نظریهٔ مدل‌ها

نیمسال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳

دانشگاه صنعتی اصفهان

تدریس: محسن خانی

تایپ:

جلسهٔ اول: امیرحسین شفیع‌زاده

۱ اردیبهشت ۱۴۰۳

۱.۰ مقدمه

در این دورهٔ تدریس نظریهٔ مدلها (نیمسال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۳) پس از ارائهٔ مقدمات منطقی، به اثبات قضیهٔ جازمیت مُرلی خواهیم پرداخت. بنا به این قضیه، اگر T یک تئوری باشد که تنها یک مدل از سایز ناشمارای κ دارد، آن‌گاه T از هر سایز نامتناهی فقط یک مدل دارد. در صورتی که وقت اجازه بدهد مقدماتی دربارهٔ تئوری‌های ساده و پایدار نیز تدریس خواهد شد.

نظریهٔ مدل‌ها به عنوان یکی از زیباترین شاخه‌های ریاضی، به قدری مجرد است که مثال‌های کاربردی آن، بخش‌های بسیار محض ریاضی هستند. در این دوره، هرگاه نیاز به پرداختن به مثال‌های جبری بوده، مقدمات جبری نیز تا حد امکان توضیح داده شده‌اند.

به همت دانشجویان، جزوهٔ درس تایپ و به صورت هفتگی روزآمد شده در تارنمای شخصی من قرار می‌گیرد. به علت این که جزوه ممکن است مورد کاربرد مدرسان دیگری قرار بگیرد، آن را بر اساس جلسات، بخش‌بندی کرده‌ایم. منابع زیر می‌توانند در کنار این جزوه مورد استفاده دانشجویان واقع شوند:

۱. جزوهٔ درس منطق ریاضی (خانی):

`https://khani.iut.ac.ir/sites/khani.iut.ac.ir/files//u145/chapter2_0.pdf`

۲. جزوهٔ درس نظریهٔ مدل‌ها (خانی)

`https://khani.iut.ac.ir/sites/khani.iut.ac.ir/files//file_basepage/modeltheory.pdf`

۳. دو کتاب زیر:

a) Tent, K., Ziegler, M. (2012). A Course in Model Theory. United Kingdom: Cambridge University Press.

b) Marker, D. (2006). Model Theory : An Introduction. Switzerland: Springer New York.

فهرست مطالب

۱.۰ مقدمه ۱

۱ درس **۳**

۱.۱ جلسهٔ اول، معرفی زبان و ساختار مرتبهٔ اول ۳

۲.۱ جلسه دوم، فیلترها و فراضرب ساختارها ۶

۳.۱ جلسه سوم، قضیهٔ فشردگی ۷

۴.۱ جلسه چهارم، کاربردهای مقدماتی فشردگی در جداسازی تئوری‌ها ۱۰

۵.۱ جلسه پنجم، اصل‌بندیِ عمومی ـ وجودی، و حذف سور ۱۳

۶.۱ جلسه ششم، تئوری‌های مدل‌کامل و مقدماتی از تئوری‌های مدول‌ها ۱۵

۱.۶.۱ تئوری‌های مدل‌کامل ۱۵

۲.۶.۱ مقدماتی از جبر مدول‌ها ۱۶

۷.۱ جلسه هفتم، حذف سور در مدول‌ها ۱۷

۱.۷.۱ مدول‌ها و حذف سور ۱۷

۲ تمرینها **۲۰**

۱.۲ تمرین نوبت اول: مهلت تا دوشنبه۲۰ فروردین ۲۰

۲.۲ تمرین نوبت دوم: مهلت تا دوشنبه ۲۹ فروردین ۲۱

فصل ۱

درس

۱.۱ جلسهٔ اول، معرفی زبان و ساختار مرتبهٔ اول

تعریف ۱. منظور از یک زبان مرتبه اول L یک مجموعه است متشکل از سه مجموعهٔ دو به دو مجزا:

$$L = \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$$

که در آن $\mathcal{F}$ مجموعهٔ علائم تابعی، $\mathcal{R}$ مجموعهٔ علائم رابطه‌ای و $\mathcal{C}$ مجموعهٔ علائم ثابت نام دارد.

توجه ۲. علامت تابعی با تابع فرق می‌کند. علامت رابطه‌ای با رابطه فرق می‌کند و مشابها علامت ثابت با ثابت فرق می کند.

مثال ۳. مجموعه $L = \{f, g, R, c\}$ یک زبان مرتبه اول است. در این مثال، f یک علامت تابعی دو موضعی است، g یک علامت تابعی تک موضعی است، R یک علامت رابطه‌ای سه موضعی است و c یک علامت ثابت است.

مثال ۴. مجموعه $L = \{+, ۰, -\}$ یک زبان مرتبه اول است که در آن، $+$ علامت تابعی دو موضعی است؛ ۰ علامت ثابت است و $-$ علامت تابعی تک موضعی است.

مثال ۵. مجموعه $L = \{\times, e, \square^{-۱}\}$ یک زبان مرتبه اول است که در آن $\times$ یک نماد تابعی دو موضعی، e یک نماد ثابت و $\square^{-۱}$ یک نماد رابطه‌ای تک موضعی است.

مثال ۶. مجموعه $L_{ring} = \{+, \cdot, ۰, ۱, -\}$ یک زبان مرتبه اول است که در آن $+$ و $\cdot$ علامت تابعی دو موضعی هستند؛ $-$ علامت تابعی تک موضعی است، ۰ و ۱ علامت ثابت هستند.

