است. به این تعریف، بعداً در فصل ۱۰ رجوع خواهیم کرد.

تعریف ۱۱. فرض کنید $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ به تعداد n معادله در زبانِ L باشند. عبارت زیر را یک دستگاه از معادلات می‌نامیم:

$$\begin{cases} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{cases}$$

برای مثال، در زبانِ L در مثالِ ۱۰ عبارت زیر یک دستگاه از معادلات است:

$$\begin{cases} x + y = z \\ 3x + 5y + 8z < 0 \end{cases}$$

حال نوبت به تعریف Lفرمولها است.

تعریف ۱۲. فرض کنید L یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد. مجموعهٔ Lفرمولها، به شیوهٔ استقرایی زیر حاصل می‌شود.

- هر معادله در زبانِ L، یک یک Lفرمول است.
- اگر φ یک Lفرمول باشد، آنگاه $\neg\varphi$ نیز یک Lفرمول است.
- اگر φ_1 و φ_2 دو Lفرمول باشند (یعنی به نحوی از L فرمول بودن آنها مطمئن باشیم) آنگاه $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ نیز یک Lفرمول است.
- اگر φ یک فرمول باشد، آنگاه $\exists x\varphi$ نیز Lفرمول است.

ملاحظه ۱۳. اگر نقیض یک معادله را یک «نامعادله» بخوانیم، تعریف ۱۱ را می‌توان به «دستگاهی از معادلات و نامعادلات» نیز گسترش داد.

مثال ۱۴. زبانِ $L = \{f, g, R\}$ را در نظر بگیرید که در آن f یک نماد تابعی دو موضعی، g یک نماد تابعی یک‌موضعی و R یک نماد رابطه‌ای سه‌موضعی است. چند نمونه L فرمول در زیر نوشته‌ایم:

$$f(x,y) \doteq g(z),$$
$$R(x, f(x,y), g(z)),$$
$$\neg R(x, f(x,y), g(z)),$$
$$\Big(\neg R(x, f(x,y), g(z)) \wedge f(x,y) \doteq g(z)\Big)$$
$$\exists x\Big(\neg R(x, f(x,y), g(z)) \wedge f(x,y) \doteq g(z)\Big),$$
$$\Big(\exists x\Big(\neg R(x, f(x,y), g(z)) \wedge f(x,y) \doteq g(z)\Big) \wedge \exists y R(x, f(x,y), g(z))\Big),$$
$$\exists y \exists x \neg R(x, f(x,y), g(z)).$$

مثال ۱۵. زبانِ $L = \{+, <, 0\}$ را در نظر بگیرید که در آن $+$ یک نماد تابعی دو موضعی، $<$ یک نماد رابطه‌ای تک موضعی و 0 یک ثابت است. چند نمونه Lفرمول در زیر نوشته شده است:

$$< (0, x)$$
$$< (+(z,z), +(x,y))$$
$$\exists x \exists y\Big(< (x,y) \wedge < \Big(+ (+(x,x), y), +(1,1)\Big)\Big)$$

دقت کنید که در ریاضی روزمره، عموماً فرمولهای بالا را به ترتیب، به صورت زیر می‌نویسیم [۶]

$$x > 0$$
$$2z < x + y$$
$$\exists x, y (x < y \wedge 2x + y < 2).$$

نوشتن فرمولها یاد شده به این شکل، هیچ ایرادی ندارد. ولی رعایت شکل دقیق فرمولها، برای رعایت خوانش یکتای آنها، و آن هم برای استفاده از استقراء روی ساخت فرمولها اهمیت دارد. در ادامهٔ درس این معنای دقیق این گفته‌ها مشخص خواهد شد.

در مثال بالا به «خوانش یکتا»ی فرمولها اشاره کردیم. در زیر این گفته را به صورت دقیق (ولی باز هم بدون اثبات) آورده‌ایم.

قضیه ۱۶. در روش ساختِ استقراییِ Lفرمولها، هر Lفرمول فقط یک بار ظاهر می‌شود. به بیان دیگر فرض کنید دو دنبالهٔ متناهی از علائم مثلاً $(b_i)_{i<n}$ و $(c_i)_{i<m}$، داشته باشیم که هر دو، با روش استقرائی ساخت فرمولها ایجاد شده‌اند. اگر این دو دنباله، فرمولِ یکسانِ φ باشند آنگاه $m = n$ و هر b_i با c_i یکی است.

این بخش را با ذکر دو نکتهٔ حائز اهمیت دربارهٔ فرمولها به پایان می‌بریم.

۱. چند نماد دیگر می‌توان برای «کوتاه‌نویسی» فرمولها به صورت زیر در نظر گرفت:

$$(\varphi_1 \vee \varphi_2) : \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2).$$
$$(\varphi_1 \to \varphi_2) : (\neg\varphi_1) \vee \varphi_2)$$
$$(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) : ((\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_1))$$
$$\forall x \varphi : \neg\exists x \neg\varphi.$$

[۶] و زمانی که برخی ملاحظات منطقی خاص موضوع بحثمان نباشد، این کار ایرادی ندارد.

۲. در ریاضیات روزمره، برای جلوگیری از ازدحام پرانتزها (مانند آنچه در بالا حتما بدان دقت کرده‌اید!) برای نمادها اولویت‌بندی قائل می‌شویم؛ بدین صورت که نخست تساوی و سپس سورها بر همه نمادها اولویت دارند؛ پس از آنها علامت $\neg$ است، و سپس علامتهای $\leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge$. در بین نمادهای هم‌مرتبه، هر کدام زودتر ظاهر شود اولویت دارد. برای مثال عبارت

$$\exists x f(x) \doteq y \wedge g(x,y) < z$$

در حقیقت فرمول زیر است:

$$\Big(\exists x(f(x) \doteq y) \wedge < (g(x,y), z)\Big) \quad (*)$$

و نه فرمولِ زیر:

$$\exists x\Big((f(x) \doteq y) \wedge < (g(x,y), z)\Big).$$

حتی گاهی برای راحت‌تر شدن فرمول، می‌شود از پرانتزهای بیشتری استفاده کرد؛ مثلاً فرمولِ $(*)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Big(\Big(\exists x(f(x) \doteq y)\Big) \wedge < (g(x,y), z)\Big)$$

تمرین ۱۲. در زبانِ $L = \{+, \times, <\}$ فرمولها به چه صورت هستند؟

تمرین ۱۳. فرمولهای زیر را پرانتزگذاری کنید:

$$\forall x \exists y R(x,y) \rightarrow \exists t s(t) \wedge R(t)$$

$$\exists y R(y) \rightarrow s(y) \rightarrow u(y)$$

$$\forall x R(x) \rightarrow \forall y R(y) \wedge \forall z R(z)$$

$$\forall x R(x) \wedge \exists y R(x,y) \rightarrow \exists z S(x,z)$$

تمرین ۱۴. پرانتزهای اضافه را حذف کنید:

$$\exists y\big(R(y) \rightarrow S(y)\big)$$

$$\exists x\big((r(x) \wedge s(x)) \rightarrow a(x)\big)$$

$$\exists x(\exists y\big(R(x,y) \wedge \exists y s(x,y)\big))$$

تمرین ۱۵. فرض کنید $L = \{R, h, c\}$ یک زبان مرتبهٔ اول باشد که در آن h یک نماد تابعی دوموضعی و R یک نماد رابطه‌ای سه‌موضعی است. فرمولهای این زبان به چه صورت هستند؟

***تمرین ۱۶.** فرض کنید L یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد. نشان دهید که هر Lفرمول، یک دنبالهٔ متناهی است.

تمرین ۱۷. تعداد فرمولهایی که در یک زبانِ متناهی می‌توان نوشت، چقدر است؟ در یک زبان شمارا چه طور؟ در یک زبان با اندازهٔ $2^{\aleph_0}$ چه طور؟

***تمرین ۱۸.** قضیهٔ ۱۶ را اثبات کنید.

در منطق مرتبهٔ اول، برای سخن گفتن دربارهٔ هر موضوعی نخست یک مجموعهٔ الفبا برای آن انتخاب می‌کنیم. از کنار هم گذاشتن قاعده‌مندِ حروف آن الفبا، کلمه‌ها ایجاد می‌شوند. با در نظر گرفتن یک سری نماد کمکی، مانند علامتهایی برای فصل و عطف و سورها در کنار الفبا، جملات ساخته می‌شوند. اما آنچه با این روش ایجاد می‌شود، تنها دنباله‌های ساخته شده از علائم است و معنایی برای آنها متصوَر نیست.

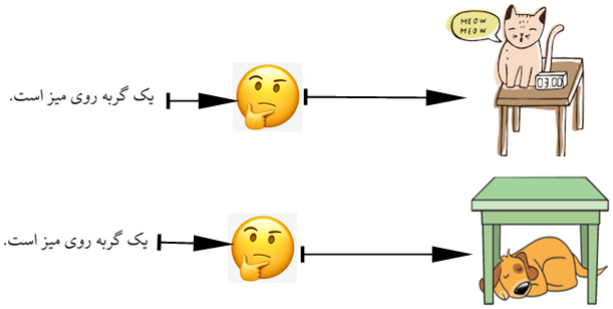
فصل ۲

معانی

در فصل گذشته آموختیم که با استفاده از الفبای یک زبان و قواعد دستوری آن می‌توان جملات و کلمات نوشت. دقت کنید که یک «کلمه» به خودیِ خود فقط دنباله‌ای از علائم است، اما کلمه دارای این اهمیت است که یک «معنی» در ذهن شنونده متبادر می‌کند. مثلاً با شنیدن کلمهٔ میز، هر کسی یاد شیء میز می‌افتد؛ هر چند افراد مختلف ممکن است میزهای متفاوتی را تصور کنند. برای جملات هم، وضع، همین گونه است: شنونده تک تک کلمات موجود در یک جمله را در ذهن خود معنی می‌کند و به معنای جمله می‌رسد. برای مثال، جملهٔ زیر را در نظر بگیرید:

یک گربه روی میز است.

جملهٔ بالا صرفاً دنباله‌ای از حروف و علائم در زبان فارسی است. برای معنا کردن آن، لازم است که تابعی در ذهن ما وجود داشته باشد که واژه‌های یک، گربه، میز، و روی چیزی بودن را به معانی آنها تصویر کند. تصور دو فرد زیر، از کلمهٔ گربه و رابطهٔ روی چیزی بودن متفاوت است؛ با این حال هر کدام از آنها به تصوری از معنای جملهٔ بالا رسیده‌اند:



پس یک جملهٔ واحد در اذهان مختلف تصورات متفاوتی را سبب می‌شود. مشابه همین وضع را دربارهٔ فرمولهای یک زبانِ مرتبهٔ اول داریم. اگر φ یک فرمول مرتبهٔ اول در زبانِ L باشد، در جهانهای مختلف معنا پیدا می‌کند. در ادامهٔ این فصل، دربارهٔ روش «تعریف» این معنا سخن گفته‌ایم.

۱.۲ ساختارها و تعبیر علائم زبان

فرض کنید L یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد که (علاوه بر سایر نمادها) شاملِ یک نماد تابعیِ f است. در بخش قبل گفتیم که نماد تابعی، با تابع فرق دارد؛ اما احتمالاً خواننده از آنچه در ابتدای این فصل گفته شد به فراست دریافته است که یک نماد تابعی باید برای سخن گفتن دربارهٔ یک تابعِ واقعی استفاده شود. دنیاهای واقعی، در اینجا Lساختارها هستند. همهٔ نمادهای یک زبانِ L در یک Lساختار «تعبیر» می‌شوند. مثلاً اگر زبانِ L شامل یک نماد تابعی f باشد، روی یک L تابعی وجود دارد که آن «تعبیر نمادِ تابعیِ f» می‌نامیم.

تعریف ۱۷. فرض کنید L یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد. یک Lساختارِ $\mathcal{M}$ از اجزای زیر تشکیل شده است:

۱. یک مجموعهٔ زمینهٔ M به نام جهانِ این Lساختار.

۲. برای هر نماد تابعیِ $f \in L$ یک تابعِ $f^{\mathcal{M}} : M^{n_f} \to M$،

۳. برای هر نمادِ رابطه‌ایِ $R \in L$ یک رابطهٔ $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_R}$،

۴. و برای هر نماد ثابتِ $c \in L$ یک عنصر مشخصِ $c^{\mathcal{M}} \in M$.

عبارتِ $f^{\mathcal{M}}$ را تعبیرِ نمادِ تابعیِ f در Lساختارِ $\mathcal{M}$ می‌نامیم. همان طور که مشاهده کرده‌اید، $f^{\mathcal{M}}$ واقعاً یک تابع است که نماد f قرار است در ساختار $\mathcal{M}$ به این تابع اشاره کند. دقت کنید که دامنهٔ این تابع، مجموعهٔ زمینهٔ ساختارِ $\mathcal{M}$، یعنی مجموعهٔ M است که البته به توان تعداد مواضع در نظر گرفته شده برای f رسیده است. مشابهاً $R^{\mathcal{M}}$ یک رابطه است (یعنی یک مجموعه متشکل از n_Rتائی ها) که نماد رابطه‌ای R قرار است ما را به یاد آن بیندازد؛ و $c^{\mathcal{M}}$ یک عنصر مشخص است که ثابتِ c ما را به یاد آن می‌اندازد. پس تعریف بالا را می‌توان به صورت خلاصه‌ترِ زیر نوشت:

اگر L یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد، یک Lساختار به صورت زیر است:

$$\mathcal{M} = (M, z^{\mathcal{M}}_{z \in L})$$

که بسته به این که $z \in L$ چه نوع نمادی باشد، $z^{\mathcal{M}}$ (که خوانده می‌شود: تعبیر نمادِ z در $\mathcal{M}$) به یکی از صورتهای بیان شده در تعریف بالاست.

مثال ۱۸. فرض کنید $L = \{*, g, c, d, R\}$ یک زبان مرتبهٔ اول باشد که در آن $*$ یک نماد تابعی دوموضعی، g یک نماد تابعی تک موضعی، c, d دو نماد ثابت و R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است. پس هر Lساختارِ $\mathcal{M}$ به صورت $\mathcal{M} = (M, *^{\mathcal{M}}, g^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}}, d^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}})$ است که در آن $*^{\mathcal{M}} : M^2 \to M$ و $g^{\mathcal{M}} : M \to M$ به ترتیب دو تابع دوموضعی و تک موضعی هستند، $c^{\mathcal{M}}, d^{\mathcal{M}}$ دو عنصر مشخص در جهانِ زمینهٔ M هستند، و $R^{\mathcal{M}}$ یک زیرمجموعهٔ مشخص از M^2 است. در زیر چندین نمونه Lساختار، برای این زبانِ L معرفی شده است.

۱. $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{R}, +, \exp, 0, 1, <)$. دقت کنید که جهانِ این Lساختار، مجموعهٔ اعداد حقیقی است. تعبیر نماد تابعیِ دو موضعی $*$ در این ساختار، همان تابعِ جمع است. یعنی:

$$*^{\mathcal{M}_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$*^{\mathcal{M}_1}(x, y) = x + y.$$

به طور خلاصه‌تر: $*^{\mathcal{M}_1} = +$. همچنین تعبیر نمادِ تابعیِ تک موضعیِ g در ساختار ما، تابع نمائی است:

$$g^{\mathcal{M}_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \exp(x).$$

به همین ترتیب داریم: $c_1^{\mathcal{M}_1} = 0$ و $c_2^{\mathcal{M}_1} = 1$. همچنین نماد رابطه‌ای دو موضعیِ R تعبیر به ترتیب اعداد حقیقی شده است:

$$R^{\mathcal{M}_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$$

به بیان دیگر $(x, y) \in R^{\mathcal{M}_1} \Leftrightarrow x < y$؛ و باز به بیانی دیگر $R^{\mathcal{M}} =<$.

۲. $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{N}, \cdot, s, |, 2, 3)$. دقت کنید که جهانِ این Lساختار، مجموعهٔ اعداد طبیعی است. نمادِ $*$ در زبان، به ضرب اعداد طبیعی تعبیر شده است:

$$*^{\mathcal{M}_2} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$
$$*^{\mathcal{M}_2}(x, y) = x \cdot y.$$

یا به بیان کوتاه‌تر:

$$*^{\mathcal{M}_2} = \cdot.$$

همچنین نماد تابعی تک موضعیِ s تعبیر به تابع تالی شده است:

$$g^{\mathcal{M}_2}(x) = x + 1$$

و ثوابت به ترتیب به صورت زیر تعبیر شده‌اند:

$$c_1^{\mathcal{M}_2} = 2,$$

$$c_2^{\mathcal{M}_2} = 3.$$

و سرانجام تعبیر نماد رابطه‌ای R، رابطهٔ عاد کردن اعداد طبیعی است:

$$(x, y) \in R^{\mathcal{M}_2} \Leftrightarrow x|y.$$

به همین راحتی می‌توان Lساختارهای متعدد دیگری نیز معرفی کرد: هر کدام از آنها باید یک جهان زمینه داشته باشند که روی آن توابع و ثوابت مطلوبی به عنوان تعابیر علائم زبانی وجود دارد. تنها باید مواظب بود که مثلاً یک نماد تابعی دو موضعی، به یک تابعِ دوموضعی (و نه تابعی با مواضع بیشتر) تعبیر شود.
ایدهٔ این که یک نماد، در ساختارهای مختلف تعابیر متفاوت داشته باشد را دانشجویان ریاضی در همان ترمهای اولیه می‌بینند. مثلاً در نظریهٔ گروه‌ها، ممکن است عمل ضرب در گروه‌های مختلف متفاوت باشد ولی نماد استفاده شده برای ضرب در همهٔ آنها یکسان باشد. این را در مثال زیر دقیق‌تر بیان کرده‌ایم.

مثال ۱۹. زبانِ $L = \{\otimes, e\}$ را در نظر بگیرید که در آن $\otimes$ یک نماد تابعی دو موضعی و e یک نماد ثابت است. گروه جمعیِ $(\mathbb{Z}, +, 0)$ یک Lساختار است که در آن $\otimes$ و e به ترتیب به جمع اعداد و عدد صفر تعبیر شده‌اند. در عین حال گروه $(\mathbb{Z}_3, \bar{+}, \bar{0})$ نیز یک Lساختار است که در آن $\otimes$ و e به ترتیب، به جمع در پیمانهٔ ۳ و ۰ (به پیمانهٔ ۳) تعبیر شده‌اند. علاوه این، گروه متشکل از ماتریسهای دو در دو، با جمع ماتریسی و تعبیر ثابتِ e به عنوان ماتریس با درایه‌های صفر، نیز یک Lساختار است.

مثال ۲۰. فرض کنید $\mathcal{L} = \{R\}$ یک زبانِ دارای تنها یک نماد رابطه‌ای دو موضعی باشد. فرض کنید G یک گراف باشد. می‌خواهیم این گراف را به عنوان یک $\mathcal{L}$ ساختارِ $\mathcal{G} = (G, R^{\mathcal{G}})$ در نظر بگیریم. برای این کار کافی است که تعبیری برای نماد رابطه‌ای R در G معرفی کنیم. تعریف کنید:

$$(x, y) \in R^{\mathcal{G}} \Leftrightarrow \text{ بین رئوسِ } x, y \text{ در گرافِ } G \text{ یک یال وجود داشته باشد.}$$

به عنوان یک مثال دیگر از $\mathcal{L}$ ساختار مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ (یعنی مجموعهٔ اعداد گویا) را در نظر بگیرید. برای تبدیل این مجموعه به یک $\mathcal{L}$ ساختارِ $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, R^{\mathcal{Q}})$ باز هم باید رابطهٔ R را روی آن تعبیر کنید. تعریف کنید

$$(x, y) \in R^{\mathcal{Q}} \Leftrightarrow x < y$$

به بیان دیگر تعریف کرده‌ایم

$$R^{\mathcal{Q}} =<$$

یک مجموعه از انسانها به همراه رابطهٔ برادری، نیز یک مثال از یک $\mathcal{L}$ ساختار است.

قرارداد ۲۱. معمولاً وقتی $\mathcal{M}$ را به عنوان یک $\mathcal{L}$ساختار می‌گیریم، به طورضمنی فرض کنیم که جهانِ این ساختار مجموعهٔ M است.

تمرین ۱۹. فرض کنید $L = \{h, R\}$ یک زبان مرتبهٔ اول باشد که در آن h یک نماد تابعی سه‌موضعی و R یک نماد رابطه‌ای سه‌موضعی است. دو Lساختار مثال بزنید.

تمرین ۲۰. فرض کنید $L = \{p\}$ یک زبان باشد که در آن p یک نماد تابعی یک‌موضعی است. نشان دهید که زوجِ $(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ می‌تواند به عنوان یک Lساختار در نظر گرفته شود.

تمرین ۲۱. فرض کنید $L = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک زبانِ شمارا باشد که در آن هر p_n یک نمادِ رابطه‌ای یک‌موضعی است. مجموعهٔ $\mathbb{N}$ را تبدیل به یک Lساختار به نام $\mathcal{N}$ کنید، به طوری که برای هر دو عددِ طبیعی متفاوتِ m, n داشته باشیم: $p_n^{\mathcal{N}} \neq p_m^{\mathcal{N}}$.

راهنمایی. برای مثال می‌توانید p_n را بخش‌پذیری بر n تعبیر کنید. □

***تمرین ۲۲.** فرض کنید $L = \{f_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ یک زبان ناشمارا باشد که در آن برای هر عدد حقیقیِ r یک نماد تابعیِ یک‌موضعیِ f_r در آن قرار داده شده است. مجموعهٔ $\mathbb{R}$ را تبدیل به یک L ساختار کنید.

راهنمایی. برای مثال، تابعِ f_r را می‌توانید تابعی در نظر بگیرید که هر عدد را در r ضرب می‌کند. □

***تمرین ۲۳.** فرض کنید $L = \{f\}$ یک زبان باشد که در آن f یک نماد تابعی تک‌موضعی است. تابعِ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $x \to \pi x$ در نظر بگیرید. آیا مجموعهٔ اعداد طبیعی، با این تابع، یک Lساختار تشکیل می‌دهد؟

تمرین ۲۴. آیا $(\mathbb{N}, -)$ که در آن $-$ علامت تفریق است، می‌تواند یک Lساختار باشد؟

۲.۲ معنای فرمولها

پیش از ورود به بحث معنای فرمولها، بهتر است یک مصداق از معنا کردن فرمول در ساختارها را با هم مشاهده کنیم. فرض کنید f یک نماد تابعیِ تک موضعی و c, d دو نماد ثابت در یک زبانِ L باشند. فرمولِ $f(c) \doteq d$ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ دو Lساختارِ باشند. در هر کدام از اینها، تابعِ f و ثوابتِ c, d تعبیرِ مخصوص به خود را دارند. معنی جملهٔ $f(c_1) \doteq c_2$ در ساختارِ $\mathcal{M}_1$ به صورت زیر است:

$$f^{\mathcal{M}_1}(c^{\mathcal{M}_1}) = d^{\mathcal{M}_1}.$$

مشابهاً همین جمله در ساختارِ $\mathcal{M}_2$ به معنی زیر است:

$$f^{\mathcal{M}_2}(c^{\mathcal{M}_2}) = d^{\mathcal{M}_2}.$$

به طور کلی اگر $\mathcal{M}$ یک Lساختار (برای همین زبانِ L) باشد، آنگاه می‌گوییم فرمولِ $f(c) \doteq d$ در این ساختار درست است، و می‌نویسیم

$$\mathcal{M} \models f(c) \doteq d$$

هرگاه

$$f^{\mathcal{M}}(c^{\mathcal{M}}) = d^{\mathcal{M}}.$$

حال فرمولِ $f(x) \doteq y$ را در نظر بگیرید. آیا این فرمول در ساختارِ $\mathcal{M}_1$ یا $\mathcal{M}_2$ برقرار است؟ برای پاسخ بدین سوال، و به طور کلی‌تر، برای تعریف صدق فرمولها در ساختارها، نیاز به توضیح مختصری دربارهٔ متغیرهای آزاد و پای‌بند و نگاشتهای مقداردهی و محاسبهٔ ترمها داریم.

۱.۲.۲ متغیرهای آزاد و پای‌بند

در یک فرمولِ مرتبهٔ اول، به متغیری که هیچ سوری روی آن اثر نداشته باشد، متغیر آزاد گفته می‌شود. برای مثال در فرمول زیر:

$$\big(\exists x p(x) \wedge q(x)\big)$$

حضورِ اولِ (از سمتِ چپ) متغیرِ x پای‌بند است، زیرا سور وجودی روی آن اثر می‌کند ولی حضور دوم همین متغیر آزاد است. اما در فرمول زیر

$$\exists x\big(p(x) \wedge q(x)\big)$$

هر دو حضور متغیر x پای‌بند است. به عنوان مثالی دیگر، در فرمولِ

$$\forall y \exists x\Big(f(x) \doteq y \wedge R(x, y, z, t)\Big)$$

دو متغیرِ x, y پای‌بند و دو متغیرِ z, t آزاد هستند. تعریف دقیقِ یک متغیرِ آزاد، بنا به ماهیت استقرائی تعریف فرمولها، به صورت زیر است.

تعریف ۲۲. می‌گوییم متغیرِ x در فرمولِ φ آزاد است، هرگاه یکی از حالات زیر رخ دهد:

۱. فرمولِ φ به صورت $t_1 \doteq t_2$ باشد و متغیر x در یکی از ترمهای t_1 یا t_2 به کار رفته باشد.

۲. فرمولِ φ به صورت $R(t_1, \ldots, t_n)$ باشد و متغیر x در یکی از ترمهای t_1 تا t_n به کار رفته باشد.

۳. فرمولِ φ به صورتِ $\neg\psi$ باشد و x یک متغیر آزاد برای فرمولِ ψ باشد.

۴. فرمولِ φ به صورت $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ باشد و x یکی از متغیرهای آزادِ فرمولِ ψ_1 یا یکی از متغیرهای آزادِ فرمولِ ψ_2 باشد.

۵. فرمولِ φ به صورت $\exists y\psi$ باشد که در آن y متغیری غیر از x، و x یک متغیر آزاد برای فرمولِ ψ است.

قرارداد ۲۳. عموماً فرمولهای مرتبهٔ اول را با حروفِ $\varphi, \psi, \ldots$ نشان می‌دهیم. اما وقتی می‌گوییم $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ یک فرمولِ مرتبهٔ اول است، یعنی وقتی نام یک سری متغیر را جلوی فرمول می‌نویسیم، منظورمان اشاره به سه نکتهٔ زیر است.

- متغیرهای آزادِ فرمولِ φ متعلق به مجموعه $\{x_1, \ldots, x_n\}$ هستند.
- لزوماً همهٔ متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ در فرمولِ φ استفاده نشده‌اند.
- هیچ‌کدام از این متغیرها، پای‌بند نیستند؛ یعنی در نمایش یک فرمول، نامی از متغیرهای پای‌بند آن به میان نمی‌آوریم.

۲.۲.۲ مقداردهی به متغیرها در ساختارها و محاسبهٔ ترمها

با دانش ریاضی روزمره، می‌شود چنین اندیشید که وقتی t یک ترم در زبانِ L است، که در آن از متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ استفاده شده است، تعبیر آن در یک ساختارِ $\mathcal{M}$ یک تابع $t^{\mathcal{M}} : M^n \to M$ را مشخص می‌کند. مثال زیر این گفته را توضیح می‌دهد:

مثال ۲۴. زبانِ $L = \{f, g, e\}$ را در نظر بگیرید که در آن f یک نماد تابعی دوموضعی، g یک نماد تابعی تک موضعی، و e یک نماد ثابت است. فرض کنید $t_1 = g(f(x, y))$ و $t_2 = f(g(x), g(e))$ دو Lترم باشند. ساختارهای زیر را در نظر بگیرید:

۱. $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{R}, +, e^x, 1)$ و $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{N}, \cdot, s(x) = x + 1, 0)$.

تعابیر ترمهای t_1, t_2 در این دو ساختار به صورت زیر هستند:

$$t_1^{\mathcal{M}_1}(x, y) = e^{x+y}, \quad t_2^{\mathcal{M}_2}(x, y) = e^x + e^1$$

$$t_1^{\mathcal{M}_2}(x, y) = x \cdot y + 1, \quad t_2^{\mathcal{M}_2}(x, y) = (x + 1)(0 + 1).$$

در قراردادِ ۳ گفتیم که var یک مجموعهٔ شمارا از متغیرهاست که در کلمه و فرمول نویسی از آن استفاده می‌شود. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ساختارِ مرتبهٔ اول باشد.

تعریف ۲۵. به هر تابعِ

$$\beta : var \to M$$

یک نگاشت «مقداردهی متغیرها در ساختارِ $\mathcal{M}$» گفته می‌شود.

واضح است که این تابع، مشخص می‌کند که برای هرمتغیری، مثلاً x، چه مقداری در جهانِ M در نظر بگیریم. مقداردهی به متغیرها در یک Lساختار منجر به مشخص شدنِ مقدار ترمها می‌شود: فرض کنید $\beta : var \to M$ یک نگاشت مقداردهی به متغیرها باشد، که به طور خاص، به متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ به ترتیب مقادیرِ $a_1, \ldots, a_n$ می‌دهد. همچنین فرض کنید t یک Lترم باشد که در آن از متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ استفاده شده است. همان طور که قبلاً دیده‌ایم، در این صورت: $t^{\mathcal{M}} : M^n \to M$ یک تابع است. منظورمان از $t^{\mathcal{M}}[\beta]$، بخوانید مقدارِ ترمِ t در ساختارِ $\mathcal{M}$ با استفاده از نگاشت مقداردهیِ β، در حقیقت همان $t^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$ است.

تعریفی که در بالا برای $t^{\mathcal{M}}[\beta]$ هر چند شهودِ خوبی به دست می‌دهد، چندان دقیق نیست. در صورتگرایی دقیق منطقی، باید روشی برای تعیین مقدار یک ترم، بر حسب مقدارِ «همهٔ متغیرها» داشته باشیم. در زیر، عبارتِ $t^{\mathcal{M}}[\beta]$ را به صورت دقیق و استقرائی تعریف کرده‌ایم.

تعریف ۲۶. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک Lساختار و $\beta : var \to M$ یک نگاشت مقداردهی به متغیرها باشند. عبارتِ $t^{\mathcal{M}}[\beta]$ به صورت استقرایی روی ترمها به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱. اگر $t = x$ یک متغیر باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم: $t^{\mathcal{M}}[\beta] = \beta(x)$

۲. اگر $t = c$ یک ثابت در زبان باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم $t^{\mathcal{M}}[\beta] = \beta(x) = c^{\mathcal{M}}$

۳. هرگاه تعابیرِ $t_1^{\mathcal{M}}[\beta], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\beta]$ دانسته باشند و $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ که در آن f یک نماد تابعیِ n موضعی است، آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$t^{\mathcal{M}}[\beta] = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\beta], \ldots, t_n^{\mathcal{M}}[\beta])$$

قرارداد ۲۷. نوشتن متغیرهای به کار رفته در ترم در مقابل آن، گاهی کارها را ساده‌تر و بیشتر شبیه به ریاضیات روزمره می‌کند: وقتی می‌گوییم $t(x_1, \ldots, x_n)$ یک Lترم است، منظور این است که t یک Lترم است و متغیرهایی که در آن استفاده شده است، از میان متغیرهای موجود در مجموعهٔ $\{x_1, \ldots, x_n\}$ است؛ هرچند شاید همهٔ این متغیرها استفاده نشده باشند. حال اگر $\beta : var \to M$ یک نگاشت مقداردهی باشد به طوری که $\beta(x_1) = a_1, \ldots, \beta(x_n) = a_n$، در این صورت به جای $t^{\mathcal{M}}[\beta]$ می‌توانیم بنویسیم $t^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$. دقت کنید که هر چند نمادِ $t^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$ بسیار ساده و طبیعی به نظر می‌رسد، اما در استفاده‌های فنی منطقی، تعریفِ دقیقِ $t^{\mathcal{M}}[\beta]$ به کار می‌آید، زیرا در آن مقدار ترم t بر اساس مقداردهی به همهٔ متغیرها لحاظ شده است.

۳.۲.۲ صدق فرمولها در ساختارها

آیا فرمولِ $\varphi(x)$ که می‌گوید: «x یک عدد اول است» در اعداد طبیعی درست است؟! واضح است که ارزش این فرمول به مقدار x بستگی دارد؛ مثلاً $\varphi(3)$ درست است، اما $\varphi(4)$ درست نیست. برای تشخیص درستی یک فرمول در یک ساختار، نیاز است که متغیرهای آزاد آن فرمول، مقداردهی شوند.

صدق یک فرمول در یک Lساختار و با یک نگاشت مقداردهی، مطابق با ماهیت استقرائی فرمولها تعریف می‌شود. اما تعریف مورد نظر، علی‌رغم ظاهر پیچیده‌اش، محتوای ساده‌ای دارد. می‌دانیم که یک فرمول، دنباله‌ای از نمادها است. زمانی فرمولِ φ با مقداردهیِ β در ساختارِ $\mathcal{M}$ برقرار است، که وقتی به جای نمادهای به کار رفته در فرمول، تعابیرشان را، و به متغیرهای آزاد فرمول، مقادیر تعیین شده توسط β را قرار می‌دهیم، آنچه که توسط فرمول توصیف شده است، در ساختارِ $\mathcal{M}$ رخ دهد. برای این که به خواننده ثابت شود، آنچه را که می‌خواهیم تعریف کنیم از پیش می‌داند، پیش از ارائهٔ تعریف دقیق، مثالهایی از صدق فرمولها در ساختارها آورده‌ایم.

مثال ۲۸. ساختارِ $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, e^x)$ را برای زبانِ $L = \{f\}$ که فقط یک نماد تابعیِ تک‌متغیرهٔ f دارد در نظر بگیرید. فرض کنید $\beta : var \to M$ یک تابع مقدار دهی باشد که به متغیرهای x و y به ترتیب مقادیر ۱ و e بدهد (البته این تابع به همهٔ سایر متغیرها هم مقدار می‌دهد ولی مقادیر آنها فعلاً برای ما مهم نیست). می‌دانیم که $e^1 = e$. پس می‌گوییم فرمولِ $f(x) \doteq y$ وقتی x, y با استفاده از نگاشتِ β در $\mathbb{R}$ مقداردهی شوند، در ساختارِ $\mathcal{M}$ درست است؛ و این واقعیت را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\mathcal{M} \models f(x) \doteq y[\beta].$$

مثال ۲۹. فرض کنید $\mathcal{L} = \{R, f, g, c\}$ که در آن R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی، f یک نماد تابعی دو موضعی، g یک نماد تابعی تک موضعی و c یک ثابت است. فرمولهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi_1 = f(c, g(c)) \doteq c.$$

$$\varphi_2 = R(g(c), g(g(c))$$

$$\varphi_3 = \exists x g(f(x, x)) \doteq c$$

$$\varphi_4 = \exists y f(g(x), y)) \doteq c$$

حال $\mathcal{L}$ساختارهای $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{R}, <, +, e^x, 1)$ و $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{Z}, |, \cdot, s, 0)$ را در نظر بگیرید. زمانی فرمولِ φ_1 در ساختارِ $\mathcal{M}_1$ برقرار است که

$$f^{\mathcal{M}_1}(c_1^{\mathcal{M}}, g_1^{\mathcal{M}}(c^{\mathcal{M}_1})) = c^{\mathcal{M}_1}$$

و این یعنی: $1 + e^1 = 1$. اما دانش ما دربارهٔ اعداد حقیقی، به ما می‌گوید که این اتفاق نمی‌افتد. پس می‌نویسیم: $\mathcal{M}_1 \not\models \varphi_1$ یا $\mathcal{M}_1 \models \neg\varphi_1$ (بخوانید: ساختارِ $\mathcal{M}_1$ مدلی برای فرمولِ φ_1 نیست). برقراری همین فرمولِ φ_1 در ساختارِ $\mathcal{M}_2$ به معنی زیر است:

$$f^{\mathcal{M}_2}(c_2^{\mathcal{M}}, g_2^{\mathcal{M}}(c^{\mathcal{M}_2})) = c^{\mathcal{M}_2}$$

که یعنی $\cdot(0+1) = 0$. دوباره دانش ما دربارهٔ اعداد صحیح به ما می‌گوید که عبارت بالا در آنجا برقرار است؛ پس می‌نویسیم: $\mathcal{M}_2 \models \varphi_1$ (بخوانید: ساختارِ $\mathcal{M}_2$ مدلی برای فرمولِ φ_1 است). می‌توانیم اتفاقهای بالا را به صورت زیر هم بنویسیم:

$$(\mathbb{R}, <, +, e^x, 1) \models f(c, g(c)) = c$$

و

$$(\mathbb{Z}, |, \cdot, s, 0) \not\models f(c, g(c)) = c$$

حال صدق فرمولِ φ_2 را، البته به بیان خلاصه‌تر بررسی می‌کنیم. در ساختارِ $\mathcal{M}_1$ برقرار بودنِ φ_2 به این معنی است که $e < e^e$؛ $\mathcal{M}_1 \models \varphi_2$. در ساختارِ $\mathcal{M}_2$ برقراریِ فرمول φ_2 به این معنی است که $1|2$؛ پس $\mathcal{M}_2 \models \varphi_2$. فرمولِ φ_3 در ساختارِ $\mathcal{M}_1$ به این معنی است: $\exists x e^{2x} = 1$؛ بنا به پوشا بودن تابع نمائی در اعداد حقیقی، چنین x پیدا می‌شود، پس $\mathcal{M}_1 \models \varphi_3$. همین فرمول در ساختارِ $\mathcal{M}_2$ به معنی زیر است: $\exists x x^2 + 1 = 0$. می‌دانیم که چنین x در $\mathbb{Z}$ وجود ندارد؛ پس $\mathcal{M}_2 \models \neg\varphi_3$.

بررسی فرمولِ φ_4 نیاز به دقت بیشتری دارد. این فرمول، دارای متغیر آزادِ x است و در $\mathcal{M}_1$ چنین معنی می‌شود:

$$\exists y \quad e^y + x = 1$$

نیز در ساختارِ $\mathcal{M}_2$ فرمولِ یادشده، به معنی زیر است:

$$\exists y \quad (y+1).x = 0$$

تشخیص درستی فرمول φ_4 در این دو ساختار، منوط به دانستن مقدار x است. در واقع نیاز به یک نگاشت مقداردهی در هر یک این ساختارها هست که به ما بگوید به جای x چه مقداری باید قرار داد.

نگاشتهای مقداردهی زیر را در نظر بگیرید:

$$\beta_1 : var \to \mathbb{R}$$

$$\beta_2 : var \to \mathbb{Z}$$

به گونه‌ای باشند که $\beta_1(x) = \sqrt{2}, \beta_2(x) = 3$. مطلوب است که مقدار β_1, β_2 را روی سایر متغیرها را بدانیم ولی به دلیلی که روشن خواهد شد، این مقادیر فعلا برایمان اهمیت ندارد. وقتی فرمولِ φ_4 را با نگاشت مقداردهی β_1 در ساختارِ $\mathcal{M}_1$ در نظر می‌گیریم، معنایش به صورت زیر است:

$$\exists y \quad e^y + \sqrt{2} = 1$$

چنین y در اعداد حقیقی پیدا نمی‌شود؛ پس می‌نویسیم:

$$\mathcal{M}_1 \not\models \varphi_3[\beta_1]$$

به عنوان یک تمرین ساده تحقیق کنید که فرمولِ φ_4 با نگاشت ارزیابیِ β_2 در ساختارِ $\mathcal{M}_2$ به معنی زیر است:

$$\exists y \quad 4 \cdot y = 0$$

و از این رو $\mathcal{M}_2 \models \varphi_4[\beta_2]$.

تا اینجا تلاشمان بر این بود که خواننده را توجیه کنیم که فرایند معنا کردن فرمولها در ساختارها به صورتی بسیار طبیعی صورت می‌گیرد. اما، دوباره برای مصالح منطقی نیاز است که تعریف صدق فرمولها در ساختار به صورت دقیق و استقرائی زیر بیان شود.

تعریف ۳۰. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبانِ مرتبهٔ اول، $\mathcal{M}$ یک Lساختار، φ یک $\mathcal{L}$فرمول، و β یک نگاشت مقداردهی متغیرها در جهان M باشند. عبارتِ $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$ که خوانده می‌شود فرمولِ φ در $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathcal{M}$ وقتی متغیرها توسط تابعِ β مقداردهی می‌شوند برقرار است، یا $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathcal{M}$ مدلی برای فرمولِ φ تحت مقداردهی β است، به صورت استقرائی زیر تعریف می‌شود:

- می‌گوییم

$$\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[\beta]$$

هرگاه

$$t_1^{\mathcal{M}}[\beta] = t_2^{\mathcal{M}}[\beta].$$

- اگر فرمولِ φ به صورت $R(t_1,\dots,t_n)$ باشد که در آن R یک نماد رابطه‌ای n موضعی در زبان است و t_i ها ترم هستند آنگاه می‌گوییم

$$\mathcal{M} \models R(t_1,\dots,t_n)[\beta]$$

هرگاه

$$(t_1^{\mathcal{M}}[\beta],\dots,t_n^{\mathcal{M}}[\beta]) \in R^{\mathcal{M}}.$$

- اگر فرمولِ φ به صورت $\neg\psi$ باشد و معنای این که $\mathcal{M} \models \psi[\beta]$ را برای هر تابع مقداردهی β بدانیم آنگاه تعریف می‌کنیم $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$ هرگاه $\mathcal{M} \not\models \psi[\beta]$.

- فرض کنید که فرمولِ φ به صورت $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ باشد و معنای $\mathcal{M} \models \psi_1[\beta]$ و $\mathcal{M} \models \psi_2[\beta]$ را برای هر تابع مقداردهیِ β بدانیم. در این صورت تعریف می‌کنیم $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$ هرگاه همزمان $\mathcal{M} \models \psi_1[\beta]$ و $\mathcal{M} \models \psi_2[\beta]$.

- فرض کنید فرمولِ φ به صورت $\exists x\psi$ باشد و معنایِ $\mathcal{M} \models \psi[\beta]$ را برای هر نگاشت مقداردهی β بدانیم. در این صورت تعریف می‌کنیم $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$ یک عنصرِ $a \in M$ موجود باشد به طوری که

$$\mathcal{M} \models \psi[\beta\frac{a}{x}].$$

که در آن $\beta\frac{a}{x} : var \to M$ یک نگاشت مقداردهی جدید است که روی همهٔ متغیرها غیر از متغیر x مانند نگاشت مقداردهی β عمل می‌کند ولی $\beta\frac{a}{x}(x) = a$.

در مورد تعریف بالا ذکر نکات زیر را ضروری می‌دانیم.

۱. قبلاً گفته بودیم که وقتی که متغیرهای آزاد فرمولِ φ در بین $x_1,\dots,x_n$ باشد آنگاه، این فرمول را به صورتِ $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ نشان می‌دهیم. حال فرض کنید که β یک نگاشت مقداردهی در ساختارِ $\mathcal{M}$ باشد که به هر متغیرِ x_i مقدارِ a_i را داده است. در این صورت راحت‌تر است که به جای $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$ بنویسیم:

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\dots,a_n).$$

در ادامهٔ کتاب از این نمادگذاری هم زیاد استفاده خواهیم کرد، مگر زمانهایی که نیاز به دقت بیشتری داشته باشیم. در نمایش بالا یک نکته به طور ضمنی نهفته است و آن این است که عبارت $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$ به مقداری که β به متغیرهای غیر از متغیرهای استفاده شده در فرمولِ φ، می‌دهد وابسته نیست. این گفته را در قضیهٔ ۳۱ دقیق کرده‌ایم.

۲. اگر φ یک $\mathcal{L}$فرمولِ مرتبهٔ اول، $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ساختار، و β یک نگاشت مقداردهی به متغیرها در M باشد، آنگاه یا $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$ یا $\mathcal{M} \models \neg\varphi[\beta]$ و هرگز این دو اتفاق با همدیگر رخ نمی‌دهند (در واقع بنا به تعریف، رخ دادن یکی به معنی عدم رخ دادن دیگری است). در واقع ساختار مرتبهٔ اول، بنا به تعریف، قرار نیست که محل رخ دادن تناقض باشد.

۳. بنا به تمرینِ ۳۱ درستی یک فرمول در یک ساختار به مقداردهی متغیرهایش بستگی دارد. اما وقتی فرمول ما، مانند سه فرمول اول در مثالِ ۲۹ هیچ متغیر آزادی نداشته باشد، درستی آن، به نگاشتهای مقداردهی بستگی ندارد. در واقع متغیری وجود ندارد که مقدار گرفتنش بخواهد تأثیری در صدق فرمول داشته باشد. تعریف بعدی به این موضوع پرداخته است.

قضیه ۳۱. فرض کنید φ یک $\mathcal{L}$فرمول و β_1, β_2 دو نگاشتِ مقداردهی به متغیرها در ساختارِ $\mathcal{M}$ باشند به طوری که برای هر متغیر آزادِ x در فرمولِ φ داشته باشیم $\beta_1(x) = \beta_2(x)$. (یعنی هر دو نگاشت روی متغیرهای آزادِ استفاده شده در φ هم مقدار باشند). نشان دهید که در این صورت $\mathcal{M} \models \varphi[\beta_1]$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M} \models \varphi[\beta_2]$.

اثبات. حکم را به استقراء روی پیچیدگی فرمول φ اثبات می‌کنیم. نخست دقت کنید که اگر t یک ترم باشد و β یک نگاشت مقداردهی دلخواه به متغیرها، آنگاه مقدارِ $t^{\mathcal{M}}[\beta]$ فقط به متغیرهای به کار رفته در ترم t بستگی دارد. بنابراین اگر فرمولِ φ فرمولی به صورت $t_1 = t_2$ باشد. واضح است که $t_1^{\mathcal{M}}[\beta_1] = t_1^{\mathcal{M}}[\beta_2]$ و $t_2^{\mathcal{M}}[\beta_1] = t_2^{\mathcal{M}}[\beta_2]$. پس $\mathcal{M} \models t_1 = t_2[\beta_1]$ اگروتنهااگر $\mathcal{M} \models t_1 = t_2[\beta_2]$.
حال نیاز است که موارد زیر را اثبات کنیم:

- اگر فرمولِ ϕ به صورت $\neg\psi$ باشد و حکم برای فرمول ψ برقرار باشد، آنگاه حکم برای فرمول ϕ هم برقرار است.
- اگر فرمول φ به صورتِ $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ باشد و حکم برای فرمولهای ψ_1 و ψ_2 برقرار باشد، آنگاه حکم برای فرمولِ φ هم برقرار است.
- اگر فرمولِ φ به صورت $\exists x\psi$ باشد و حکم برای فرمول ψ برقرار باشد، آنگاه حکم برای φ نیز برقرار است.