مثال ۷. مجموعه $L = L_{ring} \cup \{<\}$ یک زبان مرتبه اول است که در آن $<$ علامت رابطه‌ای دو موضعی است.

تعریف ۸. فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد و منظور از یک L ـ ساختار یک چندتایی به صورت زیر است:

$$\mathfrak{M} = (M, \{f^{\mathfrak{M}}\}_{f \in \mathcal{F}}, \{R^{\mathfrak{M}}\}_{R \in \mathcal{R}}, \{c^{\mathfrak{M}}\}_{c \in \mathcal{C}})$$

که در آن M یک مجموعه ناتهی است، $f^{\mathfrak{M}}$ تعبیر نماد تابعی f در $\mathfrak{M}$ است؛ $R^{\mathfrak{M}}$ تعبیر نماد رابطه‌ای R در $\mathfrak{M}$ است و $c^{\mathfrak{M}}$ تعبیر نماد ثابت در $\mathfrak{M}$ است.

فرض کنید $f \in L$ یک نماد تابعی n موضعی باشد و $\mathfrak{M}$ یک L ـ ساختار باشد. در این صورت

$$f^{\mathfrak{M}} : M^n \longrightarrow M$$

یک تابع است. بطور مشابه اگر $R \in L$ یک نماد رابطه‌ای m موضعی باشد $R^{\mathfrak{M}} \subseteq M^m$ یک رابطه است. همچنین اگر $c \in L$ یک نماد ثابت باشد $c^{\mathfrak{M}}$ یک عنصر در M است.

مثال ۹. فرض کنید $L = \{*, g, e, R\}$ یک زبان مرتبه اول باشد که در آن $*$ یک نماد تابعی دو موضعی، g یک نماد تابعی تک موضعی، R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی و e یک نماد ثابت است. بنابراین هر L ـ ساختار $\mathfrak{M}$ به صورت $\mathfrak{M} = (M, *^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}}, e^{\mathfrak{M}}, R^{\mathfrak{M}})$ است. در زیر چند نمونه L ـ ساختار برای این زبان L معرفی شده است.

۱. فرض کنید $\mathfrak{M}_1 = (\mathbb{R}, \cdot, \exp(x), 1, <)$. در این صورت جهان این L ـ ساختار، مجموعه اعداد حقیقی است. همچنین $*^{\mathfrak{M}_1}$ تابع ضرب روی $\mathbb{R}$، $g^{\mathfrak{M}_1}$ تابع نمایی، $e^{\mathfrak{M}_1} = 1$ و $R^{\mathfrak{M}_1}$ رابطه ترتیب روی اعداد حقیقی است.

۲. فرض کنید $\mathfrak{M}_2 = (\mathbb{Z}, +, x^2, 15, |)$. در این صورت جهان L ـ ساختار، مجموعه اعداد صحیح است. $*^{\mathfrak{M}_2}$ تابع جمع روی اعداد صحیح، $g^{\mathfrak{M}_2}(x) = x^2$، $e^{\mathfrak{M}_2} = 15$ و $R^{\mathfrak{M}_2}$ رابطه عادکردن در اعداد صحیح است.

مثال ۱۰. فرض کنید $L = \{*, e\}$ یک زبان مرتبه اول باشد که درآن $*$ یک نماد تابعی دو موضعی و e یک نماد ثابت است. در زیر چند نمونه L ـ ساختار برای این زبان L معرفی شده است.

۱. $(\mathbb{Z}, +, 0)$

۲. $(M_2(\mathbb{R}), \otimes, I_2)$ توجه کنید $M_2(\mathbb{R})$ مجموعه ماتریس‌های 2×2 با درایه‌های حقیقی، $\otimes$ ضرب ماتریسی و I_2 ماتریس همانی 2×2 است.

توجه ۱۱. در ادامهٔ دو جلسهٔ اول، برای ساده تر نوشتن تعاریف مربوط به یک زبان مرتبهٔ اول، آن‌ها را برای یک زبان به صورت $L\{f, R, c\}$ نوشته‌ایم، در حالی که یک زبان مرتبهٔ اول می‌توانند حتی نامتناهی نماد داشته باشد. همچنین نمادها را عموماً دو موضعی گرفته‌ایم در حالی که تعداد مواضع نمادها می‌تواند هر عددی باشد. مثلاً در زیر مفهوم ایزومرفیسم بین دو ساختار را برای زبانِ $L = \{f, R, c\}$ معرفی کردیم و تابع و رابطه را نیز دو موضعی گرفتیم. همین تعریف را به راحتی می‌توان برای یک زبان دلخواه نیز نوشت.