اثبات دو مورد اول را به عنوان تمرین رها تنها به اثبات مورد سوم بسنده می‌کنیم.

فرض کنید $\mathcal{M} \models \exists x\psi[\beta_1]$. در این صورت، بنا به تعریف، $\mathcal{M} \models \psi[\beta_1\frac{a}{x}]$ برای یک $a \in M$. بنا به فرض استقراء، $\mathcal{M} \models \psi[\beta_2\frac{a}{x}]$ زیرا دو نگاشتِ ارزیابیِ $\beta_1[\frac{a}{x}]$ و $\beta_2[\frac{a}{x}]$ روی تمام متغیرهای آزادِ فرمولِ ψ، که البته، x هم می‌تواند یکی از آنها باشد، همقدار هستند. اما عبارتِ $\mathcal{M} \models \psi[\beta_2\frac{a}{x}]$ یعنی $\mathcal{M} \models \exists x\psi[\beta_2]$. □

تعریف ۳۲. به فرمولی که هیچ متغیر آزادی نداشته باشد، جمله گفته می‌شود.

ملاحظه ۳۳. فرض کنید φ یک $\mathcal{L}$جمله باشد. در این صورت بنا به قضیهٔ ۳۱، از آنجا که β هیچ متغیر آزادی ندارد، برای هر دو نگاشتِ ارزش‌دهی β_1, β_2 داریم $\mathcal{M} \models \varphi[\beta_1]$ اگروتنهااگر $\mathcal{M} \models \varphi[\beta_2]$. یعنی برقراری یک جمله، به نگاشتهای ارزیابی بستگی ندارد. در این صورت وقتی می‌نویسیم $\mathcal{M} \models \varphi$ منظورمان این است که $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$ برای یک نگاشت مقداردهی β (و معادلاً برای هرنگاشتِ مقداردهی β).

این ویژگیِ جمله‌ها که ارزششان به نگاشتهای مقداردهی بستگی ندارد، اهمیت آنها را در بررسی پدیده‌های منطقی آشکار می‌کند. در درسهای آینده معنای این گفته به طور خودکار برای خواننده مشخص خواهد شد.

نتیجه ۳۴. فرض کنید φ یک Lجمله و $\mathcal{M}$ یک Lساختار باشد. در این صورت یا $\mathcal{M} \models \varphi$ و یا $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.

تمرین ۲۵. زبان $L = \{f, 0\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\mathcal{M} = (M, f^{\mathcal{M}}, 0^{\mathcal{M}})$ یک Lساختار باشد. فرمولِ φ را به گونه‌ای بنویسید که داشته باشیم: $\mathcal{M} \models \varphi$ اگروتنهااگر تابع $f^{\mathcal{M}}$ یک تابع یک‌به‌یک و پوشا باشد.

تمرین ۲۶. نشان دهید که $\mathcal{M} \models (\varphi \to \psi)[\beta]$ اگروتنهااگر از $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$ نتیجه شود $\mathcal{M} \models \psi[\beta]$.

تمرین ۲۷. فرض کنید $L = \{f, <, 0\}$ یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد و $\mathcal{M} = (M, f^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}, 0^{\mathcal{M}})$ را به عنوان یک Lساختار در نظر بگیرید. فرض کنید که $<^{\mathcal{M}}$ یک ترتیب خطی روی مجموعهٔ M باشد. فرمولِ $\varphi(x)$ را به گونه‌ای بنویسید که داشته باشیم: $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ اگروتنهااگر تابعِ $f^{\mathcal{M}}$ در نقطهٔ a پیوسته باشد.

تمرین ۲۸. زبانِ $L = \{f\}$ را در نظر بگیرید که در آن f یک نماد تابعی دو موضعی است. فرمولِ $\exists y f(y, y) \doteq x$ به ترتیب در دو ساختارِ $(\mathbb{N}, +)$ و $(\mathbb{N}, \cdot)$ چه معنایی دارد؟

تمرین ۲۹. زبانِ $L = \{+, \cdot, 0\}$ را در نظر بگیرید.

۱. فرمولِ $\varphi(x, y)$ را به گونه‌ای بنویسید که $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0) \models \varphi(a, b)$ اگروتنهااگر $a < b$.

۲. برای فرمولِ $\varphi(x, y)$ که در پاسخ قسمت اول نوشته‌اید، بررسی کنید که آیا عبارت پیش رو درست است: $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0) \models \varphi(a, b)$ اگروتنهااگر $a < b$.

تمرین ۳۰.

۱. فرمولِ $\varphi(x, y)$ را در زبانِ $L = \{<\}$ به گونه‌ای بنویسید که در ساختارِ $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$ داشته باشیم $\mathcal{N} \models \varphi(a, b)$ اگروتنهااگر $b = a+1$. حال ساختارِ $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ را در نظر بگیرید. آیا برای همان فرمولِ $\varphi(x, y)$ عبارت پیش رو درست است: $\mathcal{Q} \models \varphi(a, b)$ اگروتنهااگر $b = a + 1$.

۲. نشان دهید که $\mathcal{Q} \models \forall x, y \quad \neg\varphi(x, y)$.

***تمرین ۳۱.** فرض کنید $f(p_1, \ldots, p_n)$ یک تاتولوژی در منطق گزاره‌ها باشد و $\psi_1, \ldots, \psi_n$ فرمولهایی در منطق مرتبهٔ اول و در زبانِ Lباشند. نیز فرض کنید که $\mathcal{M}$ یک Lساختار باشد. نشان دهید که برای هر نگاشت مقداردهیِ $\beta : var \to M$ داریم $\mathcal{M} \models f(\psi_1, \ldots, \psi_n)[\beta]$.

نگارنده، هم بنا به تجربیات دانشجویی خود و هم بنا به سوالاتی که دانشجویانش عموماً می‌پرسند، با نوع دغدغه‌هایی که احتمالاً ذهن خواننده را به خود درگیر کرده، مطلع است اما اشاره و پاسخ دادن به هر نوع از آنها را به مکان مناسبی موکول کرده است. در زیر به دو نوع چنین دغدغه‌هایی اشاره شده است.

فرض کنید که $\mathcal{L}$ یک زبانِ مرتبهٔ اول و $\mathcal{L}$ یک $\mathcal{L}$ساختار باشد. عبارت $\mathcal{M} \models \varphi$ را در نظر بگیرید. در این عبارت φ یک جمله یا فرمول در زبانِ $\mathcal{L}$ است. اما خودِ عبارتِ $\mathcal{M} \models \varphi$ یک جمله یا فرمول در زبانِ $\mathcal{L}$ نیست؛ و این واضح است زیرا نمادِ $\models$ در زبانِ $\mathcal{L}$ نیست. در واقع وقتی می‌نویسیم $\mathcal{M} \models \varphi$ از زبان مرتبهٔ اولِ $\mathcal{L}$ استفاده نکرده‌ایم اما چنین گفته‌ایم که جملهٔ φ که در زبانِ $\mathcal{L}$ است در ساختارِ $\mathcal{M}$ درست است. انگار این جمله در یک زبان، فرای زبانی که جملهٔ φ در آن نوشته شده است بیان شده است. اما این فرازبان چیست و همهٔ عبارات ریاضی‌ای که در این درس نوشته می‌شوند در چه زبانی هستند؟ در این لحظه پاسخ این سوال را نخواهیم داد، اما به عنوان مثال به یک وضعیت مشابه اشاره می‌کنیم. جملهٔ زیر را در نظر بگیرید:

عبارت A horse is an animal از پنج کلمه تشکیل شده است.

جملهٔ بالا جمله‌ای در زبان فارسی محسوب می‌شود اما در عین حال دربارهٔ جمله‌ای در زبان انگلیسی صحبت می‌کند!

مورد دیگری که احتمالا تا اینجای این نوشته، مورد سوال خواننده بوده باشد، این است که در تعریف یک زبانِ مرتبهٔ اول و یک Lساختار آمده است که اینها مجموعه هستند. اما احتمالاً برای دانستن این که مجموعه چیست، نیز نیاز به منطق داشته باشیم. پس آیا اول باید نظریهٔ مجموعه‌ها را تدریس می‌کردیم سپس منطق را؟

به خواننده قول می‌دهیم که پرسشهای از این قبیل در این نوشتار بی‌پاسخ نخواهند ماند، و چه بسا پاسخ دادن به این سوالات جزو انگیزه‌های به نگارش درآمدن این کتاب باشد.

در فصل قبلی گفتیم که برای سخن گفتن در منطق مرتبهٔ اول نیاز است که مجموعه‌ای از علائم داشته باشیم و قاعده‌هایی برای این که با آن علائم کلمه و جمله بسازیم؛ اما این کلمه‌ها معنایی ندارند. معنای کلمه، چیزی مستقل از خودِ کلمه است. برای معنا کردن کلمات و جملات در منطق ریاضی، نیاز به جهانهایی (واقعی یا ذهنی) داریم که در آنها کلمات و مفاهیم مورد نظر ما مابازاء داشته باشند. برای مثال، وقتی به کسی می‌گوییم، گربه روی میز است، این شخص باید تصوری از گربه، میز، و این که چیزی روی چیزی هست داشته باشد تا معنای جملهٔ ما را بفهمد. در ضمن ممکن است افراد مختلف، بنا به جهان ذهنی یا واقعی خودشان از یک جمله، درکهای مختلفی داشته باشند؛ ولی در این حال هم می‌توانند معنایی برای جملهٔ ما متصور شوند. مثلاً کسی که فکر می‌کند گربه، سگ است، باز هم معنایی از جملهٔ گربه روی میز است در ذهنش دارد: فکر می‌کند سگ روی میز است!

اگر $\mathcal{M}$ یک جهان ذهنی یا واقعی باشد و جملهٔ φ در آن درست باشد، می‌نویسیم:

$$\mathcal{M} \models \varphi.$$

فصل ۳

تعریف‌پذیری و ایزومرفیسم*

خواننده‌ای که علاقه‌مند است که زودتر به قضایای تمامیت و ناتمامیت گودل برسد، می‌تواند از خواندن این فصل حذر کند، وانگهی، مفاهیم معرفی شده در این فصل، جزو مفاهیم بسیار طبیعی در دنیای ریاضیات هستند و خواندن آنها منجر به افزایش بینش عمومی ریاضی می‌شود. اکثر ریاضیدانان از مفهوم تعریف‌پذیری مدام استفاده می‌کنند اما هیچگاه تعریف دقیق آن، به صورتی که در این بخش آمده است را در اختیار ندارند. همچنین کمتر بخشی از ریاضیات هست که در آن دربارهٔ ایزومرفیسم صحبت نشود: گروههای ایزومرف، میدانهای ایزومرف، حلقه‌های ایزومرف، گرافهای ایزومرف و غیره. آنچه در این فصل دربارهٔ ایزومرفیسم خواهیم آموخت تعمیم تعریفِ همهٔ این ایزومرفیسمهای آشناست. جبریستها ایزومرفیسم را به خوبی درک می‌کنند، اما آنچه منطق اضافه‌تر دارد، مفهومی با تعریف ضعیف‌تر و گاهی با اهمیت بیشتر به نام هم‌ارزی مقدماتی است. در این بخش هرسهٔ مفاهیم یادشده معرفی خواهند شد.

۱.۳ تعریف‌پذیری

فرض کنید $\mathcal{M} = (M, \ldots)$ یک $\mathcal{L}$ ساختار باشد. (خواننده می‌داند که آنچه در نمایش این ساختار با ... نشان داده شده است، توابع، روابط و ثوابتی هستند که در تناظر با نمادهای تابعی، رابطه‌ای و ثوابتِ زبانِ $\mathcal{L}$ قرار دارند).

تعریف ۳۵. فرض کنید X یک زیرمجموعه از M^n باشد و $a_1, \ldots, a_m \in M$. همچنین فرض کنید که $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ یک $\mathcal{L}$فرمول باشد. می‌گوییم X توسط فرمولِ $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ و با کمکِ پارامترهای $a_1, \ldots, a_m$ تعریف می‌شود هرگاه

$$X = \{(b_1, \ldots, b_n) \in M^n | \mathcal{M} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n, a_1, \ldots, a_m)\}.$$

وقتی می گوییم مجموعهٔ X با پارامتر قابل تعریف است یعنی یک فرمولِ φ و تعدادی عنصرِ $a_1, \ldots, a_n$ موجودند که با کمک آنها مجموعهٔ X به صورت بالا تعریف می‌شود.

مثال ۳۶. ساختارِ $(\mathbb{N}, +)$ را (در زبانی که علامتی برای جمع دارد) در نظر بگیرید. مجموعهٔ اعداد زوج، به عنوان یک زیرمجموعه از مجموعهٔ اعداد طبیعی در این ساختار، قابل تعریف است. در واقع مجموعهٔ اعداد زوج برابر با مجموعهٔ زیر است:

$$\{x \in \mathbb{N} | (\mathbb{N}, +) \models \exists y \quad x = y + y\}.$$

در واقع مجموعهٔ اعداد زوج توسط فرمولِ $\varphi(x) = \exists y + (y, y) \doteq x$ تعریف می‌شود و البته در این تعریف نیاز به استفاده از هیچ پارامتری نیست.

مثال ۳۷. ساختارِ $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ یک چند جمله‌ای باشد. مجموعهٔ ریشه‌های این چندجمله‌ای در $\mathbb{C}$ یک زیرمجموعهٔ تعریف‌پذیر است:

$$A = \{x | (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1) \models a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \doteq 0\}$$

به طور دقیق‌تر فرمولِ

$$\varphi(x, y_0, \ldots, y_n) = \varphi = y_n x^n + \ldots + y_1 x + y_0 \doteq 0$$

را در نظر بگیرید. داریم

$$A = \{x | (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1) \models \varphi(x, a_1, \ldots, a_n).$$

البته در نوشتن فرمولِ بالا تسامح کرده‌ایم. خواننده‌ای که وسواس بیشتری دارد توجه کند که مثلاً زمانی که f یک چندجمله‌ای درجهٔ ۲ به صورت $a_2x^2 + a_1x + a_0$ است، فرمولِ $\varphi(x, y_0, y_1, y_2)$ دقیقاً به صورت زیر است:

$$+(+(\cdot(y_2, \cdot(x, x)), \cdot(y_1, x)), y_0) \doteq 0$$

شاید بد نباشد به تعمیمی از مثال بالا فکر کنیم. آیا مجموعهٔ عناصری در $\mathbb{C}$ که ریشهٔ یک چندجمله‌ای با ضرایب در $\mathbb{Q}$ هستند نیز با یک فرمول تعریف می‌شود؟ یعنی آیا می‌توان فرمولی نوشت که بگوید: یک چندجمله‌ای با یک درجهٔ طبیعی موجود است که ضرایب آن در $\mathbb{Q}$ است و x یکی از ریشه‌های آن است؟ واضح است که چنین چیزی (به صورت زیر) را نمی‌توان یک فرمول مرتبهٔ اول به حساب آورد:

$$\exists n \in \mathbb{N} \exists a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q} \quad a_n x^n + \ldots + a_0 = 0.$$

زیرا در یک فرمولِ مرتبهٔ اول، سورها فقط روی متغیرهایی زده می‌شوند که قرار است درساختار باشند و نمی‌شود روی متغیرهای یک مجموعهٔ متفاوت با ساختار مورد نظر سور زد. اما این لزوماً به معنی عدم تعریف‌پذیری مجموعهٔ یادشده نیست. شاید روشی خلاقانه برای تعریف مجموعهٔ یادشده پیداشود که در آن فرمول مرتبهٔ اول مناسبی برای این کار پیدا شده است. در ادامه، نمونه‌ای از تعریف‌پذیری خلاقانه را مشاهده می‌کنیم.

مثال ۳۸. ساختارِ $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ را در نظر بگیرید. دقت کنید که رابطهٔ ترتیب میان اعداد طبیعی در زبانِ مورد نظر ما در نظر گرفته نشده است. با این حال مجموعهٔ

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$$

با همین نمادهائی که در زبان داریم، و به صورت زیر قابل تعریف است:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) \models \exists z \quad y \doteq x + z^2\}$$

در تعریف بالا برای ترتیب اعداد طبیعی از این ویژگی استفاده شده است که هر عدد طبیعیِ مثبت لزوماً توان دوم یک عنصر حقیقی است. حال ساختارِ $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ و مجموعهٔ

$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x < y\}$$

را در نظر بگیرید. آیا

$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1) \models \exists z \quad y \doteq x + z^2\}$$

در واقع سوال این است که آیا همان فرمولی که ترتیب اعداد حقیقی را تعریف می‌کند می‌تواند برای تعریف اعداد صحیح استفاده شود؟ پاسخ این سوال منفی است؛ زیرا برای مثال عدد دو یک عدد مثبت است ولی برابر با هیچ عددی (صحیح) به توان دو نیست. در عین حال قضیه‌ای از لاگرانژ درنظریهٔ اعداد می‌گوید که یک عدد صحیح زمانی مثبت است که بتوان آن را به صورت حاصل‌جمع چهار مربع کامل نوشت. پس

$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1) \models \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \exists z_4 \quad x \doteq z_1^2 + \ldots + z_4^2\}.$$

اصطلاحاً می‌گوییم که ترتیب اعداد صحیح نیز تعریف‌پذیر است؛ هرچند همان گونه که مشاهده شد فرمولی غیر از آن که برای تعریف ترتیب اعداد حقیقی استفاده شد، برای این تعریف به کار می‌رود.

مشاهده کردید که برای اثبات تعریف‌پذیری ترتیب در اعداد صحیح، نیاز به یک قضیهٔ قوی در نظریهٔ اعداد پیدا کردیم. به طور کلی مسئلهٔ تعریف‌پذیری بر خلاف صورت ساده‌اش، ماهیتی بسیار پیچیده دارد و برای حل مسائل طبیعیِ تعریف‌پذیری گاهی نیاز به دانش قوی منطقی، جبری، نظریهٔ اعدادی و حتی هندسهٔ جبری است. در همان مثال تعریف‌پذیری ترتیب در اعداد صحیح، اگر زبان را کمی ضعیف‌تر کنیم، برای مثال، ساختارِ $(\mathbb{Z}, +, 0, 1)$ را در نظر بگیریم (یعنی علامت ضرب را از زبان برداریم)، آنگاه ترتیب، قابل تعریف نیست (این را در همین فصل ثابت خواهیم

کرد). از این نتیجه می‌شود که مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Z}$ در ساختارِ $(\mathbb{Z}, +, 0, 1)$ قابل تعریف نیست. سوالهای جذاب زیادی دربارهٔ تعریف‌پذیری می‌توان پرسید، که برای درگیر کردن ذهن خواننده با مسئله برخی از آنها را در زیر فهرست کرده‌ایم و چندی از این میان را در بخشهایی از این کتاب پاسخ خواهیم خواهیم گفت.

۱. آیا مجموعه‌های $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ در ساختارِ $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ قابل تعریفند؟

۲. آیا مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ در ساختارِ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ قابل تعریف است؟

۳. آیا مجموعهٔ $\mathbb{R}$ در ساختارِ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ قابل تعریف است؟

مثال ۳۹. مجموعهٔ $\{i, -i\}$ در ساختارِ $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ قابلِ تعریف است. اگر حق استفاده از پارامتر داشته باشیم داریم:

$$\{i, -i\} = \{x : (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1) \models (x \doteq i \vee x \doteq -i)\}$$

در واقع در بالا از دو عددِ $i, -i$ به عنوان پارامتر برای تعریف استفاده کرده‌ایم؛ اما همین مجموعه را می‌توان بدون استفاده از هیچ پارامتری نیز تعریف کرد:

$$\{i, -i\} = \{x : (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1) \models x^2 + 1 = 0\}$$

در واقع $\{i, -i\}$ مجموعهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوی $x^2 + 1 = 0$ است. به عنوان یک سوال جذاب به این فکر کنید که آیا مجموعهٔ تک عضویِ $\{i\}$ هم در این ساختار قابل تعریف است؟

تمرین ۳۲ (مجموعه‌های خواسته شده را بدون استفاده از پارامتر تعریف کنید.).

۱. ساختارِ $(\mathbb{N}, +)$ را در نظر بگیرید:

(آ) نشان دهید که مجموعهٔ $\{0\}$ قابل تعریف است.

(ب) نشان دهید که مجموعهٔ اعداد زوج قابل تعریف است.

(ج) آیا مجموعهٔ $\{0, 1\}$ قابل تعریف است؟ [۱]

(د) آیا $\{1\}$ قابل تعریف است؟

(ه) نشان دهید که ترتیب اعداد در این ساختار قابل تعریف است.

(و) آیا مجموعهٔ $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : y = x + 1\}$ قابل تعریف است؟

۲. ساختارِ $(\mathbb{N}, +, <)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که مجموعه‌های قابل تعریف در این ساختار و ساختارِ $(\mathbb{N}, +)$ یکسان هستند.

۳. ساختارِ $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ را در نظر بگیرید و نشان دهید مجموعه‌های زیر قابل تعریف هستند:

(آ) مجموعهٔ اعداد اول

(ب) مجموعهٔ اعداد همنهشت با m به پیمانهٔ k.

(ج) مجموعهٔ $\{0, 1\}$ بدون استفاده از ثوابتِ $0, 1$.

۳* درهندسهٔ جبری، منظور از یک ورایته (یک چندگونا) یک زیرمجموعه از $\mathbb{C}^n$ است که از ریشه‌های مشترکِ تعدادی متناهی چندجمله‌ایِ $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ تشکیل شده است. نشان دهید که هر ورایته در ساختارِ $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ (با استفاده از پارامتر) قابل تعریف است.

بررسی این که صورت کلی مجموعه‌های تعریف‌پذیر در یک ساختار مرتبهٔ اول چگونه می‌تواند باشد، دغدغهٔ مهمی در مطالعهٔ جبری و منطقی ساختارهاست. دو مثال از قضایایی که به تعریف‌پذیری می‌پردازند را در زیر آورده‌ام. اثبات آنچه در این دو مثال آمده است نیازمند به دانش فراتر از این بخش درس است و در بخشهای پیشرفته‌تر درس به آن پرداخته شده است.

[۱] راهنمایی: باقی‌مانده‌های ممکن بر ۲

مثال ۴۰.

۱. هر زیرمجموعهٔ $X \subseteq \mathbb{C}$ که در ساختارِ $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ قابل تعریف (با پارامتر یا بدون پارامتر) باشد، یا خودش متناهی است یا به صورتِ $\mathbb{C} - Y$ است که Y متناهی است. در واقع هر زیرمجموعهٔ تعریف‌پذیر در این ساختار را می‌توان با استفاده از پارامتر و تنها با به کارگیری نمادِ $\doteq$ تعریف کرد. در نتیجه، مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ به عنوان یک زیرمجموعه از $\mathbb{C}$ قابل تعریف نیست؛ زیرا هم $\mathbb{R}$ و هم $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ هر دو نامتناهی هستند.

۲. هر زیرمجموعهٔ $X \subseteq \mathbb{R}$ که در ساختارِ $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ قابل تعریف باشد، اجتماعی متناهی از بازه‌های باز و نقطه‌هاست؛ یعنی اعداد $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ موجودند که

$$X = (a_1, b_1) \cup \ldots, (a_n, b_n) \cup \{c_1, \ldots, c_m\}$$

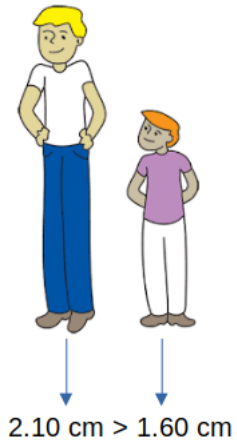
به بیان دیگر، هر چنین مجموعه‌ای را می‌توان با استفاده از پارامتر و تنها با به کارگیری نمادهای $\{<, \doteq\}$ تعریف کرد. به عنوان یک نتیجهٔ جالب، مجموعهٔ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ در این ساختار قابل تعریف نیست؛ زیرا مجموعهٔ اعداد گویا را نمی‌توان به صورت اجتماعی از بازه‌های حقیقی نوشت. به دلیل مشابه، مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ هم در این ساختار قابل تعریف نیست.

تمرین ۳۳. نشان دهید که اگر مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ در ساختارِ $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ قابل تعریف می‌بود، آنگاه مجموعهٔ $\mathbb{Q}$ نیز در این ساختار قابل تعریف می‌بود.

تمرین ۳۴. نشان دهید که ترتیب اعداد صحیح در $(\mathbb{Z}, +, 0)$ قابل تعریف است اگروتنهااگر $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ قابل تعریف باشد.

۲.۳ ایزومرفیسم

دانشجویان ریاضی از همان ابتدای کار با مفهوم «یکریختی» آشنا می‌شوند. مجموعهٔ $\{1, 2, 3\}$ با مجموعهٔ $\{a, b, c\}$ همریخت است زیرا اگر 1 را به a، عدد 2 را به b و عدد 3 را به c متناظر کنیم، می‌بینیم که مجموعهٔ دوم همان مجموعهٔ اول است؛ فقط نام عناصر عوض شده است. اما ایزومرفیسم در بافتارهای مختلف ریاضی، فقط تغییر نام عناصر نیست: باید نقشهای آنها نیز در حین تغییر نام حفظ شود. مثلاً زمانی نگاشتِ $f : (G_1, +_{G_1}) \to (G_2, +_{G_2})$ یک ایزومرفیسم گروهی است که علاوه بر این که عناصرِ $a, b, c \in G_1$ را به ترتیب تغییر نام به $f(a), f(b), f(c)$ در G_2 می‌دهد، روابط جمعی را نیز حفظ کند؛ یعنی اگر $a +_G b = c$ آنگاه $f(a) +_{G_2} f(b) = f(c)$.



تعریف ایزومرفیسم میان دو $\mathcal{L}$ساختار نیز مشابه همین تعریف است. فرض کنید $\mathcal{L} = \{f\}$ یک زبان مرتبهٔ اول است که فقط یک نماد تابعی تک‌موضعی f دارد و $\mathcal{M}_1 = (M_1, f^{\mathcal{M}_1})$ و $\mathcal{M}_2 = (M_2, f^{\mathcal{M}_2})$ دو $\mathcal{L}$ساختار باشند. فرض کنید $H : M_1 \to M_2$ یک نگاشت یک به یک

و پوشا بین جهان این دو ساختار باشد. زمانی H یک ایزومرفیسم است که آنچه در زیر تصویر کرده‌ایم رخ دهد:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f^{\mathcal{M}_1}"] \arrow[d, "H"'] & b \arrow[d, "H"] \\ c \arrow[r, "f^{\mathcal{M}_2}"] & d \end{tikzcd}$$

در تصویر بالا a, b در M_1 هستند و نگاشتِ $f_1^{\mathcal{M}}$ عنصر a را به b برده است. از طرفی، نگاشتِ H که هیچ ارتباطی به زبانِ $\mathcal{L}$ ندارد، عناصر $a, b \in M_1$ را به عناصرِ $c, d \in M_2$ برده است. میان این تصاویر، تحت تابعِ f همان رابطهٔ قبلی برقرار است؛ یعنی d هم تصویر c تحت تابعِ $f^{\mathcal{M}_2}$ است.

تعریف ۴۱. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبهٔ اول و $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ دو $\mathcal{L}$ساختار باشند. تابعِ یک به یک و پوشای $H : M_1 \to M_2$ (دقت کنید که از جهان ساختارِ اولی به جهان ساختار دومی است) را یک ایزومرفیسم می‌نامیم هرگاه

۱. برای هر ثابتِ $c \in \mathcal{L}$ تابعِ H عنصرِ $c^{\mathcal{M}_1}$ را به $c^{\mathcal{M}_2}$ ببرد.

۲. برای هر نماد رابطه‌ای n موضعیِ $R \in \mathcal{L}$ و هر $a_1, \ldots, a_n \in M_1$ داشته باشیم:

$$R^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{M}_2}(H(a_1), \ldots, H(a_n)).$$

۳. برای هر تابعِ n موضعیِ $f \in \mathcal{L}$ و هر $a_1, \ldots, a_n, a_0$ در $\mathcal{M}_1$ داشته باشیم

$$f^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n) = a_0 \Leftrightarrow f^{\mathcal{M}_2}(H(a_1), \ldots, H(a_n)) = H(a_0).$$

وقتی نگاشتِ $H : M_1 \to M_2$ یک ایزومرفیسم بین دو $\mathcal{L}$ساختار باشد، می‌نویسیم $H : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ یک ایزومرفیسم است؛ در این صورت تأکید داریم که تابع ما حافظ ساختار، ونه فقط حافظ مجموعه است.

طبیعی است که گمان کنیم دو ساختارِ ایزومرف ویژگی‌های کاملاً یکسانی دارند و به نحوی رونوشتی از یکدیگر هستند. در ادامه این گفته را توجیه خواهیم کرد.

فرض کنید $t(x_1, \ldots, x_n)$ یک ترم باشد. در این صورت بنا بر آنچه در بخشهای قبل دیده‌ایم، $t^{\mathcal{M}_1}$ یک تابع از M_1^n به M_1 است که مقدار آن را در $a_1, \ldots, a_n$ برابر است با $t^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n)$. فرض کنید $H : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ یک ایزومرفیسم باشد که $a_1, \ldots, a_n$ را به ترتیب به $H(a_1), \ldots, H(a_n)$ می‌برد. آنگاه این H عنصرِ $t^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n)$ را به $t^{\mathcal{M}_2}(H(a_1), \ldots, H(a_n))$ می‌برد.

لم ۴۲. فرض کنید $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ دو $\mathcal{L}$ساختار و $H : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ یک ایزومرفیسم باشد. همچنین فرض کنید $t(x_1, \ldots, x_n)$ یک $\mathcal{L}$ترم باشد و $a_1, \ldots, a_n$ عناصری در جهانِ M_1 باشند. آنگاه تابع H عنصر $t^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n)$ را به $t^{\mathcal{M}_2}(H(a_1), \ldots, H(a_n))$ می‌برد.

اثبات. حکم قضیه را با استقراء روی ساخت ترمها اثبات می‌کنیم. فرض کنید ترم t یک متغیر باشد؛ مثلاً ترمِ t متغیرِ x_i باشد. در این صورت $t^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$. از طرفی

$$H(t^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n)) = H(a_i) = t^{\mathcal{M}_2}(H(a_1), \ldots, (a_n)).$$

پس حکم برای این نوع ساده از ترمها برقرار است. حال فرض کنید که ترم t یک ثابت، مثلاً ثابتِ c باشد. در این صورت $t^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n) = c^{\mathcal{M}_1}$. پس

$$H(t^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n)) = H(c^{\mathcal{M}_1}) = c^{\mathcal{M}_2}$$

و حکم برای این نوع ترم هم برقرار است. دقت کنید که این که $H(c^{\mathcal{M}_1}) = c^{\mathcal{M}_2}$ از تعریف ایزومرفیسم آمده است.

برای ادامهٔ استقرا نیاز داریم که عبارت زیر را ثابت کنیم: اگر حکم قضیه برای ترمهای $t_1, \ldots, t_n$ درست و f یک نماد تابعیِ n موضعی باشد آنگاه حکم مورد نظر برای ترم $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ هم برقرار است (این که تعداد ترمها و متغیرها را یکی گرفته‌ایم فقط برای ساده نوشتن فرمولها

است). اما این که حکم قضیه برای ترمهای $t_1, \ldots, t_n$ برقرار باشد یعنی این که متغیرهای این ترمها همه از میانِ $x_1, \ldots, x_n$ باشند و برای هر $1 \leqslant i \leqslant n$ داشته باشیم

$$H(t_i^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n)) = t_i^{\mathcal{M}_2}(H(a_1), \ldots, H(a_n)).$$

و در این صورت

$$\begin{aligned}
&H(t^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n)) = \\
&H\Big(f^{\mathcal{M}_1}\big(t_1^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_n^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n)\big)\Big) = \\
&f^{\mathcal{M}_2}\Big(H(t_1^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n)), \ldots, H(t_n^{\mathcal{M}_1}(a_1, \ldots, a_n))\Big) = \\
&f^{\mathcal{M}_2}\Big(t_1^{\mathcal{M}_2}(H(a_1), \ldots, H(a_n)), \ldots, t_n^{\mathcal{M}_2}(H(a_1), \ldots, H(a_n))\Big) = \\
&t^{\mathcal{M}_2}(H(a_1), \ldots, H(a_n)).
\end{aligned}$$

□

اثباتی که در بالا برای قضیه نوشتیم با کمی ساده‌انگاریِ در صورت‌گرایی بود. در ادامهٔ کتاب، هرگاه تشخیص داده‌ایم که ساده‌انگاری موجب ابهام در اثبات قضیه می‌شود، از آن حذر کرده‌ایم. در واقع در اثباتهای استقرائی توجه به خوانش یکتای ترمها و فرمولها ضروری است و این نوع ساده‌نویسی ما از توجه به خوانش یکتا تا حدودی باز می‌دارد. با این تفاصیل، دقیق‌ترین صورت قضیه بالا (که البته اثبات باید مطابق آن تنظیم شود) با توجه به تعریف تعبیر ترمها به صورت زیر است:

برای هر ترمِ t و هر نگاشت مقداردهیِ β به متغیرها داریم:

$$H(t^{\mathcal{M}_1}[\beta]) = t^{\mathcal{M}_2}[\beta']$$

که در آن β' یک نگاشت مقداردهی به متغیرها در ساختارِ $\mathcal{M}_2$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\beta'(x) = H(\beta(x)). \tag{۱.۳}$$

قضیه ۴۳. فرض کنید $H : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ یک ایزومرفیسم باشد. در این صورت برای هر فرمولِ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ و هر n عنصرِ $a_1, \ldots, a_n$ در M_1 داریم

$$\mathcal{M}_1 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

اگروتنهااگر

$$\mathcal{M}_2 \models \varphi(H(a_1), \ldots, H(a_n)).$$

پیش از اثبات قضیهٔ بالا، یادآوری می‌کنیم که حکم قضیه را به صورت دقیق‌تر زیر نیز می‌توان نوشت: برای هر فرمول φ و نگاشت ارزیابیِ β از متغیرها درساختارِ $\mathcal{M}_1$ داریم

$$\mathcal{M}_1 \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \varphi[\beta']$$

که در بالا β' همان نگاشت مقداردهی به متغیرها در $\mathcal{M}_2$ است که در رابطهٔ ۱.۳ تعریف کردیم. در اثبات زیر همین حکم دقیق‌تر را اثبات کرده‌ایم. این اثبات تمرین خوبی برای نحوهٔ به کارگیری استقراء روی فرمولها در یک زبان مرتبهٔ اول است.

اثبات. حکم این قضیه را به استقراء روی روش ساخت فرمولهای مرتبهٔ اول اثبات می‌کنیم. فرض کنید فرمولِ φ به صورت $t_1 \doteq t_2$ باشد و داشته باشیم $\mathcal{M}_1 \models t_1 \doteq t_2[\beta]$. بنا به تعریف صدق فرمولها در ساختارها داریم

$$t_1^{\mathcal{M}_1}[\beta] = t_2^{\mathcal{M}_1}[\beta].$$

دقت کنید که $t_1^{\mathcal{M}_1}[\beta]$ و $t_2^{\mathcal{M}_1}[\beta]$ دو عنصر در M_1 هستند که با هم برابرند. از آنجا که نگاشت H یک به یک است، تصاویر این دو تحت این نگاشت در M_2 با هم برابرند؛ یعنی

$$H(t_1^{\mathcal{M}_1}[\beta]) = H(t_2^{\mathcal{M}_1}[\beta])$$

اما بنا به قضیهٔ قبل $H(t_1^{\mathcal{M}_1}[\beta]) = t_1^{\mathcal{M}_2}[\beta']$ و $H(t_2^{\mathcal{M}_1}[\beta]) = t_2^{\mathcal{M}_2}[\beta']$؛ پس حکم برای فرمولهای اینچنینی برقرار است.

اثبات حکم برای فرمولهای به صورت $R(t_1, \ldots, t_n)$ نیز به همین سادگی است و آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.

حال فرض کنید که فرمولِ φ به صورت $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ باشد و حکم مورد نظر، برای فرمولهای ψ_1 و ψ_2 برقرار باشد؛ یعنی برای هر نگاشت مقدار دهی β داشته باشیم

$$\mathcal{M}_1 \models \psi_i[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \psi_i[\beta'] \tag{۲.۳}$$

که در بالا

$i \in \{1, 2\}$ و β' یک نگاشت مقداردهی است که مانند رابطهٔ ۱.۳ تعریف شده است. حال فرض کنید β یک نگاشت مقداردهی دلخواه به متغیرها در ساختارِ $\mathcal{M}_1$ باشد. بنا به تعریف استقرائی صدق فرمولها در ساختارها داریم

$$\mathcal{M}_1 \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{M}_1 \models \psi_1[\beta] \text{ و } \mathcal{M}_1 \models \psi_2[\beta]$$

بنا به فرض استقراء، یعنی بنا به عبارتِ ۲.۳ عبارت بالایی به صورت زیر ادامه می‌یابد:

$$\Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \psi_1[\beta'] \text{ و } \mathcal{M}_2 \models \psi_2[\beta']$$

و دوباره بنا به تعریف صدق فرمولها، عبارت بالایی به صورت زیر ادامه می‌یابد:

$$\Leftrightarrow \ \mathcal{M}_2 \models \varphi[\beta'].$$

اثبات قضیه در حالتی که فرمولِ φ به صورت $\neg\psi$ است و حکم برای ψ برقرار است، نیز ساده است و آن را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.

حال فرض کنید فرمولِ φ به صورتِ $\exists x\psi$ باشد و حکم قضیه برای فرمولِ ψ برقرار باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که حکم قضیه برای φ نیز برقرار است. اگر $\mathcal{M}_1 \models \varphi[\beta]$ در این صورت، $\mathcal{M}_1 \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$ برای یک عنصرِ $a \in M_1$. فرض استقرا این است که حکم قضیه، برای فرمولِ ψ و هر نگاشت مقداردهی درست است؛ پس $\mathcal{M}_2 \models \psi[(\beta\frac{a}{x})']$؛ یعنی $\mathcal{M}_2 \models \psi[\beta'\frac{H(a)}{x}]$. پس $\mathcal{M}_2 \models \exists x\psi$.

شاید بد نباشد قدم آخر استقراء را کمی شهودی‌تر توضیح دهیم. فرض کنید $\mathcal{M}_1 \models \exists x\psi(x, a_1, \ldots, a_n)$. در این صورت عنصرِ $a_0 \in M_1$ چنان موجود است که $\mathcal{M}_1 \models \psi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. بنا به فرض استقراء روی فرمولِ ψ داریم $\mathcal{M}_2 \models \psi(H(a_0), \ldots, H(a_n))$ و این یعنی $\mathcal{M}_2 \models \exists x\psi(x, a_1, \ldots, a_n)$. □

ملاحظه ۴۴. در اینجا باز هم فرصت را برای توضیح دادن دربارهٔ جملات فرامنطقی مغتنم می‌شمارم. عبارتِ

$$\mathcal{M}_1 \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{M}_1 \models \psi_1[\beta] \text{ و } \mathcal{M}_1 \models \psi_2[\beta]$$

که در اثبات بالا نوشته‌ایم، یک فرمولِ مرتبهٔ اول در زبانِ $\mathcal{L}$ که ساختارهای $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ متناسب با آن هستند، نیست. در عین حال این عبارت، یک جملهٔ منطقی است و حتماً در زبانی منطقی نوشته شده است (که فعلاً کاری با آن زبان نداریم). برای این که علامتهای منطقی آن زبان، با علامتهای منطقی‌ای که همراه با زبانِ $\mathcal{L}$ استفاده می‌شوند اشتباه نشوند، به جای $\leftrightarrow$ از $\Leftrightarrow$ و به جای $\wedge$ از حرف ربط «و» استفاده کرده‌ایم.

مثال ۴۵.

۱. زبانِ $\mathcal{L} = \{f, e\}$ را در نظر بگیرید که در آن f یک نماد تابعی دو متغیره e یک نماد ثابت است. همچنین دو $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{R}, +, 0)$ و $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{R}^+, \cdot, 1)$ را ملاحظه کنید که منظور از $\mathbb{R}^+$ مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت است. این دو $\mathcal{L}$ساختار با هم ایزومرفند؛ زیرا تابعِ

$$H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto e^x$$

یک تابع یک به یک و پوشا است و علاوه بر آن داریم:

$$H(e^{\mathcal{M}_1}) = H(0) = e^0 = 1 = e^{\mathcal{M}_2}$$

و

$$H(f_1^{\mathcal{M}}(x, y)) = H(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f^{\mathcal{M}_2}(H(x), H(y)).$$

۲. در زبانِ $\mathcal{L} = \{f, c\}$ که در آن f یک نماد تابعی دو موضعی و c یک ثابت است، ساختارِ $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +, 0)$ را در نظر بگیرید. تابعِ

$$H : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto -x$$

یک ایزومرفیسم میان $\mathcal{Z}$ و خودش است. این تابع، صفر را به صفر می‌برد و داریم:

$$H(f^{\mathcal{Z}}(x, y)) = H(x + y) = -(x + y) = (-x) + (-y) = H(x) + H(y) = f^{\mathcal{Z}}(H(x), H(y)).$$

یعنی تابع مورد نظر حافظ جمع نیز هست. پس تابعِ $x \mapsto -x$ یک ایزومرفیسم میان ساختارِ جمعی اعداد صحیح و خودش است. به عنوان یک تمرین، به این فکر کنید که آیا تابعِ H ساختارِ ضربی را نیز حفظ می‌کند؛ یعنی آیا اگر در زبانِ مورد نظر برای تابع ضرب هم علامتی داشتیم، باز هم تابعِ H یک ایزومرفیسم می‌بود؟

۳. زبانِ $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید M مجموعه‌ای به صورت زیر متشکل از برخی ماتریسهای دو در دو باشد.

$$M = \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}$$

علامت جمع و ضرب در زبانِ $\mathcal{L}$ را در M به ترتیب به صورت جمع و ضرب ماتریسها تعبیر کنید. همچنین ثوابتِ $0, 1$ در زبان را به ترتیب به ماتریسهای $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ تعبیر کنید. در این صورت $\mathcal{M} = (M, +, \cdot, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$ یک $\mathcal{L}$ساختار است. پیش از آنکه دربارهٔ ایزومرف بودن این ساختار با یک ساختارِ دیگر صحبت بکنیم، یک نکته را یادآوری می‌کنیم. وقتی دربارهٔ فرمولی به صورتِ $\forall x \varphi$ در این ساختار صحبت می‌کنیم، سور عمومی روی ماتریسها زده می‌شود؛ یعنی معنای فرمول ما در این ساختار بدین صورت است که: «برای هر ماتریس دو در دو...».

ساختارِ $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ نیز یک $\mathcal{L}$ ساختار است. در این ساختار، جهانِ زمینه، اعداد مختلط است و جمع و ضرب اعداد مختلط به همراه اعداد صفر و یک، تعبیر علائم زبانی هستند. تابعِ

$$H : \mathbb{C} \to M$$
$$(x + iy) \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید.

تمرین ۳۵. نشان دهید که نگاشت H که در بالا معرفی شده است، یک ایزومرفیسم میان دو ساختارِ $\mathcal{C}, \mathcal{M}$ است.

۴. در زبانِ $\mathcal{L} = \{f, g, c_1, c_1\}$ که در آن f, g نمادهای تابعی دوموضعی هستند و c_1, c_2 نمادهایی برای دو ثابت، ساختارِ $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ را در نظر بگیرید که در آن $\mathbb{C}$ مجموعهٔ اعداد مختلط است و جمع و ضرب اعداد مختلط و صفر و یک تعابیر علائم زبانی هستند. تابعِ

$$H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$x + iy \mapsto x - iy$ را در نظر بگیرید که هر عدد مختلط را به مزدوج آن می‌برد.

تمرین ۳۶. نشان دهید که تابع H یک ایزومرفیسم میان ساختار $\mathcal{C}$ و خودش است.

۵. به عنوان یک مثال پیشرفته‌تر، ساختارِ $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ را درنظر بگیرید. ابتدا نشان دهید که:

تمرین ۳۷. هر نگاشت ایزومرفیسمِ $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ هر عدد گویا را حفظ می‌کند؛ یعنی برای هر $r \in \mathbb{Q}$ داریم $H(r) = r$.

ایزومرفیسمهای فراوانی از $\mathbb{C}$ به خودش وجود دارند. حتی تحت شرایطی می‌توان این ایزومرفیسمها را تنظیم کرد که برخی اعداد مورد علاقهٔ ما را به هم تصویر کنند؛ مثلا می‌شود یک ایزومرفیسم از $\mathbb{C}$ به $\mathbb{C}$ پیدا کرد که تک تک اعداد گویا را حفظ کند و عدد π را به عدد e ببرد. دربارهٔ ساختار حلقه‌ای اعداد مختلط و این ایزومرفیسمها در بخشهای آینده مفصل سخن خواهیم گفت.

۶. زبانِ $\mathcal{L} = \{R\}$ را در نظر بگیرید که در آن R یک نماد رابطه‌ای تک موضعی است. مجموعهٔ $\{1, 2, 3\}$ با رابطهٔ ترتیب اعداد یک $\mathcal{L}$ساختار است. همچنین گراف جهتداری که از سه راس a, b, c تشکیل شده است و در آن فقط از a به سمت b, c و از b به سمت c یال وجود دارد، نیز یک $\mathcal{L}$ ساختار است که با ساختار یادشده ایزومرف است.

۳.۳ رابطهٔ میان تعریف‌پذیری و ایزومرفیسمها

این بخش را با ذکر یک نکتهٔ لطیف و مرتبط به بحث، از جبر شروع می‌کنم. فرض کنید $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ یک چندجمله‌ای با ضرایب در اعداد گویا باشد. همچنین فرض کنید که $H : (\mathbb{C}, +, \cdot) \to (\mathbb{C}, +, \cdot)$ یک ایزومرفیسم باشد (که بنا به تمرینِ ۳۷ اعداد گویا را نقطه نقطه حفظ می‌کند). در این صورت اگر عدد مختلطِ t ریشه‌ای از این چندجمله‌ای باشد، عدد مختلطِ $H(t)$ نیز ریشه‌ای از این چندجمله‌ای است. علت این امر واضح است، زیرا می‌دانیم که

$$p(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n = 0$$

پس با اعمال ایزومرفیسمِ H داریم

$$H(p(t)) = H(a_0) + H(a_1)H(t) + \ldots + H(a_n)H(t)^n = 0$$

و از آنجا که H روی ضرایبِ گویای این چندجمله‌ای، ثابت است داریم

$$a_0 + a_1H(t) + \ldots + a_n(H(t))^n = 0$$

یعنی همان طور که گفتیم، $H(t)$ ریشهٔ چندجمله‌ای $p(x)$ است. یک ایزومرفیسمِ از $\mathbb{C}$ به $\mathbb{C}$ را یک اتومرفیسم می‌نامیم و واقعیت بالا است که مجموعهٔ ریشه‌های یک چندجمله‌ای با ضرایبِ در $\mathbb{Q}$ تحت اتومرفیسمها به صورت مجموعه‌ای حفظ می‌شود؛ اگر X مجموعهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای p در بالا باشد، می‌نویسیم:

$$\forall H \in aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q}) \quad H(X) = X.$$

در بالا $aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ گروه متشکل از اتومرفیسمهایی است که اعداد گویا را نقطه‌وار حفظ می‌کنند. شبیه این گفته، برای مجموعه‌های تعریف‌پذیر در یک ساختارِ مرتبهٔ اول نیز برقرار است: فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ساختار مرتبهٔ اول و $X \subseteq M^n$ یک مجموعهٔ تعریف‌پذیر با استفاده از پارامترهای در یک مجموعهٔ $A \subseteq M$ باشند. منظور از یک اتومرفیسم در $aut(\mathbb{M}/A)$ یک ایزومرفیسم از M به خودش است که A را نقطه‌وار حفظ می‌کند.

قضیه ۴۶. با فرضیات بالا، برای $H \in aut(\mathbb{M}/A)$ داریم $H(X) = X$؛ به بیان دیگر اگر $X \subseteq M^n$ یک مجموعهٔ تعریف‌پذیر با استفاده از پارامترهای موجود در یک مجموعهٔ A باشد، آنگاه هر اتومرفیسمی که نقطه‌وار حافظ A باشد، مجموعه‌وار حافظ X است.

اثبات. فرض کنید که مجموعهٔ X توسط فرمولِ φ و با استفاده از پارامترهای $a_1, \ldots, a_m \in A$ تعریف شده باشد؛ یعنی

$$X = \{(b_1, \ldots, b_n) \in M : \mathcal{M} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n, a_1, \ldots, a_m).$$

بنابراین اگر $(b_1, \ldots, b_n \in X)$ آنگاه $\mathcal{M} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n, a_1, \ldots, a_m)$. بنا به ایزومرفیسم بودن نگاشت H داریم

$$\mathcal{M} \models \varphi(H(b_1), \ldots, H(b_n), H(a_1), \ldots, H(a_m))$$

و از آنجا که H روی a_i ها که در A قرار دارند ثابت است داریم

$$\mathcal{M} \models \varphi(H(b_1), \ldots, H(b_n), a_1, \ldots, a_m)$$

اما عبارت بالا دقیقاً بدین معنی است که $(H(b_1), \ldots, H(b_n)) \in X$؛ به بیان دیگر $H(X) \subseteq X$. اثبات این را که $X \subseteq H(X)$ به عنوان تمرین رها می‌کنیم. □

این که تصویر عناصری که در یک مجموعهٔ تعریف‌پذیر قرار دارند تحت اتومرفیسمها نباید از آن مجموعه بیرون بیفتند، محک جالبی برای تعریف‌پذیری است که در مثالهای زیر بدان پرداخته‌ایم.

مثال ۴۷. قبلاً نشان دادیم که ترتیب اعداد صحیح، در ساختارِ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (با تمسک به قضیهٔ لاگرانژ) تعریف‌پذیر است. در این مثال ادعا می‌کنیم که اگر علامت ضرب را برداریم، دیگر ترتیب اعداد صحیح قابل تعریف نیست؛ یعنی در ساختارِ $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ترتیب قابل تعریف نیست. تابعِ

$$H : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$x \mapsto -x$$

یک اتومرفیسم است. فرض کنید که

$$X = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a < b\}$$

تعریف‌پذیر باشد. در این صورت باید تحت این اتومرفیسم حفظ شود؛ یعنی هرگاه $a < b$ باید داشته باشیم $H(a) < H(b)$. واضح است که برای نگاشتِ H به صورتی که ما در نظر گرفته‌ایم این امر برقرار نیست؛ مثلا $1 < 2$ اما $-1 > -2$. به بیان دیگر $(1, 2) \in X$ اما $(H(1), H(2)) \notin X$.

تمرین ۳۸. نشان دهید که در ساختارِ $(\mathbb{Z}, +, 0)$ مجموعهٔ اعداد طبیعی، $\mathbb{N}$ قابل تعریف است اگروتنهااگر ترتیب قابل تعریف باشد. نتیجه بگیرید که در ساختارِ $(\mathbb{Z}, +, 0)$ مجموعهٔ اعداد طبیعی، $\mathbb{N}$ قابل تعریف نیست.

تمرین ۳۹. نشان دهید که در ساختارِ $(\mathbb{R}, +, 0)$ مجموعهٔ اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ قابل تعریف نیست.

تمرین ۴۰. چند نگاشتِ ایزومرفیسمِ متفاوت می‌توان از $(\mathbb{N}, +, 0, 1)$ به $(\mathbb{N}, +, 0, 1)$ تعریف کرد؟

***تمرین ۴۱.** آیا در ساختارِ $(\mathbb{N}, +, 0)$ ترتیب اعداد قابل تعریف است؟

مثال ۴۸. مشابه مثال قبل، نشان می‌دهیم که مجموعهٔ تک عضویِ $\{i\}$ در ساختارِ $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ قابل تعریف نیست. همان گونه که در مثالِ فلان دیدیم، تابعِ

$$x + iy \mapsto x - iy$$

یک اتومرفیسم روی این ساختار است. واضح است که تصویر i تحت این اتومرفیسم، از مجموعهٔ تک‌عضویِ $\{i\}$ بیرون می‌افتد.

مثال ۴۹. به عنوان یک مثال سخت‌تر نشان می دهیم که مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، در ساختارِ $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ قابل تعریف نیست. دقت کنید که اتومرفیسمی که در مثال بالا بدان اشاره شد، برای رد عدم تعریف‌پذیری اعداد حقیقی به کار نمی‌آید زیرا اعداد حقیقی را حفظ می‌کند. فرض کنید r یک عدد حقیقی، و s یک عدد غیرحقیقی باشند که هیچکدام ریشهٔ هیچ چندجمله‌ای با ضرایب در $\mathbb{Q}$ نیستند. برای مثال $r = \pi$ و $s = \pi + i$. در این صورت، با کمک تکنیکهایی در جبر مقدماتی (که در فصل‌های آینده بدانها خواهیم پرداخت) اتومرفیسمی از $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ به خودش وجود دارد که r را به s می‌برد؛ یعنی تصویر یک عدد حقیقی تحت این اتومرفیسم یک عدد غیرحقیقی است. پس مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف‌پذیر نیست.

ملاحظه ۵۰. با ذکر نکته‌ای کنجکاوانه این بخش را به پایان می‌بریم. در ابتدای این بخش گفتیم که اتومرفیسمهای روی میدان اعداد مختلط، ریشه‌های یک چندجمله‌ای را جابه‌جا می‌کنند. با همان تکینکهای مقدماتی جبری، چیزی قوی از این را می‌توان ثابت کرد. در واقع اگر $p(x) \in \mathbb{Q}[X]$ یک چندجمله‌ای باشد و r_1, r_2 دو ریشهٔ آن (خارج از $\mathbb{Q}$) باشند، آنگاه یک اتومرفیسم از اعداد مختلط موجود است که r_1 را به r_2 می‌برد (و طبیعتاً $\mathbb{Q}$ را نقطه‌وار حفظ می‌کند). بخشی از جبر، به نام «نظریهٔ گالوا» به این می‌پردازد که چگونه با استفاده از اتومرفیسمها، ریشه‌های معادلات را مطالعه کنیم.

فصل ۴

تئوری‌های مرتبهٔ اول

احتمالاً تا به حال عبارتهایی مانند «نظریهٔ گروه‌ها»، «نظریهٔ میدانها» و یا «نظریهٔ گرافها» را شنیده‌اید. در نظریهٔ گروهها به بررسی فضاهایی پرداخته می‌شوند که در آنها «ویژگی گروه بودن» برقرار است. گروه بودن یعنی دارا بودن یک علامت جمع که ویژگی های مطلوبی داشته باشد؛ به این ویژگی‌ها «اصول نظریهٔ گروه‌ها» گفته می‌شود. مشابهاً نظریهٔ میدانها و گرافها نیز به فضاهایی می‌پردازند که ویژگی‌های مطلوب میدان یا گراف بودن را دارا هستند. در این فصل به تعمیم کلی مفهوم «نظریه» در منطق خواهیم پرداخت.

پیش از آنکه وارد بحث جدی‌تر شویم توجه خواننده را به نکته‌ای جلب می‌کنیم. زبانِ $\mathcal{L} = \{f, e\}$ را در نظر بگیرید که در آن f یک نماد تابعی دو موضعی و e یک نماد ثابت است. هم $\mathcal{M}_1 = (\mathbb{Z}, +, 0)$ و هم $\mathcal{M}_2 = (\mathbb{N}, +, 0)$ مشخصاً $\mathcal{L}$ساختار هستند. اما این گفته بدین معنی نیست که هر دو کاملاً شبیه هم هستند. برای مثال جملهٔ زیر در $\mathcal{M}_1$ درست است ولی در $\mathcal{M}_2$ درست نیست:

$$\forall x \quad \exists y \quad f(x, y) = e$$

ترجمان جملهٔ بالا در هر دو ساختارِ $\mathcal{M}_1$، $\mathcal{M}_2$ این است که هر عنصر دارای وارون جمعی است؛ واضح است که در $\mathcal{M}_2$ این ویژگی برقرار نیست. در واقع $\mathcal{M}_1$ علاوه بر این که $\mathcal{L}$ساختار است ویژگی‌های «گروه بودن» را نیز داراست. این ویژگی، در واقع یک «ویژگی مشترک» برای ساختارهایی است که آنها را گروه می‌نامیم. در این فصل خواهیم دید که ویژگی‌های مطلوب یک $\mathcal{L}$ساختار، در مفهوم یک «نظریه» یا یک «تئوری» مرتبهٔ اول گنجانده می‌شود.

۱.۴ تعریف تئوری مرتبهٔ اول

تعریف ۵۱. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد. منظور از یک $\mathcal{L}$تئوریِ مرتبهٔ اولِ T یک مجموعه (متناهی یا متناهی) از $\mathcal{L}$جمله‌ها است. به هر $\mathcal{L}$جمله‌ای که در یک $\mathcal{L}$تئوری قرار دارد، یک «اصل» در آن تئوری گفته می‌شود.

پس یک $\mathcal{L}$ تئوری یک مجموعه از «اصول» است و هر اصل، یک $\mathcal{L}$ جمله است (دقت کنید که جمله، و نه فرمول؛ یعنی نداشتن متغیر آزادْ شرط است). در یک زبانِ یکسانِ $\mathcal{L}$ می‌توان $\mathcal{L}$تئوریهای بسیار متنوعی داشت.

مثال ۵۲ (تئوری گروهها). در زبانِ $\mathcal{L}_{group} = \{+, 0\}$ تئوری «گروه‌ها» که آن را با T_{group} نشان می‌دهیم، مجموعهٔ متشکل از جملات زیر است:

$$\forall x, y, z \quad x + (y + z) \doteq (x + y) + z$$
$$\forall x \exists y \quad x + y \doteq 0.$$

با اضافه کردن جملهٔ زیر به تئوری گروه‌ها، به تئوریِ گروه‌های آبلی می‌رسیم، که می‌توانیم آن را با $T_{ab-group}$ نشان دهیم.

$$\forall x, y \quad x + y \doteq y + x$$

دقت کنید که نیازی نیست که مانند مثال بالا، هر $\mathcal{L}$ تئوری یک «اسم» داشته باشد. خودمان در مثال بالا، آن مجموعهٔ جملات را که یک $\mathcal{L}$تئوری است، تئوری گروه‌ها نامیدیم. با اضافه کردن یا کم کردن جملات به این تئوری، تئوری‌های دیگری به دست می‌آید که نیازی نیست اسم خاصی داشته باشند.

نکتهٔ دیگری که خواننده احتمالا در بالا بدان دقت کرده‌است این است که در نوشتن تئوری بالا دوباره تسامح به خرج داده‌ایم و زبان روزمرهٔ ریاضی را ارجحیت داده‌ایم؛ وگرنه مثلاً جملهٔ اول را باید به صورت زیر می‌نوشتیم:

$$\forall x \forall y \forall z \quad +(x, +(y, z)) \doteq +(+(x, y), z).$$

مثال ۵۳ (تئوری حلقه‌ها). در زبانِ $L_{ring} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ تئوری متشکل از جملات زیر را تئوریِ حلقه‌ها می‌نامیم و آن را با T_{ring} نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
&\forall x, y, z \quad x + (y + z) \doteq (x + y) + z \\
&\forall x \exists y \quad x + y \doteq 0 \\
&\forall x, y \quad x + y \doteq y + x \\
&\forall x, y, z \quad x \cdot (y \cdot z) \doteq (x \cdot y) \cdot z \\
&\forall x, y, z \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).
\end{aligned}$$

با اضافه کردن جملهٔ زیر به تئوری بالا، به تئوری حلقه‌های جابه‌جایی می‌رسیم که می‌توانیم آن را با $T_{com-ring}$ نشان دهیم:

$$\forall x, y \quad x \cdot y \doteq y \cdot x$$

نیز با اضافه کردن جملهٔ زیر به تئوری حلقه‌های جابجایی، به تئوری میدانها می‌رسیم که آن را عموماً با T_{field} نشان می‌دهیم:

$$\forall x \exists y \quad x \cdot y \doteq 1$$

مثال ۵۴ (تئوری گرافها). در زبانِ $\mathcal{L}_{graph} = \{R\}$ که تنها از یک رابطهٔ تک موضعیِ R تشکیل شده است، تئوری متشکل از جملات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\forall x, y \quad R(x, y) &\leftrightarrow R(y, x) \\
\forall x \quad \neg R(x, x)
\end{aligned}$$

تئوری بالا را تئوری گراف (های بدون طوق و ناجهتدار) می‌نامیم و با T_{graph} نشان می‌دهیم.

مثال ۵۵. گفتیم که هر مجموعه از جمله‌ها در یک زبان دلخواه، یک تئوری است. در زبانِ $\mathcal{L} = \varnothing$ مجموعهٔ متشکل از تک جملهٔ زیر یک تئوری است:

$$\exists x \quad x \neq x$$

مثال ۵۶. اگر $\mathcal{L}$ یک زبانِ مرتبهٔ اول دلخواه باشد و φ یک $\mathcal{L}$ جملهٔ دلخواه، آنگاه مجموعهٔ $\{\varphi, \neg\varphi\}$ یک $\mathcal{L}$تئوری است.

مثال ۵۷. یک مثال مهم از تئوری‌های مرتبهٔ اول، تئوری مجموعه‌هاست، که در زبانِ $L = \{\in\}$ نوشته می‌شود که تنها شامل یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است. تئوری مجموعه‌ها، که آن را با **ZFC** نشان می‌دهیم، حاوی اصول مهمی مانند انتخاب، انتظام و وجود مجموعهٔ نامتناهی است. در بخش‌های پیشرفته‌تر این کتاب دربارهٔ تئوری مجموعه‌ها صحبت خواهیم کرد.

ملاحظه ۵۸. از این به بعد وقتی می‌گوییم T یک تئوری است، منظورمان این است که T یک $\mathcal{L}$ تئوری برای یک زبانِ مرتبهٔ اولِ $\mathcal{L}$ است.

تمرین ۴۲. فرض کنید $L = \{E\}$ یک زبانِ دارای یک نماد رابطه‌ای دوموضعی E باشد. در این زبان:

۱. تئوری روابط هم‌ارزی را بنویسید.

۲. تئوری ترتیبهای خطی را بنویسید.

۲.۴ مدلهای یک تئوری مرتبهٔ اول

همان طور که می‌دانید یک ساختار ریاضی را زمانی یک گروه می‌نامیم که روی آن یک عمل جمع وجود داشته باشد که در اصول نظریهٔ گروه‌ها صدق کند. در بخش قبل، تئوری گروه‌ها را معرفی کردیم. به بیان منطقی می‌گوییم یک ساختار، گروه است هرگاه مدلی برای تئوری گروه‌ها باشد. در زیر این گفته را دقیق‌تر کرده‌ایم.

تعریف ۵۹. فرض کنید که $\mathcal{L}$ یک زبانِ مرتبهٔ اول، T یک $\mathcal{L}$ تئوری و $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ ساختار باشند. می‌گوییم $\mathcal{M}$ یک مدل برای تئوریِ T است و می‌نویسیم $\mathcal{M} \models T$ هرگاه برای هر جملهٔ $\varphi \in T$ داشته باشیم $\mathcal{M} \models \varphi$.

طبیعتاً اگر جمله با جملاتی در $\mathcal{L}$ تئوریِ T موجود باشند که در یک $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathcal{M}$ برقرار نباشند، می‌نویسیم

$$\mathcal{M} \not\models T.$$

به بیان بهتر، $\mathcal{M} \not\models T$ اگروتنهااگر حداقل یک جملهٔ $\varphi \in T$ موجود باشد به طوری که $\mathcal{M} \models \neg\phi$.

مثال ۶۰. هر گروه، مدلی برای T_{group} است که در مثالِ ۵۲ معرفی شد. به طور خاص $(\mathbb{Z}, +, 0) \models T_{group}$. همچنین $(\mathbb{Z}_3, \dot{+}, \bar{0}) \models T_{ab-group}$ اما $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) \not\models T_{group}$ زیرا

$$(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) \not\models \forall x \quad \exists y \quad x + y \doteq 0$$

یعنی یکی از جملاتی که در T_{group} داریم در ساختارِ $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ برقرار نیست. همچنین هر حلقه، مدلی برای تئوری حلقه‌هاست که در مثال ۵۳ معرفی شد؛ به طور خاص $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1) \models T_{ring}$ و $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) \models T_{ring}$. فرض کنید M مجموعهٔ متشکل از همهٔ ماتریسهای دو در دوی به شکل $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد به طوری که $\det A \neq 0$. همچنین فرض کنید که $\oplus$ و $\otimes$ به ترتیب اعمال جمع و ضرب ماتریسها باشند. در این صورت

$$(M, \oplus, \otimes, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) \models T_{ring} \cup \{\forall x \exists y \quad x \cdot y \doteq 1\}$$

مثال ۶۱.

۱. در زبانِ $\mathcal{L}_{group}$ یک تئوری T بنویسید به طوری که اگر $\mathcal{M} \models T$ آنگاه $\mathcal{M}$ یک گروه آبلی سه عضوی باشد.

پاسخ. قرار دهید $T = T_{ab-group} \cup \{\varphi\}$ که در آن φ جملهٔ زیر است:

$$\exists x, y, z \quad \Big((x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \wedge \forall t \quad (t \doteq x \vee t \doteq y \vee t \doteq z)\Big)$$

۲. زبانِ $\mathcal{L} = \{R\}$ را در نظر بگیرید که تنها یک نماد رابطه‌ای دوموضعی دارد. یک $\mathcal{L}$ تئوریِ T بنویسید به طوری که هرگاه $\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}}) \models T$ و M متناهی باشد، آنگاه تعداد اعضای M زوج باشد.

پاسخ. تئوریِ T متشکل از جمله‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\forall x \quad R(x, x)$$
$$\forall x, y \quad \big(R(x, y) \leftrightarrow R(y, x)\big)$$
$$\forall x, y, z \quad \Big(\big(R(x, y) \wedge R(y, z)\big) \rightarrow R(x, z)\Big)$$
$$\forall x \exists y_1, y_2 \quad \Big(\big(y_1 \neq y_2 \wedge R(x, y_1) \wedge R(x, y_2)\big) \wedge \forall z \quad (R(x, z) \rightarrow (z \doteq y_1 \vee z \doteq y_2))\Big).$$

فرض کنید $\mathcal{M} = (M, R^{\mathcal{M}})$ مدلی برای جملات بالا باشد. بنا به سه‌جملهٔ اول، $R^{\mathcal{M}}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است. بنا به جملهٔ چهارم، کلاس هم‌ارزی هر عنصر در این رابطه دارای فقط دو عنصر است. پس اگر تعداد اعضای جهان M متناهی باشد، عدد ۲ آن را عاد می‌کند.

۳. یک تئوری T در یک زبان مناسبِ $\mathcal{L}$ بنویسید به طوری که $\mathcal{M} \models T$ اگروتنهااگر M یک فضای برداری روی میدانِ $\mathbb{R}$ باشد.

یک گروه به صورت $(M, +, 0)$ است که اعضای آن در اعداد حقیقی نیز ضرب می‌شوند؛ یعنی برای هر عدد حقیقیِ λ و هر عنصرِ $x \in M$ عنصری به نام λx در M وجود دارد. برای جمعی که در فضای برداری وجود دارد می‌توان یک تابع جمع در زبان قرار داد ولی برای ضرب در اسکالرهایی که در میدان اعداد حقیقی قرار دارند، نمی‌توان یک نماد ضرب در زبان قرار داد. برای رفع این مشکل، زبان را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathcal{L} = \{+, 0\} \cup \{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$$

در زبانِ بالا تابع جمع و نماد ثابت صفر به ترتیب برای جمع و صفر فضای برداری در نظر گرفته شده‌اند. همچنین برای هر عدد حقیقیِ λ یک تابعِ تک‌موضعی f_λ در زبان قرار داده شده است (پس واضح است که زبانِ بالا ناشماراست). در واقع قرار است که $f_\lambda(x)$ نقشِ ضربِ λ در x را برای ما بازی کند. در این زبان، تئوری فضاهای برداری روی میدانِ اعداد حقیقی از اجتماع تئوری گروه‌های آبلی با جملات زیر تشکیل شده است:

$$f_\lambda(a + b) = f_\lambda(a) + f_\lambda(b)$$
$$f_\lambda(f_{\lambda'}(a)) = f_{\lambda\lambda'(a)}$$

پس اگر $\mathcal{M} = (M, +, 0, f_\lambda^{\mathcal{M}})$ یک $\mathcal{L}$ ساختار باشد که در اصول بالا صدق کند، $f_\lambda^{\mathcal{M}}(x)$ را می‌توان با λx نشان داد.

تمرین ۴۳. در زبانِ $L = \{E\}$ با یک نماد رابطه‌ای دوموضعی، یک تئوری بنویسید که برخی مدلهای آن نامتناهی باشند، و اندازهٔ مدلهای متناهی (یعنی تعداد اعضای جهان هر کدام از آن مدلها) آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

مثال ۶۲. در زبانِ $L = \varnothing$ یک تئوری T بنویسید به طوری که اگر $\mathcal{M} \models T$ آنگاه M نامتناهی باشد.

اثبات. یک مجموعه، زمانی نامتناهی است که حداقل $\aleph_0$ عنصر در آن موجود باشد؛ یعنی تابعی یک به یک از مجموعهٔ اعداد طبیعی به مجموعهٔ مورد نظر ما موجود باشد. اما وجود تابع از $\mathbb{N}$ به جهان یک ساختار را نمی‌توان در یک زبانِ مرتبهٔ اول نوشت که قرار است سورهای آن روی عناصر یک جهان مشخص عمل کنند. بنابراین خواستهٔ این مثال را با استفاده از «حداقل شمارا» جمله برآورده می‌کنیم. یعنی لیستی از جملاتِ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در نظر می‌گیریم که هر φ_n متضمن وجود n عنصر متفاوت در جهان است. برای مثال φ_3 که وجود حداقل سه عنصر را تضمین می‌کند، به صورت زیر است:

$$\varphi_3 = \exists x_1, x_2, x_3 \quad (x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_3).$$

قرار می‌دهیم: $T = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. واضح است که اگر $\mathcal{M} \models T$ آنگاه M نمی‌تواند متناهی عنصر داشته باشد. □

مثال ۶۳. در زبانِ $L = \{E\}$ که در مثال قبل معرفی شد، یک تئوری بنویسید به طوری که $\mathcal{M} = (M, E^{\mathcal{M}}) \models T$ در $E^{\mathcal{M}}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی باشد که دارای تنها دو کلاس است، و یکی از این دو کلاس نامتناهی است.

فرض کنید $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ هر دو، مدل یک تئوری T باشند. در این صورت جملات موجود در تئوری T در هر دوی آنها برقرار است. اما از این نتیجه نمی‌شود که هر جملهٔ دلخواهی که در یکی برقرار باشد، در دیگری نیز برقرار باشند. در مثالها و تمرینهای زیر به این نکته پرداخته‌ایم.

مثال ۶۴. در زبانِ $L = \{<\}$ تئوری T_{order} را متشکل از جملات زیر در نظر بگیرید:

$$\forall x \quad \neg(x < x)$$
$$\forall x, y \quad x < y \to \neg y < x$$
$$\forall x, y \quad ((x < y) \wedge (y < z) \to (x < z))$$

واضح است که این جملات هم در $(\mathbb{Z}, <)$ و هم در $(\mathbb{Q}, <)$ درست هستند. اما در عین حال جملهٔ زیر

$$\forall x, y \quad ((x < y) \to \exists z \quad x < z < y)$$

در $(Q,<)$ درست است اما در $(\mathbb{Z},<)$ درست نیست. تئوری

$$T_{order} \cup \{\forall x,y \quad ((x<y) \to \exists z \quad x<z<y)\} \cup \{\forall x \exists y,z \quad y<x<z\}$$

را تئوری ترتیبهای خطی چگالِ بدون ابتدا و انتها [1] می‌نامیم و آن را با T_{DLO} نشان می‌دهیم. پس $(\mathbb{Q},<) \models T_{DLO}$ و $(\mathbb{Z},<) \not\models T_{DLO}$. از طرفی تئوریِ

$$T_{order} \cup \{\forall x \exists y,z \quad y<x<z \wedge \forall t(t \neq x \to t \leqslant y \vee t \geqslant z)\}$$

تئوری ترتیبهای خطی گسسته بدون ابتدا و انتها نامیده می‌شود و این تئوری را با T_{DILO} نشان می‌دهیم. پس $(\mathbb{Z},<) \models T_{DILO}$ اما $(\mathbb{Q},<) \not\models T_{DILO}$.

مثال ۶۵. دو ساختارِ $(\mathbb{Q},+,0)$ و $(\mathbb{Z},+,0)$ هر دو مدلهای تئوری T_{group} هستند. حال جملهٔ φ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\forall x \quad \exists y \quad y+y \doteq x$$

واضح است که $(\mathbb{Q},+,0) \models \varphi$ و $(\mathbb{Z},+,0) \not\models \varphi$.

تمرین ۴۴. می‌دانیم که هم $(\mathbb{Z},+,0)$ و هم $(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},+_{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}})$ مدلهایی برای نظریهٔ گروه‌ها هستند. یک جملهٔ φ بنویسید که در یکی از آنها برقرار باشد و در دیگری برقرار نباشد.

تمرین ۴۵. یک جمله در زبان گروه‌ها بنویسید که در $(\mathbb{Z}_3,\bar{+},\bar{0})$ برقرار باشد ولی در $(\mathbb{Z},+,0)$ برقرار نباشد.

اگر تئوری T دارای این ویژگی خاص باشد که هر جمله‌ای یا همزمان در همهٔ مدلهای آن برقرار است، یا همزمان در هیچ کدام از مدلهای آن برقرار نیست، به آن یک **تئوری کامل** گفته می‌شود. در فصل ۶ به تئوری‌های کامل پرداخته‌ایم.

تمرین ۴۶. فرض کنید که $\mathcal{M}$ یک L ساختار باشد. تئوری T را به صورت زیر تعریف کنید:

$$T = \{\varphi : \mathcal{M} \models \varphi\}$$

نشان دهید که T یک تئوری کامل است.

۳.۴ محدودیتها*

همان طور که در بخش بالا دیدیم، بسیاری از ساختارهای آشنای ریاضی را می‌توان «اصل‌بندی» کرد؛ یعنی می‌توان آنها را مدل یک تئوریِ مرتبهٔ اول دانست. حقیقت آن است که نوشتن تئوریِ مرتبهٔ اول، به صورتی که در فصل قبل توضیح داده شد، برای همهٔ پدیده‌های ریاضی ممکن نیست؛ اما علت عدم امکان این امر تنها زمانی قابل توضیح است که خواننده چندین فصل پیش رو را خوانده باشد. در این بخش فقط به برخی چالشهای اصل‌بندی اشاره می‌کنیم تا صورت سوال را در ذهن خواننده باز کنیم.

مثال ۶۶. در مثالِ ۶۱ برای گروه‌های آبلی سه عضوی یک تئوری معرفی کردیم. آیا می‌توانید یک اصل بندی برای گروه‌های آبلی نامتناهی معرفی کنید؟ برای گروه‌های آبلی متناهی چه طور؟

پاسخ. برای این که بیان کنیم که یک گروه آبلی، نامتناهی است، باید به نحوی بگوییم که حداقل شمارا عنصر دارد؛ مثلاً به نحوی بگوییم که برای هر عدد طبیعیِ $n \in \mathbb{N}$ گروه ما حداقل ندازهٔ n عنصر دارد. اما همان طور که تا اینجا دریافته‌اید امکان استفاده از سوری به صورت $\forall n \in \mathbb{N}$ را نداریم (قبل گفتیم که دامنهٔ سورها پس معنی کردن جمله، همان ساختاری است که جمله در آن معنی می‌شود). برای رهایی از این مشکل، از ایدهٔ دیگری استفاده می‌کنیم. تئوری T را یک تئوری بگیرید که از اجتماع $T_{ab-group}$ با نامتناهی جملهٔ زیر تشکیل شده است:

$$\exists x_1, x_2$$

$$\exists x_1, x_2, x_3 \quad (x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)$$

$$\exists x_1, x_2, x_3, x_4 \quad (x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_4) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4) \wedge (x_3 \neq x_4)$$

$$\vdots$$

[1] dense linear order

در واقع در تئوری بالا به ازای هر طبیعیِ n یک جمله داریم که وجود n عنصر متمایز را متضمن شود (بیایید این جمله را با ψ_n نشان دهیم).) اگر $\mathcal{M} = (M, +, 0)$ مدلی برای تئوری T باشد، از یک طرف، گروهی آبلی است و از طرف دیگر به ازای هر طبیعیِ n حداقل n عنصر دارد؛ پس گروهی آبلی و نامتناهی است.

ما پاسخ بخش دوم این مثال کمی چالش‌برانگیز است. چگونه در قالب یک تئوری مرتبهٔ اول از ساختارمان بخواهیم که متناهی باشد. متناهی بودن یک ساختار بدین معنی است که یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد به طوری که در ساختارِ ما دقیقاً n عنصر وجود داشته باشد. پس نیاز به یک «یا» ی نامتناهی داریم؛ نیاز به جملاتی داریم که بگوید ساختار ما یا یک عضوی است،یا دو عضوی است،یا سه عضوی است، الی آخر. اما همان طور که در ساخت فرمولهای مرتبهٔ اول دیدید، هر فرمول مرتبهٔ اول متناهی است و نمی‌توان چنین یای نامتناهی را به صورت مرتبهٔ اول نوشت. اما سوال این است که آیا راه خلاقانهٔ دیگری برای بیان متناهی بودن یک گروه وجود دارد، یا اساساً این را که یک گروه متناهی است، نمی‌توان به صورت یک تئوری مرتبهٔ اول نوشت. پاسخ این سوال را در فصلهای بعدی خواهیم داد.

تمرین ۴۷. منظور از یک گروه بخش‌پذیر، گروهی است مانند G به طوری که برای هر $x \in G$ و هر عدد طبیعیِ $n \in \mathbb{N}$ یک عنصرِ $y \in G$ موجود است به طوری که $ny = x$. یک تئوری مرتبهٔ اول برای گروه‌های بخش‌پذیر بنویسید.

مثال ۶۷ (تئوری میدانهای بستهٔ جبری)**.** تئوری میدانها در زبانِ L_{ring} (که در مثال فلان معرفی شد) به صورت زیر است:

$$T_{com-ring} \cup \{\forall x \quad \exists y \quad x \cdot y = 1\}.$$

به میدانی که در آن هر چندجمله‌ای دارای ریشه باشد،یک میدانِ بستهٔ جبری گفته می‌شود. برای نوشتن تئوری میدانهای بستهٔ جبری، باید برای هر عدد طبیعی، n یک جمله بنویسیم که بیانگر این باشد که هر چندجمله‌ای درجهٔ n در میدان مورد نظر ما ریشه دارد. پس همهٔ جملاتِ φ_n در پایین را باید به تئوری میدانها اضافه کنیم:

$$\varphi_n : \forall a_0, \ldots, a_n \quad \exists x \quad a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

مثال ۶۸ (میدانهای با مشخصهٔ صفر)**.** منظور از یک میدانِ با مشخصهٔ صفر، میدانی است که در آن

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in K \quad \underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ مرتبه}} \neq 0$$

دوباره به علت محدویت سورها، تنها راه نوشتن یک تئوری برای یک میدان با مشخصهٔ صفر این است که تئوریِ میدانها را با همهٔ جملاتِ زیر اجتماع بگیریم:

$$\psi_n : \forall x \quad \underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ مرتبه}} \neq 0$$

اما یک سوال در بخشهای دیگر درس بدان خواهیم پرداخت این است که آیا می‌توان یک تئوری برای میدانهایی نوشت که مشخصهٔ آنها صفر نیست؟

تمرین ۴۸.

۱. یک تئوری برای گرافهای کامل بنویسید.

۲. به این فکر کنید که آیا می‌توان یک تئوری برای گرافهای همبند نوشت؟

خلاصهٔ فصل. فرض کنید L یک زبان مرتبهٔ اول باشد. به هر مجموعه از جملات در زبانِ L یک نظریه گفته می‌شود. Lساختارهایی که در آن همهٔ جملات موجود در آن نظریه برقرارند، مدلهای آن نظریه نامیده می‌شوند. در واقع یک نظریهٔ مرتبهٔ اول برای جدا کردن دسته‌ای از Lساختارهای دارای ویژگی‌های مشترک است.

فصل ۵

استلزام

بگذارید بحث را با یک تمرین ساده در نظریهٔ گروه‌ها آغاز کنیم: نشان دهید که در هر گروه آبلی، وارون یک عنصر یکتاست.

احتمالا هر دانشجوی ریاضی تمرین بالا را به صورت پیش رو پاسخ می‌دهد: فرض می‌کنیم $(G, \times, 1_G)$ یک گروه دلخواه باشد و $a \in G$ یک عنصر دلخواه باشد. فرض کنید که b_1, b_2 دو وارون عنصر a در G باشند. پس در این گروه G اتفاق زیر رخ می‌دهد:

$$a \times b_1 = a \times b_2 (= 1_G).$$

چون G گروه است می‌دانیم که در آن می‌شود دو طرف تساوی را در یک عدد ضرب کرد؛ پس

$$b_1 \times (a \times b_1) = b_1 \times (a \times b_2)$$

و از آنجا که G گروه است می‌دانیم که ضرب در آن انجمنی است، پس باز در همین گروه G داریم:

$$(b_1 \times a) \times b_1 = (b_1 \times a) \times b_2$$

بنابراین

$$b_1 = b_2.$$

تمرین بالا را می‌شد بدین صورت نیز بیان کرد: «گروه آبلی بودن مستلزم یکتا بودن وارون هر عنصر است»؛ و روش اثبات هم بدین گونه بود که نشان دادیم که اگر ساختاری گروه باشد در آن ساختار وارون هر عنصر یکتاست. تعریف زیر از همین ایده بهره گرفته است.

تعریف ۶۹ (استلزام). فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبهٔ اول، T یک $\mathcal{L}$تئوری و φ یک $\mathcal{L}$جمله باشد (که ممکن است φ از جملات موجود در T باشد یا جمله‌ای غیر از آنها). می‌گوییم تئوری T مستلزم جملهٔ φ است و می‌نویسیم:

$$T \models \varphi$$

هرگاه در هر مدلِ تئوری T جملهٔ φ درست باشد؛ به بیان دیگر،برای هر $\mathcal{L}$ ساختارِ $\mathcal{M}$ اگر $\mathcal{M} \models T$ آنگاه $\mathcal{M} \models \varphi$. باز به بیان دیگر، برای برای هر $\mathcal{L}$ ساختارِ $\mathcal{M}$ اگر برای هر $\psi \in T$ داشته باشیم $M \models \psi$ آنگاه $M \models \varphi$. اگر تئوری T مستلزم φ نباشد، می‌نویسیم $T \not\models \varphi$.

پس حکم تمرین ابتدای این بخش را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T_{ab-group} \models \forall x \forall y_1 \forall y_2 \Big((x \cdot y_1 \doteq x \cdot y_2 \doteq 1) \to y_1 \doteq y_2 \Big)$$

تمرین ۴۹. چند استلزام دیگر در نظریهٔ گروه‌های آبلی مثال بزنید.

ملاحظه ۷۰. بنا به تعریفِ ۶۹، عبارتِ $T \not\models \varphi$ بدین معنی است که یک $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathcal{M}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{M} \models T$ اما $\mathcal{M} \not\models \varphi$. برای مثال، همان تئوریِ گروه‌های آبلی مستلزم جملهٔ زیر نیست:

$$\psi : \exists x_1 \exists x_2 \quad \Big((x_1 \neq x_2 \wedge \forall y \quad (y \doteq x_1 \vee y \doteq x_2)) \Big)$$

جملهٔ بالا بیانگر این است که فقط دو عنصر وجود دارد. می‌دانیم که مثلا $(\mathbb{Z}_3, \dot{+}, \dot{0})$ یک گروه آبلی است که جملهٔ بالا در مورد آن نادرست است؛ زیرا این گروه سه عنصر دارد.

ملاحظه ۷۱. این که $T \not\models \varphi$ معادل با این که $T \models \neg\varphi$ نیست. برای مثال، همان جملهٔ ψ را در ملاحظهٔ بالا در نظر بگیرید. گفتیم که $T_{ab-group} \not\models \psi$ زیرا گروه‌های آبلی غیردوعضوی وجود دارند. اما از طرفی این گونه نیست که $T_{ab-group} \models \neg\psi$ زیرا گروه‌های آبلی دوعضوی هم وجود دارند. پس برای یک تئوریِ T و یک جملهٔ φ ممکن است که همزمان دو عبارت زیر درست باشند:

$$T \not\models \varphi \qquad T \not\models \neg\varphi.$$

در ملاحظهٔ بالا گفته شد که این که $T \not\models \varphi$ بدین معنی است که T مدل یا مدلهایی دارد که در آنها $\neg\varphi$ برقرار است؛ بیان دیگر این گفته، تمرین زیر است.

تمرین ۵۰. $T \not\models \varphi$ اگروتنهااگر $T \cup \{\neg\varphi\}$ دارای یک مدل باشد.

ملاحظه ۷۲. بیان دیگری از ملاحظهٔ بالا نیز سودمند است: این گونه نیست که برای یک تئوری T و یک جملهٔ φ داشته باشیم

$$T \models \varphi \text{ یا } T \models \neg\varphi$$

یعنی این گونه نیست که یا در همهٔ مدلهای یک تئوری جملهٔ φ درست باشد، یا در همهٔ مدلهای تئوری مورد نظر، نقیض این جمله درست باشد. ممکن است در برخی مدلهای تئوریِ T جملهٔ φ درست باشد و در برخی دیگر از مدلهای تئوریِ T جملهٔ $\neg\varphi$ درست باشد. این امر در مورد تئوری‌های کاملا طبیعی است؛ مثلاً برخی گرافها منتظم هستند و برخی گرافها منتظم نیستند. یعنی در برخی مدلهای تئوری گراف، جمله کامل بودن درست است و در برخی نیست. به عنوان مثالی دیگر، برخی گروه‌ها آبلی هستند و برخی گروه‌ها آبلی نیستند. یعنی تئوری گروه‌ها نه مستلزم جملهٔ آبلی بودن است و نه مستلزم جملهٔ ناآبلی بودن. باز به عنوان یک مثال دیگر، برخی حلقه‌ها میدان هستند و برخی‌ها نیستند؛ یعنی تئوری حلقه‌ها نه مستلزم میدان بودن است و نه مستلزم نقیض میدان بودن.

ملاحظه ۷۳. واضح است که اگر $\varphi \in T$ (یعنی زمانی که جملهٔ φ یکی از جملاتِ تئوری مورد نظر باشد) آنگاه $T \models \varphi$. برای مثال در هر گروه، هر عنصری وارون دارد، زیرا این گفته جزو اصول نظریهٔ گروه‌هاست. حال فرض کنید φ یک جملهٔ مرتبهٔ اول باشد و قرار دهید $T = \{\varphi, \neg\varphi\}$ را در نظر بگیرید. برای این تئوری داریم:

$$T \models \varphi \qquad T \models \neg\varphi.$$

تعریف ۷۴. می‌گوییم تئوریِ T مستلزم تناقض است (یا یک تئوری تناقض‌آمیز است) هرگاه یک جملهٔ φ وجود داشته باشد به طوری که

$$T \models \varphi \text{ و } T \models \neg\varphi.$$

قبلاً گفتیم که اگر $\mathcal{M}$ یک ساختارِ مرتبهٔ اول باشد (بنا به تعریفِ صدق فرمولها) نمی‌توان همزمان دو عبارت زیر را داشت:

$$\mathcal{M} \models \varphi \text{ و } \mathcal{M} \models \neg\varphi$$

پس به آسانی به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

نتیجه ۷۵. اگر تئوریِ T مستلزم تناقض باشد آنگاه این تئوری هیچ مدلی ندارد.

قضیه ۷۶. اگر تئوریِ T مستلزم تناقض باشد، آنگاه مستلزم هر جمله‌ای است؛ به بیان دیگر برای هر جملهٔ ψ خواهیم داشت

$$T \models \psi.$$

اثبات. فرض کنید T یک تئوریِ مستلزمِ تناقض باشد. بنا به نتیجهٔ قبلی، تئوریِ T هیچ مدلی ندارد. پس جملهٔ زیر به انتفاء مقدم دربارهٔ تئوریِ T درست است:

اگر $\mathcal{M}$ مدلی برای تئوری T باشد آنگاه $\mathcal{M}$ مدلی برای جملهٔ ψ است.

□

پس وقتی یک تئوری، مستلزم یک تناقض باشد، مستلزم همه چیز، از جمله همهٔ تناقضات است. برای راحت شدن ارجاع دهی به تناقضات برای تناقض خاص می‌توانیم نماد معرفی می‌کنیم:

$$\bot: \Big(\forall x x \doteq x \wedge \exists x x \neq x\Big)$$

پس از این به بعد برای بیان این که تئوری T مستلزم تناقض است، خواهیم نوشت:

$$T \models \bot\ .$$

تا اینجا گفتیم که یک تئوری که مستلزم تناقض باشد، هیچ مدلی ندارد. عکس این گفته نیز به به صورتی که در زیر بیان شده، برقرار است.

اگر یک تئوری T مستلزم تناقض نباشد، دارای مدل است.

در واقع این که $T \not\models \bot$ یعنی T مدلی دارد که در آن تناقض رخ نمی‌دهد، به طور خاص T دارای مدل است.

قضیه ۷۷. موارد زیر با هم معادلند:

۱. $T \models (\varphi \to \psi)$.

۲. $T \cup \{\varphi\} \models \psi$.

اثبات. اولی بدین معناست که هر هر مدلِ $\mathcal{M}$ از T جملهٔ $\varphi \to \psi$ صادق است. دومی بدین معناست که در یک مدل T که مدلِ جملهٔ φ هم هست، جملهٔ ψ برقرار است. معادل بودن این دو مشخص است. □

ملاحظه ۷۸. دو عبارت زیر لزوماً با هم معادل نیستند:

۱. $T \models (\varphi \to \psi)$

۲. اگر $T \models \varphi$ آنگاه $T \models \psi$.

راهنمایی برای اثبات. دقت کنید که عبارت اول بدین معنی است که در هر مدلِ تئوری T جملهٔ $\varphi \to \psi$ درست است؛ اما جملهٔ دوم می‌گوید که اگر جملهٔ φ به طور همزمان در همهٔ مدلهای T صادق باشد، آنگاه جملهٔ ψ نیز به طور همزمان در همهٔ مدلهای T صادق است. فرض کنید T تئوری گروه‌ها باشد. آنگاه عبارت زیر درست است:

اگر همهٔ گروه‌ها شش عضوی باشند، همهٔ گروه‌ها آبلی هستند.

علت درستی عبارت بالا، انتفاء مقدم است؛ چون این گونه نیست که همهٔ گروه‌ها شش عضوی باشند. در عین حال عبارت زیر درست نیست:

اگر گروهی شش عضوی باشد آبلی است.

زیرا گروه شش عضوی غیرآبلی هم وجود دارد (گروه تقارنهای یک مثلث). □

تمرین ۵۱. نشان دهید که $T \cup \{\varphi\} \models \bot$ اگروتنهااگر $T \models \neg\varphi$.

تمرین ۵۲. آیا عبارت زیر درست است؟

$$T \models (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \Big(T \models \varphi \text{ یا } T \models \psi\Big).$$

یک مثال از تئوری در یک زبانِ $\mathcal{L}$ تئوری‌ای است که هیچ جمله‌ای ندارد؛ یعنی تئوریِ $T = \varnothing$. واضح است که هر $\mathcal{L}$ساختاری مدلی برای این تئوری است؛ زیرا به انتقاء مقدم اگر جمله‌ای در این تئوری باشد در $\mathcal{M}$ درست است.

تعریف ۷۹. می گوییم جملهٔ φ یک جملهٔ همواره درست است هرگاه

$$\varnothing \models \varphi.$$

پس یک جمله، زمانی همواره درست است که در هر $\mathcal{L}$ساختاری درست باشد. در بخشهای دیگر درس دربارهٔ جمله‌های همواره درست بیشتر صحبت خواهیم کرد ولی ذکر مثال زیر در اینجا را خالی از لطف نمی‌بینیم.