تعریف ۱۲. فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو L ـ ساختار باشند به طوری که $\mathfrak{M} = (M, f^{\mathfrak{M}}, R^{\mathfrak{M}}, c^{\mathfrak{M}})$ و $\mathfrak{M} = (N, f^{\mathfrak{N}}, R^{\mathfrak{N}}, c^{\mathfrak{N}})$. تابع یک به یک و پوشای $h : M \to N$ را یک L ـ ایزومورفیسم می‌نامیم هرگاه h تعابیر علائم زبانی را حفظ کند. به عبارت دیگر هرگاه:

۱. اگر $c \in L$ یک نماد ثابت باشد.

$$c^{\mathfrak{M}} \overset{h}{\mapsto} c^{\mathfrak{N}}.$$

۲. اگر f یک نماد تابعی دو موضعی باشد و $a, b \in M$ آن‌گاه:

$$f^{\mathfrak{M}}(a, b) \overset{h}{\mapsto} f^{\mathfrak{N}}(h(a), h(b)).$$

۳. اگر R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی باشد و $a, b \in M$ آن‌گاه

$$(a, b) \in R^{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow (h(a), h(b)) \in R^{\mathfrak{N}}.$$

تمرین ۱. فرض کنید $L = \{f, c, g\}$ یک زبان مرتبه اول باشد که در آن f یک نماد تابعی دو موضعی، c یک نماد ثابت و g یک نماد تابعی تک موضعی است. دو L ساختار $\mathfrak{M}_1 = (\mathbb{R}, +, 0, -)$ و $\mathfrak{M}_2 = (\mathbb{R}^+, \times, 1, x^{-1})$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که تابع $h(x) = \exp(x)$ یک ایزومورفیسم از $\mathfrak{M}_1$ به $\mathfrak{M}_2$ است.

تعریف ۱۳ (L ـ ترم)**.** فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد. متغیرهای $v_0, v_1, \ldots$ را در کنار زبان درنظر بگیرید. هر L ترم دنباله‌ای متناهی و مجاز است که با استفاده از نمادهای ثابت و تابعی و متغیرهای v_i طبق دو قانون زیر ساخته می‌شود:

۱. هر متغیر v_i و هر ثابت یک L ترم است.

۲. اگر $t_1, \ldots, t_n$، n تا L ترم باشند و f یک نماد تابعی n موضعی باشد $ft_1 \ldots t_n$ یک L ترم است.

مثال ۱۴. زبان $L = \{f, c, R\}$ را در نظر بگیرید که در آن f یک نماد تابعی دو موضعی، c یک نماد ثابت و R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی است. در این صورت عبارات زیر L ترم هستند:

$$c, v_۱, v_۰, v_{۱۵}, fc, v_۱, fv_۲, v_۳, ffc, v_۱v_۱۰.$$

مثال ۱۵. زبان $L = \{+, ۱\}$ را در نظر بگیرید. چند L ترم آن به عنوان نمونه به صورت زیر است:

$$v_۱, v_۲, ۱, +۱v_۱, +۱۱, ++۱v_۱v_۱ + ۱۱, ++++v_۱v_۱v_۱ + v_۲v_۲ + ۱۱$$

تمرین ۲. زبان مرتب اول $L = \{+, \cdot, ۰, ۱, <\}$ را در نظر بگیرید. L ترم‌های این زبان به چه صورت است.

تعریف ۱۶. فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد و t یک L ترم باشد. همچنین فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک L ساختار باشد و $b_۰, b_۱, b_۲, \ldots \in M$. در این صورت تعبیر ترم t در ساختار $\mathfrak{M}$ وقتی b_i به جای v_i ها قرار می‌گیرد به صورت طبیعی تعریف می‌شود و با نماد $t^{\mathfrak{M}}[b_۱, b_۲ \ldots]$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۱۷. زبان مرتبه اول $L = \{s, *\}$ را در نظر بگیرید که در آن s یک تابع تک موضعی و $*$ یک تابع دو موضعی باشد. فرض کنید $\mathfrak{M}_۱ = (\mathbb{Z}, \text{تالی}, +)$ و $\mathfrak{M}_۲ = (\mathbb{R}, \exp(x), \cdot)$ دو L ساختار باشند. همچنین فرض کنید $t = *sv_۰v_۱$ یک L ترم باشد در این صورت داریم:

$$t^{\mathfrak{M}_۱} = (v_۰ + ۱) + v_۲ \Rightarrow t^{\mathfrak{M}_۱}[b_۱, b_۲, \ldots] = (b_۰ + ۱) + b_۱$$

$$t^{\mathfrak{M}_۲} = \exp(v_۰) \cdot v_۱ \Rightarrow t^{\mathfrak{M}_۲}[b_۱, b_۲, \ldots] = \exp(b_۰) \cdot b_۱$$

تعریف ۱۸ (Lفرمول)**.** فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد L فرمول‌ها به صورت استقرایی زیر به دست می‌آید:

۱. اگر $t_۱$ و $t_۲$ دو L ترم باشند. $t_۱ \doteq t_۲$ یک L فرمول است.

۲. اگر $t_۱$ و $t_۲$ دو L ترم و R یک نماد رابطه‌ای دو موضعی باشند $R(t_۱, t_۲)$ یک L ـ فرمول است.

۳. فرض کنید $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ دو فرمول باشند آن‌گاه $(\varphi_۱ \wedge \varphi_۲)$ یک فرمول است.

۴. اگر φ یک فرمول باشد، $(\neg\varphi)$ یک فرمول است.

۵. اگر φ یک فرمول باشد، $\exists x\varphi$ یک فرمول است.