مثال ۸۰. فرض کنید $\mathcal{L} = \{H\}$ یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد که دارای تنها یک نماد محمولِ تک‌موضعی است. در یک $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathcal{M}$ عبارتِ $H^{\mathcal{M}}(x)$ بدین معنی است که x ویژگیِ H را داراست. به عنوان مثال، اگر جهانِ M متشکل از انسانها باشد، یک تعبیر $H^{\mathcal{M}}(x)$ می‌تواند این باشد که انسان x کلاه دارد! ادعا می‌کنیم که جملهٔ زیر، همواره درست است:

$$\exists x \quad \Big(H(x) \to \forall y H(y)\Big).$$

جملهٔ بالا می‌گوید که «یک نفر هست که اگر او کلاه داشته باشد، همه کلاه دارند». به ظاهر درست بودن این جمله در هر جامعهٔ قابل تصور، عجیب به نظر می‌رسد؛ ولی تعریف درستی ریاضی، همان طور که در ادامه خواهیم دید، به ما می‌گوید که این جمله در هر جامعه‌ای درست است.

فرض کنید M یک جامعه باشد. از دو حال خارج نیست:

۱. یک نفر به نام a وجود دارد که او کلاه ندارد.

۲. همه کلاه دارند.

در حالت اول، جملهٔ زیر در جامعهٔ ما به انتفاء مقدم درست است:

$$H(a) \to \forall x H(x)$$

پس جملهٔ زیر درست است:

$$\exists x \quad (H(x) \to \forall y H(y).$$

آن x ای که وجو دارد همان آقا یا خانم a است. بررسی این که در حالت دوم هم جملهٔ ما درست است را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.

در بخش قبل گفتیم که یک جملهٔ واحد در هر دنیای ذهنی یا حقیقی معنایی منحصر به خود دارد. می‌گوییم یک جمله، همواره درست است، هرگاه در دنیای ذهنی که ترجمه شود، در آن دنیا درست باشد. برای مثال جملهٔ زیر را در نظر بگیرید:

یک نفر هست که اگر او باهوش باشند همه باهوشند.

ادعا می‌کنیم که جملهٔ بالا در هر جامعهٔ ذهنی یا واقعی و با هر تصوری که نسبت به عبارت «باهوش بودن» داشته باشیم درست است!

یک جامعهٔ دلخواه و یک تصور از باهوش بودن را در نظر بگیرید.

به عنوان حالت اول، فرض کنید که این جامعه یک نفر به نام الف وجود داشته باشد که باهوش نیست (با هر تصوری که نسبت به مفهوم باهوش بودن در آن جامعه داریم). در این صورت جملهٔ

اگر الف باهوش باشد، همه باهوشند.

در این جامعه، به انتفاء مقدم درست است (دقت کنید که در تعریف درستی جمله‌ها، جمله‌ای که فرض آن رخ ندهد را جمله‌ای درست در نظر گرفته‌ایم). از آنجا که جملهٔ بالا درست است، پس جملهٔ زیر هم درست است:

یک نفر هست (مثلاً همان آقا یا خانم الف) که اگر او باهوش باشد، همه باهوشند.

به عنوان دوم فرض کنید که با تصوری که نسبت به مفهوم باهوش بودن در آن جهان داریم، همه باهوش باشند. باز هم جملهٔ زیر (با تعریف ریاضی درستی) درست است:

یک نفر هست (هر کس را که بگیریم فرق نمی‌کند) که اگر او باهوش باشد همه باهوشند.

علت درستی جملهٔ بالا این است که فرض و حکم آن هر دو درستند.

پس تا اینجا گفتیم که با این که معنای جملهٔ ما در جهانهای مختلف متفاوت است، ولی جملهٔ ما می‌تواند در همهٔ آنها درست باشد.

به هر مجموعهٔ متشکل از یک تعداد جمله، یک نظریه گفته می‌شود. به جهانهایی که تمام جملات موجود در یک نظریه در آنها درستند، مدلهای آن نظریه گفته می‌شود. می‌گوییم یک نظریه، مستلزم یک جمله است هرگاه در همهٔ مدلهای آن نظریه، جملهٔ مورد نظر ما هم درست باشد.

اگر T یک نظریه باشد که مستلزم جملهٔ φ است می‌نویسیم:

$$T \models \varphi.$$

فصل ۶

تئوری‌های کامل

در ملاحظه ۷۲ در فصل قبل گفتیم که برای یک تئوریِ T و یک جملهٔ φ چنین نیست که لزوماً یا $T \models \varphi$ و یا $T \models \neg\varphi$. در واقع تمام موارد زیر ممکن است رخ بدهند:

۱. $T \models \varphi$ و $T \models \neg\varphi$ که در این صورت تئوری مورد نظر ما، مستلزم تناقض است. یک چنین تئوری‌ای هیچ مدلی ندارد.

۲. $T \not\models \varphi$ و $T \not\models \neg\varphi$؛ یعنی در برخی از مدلهای T جملهٔ φ اتفاق بیفتد و در برخی مدلهای T نقیض این اتفاق رخ دهد (و ضمناً T دارای مدل است!)

۳. $T \models \varphi$ و $T \not\models \neg\varphi$؛ یعنی جملهٔ φ در همهٔ مدلها رخ دهد و قطعا مدلی برای T وجود داشته باشد که در آن φ رخ می‌دهد. در واقع در این حالت مطمئنیم که تئوری T دارای یک مدل است (یعنی تناقض آمیز نیست) و نیز می‌دانیم که در همهٔ مدلهای آن جملهٔ φ درست است.

۴. $T \models \neg\varphi$ و $T \not\models \varphi$. توضیح این حالت مشابه حالت قبل است.

تئوریِ T را یک تئوریِ کامل می‌نامیم هرگاه در مقابل هر جملهٔ مرتبهٔ اول φ موضعگیری مشخص کند. به بیان دقیق‌تر:

تعریف ۸۱. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبانِ مرتبهٔ اول و T یک $\mathcal{L}$ تئوری باشد که مستلزم تناقض نیست (یعنی حداقل یک مدل دارد). می‌گوییم T یک تئوری کامل است هرگاه برای هر $\mathcal{L}$جملهٔ φ دقیقاً یکی از حالات زیر رخ بدهد.

۱. $T \models \varphi$

۲. $T \models \neg\varphi$.

پس اگر T یک تئوری کامل باشد و $T \not\models \varphi$ آنگاه $T \models \neg\varphi$. یکی از مشخصه‌های تئوری‌های کامل این است که مستلزم هر آنچه هستند که با آنها سازگار است.

تعریف ۸۲. می‌گوییم تئوری T با جملهٔ φ سازگار است هرگاه تئوریِ $T \cup \{\varphi\}$ دارای مدل باشد؛ به بیان دیگر هرگاه $T \not\models \neg\varphi$.

قضیه ۸۳. اگر تئوری کاملِ T با جملهٔ φ سازگار باشد آنگاه $T \models \varphi$.

اثبات. فرض کنید T کامل و سازگار با φ باشد. پس یک مدلِ $\mathcal{M} \models T$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{M} \models \varphi$. حال اگر $T \not\models \varphi$ آنگاه بنا به کامل بودن، $T \models \neg\varphi$. پس $\mathcal{M} \models \neg\varphi$. اما این تناقض است، زیرا بنا به تعریف صدق فرمولها، $\mathcal{M}$ نمی‌تواند همزمان هم مدل φ و هم مدل $\neg\varphi$ باشد. $\square$

تمرین ۵۳. فرض کنید T یک تئوری کامل باشد. در این صورت برای هر جملهٔ φ یا T با φ سازگار است یا T با $\neg\varphi$ سازگار است (و هر دو اینها با هم رخ نمی‌دهد).

۱.۶ موهبت و پرسش کامل بودن

فرض کنید که $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ساختارِ مرتبهٔ اول و T یک تئوریِ کامل باشد به طوری که $\mathcal{M} \models T$. همچنین فرض کنید که φ یک $\mathcal{L}$ جمله باشد. از آنجا که T یک تئوری کامل است، یا همزمان در همهٔ مدلهای T (از جمله مدلِ $\mathcal{M}$) جملهٔ φ برقرار است یا این که همزمان در همهٔ مدلهای T (دوباره از جمله $\mathcal{M}$) جملهٔ $\neg\varphi$ برقرار است. پس برای هر جملهٔ φ داریم $\mathcal{M} \models \varphi$ اگروتنهااگر $T \models \varphi$. در واقع تئوریِ T دقیقاً مستلزم جملاتی است که در ساختارِ $\mathcal{M}$ برقرار هستند. به بیان بهتر، تئوریِ T یک **اصل‌بندی کامل** برای ساختارِ $\mathcal{M}$ است که مستلزم همهٔ ویژگی‌های این ساختار است.

تمرین ۵۴. فرض کنید T یک تئوری کامل باشد و $\mathcal{M} \models T$. قرار دهید $T' = \{\varphi : \mathcal{M} \models \varphi\}$. نشان دهید که دو تئوری T و T' مدلهای یکسانی دارند (یعنی هر ساختاری که مدل یکی باشد، مدل دیگری نیز هست).

به دلایلی که بعداً خواهیم دید، گاهی بررسی این که تئوریِ T مستلزم جملهٔ φ است، آسان‌تر از بررسی این است که آیا جملهٔ φ در ساختارِ $\mathcal{M}$ برقرار است یا نه؛ و موهبت کامل بودن، همین است. در این باره پس از اثبات قضیهٔ تمامیت گودل، دوباره صحبت خواهیم کرد.

موهبت یادشده زمانی حیاتی‌تر است که تئوریِ کاملی که $\mathcal{M}$ مدل آن است، از تعداد جملاتی کمی تشکیل شده است. در واقع، هر تعداد جملهٔ φ که در ساختار $\mathcal{M}$ برقرار باشند، تشکیل یک تئوری می‌دهند که $\mathcal{M}$ مدلی برای آن است. ولی وقتی یک تعداد از این جملات تشکیل یک تئوری کامل بدهند، یعنی همهٔ دیگر ویژگی‌های $\mathcal{M}$ به نحوی «نتیجه‌ای» از همین تعداد جملات هستند.

یکی از ساختارهای جذاب ریاضی، ساختار اعداد طبیعی است: $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ که «نظریهٔ اعداد» علم بررسی جملاتی مانند φ است که در این ساختار درست هستند. به عنوان یک مثال از یک تئوریِ T به طوری که $\mathcal{N} \models T$، تئوری متشکل از جملات زیر، موسوم به تئوریِ حساب پئانو را در نظر بگیرید:

۱. $\forall x, y, z x + (y + z) = (x + y) + z$

۲. $\forall x, y x + y = y + x$

۳. $x + 0 = x$

۴. $x + y = x + z \to y = z$.

۵. $\forall x, y, z \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

۶. $\forall x, y \quad x \cdot y = y \cdot x$

۷. برای هر فرمولِ $\varphi(x, z_1, \ldots, z_n)$ یک اصلِ

$$Ind_\varphi : \forall z_1, \ldots, z_n \Big(\big(\varphi(0, z_1, \ldots, z_n) \wedge (\forall y \varphi(y, z_1, \ldots, z_n) \to \varphi(y + 1, z_1, \ldots, z_n))\big) \to \forall x \varphi(x, z_1, \ldots, z_n) \Big)$$

پیش از آنکه دربارهٔ اصول موضوعهٔ بالا توضیح بدهم یادآوری می‌شوم که آنچه عموماً به عنوان اصول موضوعهٔ پئانو برای اعداد طبیعی در منابع معرفی می‌شود شاید اندکی متفاوت با اصول موضوعهٔ بالا (و در زبانی دیگر) باشد ولی اساساً همین واقعیات را بیان می‌کنند.

اصولی که با شماره‌های ۱ تا ۶ مشخص شده‌اند ویژگیهای معمول مورد انتظار از جمع و ضرب اعداد طبیعی است. اما شمارهٔ ۷ فقط یک اصل نیست؛ یک «شِمای اصل» است که قرار است که مفهوم استقراء را در اعداد طبیعی بیان کند. برای درک بهترِ مورد ۷ آن را کمی نادقیق‌تر و در مورد فرمولِ $\varphi(x)$ توضیح می‌دهیم. جملهٔ Ind_φ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\big(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x + 1))\big) \to \forall x \varphi(x).$$

جملهٔ بالا می‌گوید که اگر عنصر 0 ویژگیِ φ را داشته باشد، و همواره از این که یک عنصر ویژگیِ φ را دارد نتیجه شود که عنصر بعدی آن هم ویژگی φ را دارد، آنگاه همهٔ عناصر ویژگی φ را دارند. اما این جمله باید برای هر ویژگی φ یک بار نوشته شود و از این رو بی‌نهایت اصل به صورتِ Ind_φ (یکی به ازای هر یک فرمول) در بالا قرار داده شده است. در واقع برایمان امکان‌پذیر نبود که به صورت مرتبهٔ اول، بگوییم هر زیرمجموعه‌ای که شامل

1 است و اگر شاملِ n باشد، شاملِ $n+1$ هم هست، شامل همهٔ اعداد است؛ از این رو به صورت مرتبهٔ اول، این خواسته را برای هر مجموعه‌ای که توسط یک فرمول تعریف شود بیان کردیم.

بیایید مجموعهٔ اصولی که در بالا با شماره‌های ۱ تا ۷ شماره‌گذاری شده است را با $Peano$ نشان دهیم. می‌دانیم که $(\mathbb{N},+,\cdot,0,1) \models Peano$؛ در واقع این اصول را به گونه‌ای نوشته‌ایم که ویژگی‌های اعداد طبیعی را وصف کنند. اما موضوع این بخش از کتاب، پرسیدن این سوال معقول است که «آیا $Peano$ یک تئوری کامل است»؟ به بیان دیگر، آیا برای هر جملهٔ φ این گونه است که $(\mathbb{N},+,\cdot,0,1) \models \varphi$ اگر و تنها اگر $Peano$ مستلزمِ φ باشد؟ باز به بیان دیگر، آیا همهٔ ویژگی‌های اعداد طبیعی از همین تعداد اصول (به صورت استلزامی) به دست می‌آیند؟

سوالی که در بالا پرسیده‌ایم، اتفاقاً عمیق و موضوع یک قضیهٔ مهم در منطق ریاضی است و فراهم کردن پاسخ آن در این بخش از کتاب ممکن نیست (البته در بخشهای آینده این سوال به نحو قانع‌کننده‌ای پاسخ گفته خواهد شد).

قضیه ۱ (قضیهٔ ناتمامیت اول گودل ـ بیان برای یک حالت خاص). $Peano$ یک تئوریِ کامل نیست.

در بالا اشاره به یک نتیجه از قضیه‌ای مهم در منطق ریاضی، به نام قضیهٔ ناتمامیت اول گودل شده است. صورت کلی این قضیه بدین سوال می‌پردازد که آیا اصولاً نوشتن یک تئوری کامل برای ساختارِ $\mathcal{N}$ امکان‌پذیر است یا خیر.

پیش از به پایان رساندن این بخش خوب است به یک مصداق از یک تئوری کامل آشنا بپردازیم. در هندسهٔ اقلیدسی تعداد محدودی اصل موضوعه داریم که هر قضیه‌ای «نتیجه‌ای» از آنهاست. در واقع هندسهٔ اقلیدسی، یک مصداق از تئوری کامل است.

۲.۶ محکی برای تشخیص کامل بودن: سامانه‌های رفت و برگشتی*

در بخشِ ۲.۳ با مفهوم ایزومرفیسم میان $\mathcal{L}$ ساختارها آشنا شدیم و گفتیم دو $\mathcal{L}$ساختار، زمانی ایزومرف هستند که نگاشتی میان آنها وجود داشته باشد که نه تنها عناصر یکی را به نحو یک به یک به دیگری تصویر می‌کند، بلکه تعابیر علائم زبانی را میان آندو حفظ می‌کند. در قضیه‌ای ثابت کردیم که در صورت وجود یک ایزومرفیسم میان دو ساختار، عناصر و تصاویر آنها تحت یک ایزومرفیسم در فرمولهای یکسانی صدق کنند. همان طور که در آن بخش نیز گفتیم، ایزومرفیسم میان دو ساختار، یک مفهوم کاملاً و آشنا برای کسانی است که با جبر آشنایی دارند.

اما یک مفهوم حائز اهمیت دیگر که منحصر به مطالعهٔ منطقی ساختارهاست، **هم‌ارزی مقدماتی** است که پیش از هر چیز آن را در زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۸۴. دو $\mathcal{L}$ساختارِ $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ را هم‌ارزِ مقدماتی می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathcal{L}$جملهٔ φ داشته باشیم

$$\mathcal{M}_1 \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}_2 \models \varphi.$$

پس دو ساختار، زمانی هم‌ارز مقدماتی هستند که «جملات» یکسانی ـ و نه فرمولهای یکسانی ـ در آنها درست باشند. پس همینجا ذکر دو نکته ضروری است:

۱. اگر دو $\mathcal{L}$ساختار، ایزومرف باشند، آنگاه با هم هم‌ارز مقدماتی هستند.

تمرین ۵۵. عبارت بالا را اثبات کنید.

۲. وقتی دو ساختار، با هم ایزومرف هستند، تابعی یک به یک بین جهانهای آنها وجود دارد؛ به طور خاص، اندازهٔ جهان دو ساختار مورد نظر با هم برابر است. اما برای این که دو ساختار هم‌ارز مقدماتی باشند، نیازی نیست که جهانها با هم هم‌اندازه باشند.

تمرین ۵۶. فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ دو Lساختار هم‌ارز مقدماتی باشند به طوری که جهانهای آنها متناهی است. نشان دهید که این دو ساختار، ایزومرف هستند.

در ادامهٔ این بخش، و نیز در ادامهٔ کتاب دربارهٔ هم‌ارزی مقدماتی زیاد سخن خواهیم گفت. ولی نخست باید رابطهٔ تنگاتنگ این مفهوم با مفهوم کامل بودن تئوری‌ها را بیان کنیم: گفتیم که تئوری T زمانی کامل است که یک جمله، یا همزمان در همهٔ مدلهای آن درست باشد یا همزمان در همه مدلهای آن غلط. پس موارد زیر با هم معادلند:

۱. تئوریِ T کامل است.

۲. هر دو مدلِ $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ از تئوریِ T با هم هم‌ارز مقدماتی هستند.

۳. اگر $\mathcal{M} \models T$ آنگاه برای هر جملهٔ φ داریم $T \models \varphi$ اگروتنهااگر $\mathcal{M} \models \varphi$ (توضیحات ابتدای بخش ۱.۶ را ببینید).

یکی از دلایلی که موجب هم‌ارزی مقدماتی دو $\mathcal{L}$ ساختار است، ایزومرف بودن آنهاست. اما این شرط به راحتی میان دو ساختار برآورده نمی‌شود. در این بخش شرط ضعیف‌تری برای هم‌ارزی مقدماتی دو ساختار ارائه خواهیم کرد. برای بیان این شرط نیاز به چند تعریف ساده داریم.

تعریف ۸۵ (زیرساختار). فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ دو $\mathcal{L}$ساختار باشد. می‌گوییم $\mathcal{M}$ زیرساختاری از $\mathcal{N}$ است، هرگاه جهان M زیرمجموعهٔ جهانِ N باشد تعابیر علائم زبانی در M تحدیدِ تعابیر آنها از N به M باشد. به بیان دقیق‌تر $\mathcal{M}$ زیرساختاری از $\mathcal{N}$ است هرگاه

۱. $M \subseteq N$

۲. برای هرنماد تابعیِ n موضعیِ $f \in \mathcal{L}$ و هر $a_1, \ldots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$f^{\mathcal{N}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) \in M.$$

به بیان دیگر

$$f^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{N}} \restriction M$$

از علامت $\restriction$ برای نشان دادن تحدید توابع به دامنهٔ کوچکتر استفاده می‌شود.

۳. برای هر نماد رابطه‌ای n موضعیِ $R \in M$ و هر $a_1, \ldots, a_n \in M$ داشته باشیم

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{N}}$$

باز به بیان دیگر $R^{\mathcal{M}} = R^{\mathcal{N}} \cap M^n$.

۴. برای هر نماد ثابت $c \in L$ داشته باشیم

$$c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}.$$

به عنوان یک مثال ساده، ساختارِ $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ زیرساختاری از ساختارِ $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ است. زیرا صفر و یک اعداد طبیعی همان صفر و یک اعداد صحیح است و اعمال جمع و ضرب اعداد طبیعی، همانها در اعداد صحیح هستند که به اعداد طبیعی محدود شده‌اند.

ملاحظه ۸۶. این را که $\mathcal{M}$ زیرساختاری از $\mathcal{N}$ است با نماد $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ نشان می‌دهیم. استفاده از نماد زیرمجموعه در اینجا نباید غلط‌انداز باشد، زیرا بین دو ساختار (و نه دو مجموعهٔ صرف) استفاده شده است.

تمرین ۵۷. فرض کنید $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ دو L ساختار باشند.

۱. نشان دهید که اگر $\varphi(x)$ یک فرمول بدون سور باشد، آنگاه برای هر $a \in M$ داریم $\mathcal{N} \models \varphi(a)$ اگروتنهااگر $\mathcal{M} \models \varphi(a)$.

۲. فرض کنید $\varphi(x) = \exists y \psi(x)$ یک فرمول باشد که در آن ψ بدون سور است. نشان دهید که برای هر $a \in M$ اگر $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ آنگاه $\mathcal{N} \models \varphi(a)$.

۳. فرض کنید $\varphi(x) = \forall y \psi(x)$ یک فرمول باشد که در آن ψ بدون سور است. نشان دهید که برای هر $a \in M$ اگر $\mathcal{N} \models \varphi(a)$ آنگاه $\mathcal{M} \models \varphi(a)$.

حال فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ دو Lساختار باشند. پیش می‌آید که برخی از زیرساختارهای ساختار $\mathcal{M}$ با برخی از زیرساختارهای ساختارِ $\mathcal{N}$ ایزومرف باشند (حتی ممکن است که $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}$ یک زیرساختار مشترک داشته باشند). حال فرض کنید $\mathbb{A}$ یک مجموعهٔ ناتهی باشد متشکل از برخی ایزومرفیسمهای این‌چنین. یعنی هر عضو مجموعهٔ $\mathbb{A}$ یک ایزومرفیسم به صورت $f : \mathcal{M}' \to \mathcal{N}'$ باشد که در آن $\mathcal{M}'$ و $\mathcal{N}'$ به ترتیب زیرساختارهایی از $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ باشند. برای دو ایزومرفیسمِ $f, g \in \mathbb{A}$ می‌گوییم $f \subseteq g$ هرگاه f به عنوان یک مجموعه از زوجهای مرتب، زیرمجموعهٔ g باشد. به بیان دیگر، دامنهٔ ایزومرفیسمِ f زیرمجموعهٔ دامنهٔ g باشد و برای هر $x \in dom(f)$ داشته باشیم: $f(x) = g(x)$.

تعریف ۸۷. می‌گوییم مجموعهٔ $\mathbb{A}$ یک سامانهٔ رفت‌وبرگشتی از ایزومرفیسمهای میان زیرساختارهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ است هرگاه برای هر ایزومرفیسمِ $f \in \mathbb{A}$:

۱. برای هر $a \in M$ یک ایزومرفیسمِ $g \in \mathbb{A}$ موجود باشد به طوری که $f \subseteq g$ و $a \in dom(g)$.

۲. برای هر $b \in N$ یک ایزومرفیسمِ $h \in \mathbb{A}$ موجود باشد به طوری که $f \subseteq h$ و $b \in range(h)$.

وجود یک سامانهٔ رفت و برگشتی بین دو ساختار، یعنی امکان انجام یک بازی دو نفره. نفر اول یک ایزومرفیسم در اختیار دارد، می‌خواهد یک عنصر a به دامنهٔ آن اضافه کند. نفر دوم باید یک عنصر c پیدا کند به طوری که c ویژگی‌هایی شبیه به a داشته باشد به طوری که بتوان با تصویر کردن a به c ایزومرفیسم اولیه را گسترش داد. مشابهاً نفر اول ممکن است بخواهد عنصری به بُرد ایزومرفیسم خود اضافه کند و در این صورت نفر دوم باید عنصر مناسبی برای افزودن به دامنه پیدا کند.

قضیه ۸۸ (رابطهٔ بین سامانهٔ رفت و برگشتی و هم‌ارزی مقدماتی)**.** فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ دو Lساختار باشند به طوری که یک سامانهٔ رفت‌وبرگشتیِ $\mathbb{A}$ از ایزومرفیسمهای میان زیرساختارهای آنها وجود داشته باشد. در این صورت $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ هم‌ارز مقدماتی هستند.

اثبات. فرض کنید $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ یک L فرمول باشد. نشان می‌دهیم که برای هر $a_1, \ldots, a_n$ در M اگر $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ آنگاه برای هر ایزومرفیسمِ $f \in \mathbb{A}$ که $a_1, \ldots, a_n$ در دامنهٔ آن باشند داریم $\mathcal{N} \models \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_n))$. واضح است که این گفته، حتی حکمی قوی‌تر از حکم قضیه است.

فرض کنید فرمول φ به صورت $t_1 \doteq t_2$ باشد و داشته باشیم $\mathcal{M} \models t_1 = t_2(a_1, \ldots, a_n)$. در این صورت بنا به تعریف صدق فرمولها داریم: $t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = t_2^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$. بنا به تعریف سامانه‌های رفت و برگشتی، برای هر ایزومرفیسم $f : \mathcal{M}' \to \mathcal{N}'$ بین زیرساختاری از $\mathcal{M}$ و زیرساختاری از $\mathcal{N}$، داریم $f(t_1) = f(t_2)$. پس $t_1^{\mathcal{N}'}(f(a_1), \ldots, f(a_n)) = t_2^{\mathcal{N}'}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$. اما با توجه به این که $\mathcal{N}'$ یک زیرساختار از $\mathcal{N}$ است داریم $t_1^{\mathcal{N}}(f(a_1), \ldots, f(a_n)) = t_2^{\mathcal{N}}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ و حکم مورد نظر ما در این حالت به اثبات می‌رسد. .

اثبات حکم برای سایر پله‌های استقراء ساده است؛ در اینجا مرحلهٔ اضافه شدن سور وجودی را بررسی می‌کنیم. فرض کنید فرمول φ به صورت $\exists x \psi(x_1, \ldots, x_n)$ باشد و حکم برای ψ برقرار باشد. حال اگر $\mathcal{M} \models \exists x \psi(x, a_1, \ldots, x_n)$، در این صورت عنصر $a \in M$ موجود است به طوری که $\mathcal{M} \models \psi(a, a_1, \ldots, x_n)$. واضح است که ایزومرفیسمی مانند $f \in \mathbb{A}$ موجود است به طوری که $a, a_1, \ldots, a_n \in dom(f)$. بنا به فرض استقراء، داریم

$\mathcal{N} \models \exists x \quad \psi(x, f(a_1), \ldots, f(a_n))$ یعنی $\mathcal{N} \models \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_n))$؛ و این همان است که به دنبالش بودیم. □

مثال ۸۹. نشان دهید که تئوری ترتیبهای خطی چگال، معرفی شده در مثال ۶۴ یک تئوری کامل است.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ دو مدل برای T_{DLO} باشند. نشان می‌دهیم این دو مدل، هم‌ارز مقدماتی هستند. فرض کنید $\mathbb{A}$ مجموعهٔ متشکل از ایزومرفیسمهای میان زیرساختارهای متناهی $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ باشد. نشان می‌دهیم که $\mathbb{A}$ یک سامانهٔ رفت‌وبرگشتی است.

هر ایزمرفیسم موجود در $\mathbb{A}$ را می‌توان به صورت زیر تصور کرد:

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n \to^f b_0 < b_1 \ldots < b_n$$

که در آن a_i در M هستند و ترتیب آنها ترتیبِ موجود در ساختارِ $\mathcal{M}$ است و مشابهاً b_i ها در $\mathbb{N}$ هستند و ترتیب آنها همان ترتیب موجود در ساختارِ $\mathcal{N}$ است. فرض کنید $a \in M$ عنصر دلخواهی باشد. برای افزودنِ a به دامنهٔ f ابتدا موقعیت a در جهان M را از لحاظ ترتیبی نسبت به تمام a_i ها معلوم می‌کنیم؛ مثلاً فرض کنید a به صورت زیر در میان a_i ها قرار گرفته باشد:

$$a_1 < a < a_2 < \ldots < a_n$$

حال عنصر b را در N به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که دقیقاً همان وضعیت را نسبت به b_i ها داشته باشد؛ در این مثال خاص b را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که

$$b_1 < b < b_2 < \ldots < b_n.$$

پیدا کردن b با ویژگی یاد شده، امکان‌پذیر است؛ زیرا ترتیب $\mathcal{N}$ یک ترتیب چگال است و b_i ها عناصری در N هستند. حال ایزومرفیسم زیر، f را گسترش می‌دهد و در $\mathbb{A}$ است:

$$a_1 < a < a_2 < \ldots < a_n \to^g b_1 < b < b_2 < \ldots < b_n$$

□

از مثال بالا، به طور خاص نتیجه می‌شود که برای هر جمله‌ای مانند φ که در زبانِ $L = \{<\}$ نوشته شود، داریم $T_{DLO} \models \varphi$ اگروتنهااگر $(\mathbb{Q}, <) \models \varphi$.

تمرین ۵۸. در زبانِ $\{E\}$ که فقط یک نماد رابطه‌ای دو موضعی دارد، تئوری روابط هم‌ارزی نامتناهیِ دارای نامتناهی کلاس را بنویسید. نشان دهید که این تئوری، کامل است.

تمرین ۵۹. نشان دهید که هر دو مدلِ شمارا (یعنی دارای جهانی شمارا) از تئوری‌ای که در تمرین ۵۸ معرفی کردید با هم ایزومرفند.

تمرین ۶۰. نشان دهید که دو مدل ناشمارا از تئوری‌ای که در تمرین ۵۸ معرفی کرده‌اید، لزوماً با هم ایزومرف نیستند.

مثال ۹۰. نشان دهید که تئوری ترتیبهای خطی گسسته، که در مثالِ ۶۴ یک تئوری کامل است.

مثال ۹۱. یک مثال سادهٔ دیگر از تئوری‌های کامل، تئوری «گرافهای تصادفی» است که آن را با T_{RG} نشان می‌دهیم. تئوری یادشده از اجتماع تئوری گرافها با جمله‌های φ_n به دست می‌آید که هر جملهٔ φ_n عبارت زیر را بیان می‌کند:

برای هر n عنصر، یک عنصر x موجود است که به همهٔ آنها وصل است و یک عنصر y موجود است که به هیچ‌کدام وصل نیست.

فرض کنید (G, R_G) و (H, R_H) دو گراف تصادفی باشند و $\mathbb{A}$ مجموعهٔ متشکل از ایزومرفیسمهای میان زیرگرافهای متناهی آنها باشد. فرض کنید f یکی از ایزمرفیسمهای این چنین باشد که زیرگراف با رئوس $\{a_1, \ldots, a_n\}$ از G را با زیرگراف متشکل از رئوس $\{b_1, \ldots, b_n\}$ از H در تناظر قرار داده است. برای هر عنصرِ $a \in G$ متناسب با هر وضعیتی که a از لحاظ اتصال یا عدم اتصال به a_i ها داشته باشد، یک عنصر $b \in H$ با دقیقاً همین وضعیت نسبت به b_i ها پیدا می‌شود.

***تمرین ۶۱.** نشان دهید که تئوری فضاهای برداری روی $\mathbb{Q}$ با بعد مشخص n کامل است. نشان دهید که تئوری فضاهای برداری با بعد نامتناهی روی $\mathbb{Q}$ یک تئوری کامل است.

***تمرین ۶۲.** تئوری فضاهای برداری با بُعدِ نامتناهی روی $\mathbb{Q}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که هر دو مدل ناشمارای این تئوری با هم ایزومرفند. اما دو مدل شمارای آن، لزوماً با هم ایزومرف نیستند.

***تمرین ۶۳.** ساختارِ $(\mathbb{N}, s)$ را در نظر بگیرید که در آن $s(x) = x + 1$ همان تابع تالی است. یک تئوری برای این ساختار بنویسید که کامل باشد.

***تمرین ۶۴.** مثال قبل را برای ساختارِ $(\mathbb{N}, s, <)$ پاسخ دهید.

کامل بودن تئوری‌های مختلفی را می‌توان با شیوهٔ رفت و برگشتی اثبات نمود. برای انجام فرایند رفت و برگشت در برخی تئوری‌ها (مثلاً تئوری میدانهای بستهٔ جبری) نیازمند آشنایی مقدماتی با ریاضیات مربوط به حوزهٔ آن تئوری (در این مثال خاص، نظریهٔ گالوا) هستیم. از آنجا که قصد نداریم در این فصل نسبتاً مقدماتی، پای ریاضیات پیچیده‌تری را به پیش بکشیم، بررسی کامل بودن برخی تئوری‌های جبری را به فصول آیندهٔ این کتاب موکول کرده‌ایم.

۳.۶ بازی‌های رفت‌وبرگشتی متناهی

گفتیم که وجود یک سامانهٔ رفت‌وبرگشتی میان دو ساختار، موجب معادل بودن مقدماتی آن دو ساختار می‌شود. وجود سامانهٔ رفت و برگشتی، در واقع به معنی امکان یک بازی دو نفره است. بازیکن اول در این بازی، عنصری در دامنه یا برد یک ایزومرفیسم انتخاب می‌کند، و بازیکن دوم باید یک عنصر معادل آن پیدا کند تا بتواند ایزومرفیسم را گسترش دهد. وجود سامانهٔ رفت و برگشتی، یعنی امکان پیش بردن این بازی به اندازهٔ ω مرحله. اما بازی‌های متناهی نیز سودمندی خود را دارند. در این بخش توضیحی کوتاه دربارهٔ بازی‌های متناهی داده‌ایم.

دو ساختارِ $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ را در نظر بگیرید. یک بازی رفت‌وبرگشتی n مرحله‌ای به صورت پیش رو انجام می‌شود: در هر مرحله بازیکن اول یک عنصر از یکی از دو ساختار $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ انتخاب می‌کند و بازیکن دوم در جواب او از ساختار دیگر عنصری انتخاب می‌کند. بعد از n مرحله بازی، عناصر $a_1, \ldots, a_n$ از $\mathcal{M}$ و عناصر $b_1, \ldots, b_n$ از $\mathcal{N}$ توسط دو بازیکن، وارد بازی شده‌اند. اگر $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle^{\mathcal{M}} \cong \langle b_1, \ldots, b_n \rangle^{\mathcal{N}}$ بازیکن

دوم برنده است و گرنه بازیکن اول. منظور از $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle^{\mathcal{M}}$ زیرساختار تولید شده توسط عناصر $a_1, \ldots, a_n$ در $\mathcal{M}$ است. این زیرساختار از عناصرِ $t^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$ تشکیل شده است که در آن t روی ترم‌های زبان تغییر می‌کند. می‌گوییم بازیکن دوم «استراتژی بُرد» در یک بازی n مرحله‌ای دارد، هرگاه در صورتی که به اندازهٔ کافی خوب بازی کند، همیشه پس از n مرحله او برندهٔ بازی باشد.

قضیه ۹۲. اگر بازیکن دوم، یک «استراتژی بُرد» در یک بازی n مرحله‌ای داشته باشد، ساختارهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ در حد جملات با n سور، با هم معادل هستند. یعنی برای هر جملهٔ φ به صورت $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi$ اگر $\mathcal{M} \models \varphi$ آن‌گاه $\mathcal{N} \models \varphi$.

فصل ۷

استنتاج

تعریفِ ۷۹ را به خاطر بیاورید: یک جملهٔ φ را همواره درست می‌نامیم هرگاه $\varnothing \models \varphi$. همچنین در بخشهای گذشته با عبارتِ $T \models \varphi$ آشنا شدیم که خوانده می‌شود: T مستلزمِ φ است. در این بخش با دو عبارتِ $\vdash \varphi$ و $T \vdash \varphi$ آشنا خواهیم شد، که به ترتیب به صورت زیر خوانده می‌شوند:
برای گزارهٔ φ اثباتی وجود دارد.
برای گزارهٔ φ اثباتی با استفاده از اصول تئوری T وجود دارد.

برای معرفیِ عبارت $\vdash \varphi$ نیازمند کاوشی بیشتر دربارهٔ عبارتِ $\models \varphi$ هستیم. پیش از آن این هشدار را می‌دهیم که صحبت دربارهٔ $\vdash$ به آسانی صحبت دربارهٔ $\models$ نیست، دقیقاً همان‌گونه که صحبت دربارهٔ قواعد دستوری، به راحتی و احتمالاً شیرینی صحبت دربارهٔ معنا نیست.

دقت کنید که وقتی φ جمله‌ای در زبانِ L است، و می‌نویسیم $\models \varphi$ منظورمان این است که همهٔ Lساختارها مدلی برای φ هستند. اما در این صورت همهٔ L' ساختارها، برای $L' \supseteq L$ نیز مدلی برای φ هستند. پس علت این که در نمادِ $\models \varphi$ زبانِ L لحاظ نشده است، این است که $\models \varphi$ یعنی هر ساختاری که عملگرهای کافی برای تعبیر جملهٔ φ داشته باشد، در آن φ درست است.

لم ۹۳. فرض کنید L یک زبانِ مرتبهٔ اول باشد و $L' = L \cup \{c\}$ یک زبان باشد که یک نماد ثابت افزون بر تمام نمادهای موجود در L دارد. همچنین فرض کنید $\varphi(x)$ یک فرمول مرتبهٔ اول باشد. در این صورت موارد زیر با هم معادل هستند:

۱. $\models \varphi(c)$

۲. $\models \forall x \quad \varphi(x)$

۳. برای هر Lساختار $\mathcal{M}$ و هر نگاشت مقداردهیِ β به متغیرها داریم $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$.

لم بالا را به راحتی می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

لم ۹۴. فرض کنید $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ یک L فرمول باشد و $L' = L \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$. در این صورت موارد زیر با هم معادل هستند:

۱. $\models \varphi(c_1, \ldots, c_n)$

۲. $\models \forall x_1, \ldots, x_n \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n)$

۳. برای هر Lساختار $\mathcal{M}$ و هر نگاشت مقداردهیِ β به متغیرها داریم $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$.

تعریف ۹۵. فرض کنید $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ یک فرمول مرتبهٔ اول باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم $\models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ هرگاه $\models \varphi(c_1, \ldots, c_n)$ که در آن $c_1, \ldots, c_n$ ثوابتی خارج از زبانِ L هستند.

بنا به تعریف بالا، و آنچه پیش از تعریف گفتیم، اگر φ یک فرمول مرتبهٔ اول باشد، می‌نویسیم $\models \varphi$ هرگاه برای هر Lساختار $\mathcal{M}$ و با هر نگاشت مقداردهی β در M داشته باشیم $\mathcal{M} \models \varphi[\beta]$.

۱.۷ اصول موضوعه و قواعد

در ادامه بخش، عبارتهای به صورت $\models \varphi$ را اصل موضوعه، و عبارتهای به صورت

اگر $\models \varphi$ آنگاه $\models \psi$

را قاعده نامیده‌ایم. به منظور استفاده بعدی، چند اصل موضوعه و قاعده خاص را در زیر معرفی کرده‌ایم.

۲.۷ اصول موضوعه

۱.۲.۷ تاتولوژی‌های منطق مرتبهٔ اول

یک مثال مهم از فرمولهای همواره درست «تاتولوژی» ها هستند که در ادامه آنها را معرفی کرده‌ایم.

برای تعریف تاتولوژی‌ها، به منطقی ساده‌تر از منطق مرتبهٔ اول، یعنی «منطق گزاره‌ها» نیازمندیم. عموماً دانشجویان ریاضی در درس مبانی ریاضی با این منطق آشنا می‌شوند و این منطق به اندازهٔ کافی برای دانشگاهیان آشناست. از این رو توضیحی که ما در اینجا دربارهٔ منطق گزاره‌ها ارائه کرده‌ایم، مختصر و تنها از نوع یادآوری است. خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند منابعِ ... و ... را برای آشنایی با منطق گزاره‌ها مطالعه کند.

در یک منطق گزاره‌ها، یک مجموعه از گزاره‌های اتمی به صورت $\{p, q, \ldots\}$ به عنوان الفبا در نظر گرفته می‌شود و هر فرمولی در این منطق به صورت یک $f(p_1, \ldots, p_n)$ است. در ساخت $f(p_1, \ldots, p_n)$ از علائم $\top, \bot, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg$ استفاده می‌شود، هر کدام از این علائم با استفاده از یک جدول ارزش تعریف می‌شوند و نهایتاً می‌توان برای $f(p_1, \ldots, p_n)$ یک جدول ارزش بر اساس ارزش گزاره‌های اتمی به کار رفته در آن کشید. برخی از گزاره‌های به صورت $f(p_1, \ldots, p_n)$ به ازای هر ارزشی (غلط یا درست)که اتمهای $p_1, \ldots, p_n$ داشته باشند، ارزش درست دارند؛ برای مثال گزارهٔ $(p \vee \neg p)$ چنین است. به چنین گزاره‌هایی، تاتولوژی‌های منطق گزاره‌ها گفته می‌شود.

مجموعهٔ فرمولهای یک منطق گزاره‌ها به همراه اعمال $\top, \bot, \neg, \vee, \wedge$ تشکیل یک جبر بولی می‌دهند و قضیهٔ مهم زیر، تکلیف فرمولهای تاتولوژی را معلوم می‌کند:

قضیه ۹۶. یک گزارهٔ $f(p_1, \ldots, p_n)$ در منطق گزاره‌ها، تاتولوژی است اگروتنهااگر با متناهی بار اعمال قوانین جبربولی به دست آید.

مثال ۹۷. فرمولهای زیر در منطق گزاره‌ها تاتولوژی هستند:

۱. $(p \vee \neg p)$

۲. $((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)$

۳. $\Big(((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))\Big)$

تمرین ۶۵. با کشیدن جدول ارزش، تحقیق کنید که فرمولهای مثال بالا، تاتولوژی هستند.

حال آمادهٔ تعریف «تاتولوژی» های منطق مرتبهٔ اول هستیم.

تعریف ۹۸. فرض کنید $f(p_1, \ldots, p_n)$ یک تاتولوژی در منطق گزاره‌ها باشد. اتمهای $p_1, \ldots, p_n$ را به ترتیب با فرمولهای مرتبهٔ اولِ $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ جایگزین کنید. به فرمولِ حاصل یک تاتولوژی در منطق مرتبهٔ اول گفته می‌شود.

پس به عنوان مثال، فرمولهای $(\varphi \vee \neg\varphi)$ و $((\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi)$ تاتولوژی‌هایی در منطق مرتبهٔ اول هستند. در قضیهٔ زیر گفته‌ایم که تاتولوژی‌های منطق مرتبهٔ اول، مصداقی از فرمولهای همواره درست هستند. (تکلیف جمله و فرمول دراینجا باید مشخص شود.)

قضیه ۹۹. فرض کنید جملهٔ φ یک تاتولوژی در منطق مرتبهٔ اول باشد. در این صورت داریم $\models \varphi$.

اثبات. فرض کنید φ به صورت $f(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ باشد که در آن $f(p_1, \ldots, p_n)$ یک تاتولوژی در منطق گزاره‌هاست. نیز فرض کنید که $\mathcal{M}$ یک Lساختار دلخواه باشد. در این صورت برای هر کدام از ψ_i ها یکی از موارد $\mathcal{M} \models \psi_i$ یا $\mathcal{M} \models \neg\psi_i$ رخ می‌دهد. ولی در هر صورت خواهیم داشت $\mathcal{M} \models f(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ زیرا صدق فرمولها در Lساختارها با قوانین مشابه قوانین منطق گزاره‌ها تعریف شده است.

به عنوان توضیح بیشتر، دقت کنید که $f(p_1,\dots,p_n)$ صرف نظر از هر ارزشی که p_i داشته باشند، همواره ارزش ۱ دارد. حال یک ارزش‌دهی به p_i ها به صورت پیش رو در نظر بگیرید: ارزش p_i را یک بگیرید اگر $\mathcal{M} \models \psi_i$ و صفر بگیرید اگر $\mathcal{M} \models \neg\psi_i$. حال داریم $\mathcal{M} \models f(\psi_1,\dots,\psi_n)$ اگروتنهااگر $f(p_1,\dots,p_n)$ با ارزش‌دهی معرفی شده دارای ارزش یک باشد. □

۲.۲.۷ اصل سور عمومی

فرض کنید x یک متغیر و s یک ترم باشد. در این صورت می‌توان در ترمها و فرمولها، متغیر آزادِ x را با ترمِ s جایگزین کرد. وقتی در یک ترمِ t متغیرِ x را با ترمِ s جایگزین می‌کنیم، ترم حاصل را با $t\frac{s}{x}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱۰۰. در زبانِ $L = \{f,g\}$ که در آن f,g نمادهای تابعی به ترتیب دو و تک موضعی هستند، ترمهای $s = f(g(x),g(y))$ و $t = g(f(x,y))$ را در نظر بگیرید. داریم $t\frac{s}{x} = g(f(f(g(x),g(y)),y))$ و $t\frac{s}{y} = g(f(x,f(g(x),g(y))))$. همچنین فرمول $\exists y f(x,y) = z$ در نظر بگیرید. داریم $\varphi\frac{s}{x} = \exists y f(f(g(x),g(y)),y) = z$ و $\varphi\frac{s}{y} = \exists y f(x,y) = z$.

فرض کنید $g(x), f(x)$ دو تابع روی یک مجموعهٔ M باشند. در این صورت برای محاسبهٔ $f(g(a))$ دو روش وجود دارد:
روش اول: ابتدا تابعِ ترکیبیِ $f \circ g(x)$ را به دست بیاوریم و سپس به جای x مقدار a را قرار دهیم.
روش دوم: ابتدا $g(a)$ را حساب کنیم و سپس مقدار $g(a)$ را در f قرار دهیم.
مشابهاً فرض کنید $t(x)$ و $s(x,y)$ دو Lترم باشند و β یک نگاشت مقداردهی به متغیرها در ساختارِ $\mathcal{M}$ باشد به طوری که $\beta(x) = a$ و $\beta(y) = b$. مقدارِ $t\frac{s}{x}[\beta]$ را به دو طریق می‌توان حساب کرد:

۱. روش اول: ترم ترکیبیِ $t\frac{s}{x}$ را در ساختارِ $\mathcal{M}$ تعبیر کنیم و سپس به جای متغیرهایش مقادیر مشخص شده توسط β را قرار دهیم؛ به بیان دیگر $t\frac{s}{x}^{\mathcal{M}}[\beta]$ را محاسبه کنیم.

۲. روش دوم: مقدار $t^{\mathcal{M}}(s^{\mathcal{M}}[\beta])$ را محاسبه کنیم.