مثال ۱۹. زبان $L = \{+, \cdot, ۰, ۱, <\}$ را در نظر بگیرید که در آن $+$ و $\cdot$ دو نماد تابعی دو موضعی، ۰ و ۱ دو نماد ثابت و $<$ یک نماد رابطه دو موضعی است. چند نمونه L فرمول در زیر نوشته شده است:

$$\neg(\cdot(+(v_۱, v_۲), v_۳) \doteq +(\cdot(۱, ۰), +(v_۵, v_۶)))$$

$$< (+(\cdot(v_۱, v_۱), v_۳), \cdot(+(۱, ۱), v_۴))$$

L فرمول‌های بالا را در ریاضیات روزمره صورت زیر می‌نویسیم:

$$(v_۱ + v_۳) \cdot v_۳ = (۱ \cdot ۰) + (v_۵ + v_۶)$$

$$v_۱^۲ + v_۳ = ۲v_۴$$

توجه ۲۰. توجه کنید که عباراتی مانند جملات زیر، L فرمول مرتبهٔ اول نیستند. تحت سور، نمی‌توان تعلق به مجموعه‌ها را نیز اضافه کرد.

$$\exists n \in \mathbb{N}\,;\ \ x^n + ۴$$

$$\exists r \in \mathbb{R}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ x^n + r = ۰$$

۲.۱ جلسه دوم، فیلترها و فراضرب ساختارها

توجه ۲۱. در یک فرمولِ مرتبهٔ اول، به متغیری که هیچ سوری روی آن اثر نداشته باشد، متغیر آزاد گفته می‌شود و به متغیری که حداقل یک سور روی آن تأثیر گذاشته باشد متغیر پای‌بند می‌گوییم. برای مثال در فرمول زیر:

$$\forall x \quad (R(x,z) \wedge f(x) \doteq y)$$

x متغیر پای‌بند است و y و z متغیر مستقل هستند.

نتیجه ۲۲. وقتی می‌گوییم $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ یک فرمول مرتبه اول است منظور این است که φ یک فرمول مرتبه اول است که متغیرهای آزاد آن در مجموعه $\{x_1,\dots,x_n\}$ واقع شده است.

تعریف ۲۳. به فرمول‌هایی که هیچ متغیر آزادی ندارند جمله گفته می‌شود.

تعریف ۲۴. فرض کنید $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ یک L فرمول باشد و $\mathfrak{M}$ یک L ساختار باشد و $b_1,b_2,\dots$ عناصری در M باشند. در این صورت می‌نویسیم $\mathfrak{M} \models \varphi(b_1,\dots,b_n)$ (یا $\mathfrak{M} \models \varphi[\bar{b}]$) و می‌گوییم فرمول φ در ساختار $\mathfrak{M}$ وقتی به جای $x_1,\dots,x_n$ عناصر $b_1,\dots,b_n$ را قرار دهیم برقرار است (یا $\mathfrak{M}$ مدلی برای φ با جایگذاری $\bar{b}$ است.) هرگاه یکی از موارد زیر رخ بدهد:

- $\varphi = t_1 \doteq t_2$ و $t_1^{\mathfrak{M}}[\bar{b}] = t_2^{\mathfrak{M}}[\bar{b}]$.
- $\varphi = Rt_1,\dots,t_n$ و $t_1^{\mathfrak{M}}[\bar{b}],\dots,t_n^{\mathfrak{M}}[\bar{b}] \in R^{\mathfrak{M}}$.
- $\varphi = \neg\psi$ و $\mathfrak{M} \not\models \psi$.
- $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ و $\mathfrak{M} \models \varphi_1[\bar{b}]$ و $\mathfrak{M} \models \varphi_2[\bar{b}]$.
- اگر $\varphi = \exists x\, \psi$ و عنصری مانند $a \in M$ موجود باشد بطوری که $\mathfrak{M} \models \psi(a,b_1,\dots,b_n)$.

مثال ۲۵. فرض کنید $\mathfrak{M}_1 = (\mathbb{Z},+,|,2)$ و $\mathfrak{M}_2 = (\mathbb{R},\cdot,<,1)$. همچنین در نظر بگیرید $\varphi(z) = \forall x \exists y \quad f(x,y)Rf(z,c)$. در این صورت داریم:

$$\mathfrak{M}_1 \models \varphi(15) \quad \mathfrak{M}_2 \models \varphi(15).$$

تعریف ۲۶. فرض کنید X یک مجموعه دلخواه باشد و $F \subseteq P(X)$ (یعنی F یک مجموعه متشکل از برخی از زیر مجموعه‌های X باشد). ویژگی های زیر را داشته باشد:

۱. به ازای هر $A,B \in F$ داریم $A \cap B \in F$. (F تحت اشتراک متناهی بسته است.)

۲. اگر $A \in F$ و $B \subseteq X$ و $A \subseteq B$ آن‌گاه $B \in F$. (F نسبت به شمول از بالا بسته است.)

۳. $\emptyset \notin F$.

در این صورت می‌گوییم F یک فیلتر روی X است.

تمرین ۳. فرض کنید X یک مجموعه متناهی باشد. نشان دهید F یک فیلتر روی X است.

$$F = \{A \mid A \subseteq X,\ \ X - A : \text{متناهی است}\}$$

به فیلتر فوق فیلتر فرشه گویند.

مثال ۲۷. فرض کنید X یک مجموعه دلخواه باشد و Y یک زیرمجموعه ناتهی از آن باشد در این صورت مجموعه زیر یک فیلتر روی X است.

$$F = \{C \mid \ \ Y \subseteq C\}.$$

تعریف ۲۸. فیلتر F روی مجموعه X را یک فرا فیلتر می‌نامیم هرگاه برای هر $A \subseteq X$ داشته باشیم $A \in F$ یا $X - A \in F$.