دو روش بالا در واقع، بیانی برای برابری $t \circ s(a,b) = t(s(a,b))$ هستند. همین گفته را در زیر، به دقیق‌ترین صورت بیان کرده‌ایم:

قضیه ۱۰۱. فرض کنید x یک متغیر و s یک ترم و β یک نگاشت مقداردهی در ساختارِ $\mathcal{M}$ باشند. در این صورت

$$t\frac{s}{x}^{\mathcal{M}}[\beta] = t^{\mathcal{M}}[\beta\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta]}{x}]$$

اثبات. □

همچنین وقتی در یک فرمولِ φ یک متغیر آزادِ x را با ترمِ s جایگزین می‌کنیم، فرمول حاصل را با $\varphi\frac{s}{x}$ نشان می‌دهیم. در تعریف استقرایی $\varphi\frac{s}{x}$ دقت کنید که وقتی فرمولِ φ به صورت $\exists x\psi$ است و معنای $\psi\frac{s}{x}$ را می‌دانیم، در این صورت $\varphi\frac{s}{x}$ همان φ است. اما وقتی فرمول φ به صورت $\exists y\psi$ است و y متغیری غیر از x است، داریم $\varphi\frac{s}{x} = \exists y\psi\frac{s}{x}$.

مثال ۱۰۲. در زبانِ $L = \{f,g\}$ که در آن f,g نمادهای تابعی به ترتیب دو و تک موضعی هستند، ترم $s = f(g(x),g(y))$ را در نظر بگیرید. همچنین فرمول $\exists y f(x,y) = z$ در نظر بگیرید. داریم $\varphi\frac{s}{x} = \exists y f(f(g(x),g(y)),y) = z$ و $\varphi\frac{s}{y} = \exists y f(x,y) = z$.

گاهی جایگزینی ترمها به جای متغیرها در یک فرمول، موجب ایجاد یک تداخل با سورهای فرمول می‌شود. برای مثال فرمولِ $\varphi(x) = \exists y \quad y^2 \doteq x$ را در زبان $L = \{+,\cdot\}$ در نظر بگیرید. وقتی در این فرمول، متغیر x را با ترم $s = x^2 + y$ جایگزین می‌کنیم، داریم

$$\varphi\frac{s}{x} = \exists y \quad y^2 = x^2 + y.$$

یعنی متغیر x که در فرمول، حضور آزاد دارد، با یک ترم جایگزین شده است که متغیرهایش تحت تأثیر سورهای فرمول اولیه قرار دارد.

تمرین ۶۶. در زبانِ $L = \{+,\cdot\}$ فرمولِ $\varphi(x,y) = \exists z x + y = z$ را به همراه ترمهای $s_1 = x^2 + y^2 + z^2$ و $s_2 = x^2 + y^2$ را در نظر بگیرید. فرمولهای $\varphi\frac{s_1}{x}$ و $\varphi\frac{s_2}{x}$ را بنویسید. همچنین ترم $x + 2y\frac{s_2}{y}$ را بنویسید.

فرض کنید s یک ترم و φ یک فرمول و s یک متغیر باشند. می‌گوییم متغیر x برای ترمِ s در فرمول φ آزاد است، هرگاه وقتی به جای متغیر x در فرمول φ، ترم s را قرار می‌دهیم، تداخلی با سورها ایجاد نشود. این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که یا متغیر x در فرمول φ آزاد نباشد، که در این صورت جایگزین کردن آن با s معنایی ندارد؛ یا این که متغیر x آزاد باشد ولی فرمول φ هیچ سوری نداشته باشد که وقتی s را به جای x قرار می‌دهیم، متغیری در s درگیر آن سور شود. به بیان دیگر، متغیرِ آزادِ x زمانی برای ترم s در φ آزاد است که سورهای φ روی متغیرهایی غیر از متغیرهای استفاده شده در s باشند. در زیر، تعریف را دقیق کرده‌ایم:

تعریف ۱۰۳. می‌گوییم متغیر x در ترم s برای فرمول φ آزاد است هرگاه متغیر x در فرمول φ پای‌بند باشد، یا

۱. فرمول φ به صورت $t_1 \doteq t_2$ باشد

۲. فرمول φ به صورت $R(t_1, \ldots, t_n)$ باشد.

۳. فرمولِ φ به صورت $\neg\psi$ باشد و متغیر x برای s در ψ آزاد باشد.

۴. فرمول φ به صورت $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ باشد و متغیر x برای s هم در ψ_1 و هم در ψ_2 آزاد باشد.

۵. فرمول φ به صورت $\exists y\psi$ باشد، x در ψ برای s آزاد باشد، و y جزو متغیرهای به کار رفته در s نباشد.

بنابراین اگر $\varphi(x)$ فرمول $\exists y \quad x + y = 0$ و s ترم $x^2 + y^2$ باشد، متغیر x برای ترم s در فرمول $\varphi(x)$ آزاد نیست؛ زیرا در صورت جایگذاری x توسط $x^2 + y^2$ به فرمول $\varphi\frac{s}{x}(x, y) = \varphi(s(x, y)) = \exists y \quad (x^2 + y^2) + y = 0$ می‌رسیم و سور $\exists y$ متغیری از متغیرهای موجود در s را درگیر می‌کند.

اما بیایید به متغیر x مقدارِ ۱ و به متغیر y مقدارِ ۲ بدهیم. می‌خواهیم بدانیم که آیا برقراری فرمولِ $\varphi(s(x, y))$ در $x = 1, y = 2$ به معنی برقراری فرمول $\varphi(x)$ در $x = s(1, 2)$ است؟ کمی دقت نشان می‌دهد که اولی، یعنی $\exists y 1 + y^2 + y = 0$ اما دومی یعنی $\exists y \quad 2 + y = 0$ و اینها دو فرمول متفاوت هستند.

قضیه ۱۰۴ (جایگذاری). فرض کنید $\mathcal{M}$ یک Lساختار، s یک Lترم و β یک نگاشت مقداردهی به متغیرها در ساختار $\mathcal{M}$ باشند. همچنین فرض کنید که متغیر x برای ترم s در فرمول φ آزاد باشد. در این صورت $\mathcal{M} \models \varphi\frac{s}{x}[\beta]$ اگروتنهااگر $\mathcal{M} \models \varphi[\beta\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta]}{x}]$

اثبات. فرض کنید فرمولِ φ به صورت $t_1 \doteq t_2$ باشد. در این صورت $\varphi\frac{s}{x}$، فرمولِ $t_1 \doteq t_2\frac{s}{x}$ است. پس $\mathcal{M} \models \varphi\frac{s}{x}[\beta]$ معادل با $t_1^{\mathcal{M}}\frac{s}{x}[\beta] = t_2^{\mathcal{M}}\frac{s}{x}[\beta]$، است و این بنا به لم قبل معادل است با: $t_1^{\mathcal{M}}[\beta\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta]}{x}] = t_2^{\mathcal{M}}[\beta\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta]}{x}]$. اما عبارت آخر به معنی $\mathcal{M} \models \varphi[\beta\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta]}{x}]$ است.

اثبات استقرایی قضیه برای حالات مختلف فرمول φ را به عنوان تمرین رها می‌کنیم و در ادامه تنها حالتی را بررسی می‌کنیم که φ به صورت $\exists y\psi$ است و در آن متغیر x برای s در فرمول ψ آزاد است. داریم

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models \exists y\psi\frac{s}{x}[\beta] \Leftrightarrow \psi\frac{s}{x}[\beta\frac{a}{y}] \quad \text{برای یک عنصر } a \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\beta\frac{a}{y}\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta\frac{a}{y}]}{x}] \quad \text{طبق فرض استقراء} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \exists y\psi[\beta\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta\frac{a}{y}]}{x}] \quad \text{طبق تعریف} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \exists y\psi[\beta\frac{s^{\mathcal{M}}[\beta]}{x}]. \\
&\text{زیرا از آن جا که متغیر } y \text{ در } s \text{ به کار نرفته است داریم } s^{\mathcal{M}}[\beta] = s^{\mathcal{M}}[\beta\frac{a}{y}]
\end{aligned}$$

□

قضیه ۱۰۵ (اصل سور وجودی). فرض کنید متغیرِ x برای ترمِ t در فرمولِ φ آزاد باشد. در این صورت

$$\models (\varphi\frac{t}{x} \to \exists x\varphi)$$

اثبات. بنا به لم ۹۴ باید نشان دهیم که در هر Lساختارِ $\mathcal{M}$ و با هر مقداردهیِ β فرمول فوق درست است. اگر $\mathcal{M}$ یک مدلی برای $\varphi\frac{t}{x}[\beta]$ باشد، در این صورت بنا به قضیهٔ ۱۰۴ $\mathcal{M} \models \varphi[\beta\frac{t^{\mathcal{M}}[\beta]}{x}]$ بنابراین $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$. □

لازم به دقت است که شرایط قضیهٔ بالا مهم هستند: فرمولِ $\varphi = \forall y x + y = 2y$ را در نظر بگیرید. در این فرمول می‌شود x را توسط y جایگزین کرد و به فرمولِ $\forall y \quad y + y = 2y$ رسید. اما از درست بودن این فرمول نمی‌شود درست بودن فرمولِ $\exists x \quad \forall y x + y = 2y$ را نتیجه گرفت. به عنوان مثالی ساده‌تر فرمول $\forall y x \doteq y$ را در نظر بگیرید. واضح است که وقتی x را توسط y جایگزین می‌کنیم به فرمولِ $\forall y \quad y \doteq y$ می‌رسیم؛ ولی از این فرمول نمی‌توان نتیجه گرفت که $\exists x \quad \forall y \quad x \doteq y$.

تمرین ۶۷. نشان دهید که $\vdash (R(x,y) \to \exists x R(x,y))$

تمرین ۶۸. نشان دهید که اگر φ یک فرمول بدون سور باشد، آنگاه $\vdash (\varphi\frac{t}{x} \to \exists x \varphi)$

تمرین ۶۹. چند مثال دیگر بزنید که در آنها $\varphi\frac{t}{x}$ در یک ساختار و با یک ارزش‌دهی β برقرار باشد و $\exists x \varphi[\beta]$ برقرار نباشد.

۳.۲.۷ اصول موضوعهٔ تساوی

لم ۱۰۶. موارد زیر، همه همواره درست هستند. به این موارد، اصول موضوعهٔ تساوی می‌گوییم:

$$\forall x \quad x \doteq x$$

$$\forall x, y \quad x \doteq y \to y \doteq x$$

$$\forall x, y, z \quad x \doteq y \wedge y \doteq z \to x \doteq z$$

$$\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \quad x_1 \doteq y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) \doteq f(y_1, \ldots, y_n)$$

$$\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \quad x_1 \doteq y_1 \wedge \ldots x_n \doteq y_n \to (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow R(y_1, \ldots, y_n)).$$

دو مورد آخر، برای هر نماد تابعی f و هر نماد رابطه‌ای R در زبانِ L در نظر گرفته می‌شوند.

۳.۷ قواعد

همان طور که پیش‌نیز گفتیم، «اصل معرفی سور وجودی» را به این علت «اصل نامیدیم که عبارتی به صورت $\models \varphi$ است. در این بخش، دو «قاعده» معرفی می‌کنیم. هر قاعده صورتی مشابه زیر دارد:

اگر $\models \varphi$ آنگاه $\models \psi$.

قضیه ۱۰۷ (قیاس استثنایی)**.** اگر $\models (\varphi \to \psi)$ و $\models \varphi$ آنگاه $\models \psi$. [۱]

اثبات. واضح. □

قضیه ۱۰۸ (قاعدهٔ معرفی سور وجودی)**.** فرض کنید متغیر x در فرمولِ ψ آزاد نباشد. در این صورت اگر $\models (\varphi \to \psi)$ آنگاه $\models (\exists x \varphi \to \psi)$.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک Lساختار باشد. با فرض این که $\models (\varphi \to \psi)$ نشان می‌دهیم که برای هر نگاشت مقداردهی دلخواهِ β داریم $\mathcal{M} \models (\exists x \varphi \to \psi)[\beta]$. اگر $\mathcal{M} \models \exists x \varphi[\beta]$ آنگاه عنصری مانند $a \in M$ موجود است به طوری که $\mathcal{M} \models \varphi[\beta\frac{a}{x}]$. از $\models (\varphi \to \psi)$ نتیجه می‌شود که $\mathcal{M} \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$. از آنجا که x جزو متغیرهای آزادِ ψ نیست، و بنا به قضیه ۳۱ داریم $\mathcal{M} \models \psi[\beta]$. □

تمرین ۷۰. نشان دهید که در قضیهٔ قضیه ۱۰۸ شرط آزاد نبودنِ x در ψ ضروری است.

۴.۷ تعریف استنتاج

به هر فرمولی که با استفاده از اصول موضوعه و قواعد معرفی شده در این فصل حاصل شود، یک فرمول اثبات‌پذیر می‌گوییم. به بیان دقیق‌تر:

تعریف ۱۰۹. فرض کنید φ یک Lفرمول باشد. می‌گوییم φ (در دستگاه هیلبرت) اثبات‌پذیر است، و می‌نویسیم $\vdash \varphi$ هرگاه φ:

[۱] این قاعده را، قاعدهٔ MP مخفف modus ponens می‌نامیم.

۱. یکی از اصولِ تساوی، یک تاتولوژی مرتبهٔ اول، یا یک اصل سور وجودی باشد، یا

۲. به کار بردن یکی از قواعد قیاس استثنایی، یا معرفی سور وجودی از فرمولهای اثبات‌پذیر دیگر به دست آمده باشد.

پس، وقتی $\vdash \varphi$ آنگاه یک دنبالهٔ $\varphi_1 \ldots, \varphi_n$ از فرمولها وجود دارد به طوری که $\varphi_n = \varphi$ و هر φ_i یا یک اصل است و یا با استفاده از یک قاعده از جملات قبلی به درست آمده است. چنین دنباله‌ای را یک استنتاج برای فرمول φ می‌نامیم. طبیعی است که ممکن است استنتاج‌های مختلفی برای یک فرمولِ φ که قابل اثبات است، وجود داشته باشد.

پس استنتاج از قوانین زیر پیروی می‌کند:

۱. اگر φ یک تاتولوژی مرتبهٔ اول باشد، آنگاه $\vdash \varphi$.

۲. اگر φ یکی از اصول تساوی باشد آنگاه $\vdash \varphi$.

۳. اگر x نسبت به ترم t در φ آزاد باشد آنگاه $\vdash \varphi\frac{t}{x} \to \exists x\varphi$

۴. اگر $\vdash \varphi$ و $\vdash (\varphi \to \psi)$ آن‌گاه $\vdash \psi$.

۵. اگر x در ψ آزاد نباشد آنگاه اگر $\vdash \varphi \to \psi$ آنگاه $\vdash \exists x\varphi \to \psi$.

مثال ۱۱۰. فرض کنید که $\vdash \varphi_1$، $\vdash \varphi_2$ و $\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi$. نشان دهید که در این صورت $\vdash \psi$.

اثبات.

(۱.۷)	تاتولوژی	$\vdash (((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi) \to (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi)))$
(۲.۷)	بنا به فرض	$\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to \psi$
(۳.۷)	بنا به ۱.۷ و ۲.۷ و MP	$\vdash (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to \psi))$
(۴.۷)	بنا به فرض	$\vdash \varphi_1$
(۵.۷)	بنا به ۳.۷، ۴.۷ و MP	$\vdash (\varphi_2 \to \psi)$
(۶.۷)	بنا به فرض	$\vdash \varphi_2$
(۷.۷)	بنابه ۵.۷، ۶.۷ و MP	$\vdash \psi$

□

مثال ۱۱۱ (اصل سور عمومی). فرض کنید x در φ نسبت به t آزاد باشد. در این صورت نشان دهید که $\vdash \forall x\varphi \to \varphi\frac{t}{x}$.

اثبات. بنا به اصل سور وجودی داریم: $\vdash \neg\varphi\frac{t}{x} \to \exists x\neg\varphi$ □

مثال ۱۱۲ (قاعده معرفی سور عمومی). فرض کنید متغیر x در فرمولِ ϕ آزاد نباشد. نشان دهید که اگر $\vdash (\varphi \to \psi)$ آن‌گاه $\vdash (\varphi \to \forall x\psi)$.

اثبات. داریم $\vdash (\neg\psi \to \neg\phi)$ و x در ϕ آزاد نیست، بنابراین بنا به قاعدهٔ معرفی سور عمومی داریم $\vdash (\exists x\neg\psi \to \phi)$ □

توجه کنید اگر $\vdash \varphi$ آنگاه بوضوح $\models \varphi$. به بیان دیگر اگر استنتاجی برای فرمولِ φ وجود داشته باشد آن‌گاه φ یک فرمولِ همواره درست است. علتْ این است که تمام قواعد و اصولی که در اثباتِ φ در دستگاه هیلبرت استفاده می‌شوند، از فرمولهای همواره درست در تمامی مدلها به دست آمدند. اما سوال سخت‌تر این است آیا از $\models \varphi$ نتیجه می‌شود که $\vdash \varphi$؟ یعنی آیا اگر فرمول φ در همهٔ Lساختارها و با هر گونه مقداردهی به متغیرها درست باشد، آیا در این صورت لزوماً اثباتی برای φ وجود دارد؟ پاسخ این سوال مثبت است، و البته قضیهٔ تمامیت گودل نام دارد، و البته در فصل بعدی قرار است بدان بپردازیم. پس قضیهٔ تمامیت گودل، به ما خواهد گفت که برای هر جملهٔ همواره درست، اثباتی وجود دارد. دقت کنید که اصول و قواعدی که برای استنتاج معرفی کرده‌ایم بسیار ساده هستند و می‌توان آنها به عنوان دستورالعمل به یک رایانه داد. این رایانه می‌تواند شروع به کار کند و با استفاده از این دستورالعمل‌ها، خروجی بدهد و این خروجی متشکل از همهٔ فرمولهای همواره درست است.

لم ۱۱۳. فرض کنید $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ یک فرمول در زبانِ L باشد و $c_1,\dots,c_n \notin L$. اگر $\vdash_{L\cup\{c_1,\dots,c_n\}} \varphi(c_1,\dots,c_n)$ آنگاه $\vdash_L \varphi(x_1,\dots,x_n)$.

اثبات. فرض کنید $\varphi_1(c_1,\dots,c_n),\dots\varphi_m(c_1,\dots,c_n)$ اثباتی برای $\varphi(c_1,\dots,c_n)$ باشد. اگر در این تمام این اثبات، به جای c_i ها از x_i استفاده کنیم، به اثباتی برای $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ می‌رسیم. □

بنا به لم بالا، می‌توان مفهوم استنتاج را به جای فرمولها، فقط برای جملات در نظر گرفت. یک فرمول، زمانی اثبات می‌شود که جمله‌ای که با جایگزین کردن متغیرهای آزاد توسط ثوابت ایجاد می‌شود، اثبات‌پذیر باشد.

۵.۷ تمرین

تمرین ۷۱. نشان دهید که $\vdash (\forall x R(x,y) \to R(x,y))$.

تمرین ۷۲. نشان دهید که $\vdash (\forall x H(x) \to H(x))$

***تمرین ۷۳.** نشان دهید که اگر $\vdash R(x)$ آنگاه $\vdash R(y)$.
راهنمایی. در استنتاجی که برای $R(x)$ نوشته شده است، x را با y جایگزین کنید.

***تمرین ۷۴.** نشان دهید که اگر $\vdash R(x)$ آنگاه $\vdash \forall x R(x)$.
از موارد زیر استفاده کنید: *تمرین ۷۳، $\vdash (R(x) \to (R(y) \to R(x)))$، اگر $\vdash (R(y) \to R(x))$ آنگاه $\vdash (R(y) \to \forall x R(x))$.

تمرین ۷۵. فرض کنید φ یک فرمول بدون سور باشد، نشان دهید که $\vdash (\forall x \varphi \to \varphi\frac{t}{x})$

تمرین ۷۶. نشان دهید که اگر $\vdash (\forall x H(x) \to R(x))$ آنگاه $\vdash (\forall x H(x) \to \forall x R(x))$.

تمرین ۷۷. نشان دهید که $\vdash (\exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y))$.
راهنمایی. از تمرین ۷۱ و تمرین ۶۷ کمک بگیرید.

تمرین ۷۸. نشان دهید که $\vdash \exists x (H(x) \to \forall y H(y))$.

تمرین ۷۹. نشان دهید که اگر $\vdash \varphi_1$ و $\vdash \varphi_2$ آنگاه $\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.
راهنمایی. از تاتولوژی $(p \to (q \to p \wedge q))$ استفاده کنید.

فصل ۸

تمامیت

۱.۸ معرفی قضیهٔ تمامیت

در فصلِ ۶۹ با عبارتِ $T \models \varphi$ آشنا شدیم که خوانده می‌شود: تئوری T مستلزم جملهٔ φ است. گفتیم زمانی تئوری T مستلزم جملهٔ φ است که در تمامی مدلهای تئوری T جملهٔ φ هم برقرار باشد. در فصل قبلی با مفهوم اثبات‌پذیری یک جملهٔ φ آشنا شدیم و گفتیم که وقتی می‌نویسیم $\vdash \varphi$ منظورمان این است که جملهٔ φ با چندین بار استفاده از قواعد و اصول دستگاه هیلبرت حاصل می‌شود. در این بخش، نخست عبارتِ $T \vdash \varphi$ را معرفی کرده‌ایم که خوانده می‌شود: «اثباتی برای φ با استفاده از اصول تئوری T وجود دارد»، یا «جملهٔ φ با استفاده از اصول تئوری T اثبات می‌شود.».

تعریف ۱۱۴. فرض کنید T یک تئوری و φ یک فرمول باشد. می‌نویسیم $T \vdash \varphi$ هرگاه جملاتی مانند $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ در تئوری T موجود باشند به طوری که $\vdash ((\varphi_1 \wedge \ldots \varphi_n) \to \varphi)$

بنابراین، زمانی می‌گوییم که جملهٔ φ با استفاده از اصول تئوری T اثبات می‌شود، که بتوانیم با به کارگیری تعدادی متناهی از جملات موجود در T و با استفاده از دستگاه هیلبرت، به استنتاجی برای φ برسیم. در بخش قبل، یک فرمول مشخصاً غلط (مثلاً فرمولِ $x \doteq x \wedge \neg x \doteq x$) را با $\perp$ نشان دادیم و آن را تناقض نامیدیم. همچنین گفتیم اگر $T \nvDash \perp$ آنگاه T دارای مدل است؛ یعنی یک تئوری که «مستلزم تناقض نباشد» دارای مدل است. در این فصل، قضیهٔ زیر را ثابت خواهیم کرد:

قضیه ۱۱۵ (تمامیت)**.** اگر $T \nvdash \perp$ آنگاه T دارای مدل است.

قصد داریم این قضیه را در این فصل اثبات کنیم، اما خوب است پیش از آن، در صورت قضیه کمی غور کرد. در صورت قضیهٔ بالا گفته‌ایم که اگر از اصول تئوری T تناقض استنتاج نشود، آنگاه تئوری T دارای مدل است. بنابراین بنا به تعریف ۱۱۴ گفته‌ایم که اگر از هیچ تعدادِ متناهی از جملات موجود در تئوری T به استنتاجی برای تناقض نرسیم، آن‌گاه T دارای مدل است. این که از هیچ بخش متناهی از تئوری T به استنتاجی برای $\perp$ نرسیم، یک عبارت مربوط به مبحث «نظریهٔ اثبات» است. اما این که تئوری T دارای مدل است، مربوط به مبحث «نظریهٔ مدل» است. زیبایی قضیهٔ بالا، قدرت آن در ایجاد ارتباط میان این دو بخش از علم منطق است.

فرض کنید $T \vdash \perp$. در این صورت، بنا به تعریف، جملاتی مانند $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ در تئوری T وجود دارند به طوری که $\vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \varphi_n \to \perp)$. در نتیجه، بنا به تاتولوژی بودن گزاره $((p \to \perp) \leftrightarrow \neg p)$ داریم $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$. بنابراین، استنتاج شدن تناقض از یک تئوری T به معنی وجود جملاتی مانند $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ در T است به طوری داشته باشیم: $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$.

حال فرض کنید $T = \{\varphi\}$ یک تئوری، حاوی فقط یک جملهٔ φ باشد. داریم:

- اگر $T \nvdash \perp$ آن‌گاه T دارای مدل است، بنابراین:
- اگر $\nvdash (\varphi \to \perp)$ آنگاه یک ساختارِ $\mathcal{M}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{M} \models \varphi$؛ بنابراین
- اگر $\nvdash \neg\varphi$ آنگاه آنگاه یک ساختارِ $\mathcal{M}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{M} \models \varphi$.

عبارت بالا برای هر جمله‌ای برقرار است، بنابراین با استفاده از نقیضِ φ به جای φ داریم:

- اگر $\nvdash \varphi$ آنگاه یک ساختارِ $\mathcal{M}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.

اما عکس نقیض جملهٔ بالا به صورت زیر است:

- اگر در همهٔ ساختارهای $\mathcal{M}$ داشته باشیم $\mathcal{M} \models \varphi$ آنگاه $\vdash \varphi$؛ به بیان دیگر:
- اگر $\models \varphi$ آن‌گاه $\vdash \varphi$.

بنابراین از قضیه ۱۱۵ نتیجه می‌شود که:

نتیجه ۱۱۶. هر جمله‌ای که همواره درست باشد، برایش اثباتی وجود دارد.

نتیجه ۱۱۷. $\models \varphi$ **اگر و تنها اگر** $\vdash \varphi$.

۲.۸ اثبات قضیه ۱۱۵

فرض کنید T یک تئوری دلخواه در زبانِ L باشد به طوری که $T \nvdash \bot$. جملهٔ $\varphi(x)$ را در زبان L در نظر بگیرید. یک ثابتِ $c \notin L$ به زبان اضافه کنید و جملهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$(\exists x\varphi(x)) \to \varphi(c).$$

جملهٔ بالا را می‌توان این گونه خواند: اگر فرمولِ φ قابل برآورده شدن توسط حداقل یک عنصر باشد، آن‌گاه یک ثابت، «شاهدی» بر این برآورده شدن است. حال تئوریِ $T' = T \cup \{(\exists x\varphi(x)) \to \varphi(c)\}$ را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که عدم اثبات تناقض توسط T منجر به عدم اثباتِ تناقض توسط تئوریِ T' می‌شود.

لم ۱۱۸. $T' \nvdash \bot$.

اثبات. اگر $T' \nvdash \bot$ آن‌گاه جملاتِ $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T$ وجود دارند به طوری که $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge (\exists x\varphi(x) \to \varphi(c)) \to \bot$. بنابراین

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \neg(\exists x\varphi(x) \to \varphi(c)) \tag{۱.۸}$$

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \neg(\neg\exists x\varphi(x) \vee \varphi(c)) \tag{۲.۸}$$

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to (\exists x\varphi(x)) \wedge \neg\varphi(c) \tag{۳.۸}$$

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to (\exists x\varphi(x)) \tag{۴.۸}$$

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to (\neg\varphi(c)) \tag{۵.۸}$$

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to (\neg\varphi(y)) \quad \text{با فرض این که } y \text{ متغیری باشد که در سمت چپ ظاهر نشده است و بنا به لم ۹۴.} \tag{۶.۸}$$

$$\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \forall y(\neg\varphi(y)) \quad \text{قاعدهٔ معرفی سور عمومی و ۶.۸} \tag{۷.۸}$$

$$\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_n) \to \bot . \quad \text{بنا به ۴.۸ و ۷.۸} \tag{۸.۸}$$

□

حال فرض کنید $\{\varphi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ لیستی از همهٔ فرمولهای در زبانِ L باشد، که تنها متغیر آزاد آنها x است. در این صورت یک فهرست از ثابت‌های $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و یک فهرست از فرمولهای به صورت $(\exists x\varphi_n(x)) \to \varphi_n(c_n)$ در نظر بگیرید. تک‌تکِ فرمولهای این فهرست را یکی یکی و با استقراء، به تئوریِ T بیفزایید. در این صورت تئوریِ $T_1 = T \cup \{(\exists x\varphi_n(x)) \to \varphi_n(c_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ نیز یک تئوری است که تناقض از آن استنتاج نمی‌شود. این تئوری در زبانِ $L_1 = L \cup \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ نوشته شده است.

احتمالاً خواننده دقت کرده است که در فهرست کردن فرمولها، تعداد آنها را شمارا گرفتیم. حقیقت این است که نیازی به این فرض نیست و با اندکی مهارت در استفاده از استقراء فرامتناهی (یا لم زرن) می‌شود همین کار را با هر تعداد فرمول انجام داد. در فصلهای آیندهٔ همین کتاب با این تکنیک‌ها بهتر آشنا خواهیم شد ولی فعلاً به آنها ورود نمی‌کنیم تا از مسیر اصلی اثبات منحرف نشویم.

اثبات را ادامه می‌دهیم. تئوریِ T_1 یک تئوری در زبانِ L_1 است که در آن ذکر شده است که برای همهٔ فرمولهای وجودی زبانِ L شاهدی وجود دارد. حال فهرستی از همهٔ فرمولهای زبانِ L_1 تهیه کنید و به اندازهٔ آنها، ثابت به زبان اضافه کنید و به زبانِ L_2 برسید و تئوری T_2 را در زبانِ L_2 به‌گونه‌ای بنویسید که در آن ذکر شود که برای همهٔ فرمولهای وجودی در زبانِ L_1 شاهدی وجود دارد. با تکرار همین کار به تئوری‌های $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots T_n \subseteq \ldots$ می‌رسیم به طوری که هر تئوری T_i در زبانِ L_i نوشته شده است و هر تئوری T_{i+1} حاوی فرمول‌هایی است، بیانگر این که برای فرمولهای وجودی زبانِ قبلی، یعنی زبانِ L_i شاهد وجود دارد.

حال تئوری $T' = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i$ را در نظر بگیرید که از اجتماع تمام این تئوری‌های یادشده به دست آمده است و در زبانِ $L' = L_1 \cup L_2 \cup \ldots$ نوشته شده است. تئوریِ T' برای هر فرمولی که در زبانِ L نوشته شود، شاهد دارد. زیرا اگر φ یک فرمول در زبانِ L باشد، آنگاه حتماً متعلق به یک L_i است و وجود شاهد برای آن در تئوریِ T_{i+1} تضمین شده است. همچنین به راحتی می‌توان دید که از تئوریِ T' نیز تناقض استنتاج نمی‌شود، زیرا در این صورت، تناقض باید از یکی از T_i ها استنتاج شود. بیایید آنچه را که تا اینجا اثبات کردیم، خلاصه کنیم:

قدم اول اثبات قضیهٔ تمامیت. اگر T یک تئوری باشد که تناقض از آن استنتاج نشود، آنگاه یک تئوریِ T' شامل تئوری T وجود دارد که در یک زبانِ $L' = L \cup C$ نوشته شده است و برای هر فرمولِ $\varphi(x) \in L'$ حاوی جمله‌ای به صورت $(\exists x\varphi(x)) \to \varphi(c)$ است که در آن $c \in C$. همچنین از تئوری T' هم تناقض استنتاج نمی‌شود. به این قدم اثبات، هنکینی سازی تئوریِ T گفته می‌شود. دقت کنید که ضمن فرایند هنکینی سازی، به اندازهٔ زبانِ L ثابت جدید به آن اضافه می‌شود.

پیش از ادامهٔ اثبات، به یک پدیدهٔ دیگر توجه می‌کنیم. فرض کنید T یک تئوری باشد به گونه‌ای که $T \nvdash \bot$ و φ یک فرمول دلخواه باشند به گونه‌ای که $T \nvdash \neg\varphi$. به بیان دیگر، تئوری T یک تئوری است که تناقض از آن استنتاج نمی‌شود و جملهٔ φ یک جمله است که نقیض آن از تئوری T استنتاج نمی‌شود. در این صورت:

لم ۱۱۹. $T \cup \{\varphi\} \nvdash \bot$.

اثبات. فرض کنید $T \cup \{\varphi\} \vdash \bot$. در این صورت جملاتِ $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T$ وجود دارند به طوری که

$$\vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \wedge \varphi \to \bot\,. \tag{۹.۸}$$

$$\vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \neg\varphi \tag{۱۰.۸}$$

$$T' \vdash \neg\varphi \tag{۱۱.۸}$$

اما ۱۱.۸ در بالا، فرض‌های لم را نقض می‌کند. □

حال فرض کنید $\{\varphi_n\}$ فهرست همهٔ جمله‌ها در زبانِ L باشد. اگر جملهٔ φ_0 به همراه تئوریِ T تناقض نداد، آن را به تئوری اضافه کنید و تئوری حاصل را T_1 بنامید. به همین ترتیب اگر جملهٔ φ_n با T_n تناقض نداد آن را به T_n بیفزایید و به این ترتیب به یک زنجیرِ $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots$ از تئوری‌ها برسید. تئوریِ $\bigcup T_n$ یک تئوری «بزرگ» است که تناقض از آن استنتاج نمی‌شود. همچنین اگر φ یک جمله باشد که با $\bigcup T_n$ تناقض را ثابت نمی‌کند آنگاه φ قبلاً در $\bigcup T_n$ گنجانده شده است (چون یکی از φ_i هاست).

بنابراین با شروع از یک تئوری T به یک تئوریِ که تناقض را اثبات نمی‌کند به یک تئوریِ T'' رسیدیم که آن هم تناقض را اثبات نمی‌کند، و شامل همهٔ جملاتی است که به همراه T'' تناقض را اثبات نمی‌کنند.

در فصلهای بعدی کتاب، با لم زرن آشنا خواهیم شد. با این حال برای خواننده‌ای که با لم زرن آشناست، مرحلهٔ رسیدن به یک تئوری «سازگار ماکزیمال» را به صورت دقیق‌تر پیش رو توضیح می‌دهیم. فرض کنید تئوری T داده شده باشد به طوری که $T \nvdash \bot$. مجموعهٔ $\mathcal{A}$ را متشکل از همهٔ تئوری‌های K در نظر بگیرید که $K \nvdash \bot$. این مجموعه را با ترتیب شمول، مرتب جزئی کنید. بررسی کنید که $\mathcal{A}$ تحت اجتماع زنجیرها بسته است. بنا به لم زُرن $\mathcal{A}$ شامل یک تئوریِ T'' است که $T'' \nvdash \bot$ و T'' با ترتیب شمول، ماکزیمال است. حال اگر φ یک جملهٔ دلخواه باشد به طوری که $T'' \cup \{\varphi\} \nvdash \bot$ آنگاه $\varphi \in T''$ زیرا در غیر این صورت بنا به لم ۱۱۹ داریم $T'' \cup \{\varphi\} \nvdash \bot$؛ و این ماکزیمال بودن T'' در $\mathcal{A}$ را نقض می‌کند. حال وقت آن رسیده که خلاصه‌ای از این مرحلهٔ اثبات را نیز بیان کنیم:

قدم دوم اثبات قضیهٔ تمامیت. فرض کنید که T یک تئوری باشد به طوری که $T \nvdash \bot$. در این صورت یک تئوریِ T'' شامل تئوری T وجود دارد به طوری که اولاً $T'' \nvdash \bot$ و ثانیاً برای هر جملهٔ φ، اگر $T'' \cup \varphi \nvdash \bot$ آنگاه $\varphi \in T''$. به این مرحله از اثبات قضیهٔ تمامیت، ماکزیمال سازی گفته می‌شود. طی این مرحله، زبان تغییر نمی‌کند اما تئوری اولیه، تبدیل به یک تئوری می‌شود که هر جمله‌ای که با آن تناقض نمی‌دهد را در خود دارد.

حال دو قدم اثبات را با هم ترکیب می‌کنیم. یک تئوری T داریم که تناقض از آن اثبات نمی‌شود، آن را نخست به یک تئوری ماکزیمال کامل گسترش می‌دهیم و سپس تئوری حاصل را هنکینی سازی می‌کنیم و آن را T^* می‌نامیم. پس تئوری T^* دارای هر دو ویژگی زیر است:

۱. در زبان $L \cup C$ که حاوی ثوابتی است که طی مراحل هنکینی سازی به زبان L اضافه شده‌اند، برای هر فرمولِ تک‌متغیره شاهد دارد. یعنی برای هر $L \cup C$ فرمول $\varphi(x)$ (که تنها متغیر آزاد آن x است)، یک ثابت $c \in C$ وجود دارد به طوری که $(\exists x\varphi(x)) \to \varphi(c)$ یکی از جملاتِ موجود در تئوری T^* است.

۲. برای هر جملهٔ φ که در زبانِ $L \cup C$ نوشته شده باشد، اگر $\{\varphi\} \cup T^* \nvdash \bot$ آنگاه $\varphi \in T^*$.

ادعا می‌کنیم که تئوری T^* دارای مدل است. توجه کنید که در این صورت، حکمِ قضیهٔ ۱۱۵ نیز اثبات می‌شود. زیرا هر مدلی که برای تئوریِ T^* پیدا کنیم (یا بسازیم) به طور خاص، مدلی برای تئوریِ T است.

گفتیم که تئوری T^* در زبانِ $L \cup C$ نوشته شده است که L همان زبان تئوریِ T است و C مجموعه‌ای از ثوابت است که ضمن هنکینی‌سازی به زبان اضافه شده‌اند. در ادامهٔ اثبات، مجموعهٔ C را تبدیل به یک $L \cup C$ ساختار می‌کنیم که مدلی برای تئوریِ T^* است. پس فعلاً جهان ساختارِ مورد نظر ما همان مجموعهٔ C است.

برای تبدیلِ C به یک $L \cup C$ ساختار، نیاز است که همهٔ نمادهای تابعی، رابطه‌ای و ثوابت در $L \cup C$ تعبیری پیدا کنند. این کار به سادگی صورت می‌گیرد. در هر مورد، برای تعبیر کردن یک علامت زبانی، با تئوریِ T^* مشورت می‌کنیم.

تعبیر علائم ثابت، آسان است؛ تعبیر هر c خودش است. اما یک ملاحظهٔ کوچک لازم داریم: اگر جملهٔ $c_1 \doteq c_2$ در تئوری T^* باشد، باید تعبیرِ c_1, c_2 هر دو یکسان باشد. بنابراین نخست یک رابطهٔ هم‌ارزیِ تساوی روی C به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_1 = c_2 \Leftrightarrow c_1 \doteq c_2 \in T^*.$$

هم‌ارزی بودن رابطهٔ فوق، از نتایج قوانین تساوی در دستگاه هیلبرت است. جهانِ C را در واقع، کلاسهای هم‌ارزی رابطهٔ هم‌ارزی فوق در نظر می‌گیریم.

حال فرض کنید که f یک نماد تابعی n موضعی باشد. برای تعبیر f در جهان C باید بدانیم که برای هر $c_1, \ldots, c_n$ حاصل $f(c_1, \ldots, c_n)$ چیست. اما بنا به هنکینی بودن، می‌دانیم که یک ثابتِ c_{n+1} وجود دارد به گونه‌ای که عبارت زیر در تئوریِ T^* برقرار است:

$$(\exists y f(c_1, \ldots, c_n) = y) \to (f(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1}).$$

از طرفی جملهٔ زیر هم برقرار است:

$$\exists y \quad f(c_1, \ldots, c_n) = y$$

زیرا

$$f(c_1, \ldots, c_n) = f(c_1, \ldots, c_n) \in T^*.$$

بنابراین به راحتی، تعریف می‌کنیم:

$$f(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1}.$$

حال فرض کنید R یک نماد تابعی n موضعی باشد. می‌خواهیم تعیین کنیم که چه زمانی $R(c_1, \ldots, c_n)$ برقرار باشد. می‌دانیم که تئوری T^* یک تئوری ماکزیمال است. جملهٔ $R(c_1, \ldots, c_n)$ یا خودش در این تئوری است، یا نقیضش؛ پس، برای ساختار مورد نظر، تعریف می‌کنیم:

$$(c_1, \ldots, c_n) \in R \Leftrightarrow R(c_1, \ldots, c_n) \in T^*$$

تعبیر ثوابت زبان نیز ساده است: ثوابت موجود در مجموعهٔ C تعبیرشان، خودشان باشد. دقت کنید که اگر جملهٔ $c_1 \doteq c_n$ در تئوری T^* باشد، آنگاه اتفاق $c_1 = c_2$ در C می‌افتد.

بدین‌سان، C تبدیل به جهانِ یک $L \cup C$ ساختار شده است؛ یعنی همهٔ توابع، روابط و ثوابت این زبان، تعبیری در C دارند. بیایید این ساختار را با $\mathcal{C}$ نشان دهیم. آخرین قدمی که از اثبات باقی‌مانده، این است که نشان دهیم که $\mathcal{C} \models T^*$.

فرض کنید که φ یک جمله باشد. با استقراء روی پیچیدگی φ نشان می‌دهیم که $\mathcal{C} \models \varphi$ اگروتنهااگر $\varphi \in T^*$. به طور خاص از این نتیجه خواهد شد که $\mathcal{C} \models T^*$. دقت کنید که جملهٔ φ به صورت $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ است که در آن φ یک فرمول در زبانِ L است که به جای متغیرهای آن، ثابت‌هایی از مجموعهٔ C قرار گرفته است. پس استقرای ما در واقع روی پیچیدگیِ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ به عنوان یک L فرمول خواهد بود.

پیش از شروع استقراء، نیاز است مشاهده‌ای دربارهٔ ترمها داشته باشیم. فرض کنید $t(c_1, \ldots, c_n)$ یک ترم باشد به طوری که $t(x_1, \ldots, x_n)$ یک ترم در زبانِ L است. جملهٔ $\exists x \quad t(c_1, \ldots, c_n) \doteq x$ در تئوری T^* است؛ زیرا جملهٔ $t(c_1, \ldots, c_n) \doteq t(c_1, \ldots, c_n)$ در آن است. بنا به ویژگی هنکینی، ثابت c_{n+1} وجود دارد به طوری که

$$t(c_1, \ldots, c_n) \doteq c_{n+1}$$

جمله‌ای در تئوریِ T^* است. به راحتی و با استقراء روی پیچیدگی ترم‌ها می‌توان نشان داد که در ساختارِ $\mathcal{C}$ داریم:

$$t^{\mathcal{C}}(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1} \Leftrightarrow (t(c_1, \ldots, c_n) \doteq c_{n+1}) \in T^*.$$

فرض کنید جملهٔ φ به صورت $t_1(c_1, \ldots, c_n) \doteq t_2(c_1, \ldots, c_n)$ باشد. بنا بر آنچه گفته شد، ثابت‌های $c_{n+1}, c'_{n+1} \in C$ وجود دارند به طوری که $\mathcal{C} \models t_1(c_1, \ldots, c_n) = c_{n+1}$ و $\mathcal{C} \models t_2(c_1, \ldots, c_n) = c'_{n+1}$. حال اگر جملهٔ $t_1(c_1, \ldots, c_n) \doteq t_2(c_1, \ldots, c_n)$ در تئوریِ T^* است، جملهٔ $c_{n+1} = c'_{n+1}$ نیز در این تئوری است، بنابراین جملهٔ φ در $\mathcal{C}$ برقرار است. به طور مشابه، اگر نقیض $\mathcal{C} \models t_2(c_1, \ldots, c_n) = c'_{n+1}$ در تئوری باشد، ثابت‌های مربوطه با هم مساوی نیستند.

اگر φ به صورت $R(c_1, \ldots, c_n)$ باشد، در این صورت بنا به روش تعبیر رابطهٔ R واضح است که برقراری این رابطه در $\mathcal{C}$ دقیقاً معادل با وجود جملهٔ $R(c_1, \ldots, c_n)$ در تئوریِ T^* است.

فرض کنید فرمولِ φ به صورت $\psi_1 \wedge \psi_2$ باشد. نیز فرض کنید که بدانیم که $\psi_1(c_1, \ldots, c_n)$ و $\psi_2(c_1, \ldots, c_n)$ دقیقا زمانی در $\mathcal{C}$ برقرار هستند که در T^* باشند. اثبات حکم برای فرمول φ در این حالت، از مشاهدهٔ پیش رو به دست می‌آید که بنا به ماکزیمال بودنِ T^* (تمرین ۸۲ و تمرین ۸۳) داریم:

$$\psi_1(c_1, \ldots, c_n) \wedge \psi_2(c_1, \ldots, c_n) \in T^* \Leftrightarrow \psi_1(c_1, \ldots, c_n) \in T^* \text{ و } \psi_2(c_1, \ldots, c_n) \in T^*$$

اگر فرمولِ φ به صورت $\neg\psi$ باشد، حکم مورد نظر به راحتی اثبات می‌شود، زیرا بنا به فرض استقراء $T^* \vdash \psi$ اگر و تنها اگر $\mathcal{C} \models \psi$.

حال فرض کنید فرمولِ φ به صورت $\exists x \psi$ باشد و حکم برای فرمول ψ برقرار باشد. داریم $T^* \vdash \exists x \psi(x, c_1, \ldots, c_n)$ اگروتنهااگر ثابت c وجود داشته باشد به طوری که $T^* \vdash \psi(c, c_1, \ldots, c_n)$؛ زیرا تئوری T^* هنکینی است. از طرفی، بنا به فرض استقراء، $T^* \vdash \psi(c, c_1, \ldots, c_n)$ اگر و تنها اگر $\mathcal{C} \models \psi(c, c_1, \ldots, c_n)$. بنابراین اگر $T \vdash \exists x \psi(x, c_1, \ldots, c_n)$ آن‌گاه $\mathcal{C} \models \exists x \psi(x, c_1, \ldots, c_n)$.

از طرف دیگر اگر $\mathcal{C} \models \exists x \psi(x, c_1, \ldots, c_n)$ آنگاه $c \in \mathcal{C}$ موجود است به طوری که $\mathcal{C} \models \psi(c, c_1, \ldots, c_n)$. بنا به فرض استقراء، برای فرمولِ ψ داریم $T \vdash \psi(c, c_1, \ldots, c_n)$. بنابراین، بنا به اصل سور وجودی، $T \vdash \exists x \psi(x, c_1, \ldots, c_n)$.

۳.۸ تمرین

تعریف ۱۲۰. تئوری T را یک تئوری ماکزیمال سازگار می‌نامیم هرگاه $T \nvdash \bot$ و برای هر جملهٔ φ اگر $T \cup \{\varphi\} \nvdash \bot$ آنگاه $\varphi \in T$.

تمرین ۸۰. نشان دهید که هر تئوری ماکزیمال سازگار، کامل است. نشان دهید که در واقع برای هر جملهٔ φ داریم $\varphi \in T$ یا $\neg\varphi \in T$.

تمرین ۸۱. فرض کنید T یک تئوری سازگار ماکزیمال باشد. نشان دهید که $T \vdash \varphi$ اگر و تنها اگر $\varphi \in T$.

تمرین ۸۲. فرض کنید T ماکزیمال سازگار باشد. اگر $\varphi_1 \in T$ و $\varphi_2 \in T$ نشان دهید که آنگاه $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in T$.

تمرین ۸۳. فرض کنید T یک تئوری ماکزیمال سازگار باشد. اگر $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \in T$ نشان دهید که آن‌گاه $\varphi_1 \in T$ و $\varphi_2 \in T$.

تمرین ۸۴. فرض کنید T یک تئوری ماکزیمال باشد به طوری که $T \nvdash \bot$. اگر $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in T$ نشان دهید که آن‌گاه یا $\varphi_1 \in T$ یا $\varphi_2 \in T$.

در فصل گذشته، ثابت کردیم که یک تئوری که تناقض از آن استنتاج نشود دارای مدل است. همان طور که گفته بودیم، از این قضیه، نتیجه می‌شود که برای فرمولهای همواره درست، اثبات وجود دارد. بدون هیچ توضیحی، خودِ صورت قضیه، به اندازهٔ کافی در سطوح ریاضی و فلسفی

شگفتی‌زاست: در منطق ریاضی، «اثبات می‌شود» که برای جملات همواره درست، «اثبات وجود دارد». با این حال در این فصل به برخی شگفتی‌هایی خواهیم پرداخت که زاییدهٔ کاربرد ریاضی این قضیه هستند. مطالعهٔ این نوع شگفتی‌ها، موضوع اصلی شاخه‌ای از منطق ریاضی به نام «نظریهٔ مدلها» است.

۴.۸ تصمیم‌پذیری، نگاهی اجمالی

بحث را با یک لم ساده شروع کنیم:

لم ۱۲۱. فرض کنید T یک تئوری و φ یک جمله باشند. در این صورت $T \models \varphi$ اگروتنهااگر $T \vdash \varphi$.

اثبات. $T \models \varphi$ اگر و تنها اگر $T \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$ اگر و تنها اگر $T \cup \{\neg\varphi\}$ مدلی نداشته باشد، اگر و تنها اگر $T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$ اگر و تنها اگر $T \vdash \varphi$. □

بنا به لم بالا، از این پس در این کتاب، دو مفهوم استلزام ($\models$) و استنتاج ($\vdash$) گاهی به جای یکدیگر به کار خواهند رفت. تمرین زیر یک نتیجه جالب از این یکسان‌بینی است:

تمرین ۸۵. فرض کنید که از این که $T \vdash \varphi$ نتیجه شود که $T \vdash \psi$. نشان دهید که در این صورت نتیجه نمی‌توان گرفت که $T \vdash (\varphi \to \psi)$. به بیان دیگر، اگر از اثبات‌پذیر بودنِ φ اثبات‌پذیر بودنِ ψ نتیجه شود، آن‌گاه لزومی ندارد که اثباتی برای $(\varphi \to \psi)$ وجود داشته باشد.

در عین حال که دو مفهوم استنتاج و استلزام با هم معادل هستند، مفهوم استنتاج چند سودمندی دارد که از آنها به صورت پیش رو است: قوانین استنتاج (در دستگاه هیلبرت) محدود هستند و می‌توان آنها را به یک الگوریتم سپرد. در واقع یک الگوریتم می‌تواند به جای ما استنتاج و تنایج یک تئوری را چاپ کند. برای استنتاج کردن یک جملهٔ φ تنها نیازمند به استفاده از قواعد هستیم و استنتاج یک فرایند «ماشینی» است. در زیر این گفته را کمی دقیق‌تر کرده‌ایم، هر چند ارائهٔ تعریف دقیق «الگوریتم» را بخش‌های بعدی کتاب موکول کرده‌ایم، در زیر توضیحی دربارهٔ الگوریتمیک بودن تئوری‌ها داده‌ایم که انتظار داریم فهم آن مستقل از درک دقیق معنی الگوریتم باشد.

فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ دلخواه از اعداد طبیعی باشد. می‌گوییم A یک مجموعهٔ بازگشتی (یا یک مجموعهٔ محاسبه‌پذیر، یا یک مجموعهٔ تصمیم‌پذیر) است، هرگاه یک الگوریتم وجود داشته باشد، که وقتی یک عدد طبیعی n را به آن می‌دهیم، دقیقاً مشخص کند که $n \in A$ یا $n \notin A$. در این حالت، وقتی یک عدد n به الگوریتم مورد نظر ما داده می‌شود، مطمئناً الگوریتم متوقف می‌شود و تکلیف تعلقِ n به A را برای ما روشن می‌کند. اما مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ $\mathbb{N}$ را «به طور بازگشتی شمارش‌پذیر» یا «به طور محاسبه‌پذیر شمارش‌پذیر» می‌نامیم هرگاه الگوریتمی وجود داشته باشد که وقتی $n \in \mathbb{N}$ را به آن می‌دهیم، در صورتی که $n \in A$، متوقف شود و به ما اعلام کند که $n \in A$. در واقع در این حالت، وقتی به الگوریتم یک عدد n را می‌دهیم، تنها در صورتی که n متعلق به A باشد، الگوریتم متوقف می‌شود. مشکل این جاست که وقتی n را به الگوریتم خود می‌دهیم، فقط می‌دانیم که اگر خوش‌شانس باشیم و n در A باشد الگوریتم این را به ما خواهد گفت، اما نمی‌دانیم که چقدر باید صبر کنیم! ممکن است n در A نباشد و ما انتظار بیهوده بکشیم! بنا به یک تعریف معادل، یک مجموعهٔ A به طور بازگشتی شمارش‌پذیر است هرگاه الگوریتمی وجود داشته باشد که اعضای A را چاپ کند.

تمرین ۸۶. نشان دهید که مجموعهٔ A به طور بازگشتی شمارش‌پذیر است اگر و تنها اگر الگوریتمی وجود داشته باشد که همهٔ اعضای A را چاپ کند.

تمرین ۸۷. نشان دهید که A بازگشتی است اگر و تنها اگر A و A^c هر دو به طور بازگشتی شمارش‌پذیر باشند.

مفهوم تصمیم‌پذیری را می‌توان به تئوری‌های مرتبهٔ اول نیز تعمیم داد. یک تئوریِ T را تصمیم‌پذیر می‌نامیم هرگاه مجموعهٔ $\{\varphi : T \vdash \varphi\}$ یک مجموعهٔ تصمیم‌پذیر باشد. به بیان دیگر، زمانی یک تئوری T تصمیم‌پذیر است که یک الگوریتم موجود باشد که یک جملهٔ φ را به عنوان ورودی دریافت کند و دقیقاً مشخص کند که آیا تئوری مورد نظر، مستلزم φ هست یا نه؛ به بیان دیگر الگوریتم یادشده، یک جملهٔ φ را می‌گیرد و مشخص می‌کند که آیا $T \vdash \varphi$ یا $T \nvdash \varphi$ (لازم به یادآوری است که $T \nvdash \varphi$ به معنیِ $T \vdash \neg\varphi$ نیست. بنابراین ادعا نکرده‌ایم که یک تئوری تصمیم‌پذیر، کامل است). مشابهاً یک تئوری T را به طور بازگشتی شمارش‌پذیر می‌نامیم هرگاه الگوریتمی وجود داشته باشد که جملات T را چاپ کند. به طور معادل هرگاه الگوریتمی وجود داشته باشد که اعضای مجموعهٔ $\{\varphi : T \vdash \varphi\}$ را چاپ کند. بنابراین زمانی که یک تئوری، به طور بازگشتی

شمارش‌پذیر است، اگر بدانیم که یک جملهٔ φ از تئوری مورد نظر نتیجه می‌شود، مطمئناً آن جمله چاپ خواهد شد. قضیهٔ زیر یک محک مناسب برای بررسی تصمیم‌پذیری تئوری‌هاست:

قضیه ۱۲۲. فرض کنید T یک تئوریِ به طور بازگشتی شمارش‌پذیر باشد. در این صورت اگر T کامل باشد، آن‌گاه T تصمیم‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید M الگوریتمی باشد که تئوری T را چاپ می‌کند. در این صورت با ترکیب این الگوریتم، با الگوریتمی که قوانین استنتاج را می‌داند، به الگوریتمی، مثلاً به نام N می‌رسیم که تمامی نتایج T را چاپ می‌کند. اما هر جملهٔ φ یا خودش و یا نقیض جزو نتایج T است. پس مطمئناً برای جملهٔ φ بالاخره یا خودِ φ یا نقیض آن چاپ خواهد شد. پس می‌توان الگوریتمی داشت که جملهٔ φ را بگیرد، اگر φ در خروجی الگوریتم N این جمله چاپ شود، خروجی yes و اگر در خروجی N جملهٔ $\neg\varphi$ چاپ شود، خروجی no بدهد. □

ترکیب مطالب این بخش با مطالب بخش ۱.۶ ما را به نتایج جالبی می‌رساند. در بخشِ ۱.۶ اصول موضوعهٔ پئانو، $Peano$، را برای ساختارِ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ معرفی کردیم. اصول موضوعهٔ پئانو قابل چاپ توسط یک الگوریتم هستند؛ در واقع اگر روشی برای کد کردن فرمولهای مرتبهٔ اول داشته باشیم، تعداد متناهی جمله و یک شمای اصل استقرایی داریم که قابل چاپ توسط الگوریتم هستند. بنابراین اگر $Peano$ کامل باشد، بنا به قضیهٔ ۱۲۲ تصمیم‌پذیر است.

از طرفی بنا بر آن‌چه در بخشِ ۱.۶ گفتیم، اگر $Peano$ کامل باشد، آنگاه مجموعهٔ $\{\varphi : Peano \vdash \varphi\}$ برابر با مجموعهٔ $\{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\}$ است. پس اگر $Peano$ کامل باشد، الگوریتمی وجود دارد که یک جملهٔ φ را دریافت کند، و به ما بگوید که آیا آن جمله در ساختار $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ برقرار است یا خیر. با این توضیحات، دوباره صورت قضیهٔ ناتمامیت گودل را بیان می‌کنیم و البته هنوز هم اثبات آن را به عقب‌تر در این کتاب موکول کرده‌ایم:

قضیه ۱۲۳ (ناتمامیت اول گودل)**.** پئانو تصمیم‌پذیر نیست، در نتیجه کامل نیست.

خلاصهٔ فصل. در این فصل اثبات کردیم که اگر T یک تئوری باشد به طوری که $T \nvdash \bot$ آن‌گاه T دارای مدل است. روش اثبات به این صورت است که ابتدا T را با افزودن جملاتی مناسب، تبدیل به یک تئوری می‌کنیم که برای هر فرمول وجودی شاهد دارد. سپس همهٔ جملاتی را که با تئوری به دست آمده سازگاری دارند (یعنی با آن تناقض نمی‌دهند) به آن می‌افزاییم. سپس مجموعهٔ «شاهد» ها را تبدیل به یک L ساختار می‌کنیم که مدلی برای تئوری مد نظر ماست. این مدل، به‌گونه‌ای است که در آن، تنها اتفاقاتی رخ می‌دهد که تئوری کامل‌شدهٔ شاهددار ما اجازه می‌دهد. مثلاً عناصر $c_1, \ldots, c_n$ زمانی با هم در رابطهٔ R هستند که جمله‌ی $R(c_1, \ldots, c_n)$ در تئوری باشد.

از این که هر تئوری T که تناقض نمی‌دهد دارای مدل است، نتیجه می‌شود که اگر φ یک جملهٔ همواره درست باشد، اثباتی برای آن وجود دارد. برای اثبات این، کافی است که تئوری $T = \{\varphi\}$ را در نظر بگیریم. بنابراین قضیهٔ درستی و تمامیت به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\models \varphi \text{ اگر و تنها اگر } \vdash \varphi$$

فقط جملاتی همواره درست هستند که اثباتی برای آنها وجود دارد.

فصل ۹

فشردگی: شناخت ذات از روی صفات

فرض کنید $\sum$ یک مجموعه (نامتناهی) از صفات باشد. آیا شخصی وجود دارد که تمامی این صفات را با هم داشته باشد؟ بنا به قضیهٔ فشردگی، اگر هر تعداد متناهی از این صفات، قابل تبلور یافتن در شخصی باشد، آنگاه شخصی وجود دارد که همهٔ این صفات را با هم دارد. در زیر این گفته را دقیق کرده‌ایم.

گفتیم که اگر $T \vdash \bot$ آن گاه جملاتی $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T$ وجود دارند به طوری که $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \bot$. بنابراین اگر تئوری T تناقض را اثبات کند، بخشی متناهی از آن تناقض را اثبات کرده است:

اگر برای هر زیرمجموعهٔ متناهیِ $\Delta \subseteq T$ داشته باشیم $\Delta \nvdash \bot$ آن گاه داریم $T \nvdash \bot$.

اما در قضیهٔ ۱۱۵ گفتیم که تناقض ندادن، معادل است با مدل داشتن؛ پس جملهٔ بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

اگر برای هر مجموعهٔ متناهیِ $\Delta \subseteq T$ ساختاری مانند $\mathcal{M}_\Delta$ وجود داشته باشد به طوری که $\mathcal{M}_\Delta \models \Delta$، آن گاه یک ساختارِ $\mathcal{M}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{M} \models T$.

جملهٔ بالا، قضیهٔ فشردگی نام دارد که در زیر آن را به صورت قضیه بازنوشته‌ایم:

قضیه ۱۲۴ (فشردگی). فرض کنید T یک تئوری باشد که هر بخش متناهی آن دارای مدل است. در این صورت T دارای مدل است.

به اندازهٔ همهٔ بقیهٔ این کتاب فرصت داریم تا دربارهٔ اهمیت و زیبایی این قضیه صحبت کنیم. اما بهتر است عجول نباشیم و در این فصل قرار است تنها «یک لمعه ز روی لیلی‌ات بنمایم»!

نتیجه ۱۲۵. اگر $T \vdash \varphi$ آنگاه بخشی متناهی مانند $\Delta \subseteq T$ موجود است به طوری که $\Delta \vdash \varphi$.

نتیجه ۱۲۶. اگر $T \models \varphi$ آنگاه بخشی متناهی مانند $\Delta \subseteq T$ موجود است به طوری که $\Delta \models \varphi$.

در بخشِ ۳.۴ در این باره صحبت کردیم که اصولاً برای چه پدیده‌هایی می‌توان تئوری مرتبهٔ اول نوشت. مثال زیر، روشی برای برخورد با برخی از این مسائل را ارائه می‌دهد.

مثال ۱۲۷. فرض کنید که T یک تئوری است که مدلهای متناهی به اندازهٔ دلخواه بزرگ دارد؛ یعنی برای هر عدد طبیعیِ n یک مدل متناهی با اندازهٔ بیشتر از n دارد. نشان دهید که در این صورت T دارای یک مدل نامتناهی است.

اثبات. جملهٔ φ_n در نظر بگیرید که می‌گوید: حداقل n عنصر متمایز وجود دارد. تئوریِ $T' = T \cup \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دارای مدل است، زیرا هر بخش متناهی آن دارای مدل است. در واقع، هر بخش متناهی از تئوری T' شامل بخشی متناهی از T مثلاً به نام Δ و یک بخش متناهیِ از $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ است که آن را بی کاسته شدن از کلیت به صورت $A = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ فرض می‌کنیم. واضح است که $\Delta \cup A$ مدل دارد؛ هر مدلی از T که اندازهٔ آن از N بیشتر است، مدلی برای $\Delta \cup A$ است. □

نتیجه ۱۲۸. نمی‌شود یک تئوری T مخصوص مجموعه‌های متناهی نوشت.

اثبات. هر تئوری T برای این کار، دارای مدلهای متناهی به اندازهٔ کافی بزرگ است؛ پس مدلی نامتناهی دارد. از این رو نمی‌تواند تئوری مجموعه‌های متناهی باشد. $\square$

مثال ۱۲۹ (اعداد طبیعی نااستاندارد). ساختارِ $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$ را در نظر بگیرید. یکی از ویژگی‌های مهم این ساختار این است که هر عنصر در آن، از متناهی بار جمع کردن عدد 1 به دست می‌آید:

$$n = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{بار}}$$

نشان دهید که یک ساختارِ $\mathbb{N}'$ وجود دارد که تمامی ویژگی‌های اعداد طبیعی را داراست، ولی دارای عنصری است که از تمام اعداد طبیعی بزرگتر است. در واقع $\mathbb{N}'$ یک مجموعه از اعداد طبیعی است که در آن «اعداد طبیعی نااستاندارد» نیز قرار گرفته‌اند.

پاسخ. به زبانِ $L = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$ یک ثابتِ c اضافه کنید و زبان حاصل را L' بنامید. تئوریِ T' را در زبانِ L' به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$T' = \mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) \cup \{c > 1, c > 1 + 1, c > 1 + 1 + 1, c < 1 + 1 + 1 + 1, \ldots\}.$$

ادعا می‌کنیم که هر بخشِ متناهی از تئوری T' دارای مدل است. بدون کاستن از کلیت، بخش متناهی از T' را به صورت $\Delta \cup \{c > 1, \ldots, c > N\}$ در نظر بگیرید که در آن $\Delta \subseteq \mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$. ساختارِ $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <, N + 1)$ مدلی برای این بخش متناهی است، که البته در آن $c^{\mathcal{M}} = N + 1$.

از این که هر بخش متناهی از تئوری T' مدل دارد، نتیجه می‌گیریم که T' دارای مدل است. فرض کنید $\mathcal{M} = (M, +, \cdot, 0, 1, <, c^{\mathcal{M}})$ مدلی برای T' باشد. در این صورت $\mathcal{M}$ همهٔ ویژگی‌های $\mathcal{N}$ را داراست، اما دارای عنصری به نام $c^{\mathcal{M}}$ است که از تمامی اعداد طبیعی بزرگتر است. دقت کنید که M شامل همهٔ اعداد طبیعی استاندارد ماست، زیرا $1 \in M$ و همهٔ جمع‌های متناهی به صورت $1 + 1 + \ldots + 1$ نیز در M هستند. $\square$

مثال ۱۳۰ (قضیهٔ اردوش - رادو). یک گراف G را چهار ـ رنگ‌پذیر می‌نامیم هرگاه بتوان به هر راس آن یک رنگ از میان رنگهای موجود در مجموعهٔ $\{b, r, y, g\}$ نسبت داد، به گونه‌ای که هیچ دو رأس مجاور، هم‌رنگ نباشند. فرض کنید (G, R) یک گراف نامتناهی باشد. نشان دهید که اگر هر زیرگرافِ متناهی از G چهارـ رنگ‌پذیر باشد، G نیز چهار ـ رنگ‌پذیر است.

اثبات. برای هر $g \in G$ یک ثابتِ g به زبان گراف‌ها بیفزایید. هم‌چنین نمادهای رابطه‌ای تک‌موضعیِ $b(x), r(x), y(x), g(x)$ را به زبان اضافه کنید و و زبان حاصل را L_G بنامید. هر نماد رابطه‌ای این‌چنین، قرار است رنگ یک رأس x را معلوم کند. تئوریِ T' را در زبانِ L_G به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$T' = T_{graph} \cup \{R(g_1, g_2) : G \models R(g_1, g_2)\} \cup \{\forall x (b(x) \vee r(x) \vee y(x) \vee g(x))\} \cup$$
$$\{\neg \exists x, y\, (R(x, y) \wedge ((b(x) \wedge b(y)) \vee (r(x) \wedge r(y)) \vee (y(x) \wedge r(y)) \vee (g(x) \wedge g(y))))\}$$

بدون کاستن از کلیت، می‌توان چنین پنداشت که هر بخشِ متناهی از تئوری T' گراف بودن، وجود یال بین برخی رئوس گراف G و چهاررنگ‌پذیر بودن را بیان می‌کند. هر بخشِ متناهی این چنین، که در آن از ثابت‌های $\{g_1, \ldots, g_n\}$ استفاده شده باشد، توسط زیرگراف $\{g_1, \ldots, g_n\}$ از G برآورده می‌شود. پس تئوری T' دارای مدل است.

اگر (G', R') مدلی برای تئوری T' باشد، G' یک گراف شامل G است که چهار ـ رنگ‌پذیر است. رنگ‌آمیزی این گراف را می‌توان روی G نیز قرار داد. $\square$

***مثال ۱۳۱** (یک پارادوکس دربارهٔ اصل انتظام). گفتیم که تئوری مجموعه‌ها را با **ZFC** نشان می‌دهیم (مثال ۵۷ را مشاهده کنید) در فصل‌های پیش رو با این تئوری به طور دقیق آشنا خواهیم شد، ولی فعلاً به ذکر این نکته بسنده می‌کنیم که ZFC یک تئوری در زبانِ $L = \{\in\}$ است که اصول نظریهٔ مجموعه‌ها مانند اصل انتخاب، اصل‌انتظام، و غیره در آن نوشته شده‌اند. اصل انتظام بیانگر این است که دنباله‌های نزولیِ $a_0 \ni a_1 \ni a_2 \ldots$ در یک جهان مجموعه‌ها یافت نمی‌شود. اما از طرفی مدلهای مختلفی برای نظریهٔ مجموعه‌ها یافت می شود که در آنها دنباله‌های متناهی به اندازهٔ کافی بزرگ وجود دارد. با استفاده از قضیهٔ فشردگی ثابت کنید که از این نتیجه می‌شود که مدلی برای نظریهٔ مجموعه‌ها وجود دارد که در آن یک دنبالهٔ نامتناهی نزولی از مجموعه‌ها وجود دارد. آیا توجیهی برای این پدیده دارید؟

۱.۰.۹ تمرین

تمرین ۸۸. فرض کنید $\varphi(x)$ یک فرمول در نظریهٔ گروه‌ها باشد به طوری که برای هر عدد طبیعیِ n یک گروه G_n و در آن گروه، عنصری مانند g_n با مرتبهٔ متناهی بیش از n وجود دارند به طوری که $G_n \models \varphi(g_n)$. نشان دهید که یک گروه G و در آن عنصری مانند g با مرتبهٔ نامتناهی وجود دارند به طوری که $G \models \varphi(g)$.

تمرین ۸۹. فرض کنید $\mathbb{K}$ یک کلاس از L ساختارها باشد. می‌گوییم $\mathbb{K}$ قابل اصل‌بندی است، هرگاه یک تئوری T وجود داشته باشد به طوری که $\mathbb{K} = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \models T\}$. نشان دهید که اگر $\mathbb{K}$ و $\mathbb{K}^c$ (یعنی کلاس همهٔ ساختارهایی که در $\mathbb{K}$ نیستند) هر دو قابل اصل بندی باشند، آن‌گاه $\mathbb{K}$ قابل اصل‌بندی توسط یک تئوری متناهی (یعنی یک تئوری با تعدادی متناهی جمله) است.

تمرین ۹۰. نشان دهید که در زبان گروه‌ها (مثال ۵۲ را مشاهده کنید) نمی‌توان یک فرمولِ $\varphi(x)$ نوشت که عناصر با مرتبهٔ متناهی را در همهٔ گروه‌ها به صورت یکنواخت تعریف کند. یعنی فرمولِ φ به گونه‌ای باشد که اگر G یک گروه باشد، آنگاه $\{x \in G : \varphi(x)\}$ دقیقاً متشکل از عناصر با مرتبهٔ متناهی باشد.

تمرین ۹۱. نشان دهید که هیچ فرمولِ $\varphi(x)$ وجود ندارد که برای هر مدلِ $\mathcal{N}' = (\mathbb{N}', +, \cdot) \models \mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ داشته باشیم:

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N}' : \varphi(x)\}.$$

راهنمایی. از مثال ۱۲۹ کمک بگیرید.

***تمرین ۹۲.** فرض کنید $\varphi(x)$ یک فرمول در زبانِ $\{+, \cdot, 0, 1, <\}$ باشد و عبارت زیر برقرار باشد:

هر عنصر بی‌نهایت بزرگ (یعنی هر عنصری که از تمام اعداد طبیعی بزرگتر است) ویژگی φ را دارد.

نشان دهید که عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که هر عنصر بزرگتر از n ویژگی φ را دارد.

۱.۹ مدل‌های بزرگتر و کوچک‌تر، محکی برای کامل بودن

در این بخش به قضایای جذاب «لونهایم ـ اسکولم» و «آزمون وات برای کامل‌بودن تئوری‌ها» پرداخته‌ایم. قضیهٔ لونهایم ـ اسکولم تضمین می‌کند که تئوری‌هایی که حداقل یک مدل نامتناهی دارند، مدلهای به هر اندازهٔ دلخواه بزرگ و به هر اندازهٔ دلخواه کوچک دارند. در زیر این گفته را دقیق بیان کرده‌ایم.

قضیه ۱۳۲ (لونهایم ـ اسکولم). فرض کنید که T یک تئوری است (در یک زبان شمارا) که برای هر عدد طبیعیِ n مدلی با اندازهٔ بیشتر از n دارد. در این صورت، برای هر کاردینالِ نامتناهیِ κ تئوری T دارای مدلی با اندازهٔ κ است.

اثبات. به زبانِ تئوری T به تعداد κ ثابتِ $\{c_i\}_{i<\kappa}$ اضافه کنید و زبان حاصل را با L_C نشان دهید. در زبانِ L_C تئوری زیر را در نظر بگیرید:

$$T \cup \{c_i \neq c_j : i, j \in \kappa, i \neq j\}.$$

یک بخش متناهیِ Δ از تئوری بالا، شامل بخشی از تئوری T و تعدادی متناهی جملهٔ $c_i \neq c_j$ است. بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که اندیسهای این تعداد متناهی جمله در مجموعهٔ متناهیِ $\{1, 2, \ldots, N\}$ هستند. یک چنین بخش متناهی دارای مدل است؛ فرض کنید M یک مدل برای T باشد که اندازهٔ آن از N بیشتر است. پس عناصری مانند $a_1, \ldots, a_N$ در M هستند که همگی با هم متفاوتند. ساختارِ M را می‌توان تبدیل به یک L_C ساختار کرد که مدل Δ است. کافی است قرار دهیم $c_i^M = a_i$ و باقی ثابتهای زبان را به طور یکسان تعبیر کنیم.

از این که هر بخش متناهی از T' دارای مدل است، نتیجه می‌گیریم که هر بخش متناهی از T' تناقض را اثبات نمی‌کند. پس T' تناقض را اثبات نمی‌کند. بنا به قضیهٔ تمامیت، قضیه ۱۱۵، تئوری T' دارای یک مدل است که اندازهٔ برابر با تعداد فرمول‌های زبان است. پس در این حالت، تئوری ما دارای مدلی با اندازهٔ κ است. □

پس به عنوان مثال، از آنجا که گروه‌های متناهی به اندازهٔ کافی بزرگ داریم، گروه‌هایی به هر اندازهٔ دلخواه ما وجود دارد. نیز از آن جا که میدانهای متناهی بزرگ داریم، میدانی با هر سایز دلخواه پیدا می‌شود. در مورد گروه‌ها یا میدان‌ها شاید این امر عجیب نباشد: مثلاً در مورد گروه‌ها برای یک کاردینال داده شده می‌توان با جمع کردن $\mathbb{Z}_2$ گروهی به اندازهٔ آن کاردینال ساخت. اما قدرت قضیهٔ بالا بیش از این است، زیرا این قضیه «برای هر تئوری دلخواه» کار می‌کند. ساختن مدل برای یک تئوری دلخواه، کار آسانی نیست. مثلاً می‌توان میدانی با سایز دلخواه پیدا کرد که ویژگی‌های پیچیدهٔ مد نظر ما را داشته باشد.

یک نتیجهٔ دیگر از قضیهٔ فوق این است که تئوری‌های سازگاری که در یک زبان شمارا نوشته می‌شوند، در صورتی که مدلی نامتناهی داشته باشند، مدلی شمارا دارند. نیز اگر مدلی از سایز κ داشته باشند، مدل‌هایی از هر اندازهٔ نامتناهی کمتر از κ نیز دارند. دوباره، علت این است که مدلی که در اثبات قضیهٔ تمامیت به دست می‌آید، جهانی متشکل از ثوابت هنکینی به اندازهٔ زبان دارد. شرط شمارا بودن زبان در قضیهٔ فوق اهمیتی ندارد. تنها باید دقت کنیم که اگر زبان سایز κ داشته باشد، روش هنکینی کوچکترین مدلی که به دست می‌دهد با اندازهٔ κ است.

مثال ۱۳۳ (پارادوکس اسکولم). پارادوکس اسکولم در نظریهٔ مجموعه‌ها، در درک طبیعت عجیب قضیهٔ فشردگی و نیز درک «نگاه از بیرون و درون به جهان‌های مجموعه‌ها» کمک شایان می‌کند. فرض کنید **ZFC** دارای مدل باشد. در این صورت **ZFC** در این صورت بنا به قضیهٔ اسکولم، مدلی شمارا برای **ZFC** وجود دارد. از طرفی ثابت می‌شود که

$$\mathbf{ZFC} \models \text{یک مجموعهٔ ناشمارا وجود دارد}$$

بنابراین در مدل شمارای مورد نظر ما نیز، جملهٔ «یک مجموعهٔ ناشمارا وجود دارد» درست است. پس یک مجموعهٔ ناشمارا در مدل شمارای ما وجود دارد. اما اعضای آن مجموعهٔ ناشمارا نیز مجموعه هستند پس در مدل شمارای ما هستند! چه توضیحی برای این پارادوکس دارید؟

۲.۹ محک وات برای کامل بودن تئوری‌ها

۳.۹ آنالیز نااستاندارد

معمولاً حساب دیفرانسیل و انتگرال را «حساب بی‌نهایت کوچک‌ها» می‌خوانند، زیرا مبدعان آن، لایب‌نیز و نیوتون، به وجود عناصر بی‌نهایت کوچک در اعداد حقیقی معتقد بودند.

تعریف ۱۳۴. یک عدد حقیقی r (در یک مجموعهٔ اعداد حقیقی) را بی‌نهایت کوچک می‌نامیم هرگاه برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $0 < r < \frac{1}{n}$.

به راحتی می‌توان دید که r بی‌نهایت کوچک است، اگر و تنها اگر $\frac{1}{r}$ بی‌نهایت بزرگ، یعنی بزرگ‌تر از هر عدد طبیعی باشد.

در واقع آن‌ها معتقد بودند که تابع $f(x)$ در نقطهٔ a پیوسته است هرگاه وقتی x بی‌نهایت به a نزدیک شود، $f(x)$ بی‌نهایت به $f(a)$ نزدیک شود؛ و در a مشتق‌پذیر است هرگاه یک عدد $f'(a)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر مقدار بی‌نهایت کوچکِ h حاصل $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ بی‌نهایت نزدیک به $f'(a)$ باشد. اما در مجموعهٔ اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، هیچ عدد بی‌نهایت بزرگ (و در نتیجه هیچ عدد بی‌نهایت کوچک) وجود ندارد:

قضیه ۱۳۵. در مجموعهٔ اعداد حقیقی، اعداد حقیقی بی‌نهایت بزرگ وجود ندارند.

اثبات. یکی از ویژگی‌های بنیادین اعداد حقیقی که از نحوهٔ ساخت آن‌ها نتیجه می‌شود، اصل کمال است. بنا به اصل کمال، هر زیرمجموعهٔ ناتهی و از بالا کران‌دار از اعداد حقیقی دارای یک کوچک‌ترین کران بالاست. مجموعهٔ عناصر بی‌نهایت بزرگ در $\mathbb{R}$ مجموعهٔ زیر است:

$$\{x \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad x > n\}$$

اگر مجموعه بالا ناتهی باشد، در واقع $\mathbb{N}$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ از بالا کراندار است. فرض کنید t کوچک‌ترین کران بالای آن باشد. در این صورت $t-1$ کرانِ بالا نیست، یعنی یک عدد طبیعیِ n' موجود است به طوری که $t-1 < n'$. اما در این صورت $t < n'+1$ و این کران بالا بودن t را نقض می‌کند. □

علم حساب فقدان عدم وجود بی‌نهایت کوچک‌ها را با تعاریف $\epsilon - \delta$ جبران کرده است: زمانی می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a پیوسته است که $f(x)$ به هر اندازهٔ دلخواهِ ϵ به $f(a)$ نزدیک شود، به شرطی که x به اندازهٔ کافی δ به a نزدیک شده باشد. نیز تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است

هرگاه عدد $f'(a)$ موجود باشد به طوری که مقدار $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وقتی $x-a$ به اندازهٔ کافی کوچک است، در فاصلهٔ به اندازهٔ دلخواه ما از $f'(a)$ قرار گیرد. آبراهام رابینسون در قرن بیستم، و در کتاب «آنالیز نااستاندارد» با استفاده از ابزارهای منطقی دوباره مفهوم بی‌نهایت کوچک‌ها را زنده کرد. در این بخش قرار است به این رویکرد بپردازیم.

قضیه ۱۳۶. ساختار $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)$ را در نظر بگیرید. یک ساختارِ $(\mathbb{R}',+,\cdot,0,1,<)$ وجود دارد که همهٔ ویژگی‌های مرتبهٔ اول ساختارِ $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)$ را داراست، اما در آن عناصر بی‌نهایت بزرگ (و بی‌نهایت کوچک) وجود دارند.

اثبات. مشابه قبل یک ثابتِ c به زبان اضافه کنید و تئوری زیر را در نظر بگیرید:

$$T' = \mathrm{Th}((\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)) \cup \{c>1, c>1+1,\ldots\}.$$

مشابه ؟؟ می‌توان دید که هر بخشِ متناهی از تئوری فوق دارای مدل است، پس تئوری T' دارای مدل است. اما هر مدلِ T' همهٔ ویژگی‌های $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)$ را دارد، و در عین حال در آن عنصری (تعبیر ثابت c) هست که از تمام اعداد طبیعی بزرگ‌تر است. □

هر مدل از تئوریِ T' را در بالا را یک «مدل نااستاندارد» برای تئوری اعداد حقیقی می‌نامیم. چند نکته در مورد قضیهٔ بالا جالب توجه است: اول این که بنا به قضیهٔ لون‌هایم اسکولم، می‌توان چنین مدلی، که همیشهٔ ویژگی‌های اعداد حقیقی را داراست و در آن عنصری نااستاندارد وجود دارد، را از اندازهٔ شمارا پیدا کرد! دوم این که می‌توان چنین مدلی را به گونه‌ای ساخت که شامل مجموعهٔ اعداد حقیقی عادی باشد. برای این کار کافی است ثوابتی به تعداد اعداد حقیقی به زبان اضافه و همهٔ ویژگی‌های اعداد حقیقی متناظر با این ثوابت در تئوری T' گنجانده شود. با همین روش، می‌توان $\mathbb{R}^*$ را به گونه‌ای ساخت که $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^*$ و برای هر $r_1,\ldots,r_n$ و هر فرمولِ $\varphi(x_1,\ldots,x)$، در $\mathbb{R}$ اگر $\mathbb{R}\models\varphi(r_1,\ldots,r_n)$ آنگاه $\mathbb{R}^*\models\varphi(r_1,\ldots,r_n)$. سوم این که زبان انتخاب شده برای اعداد حقیقی می‌تواند علائم بیشتری نیز داشته باشد و این صورت مدل نااستاندارد نیز در زبانی با همان علائم به دست خواهد آمد.

قرارداد ۱۳۷. از این به بعد هر مدل نااستاندارد برای یک تئوری از اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}^*$ نشان خواهیم داد و فرض خواهیم کرد $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^*$ و برای هر $r_1,\ldots,r_n$ و هر فرمولِ $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$، در $\mathbb{R}$ اگر $\mathbb{R}\models\varphi(r_1,\ldots,r_n)$ آنگاه $\mathbb{R}^*\models\varphi(r_1,\ldots,r_n)$.

نتیجه ۱۳۸. «اصل کمال» یک ویژگی مرتبهٔ اول نیست.

اثبات. اگر اصل کمال یک ویژگی مرتبهٔ اول بود، این ویژگی در $\mathrm{Th}(\mathbb{R})$ قرار می‌گرفت و باید $\mathbb{R}^*$ هم آن را دارا می‌بود. اما $\mathbb{R}^*$ در اصل کمال صدق نمی‌کند زیرا در آن عناصر بی‌نهایت بزرگ وجود دارند. □

حال به زبان، یک نماد تابعی تک موضعی f اضافه کنید. مدل نااستانداردِ $(\mathbb{R}^*,+,\cdot,0,1,<,f)$ را در نظر بگیرید. داریم:

قضیه ۱۳۹. تابع $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $f(0)=0$. موارد زیر با هم معادلند:

۱. تابع f در 0 پیوسته است.

۲. اگر $|x|$ بی‌نهایت کوچک باشد، $|f(x)|$ نیز بی نهایت کوچک است.

اثبات. نخست توجه کنید که $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ پیوسته است اگروتنها اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد. زیرا، اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته نباشد، فرمول زیر در $\mathbb{R}$ برقرار است:

$$\exists\epsilon>0\forall\delta>0\exists x\quad(|x|<\delta\wedge|f(x)|>\epsilon)$$

از آنجا که $\mathbb{R}^*$ همهٔ ویژگی‌های $\mathbb{R}$ را داراست، همین فرمول در $\mathbb{R}^*$ هم درست است، یعنی f آنجا نیز ناپیوسته است.

حال فرض کنید ۱ برقرار باشد. فرض کنید $|x|$ بی‌نهایت کوچک و $n\in\mathbb{N}$ یک عدد طبیعی دلخواه باشد. از آنجا که $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته است، $\delta>0$ موجود است به طوری که برای هر x اگر $|x|<\delta$ آنگاه $|f(x)|<\frac{1}{n}$. عدد مورد نظر δ یک عدد حقیقی استاندارد است، پس اگر $|x|$ بی‌نهایت کوچک باشد، به طور خاص $|x|<\delta$ و از این رو $|f(x)|<\frac{1}{n}$. از آن جا که این استدلال همزمان برای همهٔ اعداد طبیعی $n\in\mathbb{N}$ کار می‌کند، $|f(x)|$ بی‌نهایت کوچک است.

۲ به ۱. با فرض درست بودن ۲، نشان می‌دهیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته است، و در نتیجه $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ نیز پیوسته است. فرض کنید $\epsilon>0$ در اعداد حقیقی داده شده باشد. در $\mathbb{R}^*$ یک $\delta>0$ را در نظر بگیرید که بی نهایت کوچک است. اگر $|x|<\delta$ آن گاه واضح است که $|f(x)|<\epsilon$. بنابراین فرمولِ زیر در $\mathbb{R}^*$ درست است:

$$\exists\delta\forall x(|x|<\delta\to|f(x)|<\epsilon)$$

این فرمول در واقع به صورت $\varphi(\epsilon)$ است که در آن $\epsilon\in\mathbb{R}$. بنابراین از آنجا که فرمولهای یکسانی به صورت $\varphi(r_1,\dots,r_n)$ با $r_1,\dots,r_n\in\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^*$ برقرار هستند، نتیجه می‌گیریم که فرمول بالا در $\mathbb{R}$ هم برقرار است؛ یعنی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته است. □

نتیجه ۱۴۰. موارد زیر با هم معادلند:

۱. تابع $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ در a پیوسته است.

۲. اگر $|x-a|$ بی‌نهایت کوچک باشد آن‌گاه $|f(x)-f(a)|$ بی‌نهایت کوچک است.

نتیجه ۱۴۱. تابع $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است اگروتنهااگر یک عدد حقیقی استانداردِ $f'(a)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر مقدار بی‌نهایت کوچک h داشته باشیم: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

تمرین ۹۳. با استفاده از آنالیز نااستاندارد، ثابت کنید که هر تابع مشتق‌پذیر در نقطهٔ a، در این نقطه پیوسته است.

در کتاب «آنالیز نااستاندارد» آبراهام رابیسون بسیاری مفاهیم آنالیزی را با رویکرد آنالیز نااستاندار بازنوشته است. در این بخش فرصت پرداختن به همهٔ مطالب جذاب این کتاب را نداریم و از این رو بحث را با تعریف انتگرال معین به کار می‌بریم.

این بار ساختارِ $(\mathbb{R},\mathbb{N},\cdot)$ را در نظر بگیرید. یعنی در زبان، یک محمول قرار داده‌ایم که تعلق یک عنصر به مجموعهٔ اعداد طبیعی را بیان می‌کند. در این حالت، ساختار نااستانداردِ $\mathbb{R}^*$ شامل یک مجموعهٔ نااستانداردِ $\mathbb{N}^*$ نیز هست. می‌توان ثابت کرد که یک تابعِ f در بازهٔ $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است هرگاه، وقتی ناحیهٔ زیرتابع را به مستطیل‌هایی با عرض بی‌نهایت کوچک تقسیم می‌کنیم، حاصل جمع مساحت این مستطیل یک عدد استاندارد شود. به بیان دیگر هرگاه برای هر $n^*\in\mathbb{N}^*$ و هر افرازِ $a=x_0,x_1,\dots,x_{n^*}=b$ که در آن $x_{i+1}-x_i$ بی‌نهایت کوچک است، و با هر انتخابِ $x_i<\xi_i<x_{i+1}$ حاصل $\sum_{i=1}^{n^*}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$ بی‌نهایت نزدیک به عدد حقیقیِ $\int_a^b f(x)dx$ باشد.

***تمرین ۹۴.** تعریف انتگرال به صورت غیراستاندارد را دقیق کنید (توضیح دهید که چگونه حاصل جمع n^* عدد را در تعریف بالا باید تعریف کنیم).
راهنمایی. برای یک دنبالهٔ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ مفهوم وجود حد را تعریف کنید.

***تمرین ۹۵.** قضیهٔ اساسی اول حساب را با استفاده از آنالیز نااستاندارد ثابت کنید. (یعنی نشان دهید که اگر $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ آن‌گاه $F'(x)=f(x)$.)

***تمرین ۹۶.** قضیهٔ بولتزانو را با استفاده از آنالیز نااستاندارد ثابت کنید (ثابت کنید که اگر f در $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$ آنگاه نقطهٔ $c\in(a,b)$ موجود است به طوری که $f(c)=0$.)

۴.۹ قانون صفر و یک برای گرافها

فرض کنید φ یک جمله در زبانِ گراف‌ها، یعنی $L_{graph}=\{R\}$ باشد (مثال ۵۴) را ببینید. احتمال درست بودن این جمله در گرافهای N رأسی را با $p_N(\varphi)$ نشان می‌دهیم. در واقع $p_N(\varphi)$ برابر است با تعداد گراف‌های با رئوس $\{1,\dots,N\}$ که در آن جملهٔ φ درست است، تقسیم بر تعداد کل گراف‌های با رئوس $\{1,\dots,N\}$. اما قضیهٔ جذاب زیر، بیان‌گر این است که وقتی تعداد رئوس یک گراف متناهی زیاد می‌شود جملهٔ φ یا با احتمال زیاد درست است، و یا با احتمال زیاد غلط است. به بیان بهتر، اگر φ یک جمله در زبان گراف‌ها باشد، یک عدد طبیعی $N\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که یا در همهٔ گراف‌های با بیش از N رأس، جملهٔ φ درست است، یا در همهٔ آن‌ها $\neg\varphi$ درست است:

قضیه ۱۴۲ (قانون صفر و یک برای گراف‌ها). برای یک جملهٔ دلخواهِ φ در زبان گراف‌ها، یا $\lim_{n\to\infty}p_N(\varphi)=1$ یا $\lim_{n\to\infty}p_N(\varphi)=0$.

اثبات. در مثال ۹۱ با استفاده از سامانه‌های رفت و برگشتی نشان دادیم که «تئوری گراف‌های تصادفی» یک تئوری کامل است. یادآوری می‌کنیم که تئوری گرافهای تصادفی از اجتماع تئوری گراف‌ها با جمله‌های φ_n حاصل می‌شود که هر جملهٔ φ_n به صورت زیر است:

φ_n: برای هر n عنصر، یک عنصر x موجود است که به همهٔ آنها وصل است و یک عنصر y موجود است که به هیچ‌کدام وصل نیست.

حال فرض کنید φ یک جمله در زبان گراف‌ها باشد. از آن‌جا که T_{RG} کامل است، یا $T_{RG} \models \varphi$ و یا $T_{RG} \models \neg\varphi$. فرض کنیم حالت اول رخ داده باشد.

بنا به قضیهٔ فشردگی، نتیجه ۱۲۶، تعدادی متناهی جمله در T_{RG} مستلزم φ هستند. بنابراین جملاتِ $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ مانند بالا وجود دارند (که هر کدام ویژگی تصادفی بودن را برای n راس بیان می‌دارند) به طوری که

$$T_{graph} \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi.$$

واضح است که در این صورت:

$$T_{graph} \cup \{\varphi_n\} \models \varphi$$

زیرا φ_n بقیهٔ φ_i ها را نتیجه می‌دهد. بنابراین احتمال برقراری جملهٔ φ_n در یک گراف، بیشتر از احتمال برقراری φ است، زیرا در هر گرافی که φ_n برقرار باشد، φ هم برقرار است.

ادعا می‌کنیم که $\lim_{N\to\infty} p_N(\varphi_n) = 1$. بنا بر آنچه توضیح دادیم از این نتیجه خواهد شد که $\lim_{N\to\infty} p_N(\varphi) = 1$.

اما $p_N(\varphi_n) = 1 - p_N(\neg\varphi_n)$. نشان خواهیم داد که $p_N(\neg\varphi_n)$ با زیاد شدن N به صفر میل می‌کند. فرض کنید X, Y دو مجموعه متشکل از n راس در یک گراف N راسی و a یک راس خارج $X \cup Y$ باشند. احتمال این که a به همهٔ اعضای X وصل باشد و به هیچ کدام از اعضای Y وصل نباشد برابر است با $(\frac{1}{2})^n \times (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^{2n}}$. پس احتمال این که a این ویژگی خوب را نداشته باشد برابر است با $q = 1 - \frac{1}{2^{2n}}$. احتمال این که هیچکدام از عناصر خارج از $X \cup Y$ این ویژگی خوب را نداشته باشند، با توجه به استقلال پیشامدها، برابر است با q^{N-2n}. احتمال این که برای هر انتخاب X, Y هیچ عنصر خوبی وجود نداشته باشد، یعنی احتمال این که φ_n رخ ندهد، برابر است با

$$\binom{N}{2n} q^{N-2n} \leqslant N^{2n} q^{N-2n}.$$

عبارت سمت راست وقتی $N \to \infty$ به صفر میل می‌کند، زیرا $0 < q < 1$.

مشابهاً اگر $T_{graph} \cup \{\varphi_n\} \models \neg\varphi$ می‌داشتیم $\lim_{N\to\infty} p_N(\neg\varphi_n) = 1$. □

نتیجه ۱۴۳. تئوری T_{RG} **تئوری تقریباً مطمئن** گراف‌هاست، یعنی برای هر جملهٔ φ داریم $\lim_{N\to\infty} p_N(\varphi_n) = 1$ اگر و تنها اگر $T_{RG} \models \varphi$.