لم ۲۹. فرض کنید F یک فیلتر روی X باشد. در این صورت یک فرا فیلتر $F \subseteq F'$ موجود است.

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{A} = \{$همه فیلترهای شامل $F\}$. روی $\mathfrak{A}$ ترتیب شمول را قرار دهید:

$$F_۱ < F_۲ \Leftrightarrow F_۱ \subseteq F_۲.$$

هر زنجیر در $\mathfrak{A}$ با رابطه شمول دارای کران بالا است. بنابراین یک فیلتر ماکزیمال در $\mathfrak{A}$ وجود دارد. □

تمرین ۴. نشان دهید این فیلتر ماکسیمال، فرا فیلتر است.

تعریف ۳۰. فرض کنید I یک مجموعه دلخواه باشدو $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از L ساختارها باشد؛ در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\Pi_{i\in I} M_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i \in M_i\}.$$

تعریف ۳۱. فرض کنید F یک فرا فیلتر روی مجموعه اندیس I باشد. روی $\Pi_{i\in I} M_i$ یک رابطه هم‌ارزی به صورت زیر تعریف کنید:

$$(a_i)_{i\in I} \sim (b_i)_{i\in I} \Leftrightarrow \{i \mid a_i = b_i\} \in F.$$

دقت کنید که در واقع زمانی $(a_i)_{i\in I} \sim (b_i)_{i\in I}$ که $(a_i)_{i\in I}$ و $(b_i)_{i\in I}$ **تقریبا همه‌جا** با هم برابر باشند.

تعریف ۳۲. تعریف کنید $\mathbb{M} = \{[(a_i)_{i\in I}] \mid (a_i)_{i\in I} \in \Pi_{i\in I} M_i\}$. $\mathbb{M}$ با نماد $\frac{\Pi_{i\in I} M_i}{F}$ نمایش داده می‌شود و به آن یک فراضرب از ساختارهای M_i گفته می‌شود.

حال می‌خواهیم $\mathbb{M}$ را به یک L ساختار تبدیل کنیم.

- فرض کنید $c \in L$ یک ثابت باشد. واضح است که $(c_i^{\mathfrak{M}})_{i\in I} \in \Pi\mathfrak{M}_i$. تعریف کنید $c^{\mathbb{M}} = [(c^{\mathfrak{M}_i})_{i\in I}]$.
- فرض کنید $f \in L$ یک تابع دو موضعی باشد. برای هر $i \in I$ فرض کنید

$$f_i^{\mathfrak{M}} : M_i^۲ \longrightarrow M_i$$

تعبیر نماد تابعی f در ساختارِ $\mathfrak{M}_i$ باشد. فرض کنید $[(a_i)_{i\in I}]$ و $[(b_i)_{i\in I}]$ در $\mathbb{M}$ باشند در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$f^{\mathbb{M}}([(a_i)_{i\in I}], [(b_i)_{i\in I}]) = [(f^{\mathfrak{M}_i}(a_i, b_i))].$$

- همچنین برای هر نماد رابطه‌ای R تعریف می‌کنیم: $R^{\mathbb{M}}((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}) \iff \{i \mid R^{\mathfrak{M}_i}(a_i, b_i)\} \in F$.

قضیه ۳۳ (قضیه اساسی فرا ضرب‌ها(قضیه واش)). فرض کنید $\varphi(x, y)$ یک فرمول در زبان L باشد. در این صورت:

$$\frac{\Pi_{i\in I} M_i}{F} \models \varphi((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}) \iff \{i \in I \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi(a_i, b_i)\} \in F$$

تمرین ۵. نشان دهید که هر فرا فیلتر دلخواه غیر اصلی روی مجموعه نامتناهی X شامل فیلتر فرشه است.

۳.۱ جلسه سوم، قضیهٔ فشردگی

تعریف ۳۴. منظور از یک L تئوری یک مجموعه دلخواه از **جملات** (یعنی فرمول‌های بدون متغیر آزاد) در زبان L است.

مثال ۳۵. در زبان $L_{AbG} = \{+, -, ۰\}$ تئوری گروه‌ها که آن را با AbG نمایش می‌دهیم مجموعهٔ متشکل از جملات زیر است.

$$\forall x, y, z \quad (x + y) + z \doteq x + (y + z).$$

$$\forall x \quad x + (-x) \doteq ۰.$$

$$\forall x \quad x + ۰ \doteq x.$$

$$\forall x \quad x + y \doteq y + x.$$

مثال ۳۶. در زبان $L_{Ring} = L_{AbG} \cup \{\cdot\} \cup \{۱\}$ تئوری حلقه‌ها که آن را با Ring نمایش می‌دهیم مجموعهٔ متشکل از اجتماع تئوری AbG با جملات زیر است:

$$\forall x, y, z \quad (x \cdot y) \cdot z \doteq x(y \cdot z).$$

$$\forall x \quad ۱ \cdot x \doteq x.$$

$$\forall x, y \quad x \cdot y \doteq y \cdot x.$$

$$\forall x, y, z \quad x \cdot (y + z) \doteq x \cdot y + x \cdot z.$$

مثال ۳۷. در زبان $L_{Field} = L_{AbG} \cup \{\cdot\} \cup \{۱\}$ تئوری میدان‌ها که آن را با Field نمایش می‌دهیم مجموعه‌ای متشکل از اجتماع تئوری Ring با جملات زیر است:

$$۱ \not\doteq ۰.$$

$$\forall x \quad (\neg x \doteq ۰ \longrightarrow \exists y \quad x \cdot y \doteq ۱).$$

مثال ۳۸. تئوری میدان‌های با مشخصه p مجموعه‌ای به صورت زیر است:

$$\text{Field} \cup \{\underbrace{۱ + ۱ + ۱ \cdots + ۱}_{p} = ۰\}$$

مثال ۳۹. تئوری میدان‌ها با مشخصه صفر به صورت زیر است:

$$\text{Field} \cup \{\neg\ ۱ \doteq ۰, \neg\ ۱ + ۱ \doteq ۰, \neg\ ۱ + ۱ + ۱ \doteq ۰, \neg\ ۱ + ۱ + ۱ + ۱ \doteq ۰, \ldots\}$$

دقت کنید که تئوری فوق از نامتناهی جمله تشکیل شده است.

تعریف ۴۰. فرض کنید T یک L تئوری باشد و $\mathfrak{M}$ یک L ساختار باشد. می‌گوییم $\mathfrak{M} \models T$ هرگاه برای هر جمله $\varphi \in T$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \varphi$.

مثال ۴۱. $(\mathbb{Z}, +, -, ۰) \models \text{AbG}$

مثال ۴۲. $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, ۰, ۱) \models \text{Field}$

تعریف ۴۳. تئوری T را سازگار می‌نامیم هرگاه T حداقل یک مدل داشته باشد.

مثلاً تئوری $\{\neg\varphi, \varphi\}$ ناسازگار است.

لم ۴۴. فرض کنید F یک مجموعه دارای ویژگی اشتراک متناهی باشد؛ یعنی برای هر تعداد متناهی $A_۱, \ldots, A_n \in F$ داشته باشیم $A_۱ \cap A_۱ \cap \cdots A_n \neq \emptyset$. در این صورت F با افزودن مجموعه‌هایی به آن، قابل تبدیل به یک فیلتر است.

اثبات. نخست همهٔ اشتراک‌های متناهی مجموعه‌های موجود در F را به آن اضافه کنید. سپس برای هر مجموعه، همهٔ مجموعه‌های شامل آن را اضافه کنید. □

قضیه ۴۵ (قضیه فشردگی)**.** فرض کنید T یک L تئوری باشد. فرض کنید هر بخش متناهی $\Delta \subseteq T$ دارای یک مدل $\mathfrak{M}_\Delta$ باشد. در این صورت T مدل دارد.

اثبات. قرار دهید $I = \{\Delta \mid \Delta \subseteq T, \text{متناهی است } \Delta\}$. برای هر جمله $\varphi \in T$ قرار دهید $X_\varphi = \{\Delta \in I \mid \varphi \in \Delta\}$. حال هدف تعریف یک فیلتر روی I است. ابتدا قرار دهید $F_۱ = \{X_\varphi \mid \varphi \in T\}$. بوضوح $F_۱$ یک فیلتر روی I نیست زیرا تحت اشتراک متناهی بسته نیست.

اما دقت کنید که اگر $\varphi_۱, \varphi_۲ \in T$ آن‌گاه خواهیم داشت $X_{\varphi_۱} \cap X_{\varphi_۲} \neq \emptyset$ زیرا بوضوح $\{\varphi_۱, \varphi_۲\} \in X_{\varphi_۱} \cap X_{\varphi_۲}$. مجموعه $X_{\varphi_۱} \cap X_{\varphi_۲} \cap \cdots \cap X_{\varphi_n}$ را با $X_{\varphi_۱\varphi_۲\ldots\varphi_n}$ نمایش می‌دهیم. حال قرار دهید

$$F_۲ = \{X_{\varphi_۱} \cap \cdots \cap X_{\varphi_n} \mid \varphi_۱, \varphi_۲, \ldots, \varphi_n \in T \ , \ n \in \mathbb{N}\}.$$

توجه کنید $F_۲$ یک مجموعه بسته تحت اشتراک متناهی است اما نسبت به شمول از بالا بسته نیست لذا هنوز نمی تواند یک فیلتر روی I باشد. برای تبدیل آن به یک فیلتر قرار دهید

$$F = \{D \subseteq T \mid \exists X_{\varphi_۱ \dots \varphi_n} \quad X_{\varphi_۱ \dots \varphi_n} \subseteq D\}.$$

F یک فیلتر روی I است. از لم ۲۹ نتیجه می‌گیریم فرا فیلتر F' روی I وجود دارد به طوری که $F \subseteq F'$. ادعا می‌کنیم:

$$\frac{\Pi_{\Delta \in I} M_\Delta}{F'} \models T.$$

فرض کنید $\varphi \in T$. بنا به قضیه واش زمانی $\frac{\Pi_{\Delta \in I} M_\Delta}{F'} \models \varphi$ که داشته باشیم $\{\varphi \mid \mathfrak{M}_\Delta \models \varphi\} \in F'$. اما برای یک جمله داده شده φ می‌دانیم $X_\varphi \in F$ و داریم:

$$X_\varphi = \{\Delta \mid \varphi \in \Delta\} \subseteq \{\Delta \mid \mathfrak{M}_\Delta \models \varphi\}$$

بنابراین $\{\Delta \mid \mathfrak{M}_\Delta \models \varphi\} \in F'$. □

تعریف ۴۶. فرض کنید T یک L تئوری و φ یک L جمله باشد. می‌گوییم جمله φ در تئوری T اثبات می‌شود و می‌نویسیم $T \vdash \varphi$ هرگاه برای هر $\mathfrak{M} \models T$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \varphi$.