پس، یک گراف تصادفی دقیقاً ویژگی‌هایی مانند φ را داراست که همهٔ گراف‌های متناهی با اندازهٔ بیشتر از یک عدد طبیعی n_φ آن ویژگی را داشته باشند. به همین علت گفته می‌شود که گراف تئوری، ویژگی‌های «تقریباً مطمئن» گراف‌های متناهی را دارد. به بیان دیگر، گراف تصادفی زمانی یک ویژگی را دارد که فقط تعداد متناهی گرافِ متناهی وجود داشته باشند که آن ویژگی را ندارند.

۵.۹ حذف سور برای یک فرمول

می‌گوییم تئوری T سورها را از فرمولِ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ حذف می‌کند، یا فرمول $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ نسبت به تئوری T یک معادل بدون سور دارد، هرگاه $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ یک فرمولِ $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ وجود داشته باشد به طوری که

۱. فرمول $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ هیچ سوری نداشته باشد.

۲. $T \models (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n))$

دقت کنید که شرط دوم را با توجه به تعریف ۹۵ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T \models \forall x_1, \ldots, x_n (\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n))$$

یا با اضافه کردن ثابت‌های $c_1, \dots, c_n$ خارج از زبانِ تئوریِ T نوشت:

$$T \models (\varphi(c_1, \dots, c_n) \leftrightarrow \psi(c_1, \dots, c_n)).$$

برای مثال، تئوری کامل اعداد حقیقی، سورهای فرمولِ $\varphi(a, b, c) = \exists x \quad ax^2 + bx + c \doteq 0$ را حذف می‌کند زیرا:

$$\mathrm{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <) \models \exists a x^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow b \cdot b - (1 + 1 + 1 + 1) \cdot a \cdot c > 0$$

با استفاده از قضیهٔ فشردگی می‌توان یک «محک جبری» برای حذف سور به صورت زیر ارائه کرد. پیش از پرداختن به این محک جبری، نیاز است مفهوم «زیرساختار» تعریف ۸۵ را بار دیگر یادآوری کنیم. فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو Lساختار باشند. می‌گوییم $\mathcal{M}$ یک زیرساختار از $\mathcal{N}$ است و می‌نویسیم $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ هرگاه $M \subseteq N$ و

۱. $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$ برای هر نماد ثابتِ $c \in L$،

۲. $f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{N}}(a_1, \dots, a_n)$ برای هر نماد تابعی n موضعی $f \in L$ و هر $a_1, \dots, a_n \in M$.

۳. $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathcal{M}}$ اگر و تنها اگر $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathcal{N}}$ برای هر نماد رابطه‌ای n موضعی $R \in L$ و هر $a_1, \dots, a_n \in M$.

توجه به چند نکتهٔ زیر، ضمن تعریف زیرساختارها اهمیت دارد:

۱. وقتی $\mathcal{M}$ زیرساختارِ $\mathcal{N}$ است می‌نویسیم $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. با این نمادگذاری در واقع می‌گوییم که نه تنها جهانِ M زیرمجموعه‌ای از جهانِ N است، بلکه تعبیر هر یک از نمادها در M به محدود کردن تعبیر آنها در N به M به دست می‌آید.

۲. این که $\mathcal{M}$ زیرساختاری از $\mathcal{N}$ باشد، ربطی به تئوری‌ها ندارد و این تعریف تنها مربوط به L ساختارهاست.

۳. وقتی $\mathcal{M}$ زیرساختاری از $\mathcal{N}$ است برخی ویژگی‌ها را می‌تواند از آن به ارث ببرد. مثلاً اگر $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ یک فرمول بدون سور باشد، آن‌گاه برای هر $a_1, \dots, a_n \in M$ داریم

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathcal{N} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

اگر $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ به صورت $\exists y_1, \dots, y_m \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ برای یک فرمول بدون سور ψ باشد، آن‌گاه برای هر $a_1, \dots, a_n \in M$ داریم:

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

اگر $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ به صورت $\forall y_1, \dots, y_m \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ برای یک فرمول بدون سور ψ باشد، آن‌گاه برای هر $a_1, \dots, a_n \in M$ داریم:

$$\mathcal{N} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

۴. اگر $\mathcal{M}$ زیرساختاری از $\mathcal{N}$ باشد، و $\mathcal{N} \models T$ آن‌گاه دلیلی ندارد که انتظار داشته باشیم که $\mathcal{M} \models T$. برای مثال $(\mathbb{Z}, +, \cdot) \subseteq (\mathbb{Q}, +, \cdot)$، اما $\mathbb{Q}$ میدان است و $\mathbb{Z}$ میدان نیست.

قضیه ۱۴۴. موارد زیر با هم معادل هستند:

۱. فرمول $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ نسبت به تئوری T دارای معادلی بدون سور است.

۲. اگر $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو مدل برای تئوری T و $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}, \mathcal{N}$ یک زیرساختار مشترک از هر دوی آنها باشند، آن‌گاه برای هر $a_1, \dots, a_n \in A$ داریم

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathcal{N} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} & & \mathcal{N} \\ & \mathcal{A} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

اثبات. ۲ به ۱. با فرض درست بودن ۲، مجموعهٔ زیر، **متشکل از نتایج بدونِ سورِ فرمول φ نسبت به تئوری T** را در نظر بگیرید:

$$\Gamma = \{\psi \mid T \models (\varphi \to \psi) \text{ و } \psi \text{ یک فرمول بدون سور است } \}$$

ادعا می‌کنیم که $T \cup \Gamma \models \varphi$. در صورتی که این ادعا ثابت شود، بنا به قضیهٔ فشردگی تعدادی متناهی فرمول بدون سور $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ پیدا می‌شوند به طوری که $T \models (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi)$. از طرفی بنا به تعریف Γ می‌دانیم که $T \models \varphi \to (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$ بنابراین $T \models \varphi \leftrightarrow (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$ و ۲ به ۱ اثبات خواهد شد.

فرض کنید $T \cup \Gamma \not\models \varphi$. در این صورت $T \cup \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ دارای مدل است. فرض کنید $(\mathcal{M}, a_1, \ldots, a_n)$ مدلی برای آن باشد. در این صورت $\mathcal{M} \models T$ و $\mathcal{M} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ برای هر $\psi \in \Gamma$ و $\mathcal{M} \models \neg\varphi(a_1, \ldots, a_n)$. فرض کنید $\mathcal{A}$ زیرساختار تولید شده توسط عناصرِ $a_1, \ldots, a_n$ باشد. ادعا می‌کنیم که یک مدل $\mathcal{N}$ برای تئوری T وجود دارد که $\mathcal{A}$ زیرساختار آن است ولی $\mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \models \neg\varphi(a_1, \ldots, a_n) & & \mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \\
& \mathcal{A} \ni a_1, \ldots, a_n \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

واضح است که در این صورت، با فرض ۲ به تناقض خواهیم رسید.

برای پیدا کردن $\mathcal{N}$ کافی است نشان دهیم که تئوری زیر دارای مدل است:

$$T' = \{\xi(a_1, \ldots, a_n) \mid \mathcal{A} \models \xi(a_1, \ldots, a_n) \text{ و } \xi \text{ یک فرمول بدون سور است } \} \cup T \cup \{\varphi(a_1, \ldots, a_n)\}.$$

اگر T' دارای مدل نباشد، بخشی متناهی از فرمول‌های موجود در آن تناقض می‌دهند؛ بنابراین فرمول‌های $\xi_1, \ldots, \xi_n$ مانند بالا، وجود خواهند داشت که

$$T \models (\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n) \to \neg\varphi$$

یعنی

$$T \models \varphi \to \neg(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n)$$

اما بنا به تعریفِ Γ در این صورت خواهیم داشت: $\neg(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n) \in \Gamma$. پس $\mathcal{M} \models \neg(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n)(a_1, \ldots, a_n)$ که این تناقض است زیرا $\mathcal{A}$ زیرساختاری از $\mathcal{M}$ است. یعنی مدل نداشتنِ T' منجر به تناقض می‌شود، پس T' دارای مدل است.

اثبات ۱ به ۲. فرض کنید فرمول φ نسبت به تئوری T دارای معادل بدون سورِ ψ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) &\iff \mathcal{M} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \qquad \text{زیرا } \mathcal{M} \models T \text{ و } T \models (\varphi \leftrightarrow \psi) \\
&\iff \mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \qquad \text{زیرا } A \subseteq \mathcal{M} \text{ و بنا به مورد سوم در توضیح مفهوم زیرساختار} \\
&\iff \mathcal{N} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \qquad \text{زیرا } A \subseteq \mathcal{N} \text{ و بنا به مورد سوم در توضیح مفهوم زیرساختار} \\
&\iff \mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n). \qquad \text{زیرا } \mathcal{N} \models T \text{ و } T \models (\varphi \leftrightarrow \psi)
\end{aligned}$$

□

***تمرین ۹۷** (نیازمند توضیح بیشتر). می‌دانیم که در ساختارِ $(\mathbb{N}, +, 0)$ ترتیب اعداد با استفاده از فرمول زیر قابل تعریف است:

$$x < y \iff \exists z \quad y = x + z.$$

نشان دهید که ترتیب اعداد در ساختار یاد شده، یک فرمول بدون سور قابل تعریف نیست.

۶.۹ ارتباط میان قضیهٔ فشردگی و فشردگی فضاهای توپولوژیک

فرض کنید L یک زبان مرتبهٔ اول باشد. قرار دهید:

$$S = \{T : \text{یک تئوری کامل است } T\}$$

روی مجموعهٔ S یک توپولوژی تعریف می‌کنیم که هر باز پایه‌ای آن به صورت $T_\varphi = \{T \in S : \varphi \in T\}$ برای یک جملهٔ φ است. قضیهٔ فشردگی در منطق مرتبهٔ اول، بیانگر این است که S، یعنی فضای متشکل از تئوری‌های کامل، یک فضای توپولوژیک فشرده است. در زیر این گفته را ثابت کرده‌ایم.

فرض کنید Σ یک مجموعه از جملات باشد. ادعا می‌کنیم که در این صورت $S = \bigcup_{\varphi\in\Sigma} T_{\neg\varphi}$ اگر و تنها اگر $\Sigma \vdash \bot$. در واقع $\Sigma \vdash \bot$ اگر و تنها اگر هیچ تئوری کاملی شامل تمام جملات Σ به صورت همزمان وجود نداشته باشد، اگر و تنها اگر هر تئوری کامل شامل نقیض حداقل یکی از جملات موجود در Σ باشد.

حال فرض کنید $\{T_{\neg\varphi}\}_{\varphi\in\Sigma}$ یک گردایه از مجموعه‌های باز S باشد. این گردایه S را می‌پوشاند، اگر و تنها اگر $\Sigma \vdash \bot$ اگر و تنها اگر یک بخش متناهی از Σ مثلاً به نام Δ موجود باشد به طوری که $\Delta \vdash \bot$، اگر و تنها اگر $\{T_{\neg\varphi}\}_{\varphi\in\Delta}$ یک پوشش باز برای S باشد.

تمرین ۹۸. بررسی کنید که T_φ ها یک پایه برای یک توپولوژی روی S تشکیل می‌دهند.

۷.۹ قضیهٔ فشردگی برای منطق گزاره‌ها

در منطق گزاره‌ها هم یک نسخه از قضیهٔ فشردگی برقرار است. فرض کنید منطق گزاره‌های ما شامل اتم‌های $\{p_1, p_2, \ldots\}$ باشد. یک گزارهٔ $f(p_1, \ldots, p_n)$ را (که یک ترکیب بولی از اتم‌هاست) «برآورده شدنی» می‌گوییم، هرگاه در ردیف آخر جدول ارزش آن، حداقل یک بار ارزش ۱ ایجاد شود. به بیان دیگر، هرگاه یک ارزش‌دهی صفر و یکی به گزاره‌های اتمی وجود داشته باشد، که با آن ارزش‌دهی ارزش گزارهٔ $f(p_1, \ldots, p_n)$ برابر با یک شود. دقت کنید منظور از یک ارزش دهی صفر و یک به گزاره‌های اتمی، یک تابع $\beta : \{p_1, p_2, \ldots\} \to \{0, 1\}$ است. مشابهاً اگر Σ یک مجموعه از گزاره‌ها در منطق گزاره‌ها باشد، می‌گوییم Σ برآورده شدنی است، هرگاه یک ارزش‌دهی به گزاره‌های اتمی وجود داشته باشد که با آن ارزش‌دهی همهٔ گزاره‌های موجود در Σ به طور همزمان ارزش ۱ پیدا کنند.

قضیه ۱۴۵ (قضیهٔ فشردگی در منطق گزاره‌ها). فرض کنید که Σ یک مجموعه از گزاره‌ها در منطق گزاره‌ها باشد، به طوری که هر زیرمجموعهٔ متناهیِ Δ از Σ برآورده‌شدنی است. در این صورت Σ برآورده شدنی است.

اثبات. یک زبانِ مرتبهٔ اول $L = \{p_1(x), p_2(x), \ldots\}$ در نظر بگیرید که متناظر با هر گزارهٔ اتمی، یک نماد رابطه‌ای تک موضعی در آن قرار داده شده است. هر ساختار برای این زبان به صورت $\mathcal{M} = (M, p_1(M), p_2(M), \ldots)$ است. نخست ثابت کنید که

تمرین ۹۹. یک گزارهٔ $f(p_1, \ldots, p_n)$ برآورده شدنی است هرگاه یک ساختارِ $\mathcal{M}$ موجود باشد که در آن عنصری مانند $a \in M$ وجود داشته باشد به طوری که $\mathcal{M} \models p_1(a) \wedge \ldots \wedge p_n(a)$.

حال فرض کنید Σ مجموعهٔ مورد نظر ما از گزاره‌ها در منطق گزاره‌ها باشد. یک ثابت c به زبان اضافه کنید و هر گزارهٔ موجود در Σ را به صورت یک فرمول مرتبهٔ اول بنویسید.

مثلاً به جای گزارهٔ $f(p_1, \ldots, p_n)$ بنویسید $f(p_1(c), \ldots, p_n(c))$. این مجموعهٔ جدید از فرمول‌های مرتبهٔ اول را با Σ' نشان دهید. داریم: هر زیرمجموعهٔ متناهی از Σ برآورده شدنی است، اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ متناهی از Σ' دارای مدل باشد، اگر و تنها اگر Σ' دارای مدل باشد، اگر و تنها اگر Σ برآورده شدنی باشد. □

قضیهٔ فشردگی برای منطق گزاره‌ها را می‌توان به عنوان نتیجه‌ای ساده از قضیهٔ تیخونوف در توپولوژی نیز اثبات کرد. وقتی روی مجموعهٔ دوعضویِ $\{0, 1\}$ با توپولوژی گسسته فشرده است. بنابراین مجموعهٔ $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ با توپولوژی حاصل‌ضربی، بنا به قضیهٔ تیخونوف، فشرده است. اما $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ در واقع مجموعهٔ همهٔ توابع ارزش‌دهی از $\{p_1, \ldots\}$ به $\{0, 1\}$ است.

فرض کنید φ

تمرین ۱۰۰. یک گزاره در منطق گزاره‌ها باشد. نشان دهید که مجموعهٔ $F_\varphi = \{f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid$ { گزارهٔ φ با ارزش دهی f دارای ارزش یک است. به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ یک مجموعهٔ بسته است. (مجموعه مورد باز هم هست!)

پس یک گزارهٔ φ برآورده شدنی است اگر و تنها اگر $F_\varphi \neq \varnothing$. هم‌چنین یک مجموعهٔ متناهیِ $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ از گزاره‌ها برآورده شدنی است اگر و تنها اگر $F_{\varphi_1} \cap \ldots \cap F_{\varphi_n} \neq \varnothing$. مشابهاً یک مجموعهٔ Σ از گزاره‌ها برآورده شدنی است اگر و تنها اگر $\bigcap_{\varphi\in\Sigma} F_\varphi \neq \varnothing$.

حال مجموعهٔ Σ از گزاره‌ها را در نظر بگیرید و فرض کنید هر زیرمجموعهٔ متناهی از گزاره‌های موجود در Σ متناهیاً برآورده شدنی باشد. آن‌گاه $\{F_\varphi\}_{\varphi\in\Sigma}$ یک گردایه از مجموعه‌های بسته است که هر تعداد متناهی از آنها با هم اشتراک دارند. بنا به فشردگی، تمام این مجموعه‌های بسته با هم اشتراک دارند، بنابراین Σ برآورده شدنی است.

اما به عنوان توضیح بیشتر، دقت کنید که در یک فضای توپولوژیک به یک گردایه از مجموعه‌های بسته از هر تعداد متناهی از آنها با هم اشتراک دارند، یک گردایهٔ با ویژگی اشتراک متناهی گفته می‌شود. هم‌چنین به راحتی، با تبدیل تعریف فشردگی از بازه‌ها به بسته‌ها، می‌توان ثابت کرد که یک فضای توپولوژیک، فشرده است اگر و تنها اگر برای هر گردایهٔ A از مجموعه‌های بسته با ویژگی اشتراک متناهی، داشته باشیم $\bigcap A \neq \varnothing$.

۸.۹ وجود دنباله‌های بازنشناختنی

۹.۹

فصل ۱۰

بررسی چندین ساختار روی مجموعهٔ اعداد طبیعی

پیش از آن که به بررسی ساختارِ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$، به عنوان خاستگاه «پدیدهٔ ناتمامیت» بپردازیم، خوب است بخش‌هایی خوش‌رفتار از حساب را مشاهده کنیم. ساختارهایی که در این بخش معرفی شده‌اند، جدا از این که بخش‌های کوچک‌تر و خوش‌رفتارتر حساب را نشان می‌دهند، در تمرین آشنایی بهتر با مفهوم حذف سور نیز به یاری این کتاب می‌آیند. پس پیش از شروع رسمی این فصل، دوباره نگاهی به حذف سور می‌اندازیم.

۱.۱۰ نگاهی دوباره به حذف سور

در بخشِ... گفتیم که یک فرمولِ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ نسبت به یک تئوری T دارای معادلی بدون سور است هرگاه یک فرمول بدون سور $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ وجود داشته باشد به طوری که $T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$. همچنین در ... محکی جبری برای رویداد حذف سور معرفی کردیم: گفتیم اگر برای هر دو مدل $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ از تئوری T و عناصر $a_1, \ldots, a_n$ در بخشی مشترک از این دو مدل، داشته باشیم $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ اگر و تنها اگر $\mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$، آن‌گاه فرمول φ نسبت به تئوری T دارای معادلی بدون سور است.

به طور کلی می‌گوییم تئوری T ویژگی حذف سور دارد، هرگاه هر فرمولِ ϕ نسبت به تئوری T دارای معادلی بدون سور باشد. در ادامه قصد داریم محک حذف سور گفته شده را کمی تقویت کنیم؛ اما پیش از آن نیاز به دو قضیهٔ مقدماتی در مورد معادل بودن فرمول‌های مرتبهٔ اول داریم.

قضیه ۱۴۶.

۱. **(فرم نرمال پیشوندی)** فرض کنید φ یک فرمول مرتبهٔ اول در یک زبان L باشد. در این صورت φ معادل است با یک فرمول به صورت $Q_1x_1Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\psi$، که در آن $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ یک سور عمومی یا وجودی، و ψ یک فرمول است که هیچ سوری ندارد.

۲. (فرم‌های نرمال فصلی و عطفی) فرض کنید ψ یک فرمول بدون سور در یک زبان L باشد. در این صورت ψ دارای معادلی به صورت

$$(\alpha_{11} \wedge \ldots \wedge \alpha_{1n}) \vee \ldots \vee (\alpha_{n1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{nn})$$

و نیز معادل دیگری به صورت

$$(\beta_{11} \vee \ldots \vee \beta_{1n}) \wedge \ldots \wedge (\beta_{n1} \vee \ldots \vee \beta_{nn})$$

است که در هر کدام از آن‌ها β_{ij} و α_{ij} ها فرمول‌هایی اتمی، یا نقیض اتمی هستند. به صورت اول، فرم نرمال فصلی و به صورت دوم، فرمال عطفی برای ψ گفته می‌شود.

اثبات. ۱. اگر φ خودْ یک فرمول بدون سور باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. فرض کنید حکم برای یک فرمولِ φ درست باشد. در این صورت بوضوح حکم برای فرمول‌های $\exists x\varphi$ و $\neg\varphi$ نیز برقرار است. فرض کنید که حکم برای فرمول‌های φ_1 و φ_2 برقرار باشد، یعنی φ_1 و φ_2 دارای معادلی در صورت نرمال پیشوندی باشند. نشان می‌دهیم که می‌توان یک صورت نرمال پیشوندی برای $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ نیز ساخت.

نخست مشاهده کنید که اگر Q یک فرمول باشد که متغیر x در آن آزاد نیست و P یک فرمول دلخواه باشد، داریم:

$$\models (\forall x P) \wedge Q \leftrightarrow \forall x(P \wedge Q).$$

و

$$\models (\exists x P) \wedge Q \leftrightarrow \exists x(P \wedge Q).$$

حال فرض کنید: $\varphi_1 = Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\psi_1$ و $\varphi_2 = Q'_1x_1Q'_2x_2\ldots Q'_nx_n\psi_2$. نخست نام متغیرهای پای‌بند شده توسط سورها را به گونه‌ای تغییر دهید که با هیچ متغیر آزادی در ψ_1, ψ_2 هم‌نام نباشند. این کار هیچ ایرادی در فرمول ایجاد نمی‌کند، زیرا فرمول $\forall p(x)$ با $\forall yp(y)$ معادل است. حال با استفاده از دو رابطهٔ بالا، یکی یکی سورها را از پرانتزها به بیرون بکشید. برای مثال، مرحلهٔ اول کار به صورت زیر است:

$$(Q_1t_1Q_2t_2\ldots Q_nt_n\psi_1) \wedge (Q'_1x_1Q_2x_2\ldots Q'_nx_n\psi_2) = Q_1t_1\Big((Q'_2t_2\ldots Q'_nt_n\psi_1) \wedge (Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\psi_2)\Big).$$

۲. استفاده بموقع از چهار تاتولوژی (منطق گزاره‌ای) زیر، به همراه استقراء روی پیچیدگی فرمول‌های بدون سور، به اثبات مورد دوم منجر می‌شود:

$$\models p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\models p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$\models \neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\models \neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q).$$

در واقع، واضح است که فرمول‌های اتمی در حالت نرمال فصلی هستند. اگر φ و ψ هر دو در حالت نرمال عطفی باشند، با استفاده از تاتولوژی اول در بالا می‌توان $\varphi \wedge \psi$ را نیز به حالت نرمال عطفی درآورد. اگر φ در حالت نرمال عطفی باشد، آنگاه $\neg\varphi$ نخست با استفاده از تاتولوژی سوم در بالا و سپس با استفاده از تاتولوژی چهارم به حالت نرمال عطفی درمی‌آید.

□

قضیه ۱۴۷. اگر فقط فرمول‌های به صورت

$$\exists x \quad (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$$

که در آن‌ها هر ψ_i اتمی یا نقیض اتمی است، نسبت به تئوری T معادل بدون سور داشته باشند، آن‌گاه همهٔ فرمول‌ها نسبت به تئوری T معادل بدون سور دارند.

اثبات. نخست نشان می‌دهیم که اگر هر فرمول به صورت $\exists x\psi$ که در آن ψ بدون سور است، دارای معادل بدون سور باشد، آن‌گاه هر فرمول دلخواه دارای معادل بدون سور است. دقت کنید که اگر هر فرمول به صورت $\exists x\psi$ معادل بدون سور داشته باشد، آنگاه هر فرمول $\forall x\psi$ نیز معادلی بدون سور دارد؛ زیرا می‌توان آن را به صورت $\neg\exists x\neg\psi$ نوشت و $\exists x\neg\psi$ معادل بدون سور دارد. حال فرض کنید φ یک فرمول دلخواه باشد. ابتدا با استفاده از قسمت اول قضیه ۱۴۶ آن را به صورت نرمال پیشوندی، یعنی به صورتی که همهٔ سورها در ابتدای فرمول ظاهر شوند تبدیل کنید: $\varphi = Q_1x_1\ldots Q_nx_n\psi$. حال $Q_nx_n\psi$ معادل بدون سور دارد و به ترتیب می‌توان به سور Q_1 رسید.

حال فرمولی به صورت $\exists x\psi$ در نظر بگیرید. دوباره با استفاده از قسمت دوم قضیه ۱۴۶، فرمول ψ را به صورت نرمال عطفی بنویسید. با بهره گیری از فرمول همواره درستِ

$$\models \exists x(P \vee Q) \leftrightarrow (\exists xP \vee \exists xQ).$$

فرمولِ $\exists x\psi$ را به صورت عطفی از فرمول‌های $\exists x(\psi_1 \wedge \ldots \psi_n)$ بنویسید که در آن هر ψ اتمی، یا نقیض اتمی است. واضح است که اگر همان طور که صورت قضیه گفته است، تک تک فرمول‌های به کار رفته در این عطف دارای معادل بدون سور باشند، خود فرمول نیز معادل عطفی از فرمول‌های بدون سور است؛ یعنی معادل بدون سور دارد. □

ترکیب قضیه ۱۴۷ و قضیه ۱۴۴ و البته تعریف ۱۱ و ملاحظه ۱۳ ما را به نتیجهٔ جالب زیر هدایت می‌کند:

نتیجه ۱۴۸. اگر اتفاق زیر برای تئوری T بیفتد، تئوری T سورها را حذف می‌کند:

فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو مدل برای تئوری T و $\mathcal{A}$ یک زیرساختار مشترک از آن دو باشد. هر دستگاه متشکل از تعداد متناهی «معادله» یا «نقیض معادله» با تنها یک متغیر و با ضرایب در $\mathcal{A}$ اگر $\mathcal{M}$ جواب داشته باشد، جوابی نیز در $\mathcal{N}$ دارد.

حذف سور می‌تواند به اثبات کامل بودن تئوری‌ها به دو صورت کمک کند. صورت اول این است که با استفاده از حذف سور، جمله‌هایی که نیاز است موضع‌گیری تئوری در مورد آن‌ها بررسی شود، بسیار ساده‌تر هستند. در واقع جمله‌های بدون سور در یک تئوری، عموماً جمله‌های ساده‌ای هستند. صورت دوم، در لم زیر بیان شده است.

لم ۱۴۹. فرض کنید تئوری T سورها را حذف کند و یک مدل مانند $\mathcal{M}$ داشته باشد که زیرساختاری مشترک از همهٔ مدل‌های T است. در این صورت T کامل است.

۲.۱۰ چگونه یک ساختار را به صورت مرتبهٔ اول مطالعه کنیم.

فرض کنید که ساختار مرتبهٔ اول $\mathcal{M}$ داده شده است. در صورتی که ساختار $\mathcal{M}$ «خوش‌رفتار» باشد، با به کار بردن دقت کافی می‌توان ویژگی‌هایی مانند ویژگی‌های زیر را در آن جستجو کرد:

۱. امکان ارائهٔ یک اصل‌بندیِ T (یعنی یک تئوری مرتبهٔ اول) برای $\mathcal{M}$؛ به بیان دیگر لیست کردن برخی ویژگی‌های کلیدی $\mathcal{M}$ که احتمالاً موارد بعدی در این فهرست در آن مورد آن درست باشد.

۲. بررسی کامل بودن اصل بندی مورد نظر، مثلاً با ارائه یک سامانهٔ رفت و برگشتی از ایزومرفیسم‌ها، قضیه ۸۸.

۳. بررسی پدیدهٔ حذف سور در تئوری مورد نظر. شاید در این مورد نیاز به تقویت زبان باشد؛ ولی تقویت زبان تا حدی معقول و رسیدن به حذف سور، همیشه ارزشش را دارد! در صورتی که تئوری سورها را حذف کند، مورد دوم، یعنی بررسی کامل بودن تئوری نیز راحت‌تر صورت می‌گیرد. برای بررسی پدیدهٔ حذف سور، لازم است صورت کلی دستگاه‌های معادلات و نامعادلات را دریابیم.

۴. بررسی این که آیا کوچکترین مدل برای تئوری T وجود دارد؛ منظور مدلی که زیرساختار تمامی مدل‌های دیگر T باشد. در صورتی که تئوری سورها را حذف کند و «مدل اول» داشته باشد، کامل است، لم ۱۴۹.

۵. بررسی مجموعه‌های تعریف‌پذیر در $\mathcal{M}$. حذف سور، کار بررسی مجموعه‌های تعریف‌پذیر را تا حد زیادی راحت‌تر می‌کند: تنها کافی است مجموعه‌های تعریف‌پذیرِ بدون سور مورد بررسی قرار گیرند.

۶. بررسی تصمیم‌پذیری $\mathcal{M}$. در صورتی که تئوری T به طور بازگشتی شمارش‌پذیر و کامل باشد، تصمیم‌پذیر است (قضیه ۱۲۲). حذف سور نیز می‌تواند بررسی تصمیم‌پذیر بودن تئوری را به میزان قابل ملاحظه‌ای آسان کند.

۳.۱۰ ساختارِ $(\mathbb{N}, s)$

منظورمان از s تابع تالی، یعنی تابع $s(x) = x + 1$ است. بررسی ساختارِ $(\mathbb{N}, s)$ به صورت منطقی، مصداق کامل «کله‌پاچه مورچه» است، اما در عوض این ساختار محمل خوبی برای توضیح ایده‌های مورد نیاز ما در ساختارهای بعدی است، و ما از این خصلت آن در زیر بهرهٔ کافی را خواهیم جُست.

یک ویژگی کلیدی تابع s یک به یک بودن آن است. بیایید فعلاً در زبانِ $L = \{s\}$ یک اصل در تئوری T قرار دهیم که یک به یک بودن تابع s را بیان کند. تئوری مورد نظر ما، T، فعلاً همین یک اصل را دارد. پس هر L ساختارِ $(\mathcal{M}, s)$ در صورتی مدل تئوری ما است که تابع $s : M \to M$ یک تابع یک به یک باشد. فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ دو مدل برای T باشند و $\mathcal{A}$ یک زیرساختار مشترک از آن‌ها باشد. صورت کلی معادلات به صورت زیر است:

$$s^n(x) = s^m(x), \quad s^n(x) = b,$$

که در آن b یک عنصر در ساختار پایینی، یعنی A است. دستگاه زیر از معادلات ـ نامعادلات را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} s^{n_1}(x) = s^{m_1}(x) \\ \vdots \\ s^{n_k}(x) = s^{m_k}(x) \\ s^{m_1}(x) = b_1 \\ \vdots \\ s^{m_k}(x) = b_k \\ s^{n'_1}(x) \neq s^{m'_1}(x) \\ \vdots \\ s^{n'_k}(x) \neq s^{m'_k}(x) \\ s^{m'_1}(x) \neq b'_1 \\ \vdots \\ s^{m'_k}(x) \neq b'_k. \end{cases}$$

در دستگاه کلی بالا، n_i, n'_i, m_i, m_i اعداد طبیعی و b_i, b'_i ها عناصر در A هستند. اما بررسی کنیم که در چه صورت این دستگاه معادلات در $\mathcal{M}$ می‌تواند جوابی داشته باشد. با توجه به یک به یک بودن تابع s اگر دستگاه ما یک معادله به صورت $s^{n_1}(x) = s^{m_1}(x)$ داشته باشد که در آن $n_1 \neq m_1$ آن‌گاه این دستگاه در هیچ کدام از دو مدلِ $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ جواب ندارد. پس فرض می‌کنیم که چنین معادله‌ای در دستگاه نباشد. معادله‌های به صورت $s^n(x) = s^n(x)$ نیز همیشه برقرارند و می‌شود آن‌ها را از دستگاه حذف کرد. مشابه همین برخورد را می‌توان با معادلات $s^n(x) \neq s^m(x)$ کرد و اگر $m = n$ نامعادله مربوطه را حذف کرد.

فرض کنید که معادله‌ای به صورت $s(x) = b$ در دستگاه باشد. اگر این معادله در M جواب داشته باشد، بنا به یک به یک بودن s این جواب یکتاست. اما، از کجا معلوم که این معادله در N هم جواب دارد؟ این مشکل نشان می‌دهد که باید اصل‌بندی ما کمی قوی‌تر باشد. بیایید اصل دیگری به تئوری T اضافه کنیم که بگوید: «تابع s همهٔ نقاط غیر از یک نقطه را پوشش می‌دهد». در این صورت شانس زیادی داریم که معادله‌ای به صورت $s(x) = b$ در دو طرف جواب داشته باشد، اما هنوز یک مشکل وجود دارد. شاید $b \in A$ در N همان عنصری باشد که تابع s پوشش نمی‌دهد ولی در M این طور نباشد. پس لازم است که عنصری که توسط s پوشیده نمی‌شود به نحوی در دو ساختار یکی باشد. برای این منظور یک ثابتِ 0 به زبان اضافه می‌کنیم و در تئوری ذکر می‌کنیم که تابع s عنصر 0 را پوشش نمی‌دهد.

قضیه ۱۵۰. تئوری T' حاوی جملاتی که یک به یک بودن s و پوشیده شدن تمام نقاط مگر نقطهٔ 0 را وصف می‌کند، سورها را حذف می‌کند. این تئوری برخی ویژگی‌های ساختارِ $(\mathbb{N}, s, 0)$ را وصف می‌کند.

تمرین ۱۰۱. با استفاده از ایدهٔ بالا، نشان دهید که تئوری T' که تنها یک به یک بودن s را بیان می‌کند، سورها را حذف نمی‌کند، اما مدلی دارد که در تمام مدل‌ها می‌نشیند. نشان دهید که این تئوری کامل نیست.

تمرین ۱۰۲. با استفاده از ایده‌های بالا نشان دهید که اگر ثابت c را به زبان اضافه نکنیم حذف سور حاصل نمی‌شود. به بیان دیگر، تئوری T' که می‌گوید s یک به یک است و تنها یک نقطه را پوشش نمی‌دهد، سورها را حذف نمی‌کند. نشان دهید که این تئوری دارای مدل اول است.

آیا تئوری T مدلی دارد که در تمام مدلهای آن بنشیند؟ پاسخ بله است. خود $(\mathbb{N}, s, 0)$ در تمام مدل‌ها می‌نشیند. فرض کنید $(M, s^M, 0^M)$ یک مدل دلخواه باشد. تابع $h : \mathbb{N} \to M$ را به این صورت در نظر بگیرید که 0 را به 0^M و هر $s^n(0)$ را به $(s^M)^n(0^M)$ تصویر کند. بنا به لم ۱۴۹ داریم:

نتیجه ۱۵۱. تئوری T یک تئوری کامل است.

بیایید صورت کلی یک مدل $(M, s, 0)$ از تئوری T را بررسی کنیم:

$$0, s(0), s^2(0), \dots$$
$$\vdots$$
$$\dots, s^{-2}(t), s^{-1}(t), t, s(t), s^2(t) \dots$$
$$\vdots$$
$$\dots, s^{-2}(u), s^{-1}(u), u, s(u), s^2(u) \dots$$
$$\vdots$$

در واقع مدل M حاوی طبقاتی (بدون ملاحظهٔ ترتیب) از دورهای تابع s است.

تمرین ۱۰۳. نشان دهید که T مدلی دارد که در آن عنصری مانند a وجود دارد به طوری که a با متناهی بار تالی گرفتن از 0 حاصل نمی‌شود.

تمرین ۱۰۴. نشان دهید که دو مدل شمارای تئوری T لزوماً با هم ایزومرف نیستند.

تمرین ۱۰۵. نشان دهید که هر دو مدل تئوری T با اندازهٔ $2^{\aleph_0}$ با هم ایزومرف هستند.

فرض کنید $A \subseteq M$ یک مجموعهٔ تعریف‌پذیر با پارامتر در ساختارِ $(M, s, 0) \models T$ باشد. فرمولی که A را تعریف می‌کند، معادلی بدون سور دارد. پس A توسط فرمولی به صورت $\varphi_1 \vee \varphi_2 \dots \vee \varphi_n$ تعریف می‌شود که در آن هر φ_i عطفی از فرمول‌های اتمی و نقیض اتمی، مثلاً به صورت زیر است:

$$(s^{n_1}(x) = s^{m_1}(x)) \wedge (s^{k_1}(x) = b) \wedge (s^{n_2}(x) \neq s^{m_2}(x)) \wedge (s^{k_2}(x) \neq b)$$

نتیجه ۱۵۲. هر مجموعهٔ تعریف‌پذیر $A \subseteq M$ در ساختارِ $(M, s, 0)$ یا متناهی است، یا متمم آن متناهی است.

نتیجه ۱۵۳. ترتیب اعداد طبیعی در ساختارِ $(\mathbb{N}, s, 0)$ قابل تعریف نیست.

اثبات. اگر فرمولی مانند $\varphi(x, y)$ در اعداد طبیعی، ترتیب تعریف کند، بنا به کامل بودن تئوری، این فرمول در همهٔ مدلها ترتیب تعریف می‌کند. فرض کنید M یک مدل نااستاندارد برای T باشد و $x, y \in M$ به گونه‌ای باشند که هیچ‌کدام با متناهی بار تالی گرفتن از دیگری حاصل نشود. در این صورت مجموعهٔ $\{x \in M : a < x < b\}$ با ترتیبی که توسط φ تولید می‌شود، هم خود و هم متمم آن نامتناهی است. □

تمرین ۱۰۶. نشان دهید که جمع اعداد طبیعی در ساختارِ $(\mathbb{N}, s, 0)$ قابل تعریف نیست؛ یعنی مجموعهٔ $\{(x, y, z) : z = x + y\}$ قابل تعریف نیست.
راهنمایی. نشان دهید که در غیر این صورت، مجموعهٔ اعداد زوج قابل تعریف است، ولی این مجموعه نامتناهی و متمم نامتناهی است.

تمرین ۱۰۷. ساختار $(\mathbb{N}, s, 0, <)$ را اصل‌بندی کنید. برای این ساختار حذف سور ثابت کنید و نشان دهید که جمع اعداد طبیعی در این ساختار نیز قابل تعریف نیست.

۴.۱۰ $(\mathbb{N}, +, 0)$

صورت کلی معادلات در زبان این ساختار به صورت زیر است:

$$nx + a = b$$
$$mx + a = nx + b$$

فعلاً تئوری T را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که ویژگی‌های طبیعی جمع و خنثی بودن صفر را توصیف کند. دو مدلِ $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{M}_2$ و زیرساختار مشترک $\mathcal{A}$ از این دو را در نظر بگیرید. فرض کنید معادلهٔ $nx = a$ با $a \in A$ در دستگاه معادلات ما باشد. اولین سوالی که می‌توانیم از خود بپرسیم این است که چه تضمینی وجود دارد که این معادله اگر در $\mathcal{M}_1$ جواب داشته باشد، در $\mathcal{M}_2$ هم جواب داشته باشد. تمرین زیر، که راه حل آن استفاده‌ای هوشمندانه از قضیهٔ فشردگی است، و البته نیازی به حل آن برای ادامه دادن مسیر نیست، نشان می‌دهد که در حقیقت چنین تضمینی وجود ندارد.

***تمرین ۱۰۸.** ساختار $\mathcal{A}$ و مدل‌های $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ از تئوری T را به گونه‌ای بسازید که یک عنصر $a \in A$ در $\mathcal{M}_1$ زوج و در $\mathcal{M}_2$ فرد باشد. نتیجه بگیرید که «زوج بودن» قابل تعریف توسط یک فرمول بدون سور نیست.

پس بیایید «بخش‌پذیر بودن» را در زبان بگنجانیم. به زبان، شمارا محمول p_n قرار می‌دهیم و در ساختار اعداد طبیعی، $p_n(x)$ را به معنی بخش‌پذیر بودن x به n تعبیر می‌کنیم. در این صورت اگر $a \in A$ و $\mathcal{A} \models p_n(a)$ آنگاه برای هر مدل شامل $\mathcal{A}$ هم خواهیم داشت $p_n(a)$ و مشکل تمرین بالا رخ نمی‌دهد. اضافه کردن محمول‌های p_n به زبان، باعث می‌شود که اصول‌موضوعهٔ مربوط به ویژگی‌های p_n ها را نیز به تئوری اضافه کنیم. در نگاه اول، اصول بسیار طبیعی زیر باید اضافه شوند:

$$\forall x\, p_n(x) \leftrightarrow \exists y\, \underbrace{y + y + \ldots + y}_{n \text{ بار}} = x \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\forall x \left(p_n(x) \vee p_{n+1}(x) \vee \ldots \vee p_{n+(n-1)}(x)\right) \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\forall x (p_n(x) \to p_m(x)) \qquad n, m \in \mathbb{N}, n \mid m$$

$$\forall x, y \Big((p_n(x) \wedge p_n(y) \to p_n(x+y)\Big) \qquad n \in \mathbb{N}$$

برای این که ساختار اعداد طبیعی، مدل اول ما بشود، یعنی در همهٔ مدل‌ها قرار بگیرد، ثابتِ 1 را نیز به زبان اضافه می‌کنیم. دقت کنید که اضافه شدن این محمول‌ها و ثابت جدید، دستگاه‌های معادلاتی را که باید مطالعه کنیم، پیچیده‌تر می‌کنند. در زبان جدید باید معادلاتی از نوع زیر (از هر نوع، تعدادی متناهی) حل شوند.

$$p_n(mx + a)$$

$$mx + c = d$$

$$mx = nx + e$$

با کمی دقت در دستگاه بالا متوجه می‌شویم که معادلات از نوع اول، عملاً کلاس هم‌نهشتی x به پیمانه‌های مختلف n را تعیین می‌کنند. فعلاً فرض کنید دستگاه ما تعدادی متناهی معادله، فقط از نوع اول در بالا داشته باشد. چنین دستگاهی را می‌توان به دستگاه زیر تبدیل کرد:

$$x \equiv^{n_1} a_1$$

$$\vdots$$

$$x \equiv^{n_k} a_k$$

در دستگاه بالا a_i ها متعلق به A، یعنی زیرساختار مشترک، هستند و ما با فرض وجود x در M به دنبال یافتن مشابه آن در N هستیم. دقت کنید که می‌توان هر a_i در معادلهٔ بالا را با یک عدد طبیعیِ همنهشت با a_i، مثلاً m_i جایگزین کرد. پس دستگاه ما تبدیل به دستگاه زیر می‌شود:

$$x \equiv^{n_1} m_1$$

$$\vdots$$

$$x \equiv^{n_k} m_k$$

اما پیدا کردن یک عنصر x که به طور همزمان در چند معادلهٔ همنهشتی صدق کند، کار چندان دشواری نیست:

لم ۱۵۴ (قضیهٔ باقی‌ماندهٔ چینی در اعداد طبیعی). فرض کنید n_1 و n_2 دو عدد طبیعی باشند به گونه‌ای که $(m,n)=1$. در این صورت یک عدد طبیعی x وجود دارد به طوری که $x \equiv_{n_1} m_1$ و $x \equiv_{n_2} m_2$. همچنین y عنصر دیگری با این ویژگی است، اگر و تنها اگر $y \equiv_{n_1 n_2} x$. به بیان جبری، دو گروه $\mathbb{Z}_{n_1 n_2}$ و $\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2}$ با هم ایزومرف هستند.

اثبات لم بالا در مورد اعداد طبیعی، یک سرگرمی ریاضی جذاب است و ما آن را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. اما از لم بالا نتیجه می‌شود که معادلات هم‌نهشتی ظاهر شده در دستگاه ما، پس از این که همه را تا حد امکان ساده کنیم تا پیمانه‌ها نسبت به هم اول شوند، در $\mathcal{A}$ و حتی در $\mathbb{N} \subseteq A$ دارای جواب هستند.

اما اگر دستگاه ما معادلاتی از نوع $mx + c = d$ یا $mx = nx + e$ داشته باشد، نیز کار کمی نیاز به دقت دارد. برای آسانی فرض کنید که معادله‌ای به صورت $x + c = d$ در دستگاه ما باشد که در آن $c, d \in A$. اگر در M عنصری وجود داشته باشد که حاصل جمع آن با a برابر با b باشد، هیچ تضمینی وجود ندارد که در خودِ A و نیز در N چنین عنصری وجود داشته باشد. در اعداد طبیعی، کمتر بودن a از b موجب می‌شود که چنین x موجود باشد.

تمرین ۱۰۹. ساختارهای $\mathcal{A}$، $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ را چنان بسازید که برای دو عنصر مشخص $a, b \in A$ در M عنصری وجود داشته باشد که حاصل جمع آن با a برابر با b شود ولی در N چنین عنصری وجود نداشته باشد.

پس نیاز است که رابطهٔ دوموضعی ترتیب، یعنی علامتِ $<$، را به زبان و ویژگی‌های آن، به همراه سازگاری آن با جمع را به تئوری اضافه کنیم. ساختار مورد نظر ما، هم‌اکنون ساختارِ $(\mathbb{N}, +, 0, 1, <, p_n)$ است. در زبان این ساختار، صورت کلی معادلات به گونهٔ زیر است:

$$p_n(mx + a)$$
$$mx + a = b$$
$$mx + a < nx + b$$

وجود معادلهٔ دوم باعث می‌شود که x در صورت وجود در مدل اول، در مدل دوم هم وجود داشته و یکتا باشد. این معادله، معادل با $p_m(b-a)$ است. و البته با توجه به این علامت تفریق در زبان نداریم $p_m(b-a)$ را باید با توجه به باقی‌مانده a, b بر اعداد مختلف بیان کنیم. اما اگر فقط معادلات از نوع اول و سوم داشته باشیم، عملاً نیاز است بتوانیم از پس دستگاه‌هایی به صورت زیر برآییم:

$$x \equiv^{n_1} m_1$$
$$\vdots$$
$$x \equiv^{n_k} m_k$$
$$c < x < d$$

اگر فاصلهٔ $c, d \in A$ از هم متناهی باشد، آن‌گاه عناصر یکسانی در M, N در این بازه قرار می‌گیرند و هر کدام از این عناصر، با تالی‌گیری از c به دست می‌آید. بنابراین هر آنچه در M در این بازه قرار گیرد و جواب دستگاه معادلات ما باشد، در N هم قرار دارد. اگر بازهٔ (c, d) یک بازهٔ نامتناهی (نااستاندارد) باشد، آنگاه با توجه به آن چه در بالا در بارهٔ معادلات هم‌نهشتی گفته شد، عدد x مورد نظر را که قراراست که در تمام معادلات ما صدق کند، به صورت $a + n$ برای یک عدد طبیعی مناسب n پیدا خواهیم کرد.