مثال ۴۷. وارون هر عنصر یکتاست $T_{group} \vdash$.

توجه ۴۸.

۱. توجه کنید $T \nvdash \varphi$ یعنی حداقل یک مدلِ $\mathfrak{M} \models T$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{M} \models \neg\varphi$. به بیان دیگر $T \nvdash \varphi$ اگر و تنهااگر تئوری $T \cup \{\neg\varphi\}$ سازگار باشد.

۲. این گونه نیست که برای یک جمله φ حتما $T \vdash \varphi$ یا $T \vdash \neg\varphi$، امکان دارد که $T \nvdash \varphi$ و $T \nvdash \neg\varphi$.

به عنوان مثال، در نظریهٔ مجموعه‌ها اثبات می‌شود که فرضیه پیوستار از اصول موضوعه ZFC مستقل است یعنی $\mathrm{ZFC} \nvdash Cont$ و $\mathrm{ZFC} \nvdash \neg Cont$.

نتیجه ۴۹. $T \vdash \varphi$ اگر و تنهااگر مجموعهٔ **متناهی** $\Delta \subseteq T$ وجود داشته باشد به طوری که $\Delta \vdash \varphi$.

اثبات. ابتدا فرض کنید $T \vdash \varphi$. به برهان خلف، فرض کنید برای هر مجموعهٔ متناهی $\Delta \subseteq T$ داشته باشیم $\Delta \nvdash \varphi$. در این صورت برای هر مجموعهٔ متناهی $\Delta \subseteq T$ داریم $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ دارای مدل است. بنا به قضیه فشردگی $T \cup \{\neg\varphi\}$ داری مدل است. یعنی مدلی برای T وجود دارد که در آن $\neg\varphi$ درست است پس $T \nvdash \varphi$ که تناقض است.

برعکس فرض کنید Δ یک زیرمجموعهٔ متناهی از T باشد به طوری که $\Delta \models \varphi$. اگر $M \models T$ آن گاه واضح است که $M \models \Delta$، بنابراین $M \models \varphi$. □

قضیه ۵۰ (لونهایم–اسکولم). فرض کنید L یک زبان شمارا باشد و T یک L تئوری باشد که دارای مدل‌های متناهی به اندازه کافی بزرگ است. در این صورت برای هر کاردینال κ، T دارای مدلی به اندازه κ است.

اثبات. زبان $L' = L \cup \{c_\alpha\}_{\alpha<k}$ را در نظر بگیرید که در آن به اندازه κ تا ثابت جدید به زبان L اضافه شده است. حال در زبان L' تئوری T' را به صورت $T' = T \cup \{c_\alpha \neq c_{\alpha'}\}_{\alpha,\alpha' \in R}$ در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم T' دارای مدل است.

بنا به قضیهٔ فشردگی، کافی است نشان دهیم هر بخش متناهی از T' دارای مدل است. فرض کنید $\Delta \subseteq T'$ متناهی باشد و $\Delta = \Delta' \cup \{\underbrace{c_۱ \neq c_۲, c_۲ \neq c_۳, c_۱ \neq c_۳, \dots}_{n\text{تا چیز مخالف هم}}\}$. فرض کنید $\mathfrak{M}$ مدلی برای T با اندازه بیشتر n باشد. در این صورت $\mathfrak{M} \models \Delta'$ زیرا $\Delta' \subseteq T$ و ثوابت c_i را که در Δ استفاده می‌شوند به n عنصر متفاوت و بقیه را هم یکسان تعبیر کنید. در این صورت $\mathfrak{M}$ تبدیل به یک L' ساختار می‌شود که مدل Δ است.

بنابراین T' داری مدل است. هر مدل T' یک مدل برای T با اندازه حداقل κ است. □

تمرین ۶. فرض کنید T یک تئوری در زبان L_{ring} باشد به طوری که $\text{Field} \subseteq T$. اگر T مدل‌هایی با مشخصه متناهی به اندازه کافی بزرگ داشته باشد آن‌گاه T مدلی با مشخصه صفر دارد.

تمرین ۷. فرض کنید $c \notin L$ و $L' = L \cup \{c\}$. فرض کنید T یک تئوری در زبان L باشد. اگر $T \overset{L'}{\vdash} \varphi(c)$ در این صورت $T \overset{L}{\vdash} \forall x\, \varphi(x)$.

۴.۱ جلسه چهارم، کاربردهای مقدماتی فشردگی در جداسازی تئوری‌ها

لم ۵۱. فرض کنید T_1 و T_2 دو L تئوری باشند و H یک مجموعه از L جملات (یعنی فرمول‌های بدون متغیر آزاد) باشد که تحت $\vee$ و $\wedge$ بسته است. موارد زیر با هم معادل هستند:

۱. یک جمله $\varphi \in H$ موجود است به طوری که $T_1 \vdash \varphi$ و $T_2 \vdash \neg\varphi$.

۲. برای هر مدل $\mathfrak{M}_1 \models T_1$ و هر مدل $\mathfrak{M}_2 \models T_2$ یک جملهٔ $\varphi \in H$ (وابسته به این دو مدل) موجود است به طوری که $\mathfrak{M}_1 \models \varphi$ و $\mathfrak{M}_2 \models \neg\varphi$.