اما به عنوان نکتهٔ آخر برای اثبات حذف سور، دقت کنید که وجود نامعادلاتی مانند $x \not\equiv_{n_1} m_1$ و $mx \neq nx + e$ تاثیری چندانی بر روش کار ما ندارد. زیرا این که x با m_1 هم‌نهشت نباشد، فصلی از هم‌نهشت بودن آن با اعداد دیگری است. نیز این که mx با عنصری برابر نباشد، به راحتی قابل تنظیم است، زیرا معادلات هم‌نهشتی در صورت جواب داشتن، نامتناهی جواب دارند.

نتیجه ۱۵۵. تئوری T که در این بخش برای ساختار $(\mathbb{N}, +, 0, s, p_n)$ نوشتیم، سورها را حذف می‌کند، و کامل و تصمیم‌پذیر است.

اثبات. کامل بودن تئوری، از این نتیجه می‌شود که سورها را حذف می‌کند و مدل اول دارد. تصمیم‌پذیر بودن از آن جا ناشی می‌شود که به راحتی می‌توان تحقیق کرد که مجموعهٔ اصولی که برای این تئوری در نظر گرفتیم، قابل فهرست کردن توسط یک الگوریتم است. □

نتیجه ۱۵۶. ضرب اعداد طبیعی در ساختارِ $(\mathbb{N}, +, 0, 1)$ قابل تعریف نیست.

اثبات. بنا به حذف سور، مجموعه‌هایی که با فرمول‌های تک متغیره قابل تعریف هستند، یا متناهی هستند یا دارای متمم متناهی هستند، و یا کلاس هم‌نهشتی x تحت یک پیمانه را در بر دارند. در این حالت آخر، مجموعهٔ مورد نظر حسابی است، یعنی عنصری مانند a وجود دارد به طوری که مجموعهٔ مورد نظر ما، تمام عناصر به صورت $a + nk$ برای یک عدد طبیعی ثابت n و هر عدد طبیعی k را شامل است. اگر ضرب قابل تعریف باشد، مجموعهٔ $\{x^2 : x \in \mathbb{N}\}$ نیز قابل تعریف خواهد بود. ولی این مجموعه، هیچ‌کدام از این سه ویژگی را ندارد. □

تمرین ۱۱۰. ساختار $(\mathbb{N}, +, 0, 1, \{\equiv^n\}_{n\in\mathbb{N}}, <)$ را اصل‌بندی کنید که در آن $\equiv^n$ یک رابطهٔ دوموضعی است که در اعداد طبیعی، به رابطهٔ هم‌نهشتی تعبیر می‌شود. برای این ساختار حذف سور ثابت کنید و نشان دهید که ضرب اعداد طبیعی در این ساختار قابل تعریف نیست.

***تمرین ۱۱۱.** به عنوان یک پروژه دانشجویی، تصمیم‌پذیری ساختارِ $(\mathbb{N}, \cdot)$ را بررسی کنید.

۵.۱۰ حذف سور خانی ـ زارعی

بعداً اضافه شود.

فصل ۱۱

ناتمامیت اول و دوم گودل

در بخش قبل تصمیم‌پذیری ساختارهای مختلفی روی اعداد طبیعی را ثابت کردیم. به طور خاص نشان دادیم که ساختار جمعی اعداد طبیعی، $(\mathbb{N}, +)$ تصمیم‌پذیر است. برای ساختار جمعی و ضربی اعداد طبیعی نیز، پیش‌تر اصول موضوعه پئانو را در بخش ۱.۶ معرفی کرده بودیم.

در این بخش می‌خواهیم به دو قضیهٔ ناتمامیت بپردازیم. قضیهٔ ناتمامیت اول را می‌توان به گونه‌های زیر بیان کرد:

۱. هر تئوری‌ای به اندازهٔ کافی اطلاعات برای اصل‌بندی اعداد طبیعی داشته باشد و توسط یک الگوریتم قابل نوشتن باشد، تصمیم‌پذیر نیست. از نتایج این عدم تصمیم‌پذیری، عدم کامل بودن یک چنین تئوری است.

۲. تئوری کامل اعداد طبیعی، در زبانی که دارای علائم جمع و ضرب است، تصمیم‌پذیر نیست. یعنی هیچ الگوریتمی وجود ندارد که جمله‌ای مانند φ را بگیرید و تعیین کند که آیا این جمله در مورد اعداد طبیعی درست یا نادرست است.

قضیهٔ ناتمامیت دوم در مورد سازگاری نظریهٔ مجموعه‌هاست. این قضیه بیان می‌کند که در صورتی که نظریهٔ مجموعه‌ها سازگار باشد، سازگاری این نظریه را با استفاده از اصول موضوعهٔ آن نمی‌توان اثبات کرد. برای این فهم اثبات این دو قضیه آسان‌تر شود، در زیر نخست شهود پشت اثبات هر دو قضیه را آورده‌ایم و سپس در ادامهٔ فصل، مطالب را دقیق‌تر کرده‌ایم. این اثبات‌ها را پیش‌تر در فیلمی در لینک زیر توضیح داده بودم:

`https://www.aparat.com/v/s9iUm`

همچنین در «گروه مزداهیک» نیز دربارهٔ ناتمامیت دوم سخن گفته بودیم:

`https://www.aparat.com/v/9xdA8`

۱.۱۱ قضایای ناتمامیت، شهود اثبات

۲.۱۱ ناتمامیت اول، شهود

در این بخش کوتاه کوشیده‌ایم که به لطف حذف بسیاری از ریزه‌کاری‌ها و دقائق، روح اصلی روش اثبات ناتمامیت اول را توضیح دهیم. در بخش‌های پیش‌رو به تدریج اثبات را با توضیح مفاهیم کلیدی، دقیق‌تر خواهیم کرد.

در بخش ۴.۸ صحبت کوتاهی درباره تصمیم‌پذیری کردیم و از واژه «الگوریتم»، بی آن که آن را دقیق تعریف کرده بوده باشیم، استفاده جستیم. هنوز هم قصد نداریم که الگوریتم را دقیق تعریف کنیم و این کار را به بخش‌های بعدی موکول کرده‌ایم. فعلاً منظورمان از الگوریتم دستورالعمل‌هایی است که یک رایانه از پس اجرای آن‌ها برمی‌آید. با توجه به این که الگوریتم‌ها دارای ورودی و خروجی هستند، می‌توانیم تصور کنیم که هر الگوریتم یک عدد طبیعی n را به عنوان ورودی می‌گیرد، امکان دارد که با دریافت n پس از مدتی متوقف شود (یعنی یک خروجی تحویل دهد) یا این که روی دور بیفتد؛ یعنی متوقف نشود و هیچ خروجی‌ای نداشته باشد. فرض کنید $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ فهرستِ همهٔ الگوریتم‌ها باشد. می‌توان این الگوریتم‌ها را بر اساس توقف یا عدم توقف آنها در یک ورودی داده شده، به صورت جدول فرضی زیر نمایش داد. در این جدول عدد ۰ نشان دهنده توقف و عدد ۱ نشان دهندهٔ عدم توقف الگوریتم در یک ورودی است:

	1	2	3	4	5	....
f_1	0	1	0	1	0	...
f_2	1	1	0	0	1	...
f_3	1	0	0	0	0	...
f_4	0	0	1	1	1	...
...						

قضیه ۱۵۷ (مسئلهٔ توقف). هیچ الگوریتمی وجود ندارد که یک عدد طبیعی n را به عنوان ورودی بگیرد و تعیین کند که آیا الگوریتم n ام با دریافت ورودی n می‌ایستد یا روی دور می‌افتد.

اثبات. فرض کنید که g چنین الگوریتمی موجود باشد. در این صورت g' در زیر نیز یک الگوریتم است:

$$g'(n) = \begin{cases} LOOP & \text{اگر الگوریتم } n \text{ ام در ورودی } n \text{ متوقف شود} \\ STOP & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اما این غیر ممکن است، زیرا g' با تمام الگوریتهای فهرست شده متفاوت است. □

قضیهٔ بالا را می‌توان به صورت زیر هم بیان کرد:

نتیجه ۱۵۸. یک مجموعهٔ به طور بازگشتی شمارش‌پذیر وجود دارد که بازگشتی نیست.

اثبات. مجموعهٔ

$$\{n \in \mathbb{N} : \text{الگوریتم } f_n \text{ با دریافت } n \text{ به عنوان ورودی متوقف می‌شود}\}$$

چنین ویژگی‌ای دارد. □

تا این جای کار، به نظر نمی‌رسد که آن چه که گفته‌ایم ربطی به ساختار $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ داشته باشد. اما قضیهٔ زیر موضوع را روشن می‌کند:

قضیه ۱۵۹. یک جملهٔ φ در زبانِ $L = \{+, \cdot\}$ وجود دارد به طوری که

$$\Big((\mathbb{N}, +, \cdot) \models \varphi\Big) \iff \text{الگوریتم شمارهٔ } n \text{ با ورودی } n \text{ بایستد.}$$

نتیجه ۱۶۰. تئوری کامل اعداد طبیعی، تصمیم‌پذیر نیست.

قضیه ۱۶۱. اگر T یک تئوری برای اعداد طبیعی باشد که «به اندازهٔ کافی» حقایق جمع و ضرب را در بردارد، آن‌گاه

$$\Big(T \vdash \varphi\Big) \iff \text{الگوریتم شمارهٔ } n \text{ با ورودی } n \text{ بایستد.}$$

نتیجه ۱۶۲ (ناتمامیت اول). هیچ تئوری حاوی حقایق کافی دربارهٔ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ تصمیم‌پذیر نیست.

پس به عنوان مثال تئوری کامل ساختارِ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ و نیز تئوری پئانو برای این ساختار، هیچ‌کدام تصمیم‌پذیر نیستند. به در نتیجهٔ تصمیم‌ناپذیر بودنِ تئوری کامل $(\mathbb{N}, +, \cdot)$، هیچ الگوریتمی وجود ندارد که یک جملهٔ φ را بگیرید و تعیین کند که آیا در ساختارِ $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ این جمله برقرار است یا خیر.

بنا بر آنچه گفته شد، اساس قضیهٔ ناتمامیت اول، قضیه ۱۶۱ است. در بخش‌های پیش رو خواهیم کوشید که این قضیه را به صورت دقیق بیان و اثبات کنیم.

۳.۱۱ ناتمامیت دوم، به صورت نادقیق

فرض کنید ZFC تئوری نظریهٔ مجموعه‌ها (یا هر تئوری دیگر حاوی امکانات لازم برای بیان جمع و ضرب اعداد طبیعی) باشد. در این صورت

لم ۱۶۳. یک جمله در زبان وجود دارد که می‌گوید: «اثباتی برای فرمول $x \neq x$ وجود ندارد.»

جملهٔ اشاره شده در لم بالا را با $con(ZFC)$ نشان می‌دهیم و لم بالا را در بخش ۳.۴.۱۱ اثبات خواهیم کرد. حال فرض کنید $\{\varphi_i\}$ شمارشی از همهٔ فرمول‌های دارای تک متغیرِ x باشد. یکی از این فرمول‌ها فرمولی است که می‌گوید:

«اگر در فرمولی که شمارهٔ آن x است، عدد x را قرار دهیم، فرمول به دست آمده اثبات نمی‌شود».

اما خودِ فرمول بالا یک فرمول تک متغیره است، پس یک شماره دارد؛ فرض کنیم شماره‌اش e باشد. اما فرمول $\varphi_e(e)$ چه می‌گوید:

اگر در فرمول شمارهٔ e عدد e را قرار دهیم، اثبات نمی‌شود.

به بیان دیگر، $\varphi_e(e)$ می‌گوید:

$\varphi_e(e)$ اثبات نمی‌شود.

در واقع فرمول $\varphi_e(e)$ فرمولی است که می‌گوید: «من ثابت نمی‌شوم» و در این فرمول، من= «من ثابت نمی‌شوم»، و دوباره من=«من ثابت نمی‌شوم».

دقت کنید که این که $ZFC \vdash \varphi_e(e)$ تناقض آمیز است، زیرا اثبات $\varphi_e(e)$ با توجه به معنی این جمله، به معنی عدم اثبات‌پذیری آن است. پس اگر ZFC سازگار باشد، آن‌گاه $ZFC \nvdash \varphi_e(e)$. اما این گفته را می‌توان به صورت فرمال زیر نوشت:

$$ZFC \vdash con(ZFC) \to \neg prove(\varphi_e(e)).$$

بنابراین اگر $ZFC \vdash con(ZFC)$ آن‌گاه $ZFC \vdash \neg prove(\varphi_e(e))$ اما $ZFC \vdash \neg prove(\varphi_e(e))$ به معنی $ZFC \vdash \varphi_e(e)$ است.

۴.۱۱ دقیق‌سازی

۱.۴.۱۱ الگوریتم، بالاخره به صورت دقیق

در این بخش، قصد داریم مفهوم یک «ماشین ثبت» را به عنوان نماینده‌ای از ماهیت الگوریتم معرفی کنیم. یک ماشین ثبتِ $\mathcal{M}$ ماشینی فرضی دارای خانه‌های حافظه‌ای به نام‌های $\mathcal{R}_0, \ldots, \mathcal{R}_R$ است. یک مجموعهٔ الفبا، به صورت $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_L\}$ داریم که کلمه‌هایی که با حروف این الفبا ساخته می‌شوند می‌توانند در خانه‌های حافظهٔ ماشین جای بگیرند. توانایی مکانیکی ماشین این است که حرف آخر یک کلمه را بخواند، حرف آخر یک کلمه را پاک کند و یا یک حرف به آخر یک کلمه اضافه کند. یک ماشین ثبت $\mathcal{M}$ با استفاده از یک «برنامه» کار می‌کند. منظور از یک برنامه برای یک ماشین ثبتِ $\mathcal{M}$ دنباله‌ای به صورت $(b_0, \ldots, b_N)$ است که در آن هر b_i یک دستور، به یکی از صورت‌های زیر است:

- $\mathrm{push}(r, l)$
- $\mathrm{goto}(r, c_0, \ldots, c_L)$
- stop.

دستور $\mathrm{push}(r, l)$ یعنی به خانهٔ $\mathcal{R}_r$ برو، حرف a_l را به آخر کلمه موجود در آن خانه اضافه کن (وقتی $l = 0$ اضافه کردن حرف a_0 به معنی پاک کردن آخرین حرف موجود در آن خانه حافظه است). سپس به خط بعدی برنامه برو.

دستور $\mathrm{goto}(r, c_0, \ldots, c_L)$ یعنی خانهٔ $\mathcal{R}_r$ را بخوان. اگر آخرین حرف موجود در خانه، a_l بود، به دستور شمارهٔ c_l برو (اگر هیچ حرفی در آن خانه نبود به دستور شمارهٔ c_0 برو).

دستور stop نیز، همان طور که مشخص است، یعنی متوقف شو.

آخرین دستور یک برنامه، یعنی دستور b_N همیشه دستور stop باید باشد.

فرض کنید در ابتدای کار، کلمه‌های $w_1, \ldots, w_n$ به ترتیب روی خانه‌های $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ واقع شده باشند. ماشین ثبت مورد نظر با استفاده از برنامه‌ای که به آن داده شده کار می‌کند و پس از رسیدن به دستور توقف، متوقف می‌شود. هر آنچه در خانهٔ $\mathcal{R}_0$ جای گرفته باشد، خروجی ماشین است. پس، وقتی مجموعهٔ همهٔ کلمات را با $\mathcal{A}^*$ نشان دهیم، هر ماشین ثبت $\mathcal{M}$، یک تابع جزئی به صورت:

$$F^n_{\mathcal{M}} : \underbrace{A^* \times \ldots \times A^*}_{n} \to \mathcal{A}^*$$

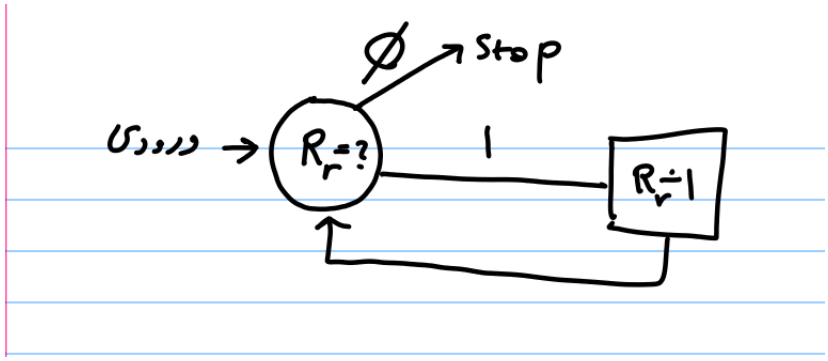
است.

تعریف ۱۶۴. هر تابع جزئی به صورت $F^n_{\mathcal{M}}$، یعنی هر تابع جزئی که با استفاده از یک ماشین ثبت ایجاد شود، یک تابع جزئی «محاسبه‌پذیر» نامیده می‌شود.

در ادامهٔ این کتاب، یک مجموعهٔ الفبای یک حرفی، یعنی مجموعه $\mathcal{A} = \{|\}$ را ثابت در نظر می‌گیریم. در زیر چند نمونه ماشین ثبت را با استفاده از «فلوچارت» آنها معرفی کردیم، که البته با همین الفبا کار می‌کنند.

مثال ۱۶۵ (ماشین $delete(r)$)**.** ماشین ثبت $delete(r)$ ماشینی است که خانهٔ حافظهٔ $\mathcal{R}_r$ را کلاً پاک می‌کند:

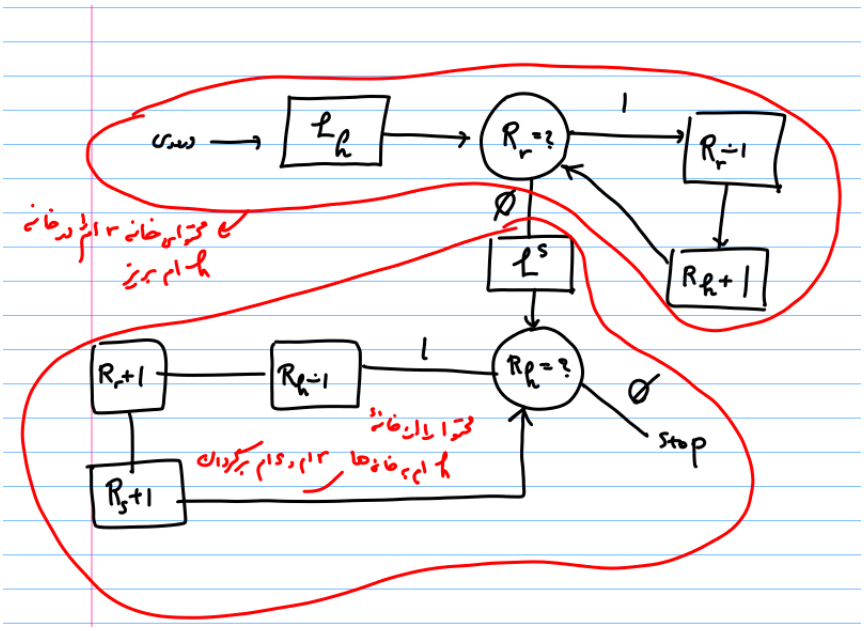
$$(\mathcal{R}_0, \ldots, \mathcal{R}_{R-1}) \longrightarrow_{\mathcal{L}_r} (\mathcal{R}_0, \ldots, \varnothing, \ldots, \mathcal{R}_{R-1})$$



دستورات ماشین $delete(r)$ به صورت زیر هستند:

$$goto(r, 3, 1)$$
$$push(r, 0)$$
$$goto(0, 0, 0)$$
$$stop$$

مثال ۱۶۶. [ماشین $copy(r, s, h)$] ماشین محتویات خانهٔ r ام را در خانهٔ s ام می‌ریزد و برای این کار از خانهٔ h ام کمک می‌گیرد. فلوچارت این ماشین به صورت زیر است:



تمرین ۱۱۲. دستورات ماشین $copy(r, s, h)$ را بنویسید.

تمرین ۱۱۳. ماشینی طراحی کنید که حاصل جمع دو عدد طبیعی را محاسبه کند.

تمرین ۱۱۴. ماشینی طراحی کنید که حاصل ضرب دو عدد طبیعی را حساب کند.

چند تابع محاسبه‌پذیر مهم

لم ۱۶۷. تابعِ $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ با ضابطهٔ $s(x) = x + 1$ یک تابع محاسبه‌پذیر است.

اثبات. کافی است دستوراتی به ماشین ثبت داده شود تا خانهٔ اول را در خانهٔ صفرم کپی کند (با استفاده از ماشین کپی در مثال ۱۶۶) و سپس به خانهٔ صفرم یک علامت | اضافه کند. □

لم ۱۶۸. تابعِ $I_i^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ با ضابطهٔ $I_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ یک تابع محاسبه‌پذیر است.

اثبات. کافی است با استفاده از ماشین کپی، محتویات خانهٔ i ام در خانهٔ صفرم ریخته شود. □

لم ۱۶۹. تابع ثابتِ صفر، یک تابع محاسبه‌پذیر است.

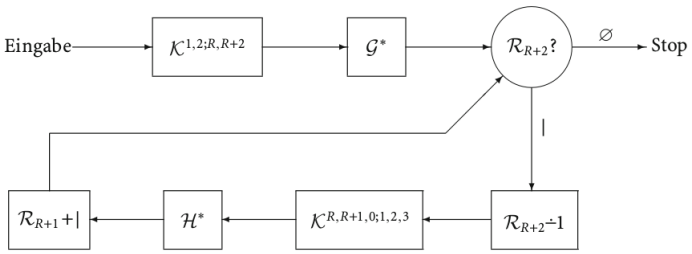
اثبات. دستور $stop$ این تابع را محاسبه می‌کند. □

لم ۱۷۰. ترکیب چند تابع محاسبه‌پذیر، یک تابع محاسبه‌پذیر است.

لم ۱۷۱. فرض کنید g, h دو تابع محاسبه‌پذیر باشند. در این صورت تابع $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ که به صورت بازگشتی زیر تعریف می‌شود، یک تابع محاسبه‌پذیر است:

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$$
$$f(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))$$

اثبات. با فرض این که توابع g, h تک متغیره هستند، محاسبه پذیری تابع f را به صورت پیش رو اثبات می‌کنیم. دقت کنید که مثلاً $f(x_1, 3)$ برابر است با $h(x_1, 2, f(x_1, 2)$ و $f(x_1, 2) = h(x_1, 1, f(x_1, 1))$ و $f(x_1, 1) = h(x_1, 0, f(x_1, 0))$ و نهایتاً $f(x_1, 0) = g(x_1)$. فرض کنید G^* و H^* به ترتیب ماشین‌هایی باشند که g و h را محاسبه می‌کنند:



□

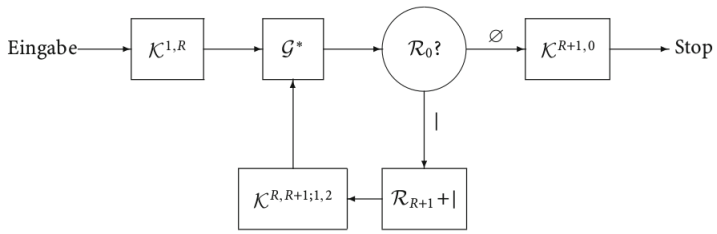
لم ۱۷۲. فرض کنید g یک تابع محاسبه‌پذیر باشد و داشته باشیم:

$$\forall x_1, \ldots, x_n \exists y g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0.$$

در این صورت تابع

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y(g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$$

یک تابع محاسبه‌پذیر است. منظور از $\mu y A(y)$ کوچکترین y است که برای آن $A(y)$ رخ می‌دهد.



اثبات.

□

مجموعه‌های محاسبه‌پذیر

اکنون که با توابع محاسبه‌پذیر آشنا شدیم، می‌توانیم تعاریف مجموعه‌های محاسبه‌پذیر و به طور شمارا محاسبه‌پذیر را نیز ارائه کنیم.

تعریف ۱۷۳.

۱. مجموعهٔ A را محاسبه‌پذیر می‌نامیم هرگاه تابع زیر، یک تابع محاسبه‌پذیر باشد:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

۲. مجموعهٔ A را قابل شمارش به صورت محاسبه‌پذیر می‌نامیم هرگاه تابع محاسبه‌پذیر f وجود داشته باشد به طوری که $A = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$.

تمرین ۱۱۵. نشان دهید که A محاسبه‌پذیر است اگروتنهااگر A و A^c هر دو قابل شمارش به صورت محاسبه‌پذیر باشند.

تمرین ۱۱۶. نشان دهید که A قابل شمارش به صورت محاسبه‌پذیر است اگروتنها اگر A دامنهٔ یک شبه‌تابع محاسبه‌پذیر باشد.

۲.۴.۱۱ توابع بازگشتی، کد گذاری ماشین‌ها و تز چرچ

در بخش قبلی، با توابع محاسبه‌پذیر، به عنوان توابعی که می‌توان برای محاسبهٔ آنها از ماشین‌ها بهره جست، صحبت کردیم. در این بخش، مفهومی توابع «بازگشتی» و ارتباط آنها با توابع محاسبه‌پذیر را توضیح خواهیم داد.

تعریف ۱۷۴ (تابع بازگشتی). یک تابع $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ را بازگشتی می‌نامیم هرگاه با استفاده از توابع پایه ذکر شده در موارد ۱ و ۲ و ۳ در زیر، و به کارگیری قوانین ذکر شده پس از آن‌ها حاصل شود.

۱. تابع تالی: $s(x) = x + 1$،

۲. توابع تصویر: $I_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$،

۳. تابع ثابت: C_0^0.

قانون ۱، جایگذاری اگر توابع g_i و تابع h بازگشتی باشند، آن‌گاه تابع

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

نیز بازگشتی است.

قانون دوم: بازگشت اولیه اگر g, h توابع بازگشتی باشند، آن‌گاه تابع $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ که به طریق زیر تعریف می‌شود، نیز بازگشتی است:

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n)$$
$$f(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

بازگشت با استفاده از μ فرض کنید g یک تابع بازگشتی باشد و

$$\forall x_1, \ldots, x_n \exists y \quad g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0.$$

در این صورت تابع f با ضابطهٔ زیر نیز بازگشتی است:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$$

که در بالا منظور از $\mu y A(y)$ نخستین y با ویژگی $A(y)$ است.

تعریف ۱۷۵. به توابعی که با استفاده از توابع پایه، و قوانین اول و دوم ساخته می‌شوند، توابع بازگشتی اولیه گفته می‌شود.

در بخشِ ۱.۴.۱۱ عملاً اثبات کردیم که توابع بازگشتی، محاسبه‌پذیر هستند. برای محاسبهٔ هر نوع بازگشتی، در آن بخش، ماشین مناسبی معرفی کردیم. در این بخش، اثبات خواهیم کرد که محاسبه‌پذیر نیز، بازگشتی هستند. یعنی مفهوم تابع بازگشتی با مفهوم تابع محاسبه‌پذیر معادل است. هر چند ما این قضیه را برای توابعی که با «ماشین‌های ثبت» قابل محاسبه هستند، اثبات خواهیم کرد، اثباتی که ارائه خواهیم کرد، ما را امیدوار به باور صورت کلی این گفته، یعنی «تز چرچ» خواهد کرد:

قضیه ۱۷۶ (تزِ چرچ). هر تابعی که «به نحوی محاسبه‌پذیر» باشد، بازگشتی است.

پیش از اثبات قضیهٔ فوق نیاز است تا «ماشین» ها با استفاده از «اعداد» کدگذاری شوند. این کار موضوع یک زیربخش پیش رو خواهد بود. پیش از آن نیاز است برخی توابع بازگشتی مهم معرفی شوند:

برخی توابع بازگشتی کاربردی

لم ۱۷۷. توابع $x + y$، $x \cdot y$، x^y، $x!$ و $x \dot{-} y$ بازگشتی اولیه هستند. تابع $\dot{-}$ مشابه تفریق است، اما اگر حاصل تفریق منفی شود به جای آن صفر قرار داده می‌شود.

اثبات. اثبات، به سادگی صورت می‌گیرد. برای مثال، تابع جمع به این علت، بازگشتی اولیه است، که به صورت بازگشتی زیر تعریف می‌شود:

$$x + 0 = x, \; x + (y + 1) = s(x + y).$$

□

تعریف ۱۷۸. یک رابطهٔ R را بازگشتی (بازگشتی اولیه) می‌نامیم هرگاه تابع مشخصهٔ آن، یعنی تابعِ χ_R در زیر، یک تابع بازگشتی (بازگشتی اولیه) باشد.

$$\chi_R(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1 & R(x_1,\dots,x_n) \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

لم ۱۷۹. اگر P و Q روابط بازگشتی (بازگشتی اولیه) باشند، آنگاه $P \wedge Q$، $P \vee Q$، $\neg P$ و $P(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_k(x_1,\dots,x_n))$ برای توابع بازگشتی (بازگشتی اولیه) f_i، روابطی بازگشتی (بازگشتی اولیه) هستند.

اثبات. آسان است، زیرا

$$\chi_{P\vee Q} = \chi_P \cdot \chi_Q$$
$$\chi_{\neg P} = 1 \dot{-} \chi_P$$
$$P \wedge Q = \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

همچنین تابع مشخصهٔ رابطهٔ $P(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_k(x_1,\dots,x_n))$ از ترکیب توابع f_i با تابع مشخصهٔ رابطهٔ P به دست می‌آید. □

لم ۱۸۰. اگر P_1, P_2 روابطی بازگشتی (بازگشتی اولیه) و f_1, f_2 توابعی بازگشتی (بازگشتی اولیه)باشند، آن‌گاه تابع

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} f_1(\bar{x}) & p_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) & \neg p_1(\bar{x}) \wedge p_2(\bar{x}) \end{cases}$$

نیز یک تابع بازگشتی (بازگشتی اولیه) است.

اثبات. داریم

$$f(\bar{x}) = 1 \dot{-} \chi p_1(\bar{x}) f_1(\bar{x}) + (1 \dot{-} \chi(\neg p_1 \wedge p_2) f_2(\bar{x}))$$

□

لم ۱۸۱. اگر P یک رابطهٔ بازگشتی (بازگشتی اولیه) باشد، آن‌گاه رابطه‌های زیر نیز بازگشتی (بازگشتی اولیه) هستند:

$$R(\bar{x}, z) \Leftrightarrow \forall y < z P(\bar{x}, y)$$
$$S(\bar{x}, z) \Leftrightarrow \exists y < z P(\bar{x}, y)$$

اثبات. رابطهٔ R با استفاده از بازگشت اولیه زیر تعریف می‌شود:

$$R(\bar{x}, 0) \Leftrightarrow \text{true}$$
$$R(\bar{x}, z+1) \Leftrightarrow R(\bar{x}, z) \wedge P(\bar{x}, z).$$

رابطهٔ S نیز نقیض رابطهٔ R است. □

لم ۱۸۲. اگر $R(\bar{x}, y)$ یک رابطهٔ بازگشتی اولیه و $b(\bar{x})$ یک تابع بازگشتی اولیه باشند، آن‌گاه اگر

$$\forall \bar{x} \exists y < b(\bar{x}) R(\bar{x}, y)$$

آن‌گاه تابع زیر بازگشتی اولیه است:

$$f(\bar{x}) = \mu y R(\bar{x}, y).$$

اثبات. تابع $h(\bar{x}, y) = \mu z(R(\bar{x}, z) \vee z = y)$ را در نظر بگیرید و دقت کنید که $f(\bar{x}) = h(\bar{x}, b(\bar{x}))$. اما h بازگشتی اولیه است، زیرا به صورت زیر قابل تعریف است:

$$h(\bar{x}, 0) = 0$$

$$h(\bar{x}, y+1) = \begin{cases} h(\bar{x}, y) \text{ if } R(\bar{x}, h(\bar{x}, y)) \\ y+1 \text{ در غیر این صورت} \end{cases}$$

□

نتیجه ۱۸۳. ۱. رابطهٔ $x \mid y$ یک رابطهٔ بازگشتی است.

۲. رابطهٔ x یک عدد اول است، یک رابطهٔ بازگشتی است.

۳. تابع

$$p(x) = x+1 \text{ امین عدد اول}$$

یک تابع بازگشتی اولیه است.

اثبات. موارد اول و دوم به آسانی از لم ۱۸۱ نتیجه می‌شوند. مورد سوم از لم ۱۸۲ نتیجه می‌شود زیرا

$$p(x+1) = \mu y(y \in PRIME \wedge y > p(x))$$

و همچنین y در بالا دارای کران $p(x)! + 1$ است. □

قضیه ۱۸۴. تابع

$$\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle = p_0^{x_0} \ldots p_{n-1}^{x_{n-1}}$$

یک تابع دوسویی از $\mathbb{N}^*$ به $\mathbb{N}$ است. همچنین

۱. تابع دو موضعی $(x)_i$ که با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود، یک تابع بازگشتی اولیه است:

$$(\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle)_i = \begin{cases} x_i & i < n \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

۲. تابع «طول» که به صورت زیر تعریف می‌شود، بازگشتی اولیه است:

$$lg(\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle) = n.$$

۳. برای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع $\langle \cdot \rangle : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ بازگشتی اولیه است.

۴. برای هر عدد x داریم $lg(x) \leqslant x$.

۵. برای هر $x > 0$ داریم $(x)_i < x$.

اثبات. مورد اول: دقت کنید که

$$(x)_i = \begin{cases} \mu y p(i)^{y+1} \nmid (x+1) & (i < lg(x) - 1) \\ \mu y p(i)^{y+2} \nmid (x+1) & (i = lg(x) - 1) \\ 0 & (i > lg(x) - 1) \end{cases}$$

و y در بالا دارای کرانِ $x - 1$ است.

برای مورد دوم، دقت کنید که

$$lg(x) = \mu y \quad \forall z \leqslant x (y \leqslant z \to p(y) \nmid (x+1)).$$

y در بالا کران x دارد. حال از لم‌های ۱۸۱ و ۱۸۲ استفاده کنید.

مورد سوم از لم ۱۷۷ به دست می‌آید و مورد چهارم و پنجم واضح هستند. □

گودلیزه کردن ماشین‌های ثبت

تعریف ۱۸۵. می‌گوییم ماشین ثبتِ $\mathcal{M}$ در وضعیتِ $\mathcal{K} = (c, R_0, \ldots, R_{R-1})$ قرار دارد، هرگاه در خانهٔ $\mathcal{R}_i$ کلمهٔ R_i واقع شده باشد، و شمارهٔ دستور بعدی ماشین، c باشد.

با استفاده از جدول زیر، یک ماشین ثبت را می‌توان گودلیزه کرد:

شئ	کُد
$b = stop$	$\ulcorner b \urcorner = 0$
$b = push(r, l)$	$\ulcorner b \urcorner = \langle r, l \rangle$
$b = goto(r, c_0, \ldots, c_L)$	$\ulcorner b \urcorner = \langle r, c_0, \ldots, c_L \rangle$
$\mathcal{M} = (b_0, \ldots, b_N)$	$\ulcorner \mathcal{M} \urcorner = \langle \ulcorner b_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner b_N \urcorner \rangle$
$w = (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$	$\ulcorner w \urcorner = \langle i_1, \ldots, i_n \rangle$
$\mathcal{K} = (c, R_0, \ldots, R_{R-1})$	$\ulcorner \mathcal{K} \urcorner = \langle c, \ulcorner R_0 \urcorner, \ldots, \ulcorner R_{R-1} \urcorner \rangle$.

قضیه ۱۸۶. یک تابع بازگشتی اولیه $N(x, y)$ وجود دارد که برای هر ماشین $\mathcal{M}$ و هر وضعیتِ $\mathcal{K}$ برای آن ماشین، داریم

$$N(\ulcorner \mathcal{M} \urcorner, \ulcorner \mathcal{K} \urcorner) = \ulcorner \mathcal{M}(\mathcal{K}) \urcorner$$

منظور از $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ وضعیت بعدی ماشینِ $\mathcal{M}$ پس از وضعیت $\mathcal{K}$ است.

اثبات. نخست ادعا می‌کنیم که سه تابع زیر بازگشتی اولیه هستند:

$$Ers(\langle x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1} \rangle, i, y) = \langle x_0, \ldots, y, \ldots x_{n-1} \rangle$$
$$Anh(\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle, y) = \langle x_0, \ldots, x_{n-1}, y \rangle$$
$$Str(\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle) = \langle x_0, \ldots, x_{n-2} \rangle$$

در مورد تابع اول داریم:

$$Ers(x, i, y) = \mu z(lg(z) = lg(x) \wedge (z)_i = y \wedge \forall j < lg(x)(j \neq i \rightarrow (z)_j = (x)_i).$$

از آن‌جا که $Ers(x, i, y) < (x + 1)p(i)^{y+2}$ از لم ۱۸۲ نیز استفاده کرده‌ایم.

در مورد تابع دوم داریم:

$$Anh(x, y) = \mu z(lg(z) = lg(x) + 1 \wedge (z)_{lg(x)} = y \wedge \forall j < lg(x)(z)_j = (x)_j)$$

در مورد این تابع نیز باید دقت داشته باشیم که کران بازگشتی اولیه زیر را داریم:

$$Ahn(x, y) < (x + 1)p(lg(x))^{y+2}.$$

در مورد تابع سوم داریم:

$$Str(x) = \mu z lg(z) = lg(x) \dot{-} 1 \wedge \forall j < lg(z)(z)_j = (x)_j$$

و $Str(x) < (x + 1)p(lg(x) \dot{-} 1)$. برای تعریف تابع $N(m, k)$ از کوتاه‌نوشت‌های زیر استفاده خواهیم کرد:

$$c = (k)_0, b = (m)_c, r = (b)_0, w = (k)_{r+1}, l = lg(w) \dot{-} 1, a = (w)_l.$$

پس داریم:

$$N(m,k) = \begin{cases} k & lg(b) < 2 \\ Ers(Ers(k,0,c+1), r+1, str(w)) & lg(b) = 2 \wedge (b)_1 = 0 \\ Ers(Ers(k,0,c+1), r+1, Ahn(w,(b)_1)) & lg(b) = 2 \wedge (b)_1 > 0 \\ Ers(k,0,(b)_{a+1}) & lg(b) > 2. \end{cases}$$

□

و نهایتاً به نقطه‌ای رسیدیم که بتوانیم تز چرچ را اثبات کنیم:

قضیه ۱۸۷. توابع محاسبه‌پذیر، بازگشتی هستند.

اثبات. فرض کنید که $f(x_1,\dots,x_n)$ یک تابع محاسبه‌پذیر باشد، نشان خواهیم داد که این تابع، بازگشتی است. اولاً تابع زیر، که وضعیت اولیه یک ماشین ثبت دارای R خانه را با ورودی $x_1,\dots,x_n$ معلوم می‌کند، بازگشتی اولیه است:

$$Eingabe(R,x_1,\dots,x_n) = \ulcorner(0,\varnothing,\underbrace{|^{x_1},\dots,|^{x_n}}_{n},\underbrace{\varnothing,\dots,\varnothing}_{R-n-1})\urcorner = 0$$

ثانیاً رابطهٔ زیر، که تعیین می‌کند که ماشین با کد m در وضعیت نهایی توقف قرار دارد، یک رابطهٔ بازگشتی است:

$$stop(m,k) \iff m_{(k)_0} = 0.$$

همچنین تابع زیر که محتوای خانهٔ $\mathcal{R}_0$ را به عنوان یک عدد تحویل می‌دهد، بازگشتی اولیه است:

$$Ausgabe(k) = lg((k)_1).$$

همچنین تابع زیر، که s که یک ماشین را در یک وضعیت می‌گیرد و به s وضعیت بعد می‌برد، بازگشتی اولیه است:

$$N^s(m,k)$$

برای اثبات بازگشتی بودن تابع فوق دقت کنید که داریم:

$$\begin{aligned} N^0(m,k) &= k \\ N^{s+1}(m,k) &= N(m,N^s(m,k)). \end{aligned}$$

محمول زیر، که محمول «کلینی» نام دارد، یک محمول بازگشتی اولیه است که می‌گوید:

ماشین m که دارای m خانهٔ حافظه است، ورودی $x_1,\dots,x_n$ را دریافت می‌کند، پس از $(g)_1$ مرحله به وضعیت $(g)_2$ می‌رسد و سرانجام با خروجی $(g)_0$ متوقف می‌شود:

$$T_n(m,x_1,\dots,x_n,g) \iff N^{(g)_1}(m,Eingable(m,x_1,\dots,x_n)) = (g)_2 \wedge stop(m,(g)_2) \wedge Ausgabe((g)_2) = (g)_0.$$

حال اگر تابع f توسط ماشین $\mathcal{M}$ محاسبه شود، برابر با تابع بازگشتی زیر است:

$$f(x_1,\dots,x_n) = (\mu g T_n(m,x_1,\dots,x_n,g))_0.$$

□

قضیهٔ بالا اثبات قضیه ۱۵۹ را نیز به پایان می‌رساند.

نتیجه ۱۸۸. یک فرمول φ وجود دارد به طوری که $(\mathbb{N},+,\cdot) \models \varphi(n,n)$ اگروتنها اگر ماشین ثبتِ با کد n وقتی عدد n را به عنوان ورودی دریافت می‌کند، متوقف می‌شود.

با پذیرفتن تز چرچ از این لحظه به بعد، مفاهیم «بازگشتی» و «محاسبه‌پذیر» برای ما معادل هستند. پس مثلا یک مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{N}$ را بازگشتی می‌نامیم هرگاه رابطهٔ χ_A بازگشتی باشد. معادلاً آن را محاسبه‌پذیر می‌نامیم هرگاه الگوریتمی عضویت در A را برای ما معلوم کند. همچنین A را به طور بازگشتی شمارش‌پذیر می‌نامیم هرگاه هرگاه یک رابطهٔ بازگشتی R وجود داشته باشد به طوری که

$$x \in A \iff \exists y R(x,y).$$

معادلاً آن را شمارش‌پذیر به گونهٔ محاسبه‌پذیر می‌نامیم هرگاه الگوریتمی وجود داشته باشد که در صورت عضویت یک ورودی در A متوقف شود.

۳.۴.۱۱ گودلیزه کردن فرمول‌ها و اثبات‌ها

در بخش‌های قبلی مفهوم یک تئوری تصمیم‌پذیر را تعریف کردیم. گفتیم یک تئوری زمانی تصمیم‌پذیر است که «الگوریتمی وجود داشته باشد که تعیین کند که آیا یک جملهٔ φ با استفاده از آن اثبات می‌شود یا نه». اما چگونه یک الگوریتم می‌تواند تشخیص دهد که یک جمله در یک تئوری اثبات می‌شود یا خیر. در این بخش، در این باره صحبت خواهیم کرد.

در بخش ۲.۴.۱۱ روشی برای کدگذاری ماشین‌های ثبت معرفی کردیم. در این بخش می‌خواهیم «فرمول‌ها» را کدگذاری کنیم. فرض کنید $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ یک زبان متناهی باشد. علائم این زبان را به همراه ادوات منطقی، به صورت زیر کدگذاری کنید:

$\doteq$	$\wedge$	$\neg$	$($	$)$	$\exists$	λ_1	$\dots$	λ_l	v_0	v_1	$\dots$
$\langle 0,0\rangle$	$\langle 0,1\rangle$	$\langle 0,2\rangle$	$\langle 0,3\rangle$	$\langle 0,4\rangle$	$\langle 0,5\rangle$	$\langle 0,6\rangle$	$\dots$	$\langle 0,l+5\rangle$	$\langle 1,0\rangle$	$\langle 1,1\rangle$	$\dots$

می‌دانیم که هر فرمول، دنباله‌ای از علائم بالا است. فرمولِ $\varphi = \xi_1 \dots \xi_n$ را به صورت زیر کُدگذاری کنید:

$$\ulcorner \varphi \urcorner = \langle \ulcorner \xi_1 \urcorner, \ulcorner \xi_2 \urcorner, \dots, \ulcorner \xi_n \urcorner \rangle.$$

حال بنا به آنچه در بخش قبل دیدیم، تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۸۹. یک تئوری T را:

۱. به طور بازگشتی شمارش‌پذیر می‌نامیم هرگاه مجموعهٔ $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \in T\}$ یک مجموعهٔ به طور بازگشتی شمارش‌پذیر باشد،

۲. تصمیم‌پذیر می‌نامیم هرگاه مجموعهٔ $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid T \vdash \varphi\}$ یک مجموعهٔ بازگشتی باشد.

همان‌گونه که در فصلِ ۷ دیدیم، منظور از یک «اثبات» برای فرمولِ φ یک دنباله به صورت

$$\varphi_0 \dots \varphi_n = \varphi$$

است که هر جملهٔ آن، می‌تواند یک اصل یا قاعده در دستگاه هیلبرت باشد، و یا با استفاده از قاعدهٔ MP یا معرفی سور وجودی از فرمول‌های قبلی ایجاد شده باشد. به چنین اثباتی می‌توانیم کد زیر را نسبت بدهیم:

$$\langle \ulcorner \varphi_0 \urcorner \ulcorner \varphi_1 \urcorner \dots \ulcorner \varphi_n \urcorner \rangle$$

نتیجه ۱۹۰. مجموعهٔ زیر، شمارش‌پذیر به طور بازگشتی است:

$$\{\varphi \mid\vdash \varphi\}.$$

اثبات. فرمول φ اثبات می‌شود اگر و تنها اگر عددی وجود داشته باشد که کُد یک اثبات برای φ باشد. □

در بخش ۴.۸ گفته بودیم که اگر تئوری T شمارش‌پذیر به طور بازگشتی باشد، مجموعهٔ نتایج آن نیز شمارش‌پذیر به طور بازگشتی است. با آن چه در این فصل دیدیم، این گفته هم‌اکنون دقیق شده است:

نتیجه ۱۹۱. اگر T شمارش‌پذیر به طور بازگشتی باشد آنگاه

$$\{\ulcorner\varphi\urcorner \mid T \vdash \varphi\}$$

یک مجموعهٔ شمارش‌پذیر به طور بازگشتی است.

حال می‌توانیم لم ۱۶۳ را اثبات کنیم:

نتیجه ۱۹۲. یک جمله وجود دارد که بگوید «فرمولِ $x \neq x$ اثبات نمی‌شود.

اثبات. در واقع جملهٔ مورد نظر ما جمله‌ای است که می‌گوید هیچ کدام از اثبات‌ها به $x \neq x$ نمی‌رسند. یعنی کد جملهٔ پایانی هیچ اثباتی برابر با کد جملهٔ $x \neq x$ نیست. □