اثبات. ۱ $\Leftarrow$ ۲. اثبات طبق تعریف واضح است. زیرا طبق فرض می‌دانیم به ازای هر $\mathfrak{M}_1 \models T_1$ و $\mathfrak{M}_2 \models T_2$ داریم $\mathfrak{M}_1 \models \varphi$ و $\mathfrak{M}_2 \models \neg\varphi$.

۱ $\Rightarrow$ ۲. فرض کنید $\mathfrak{M}_1$ مدلی برای T_1 باشد. قرار دهید $Th_H(\mathfrak{M}_1) = \{\varphi \in H \mid \mathfrak{M}_1 \models \varphi\}$. در واقع $Th_H(\mathfrak{M}_1)$ حاوی حقایقی در مورد $\mathfrak{M}_1$ است که با جملاتی از نوع جملات موجود در H قابل نوشتن هستند. در مورد $T_2 \cup Th_H(\mathfrak{M}_1)$ چه نظری دارید؟ اگر $\mathfrak{M}_1 \models T_1$ آن‌گاه، بنا به فرض ۲، مدلی برای T_2 وجود ندارد که در آن همه جملاتی که در $\mathfrak{M}_1$ برقرارند، برقرار باشد. در واقع کمی دقت، در می‌یابیم که فرض ۲ اساساً بیان گر این است که T_2 با $Th_H(\mathfrak{M}_1)$ ناسازگار است. از این رو، بنا به قضیهٔ فشردگی، جملات $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ در $Th_H(\mathfrak{M}_1)$ وجود دارند به طوری که $T_2 \vdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_N)$ بنابراین، از آنجا که H تحت $\wedge$ بسته است، جمله $\varphi_{\mathfrak{M}_1} = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_N$ به گونه است که $T_2 \vdash \neg\varphi_{\mathfrak{M}_1}$. پس تا این جا اثبات کردیم که برای هر $\mathfrak{M}_1 \models T_1$ یک جمله $\varphi_{\mathfrak{M}_1}$ موجود است به طوری که $T_2 \cup \{\varphi_{\mathfrak{M}_1}\}$ ناسازگار است ($T_2 \vdash \neg\varphi_{\mathfrak{M}_1}$).

حال تئوری روبرو را در نظر بگیرید: $T_1 \cup \{\neg\varphi_{\mathfrak{M}_1} \mid \mathfrak{M}_1 \models T_1\}$. این تئوری مدل ندارد چون در هر ساختاری مانند $\mathfrak{M}_1$ که مدل T_1 است، جملهٔ $\varphi_{\mathfrak{M}_1}$ درست است. بنابراین $\varphi_{\mathfrak{M}_{11}}, \ldots, \varphi_{\mathfrak{M}_{1k}}$ موجودند به طوری که

$$T_1 \vdash \neg(\neg\varphi_{\mathfrak{M}_{11}} \wedge \cdots \wedge \neg\varphi_{\mathfrak{M}_{1k}}) \Longrightarrow T_1 \vdash \varphi_{\mathfrak{M}_{11}} \vee \cdots \vee \varphi_{\mathfrak{M}_{1k}}.$$

حال فرض کنیم $\varphi := \varphi_{\mathfrak{M}_{11}} \vee \ldots, \vee\varphi_{\mathfrak{M}_{1k}}$. بنابراین $T_2 \vdash \neg\varphi$ و $T_1 \vdash \varphi$. □

نمادگذاری ۵۲. فرض کنید Δ یک مجموعه از فرمول‌ها (شامل احتمالاً جملات) باشد و $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ دو L ساختار باشند.

۱. $\mathfrak{M}_1 \overset{\Delta}{\Longrightarrow} \mathfrak{M}_2$ یعنی برای هر **جمله** (و نه فرمول) $\varphi \in \Delta$ اگر $\mathfrak{M}_1 \models \varphi$ آن‌گاه $\mathfrak{M}_2 \models \varphi$. در برخی نوشتارها، از نماد زیر برای بیان همین حقیقت استفاده می‌شود:

$$Th_\Delta(\mathfrak{M}_1) \subseteq Th_\Delta(\mathfrak{M}_2).$$

۲. $\mathfrak{M}_1 \underset{\Delta}{\xrightarrow{f}} \mathfrak{M}_2$ یعنی f تابعی از M_1 به M_2 است و برای هر $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$ و هر $a_1, \ldots, a_n \in M_1$ داریم اگر $\mathfrak{M}_1 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ آن‌گاه $\mathfrak{M}_2 \models \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_n))$.

لم ۵۳. فرض کنید Δ یک مجموعه از فرمول‌ها باشد که تحت $\wedge, \exists$ بسته است. هم‌چنین فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک L ساختار و T یک L تئوری باشد. در این صورت موارد زیر معادل هستند:

۱. برای هر جمله $\varphi \in \Delta$ اگر $\mathfrak{M} \models \varphi$ آنگاه T مدلی مانند $\mathfrak{N}$ دارد به طوری که $\mathfrak{N} \models \varphi$. به بیان دیگر اگر $\mathfrak{M} \models \varphi$ آن‌گاه $T \cup \{\varphi\}$ سازگار است. باز به بیان دیگر، اگر $\mathfrak{M} \models \varphi$ آن گاه $T \nvdash \neg\varphi$.

۲. یک مدل $\mathfrak{N}_2 \models T$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{M} \underset{\Delta}{\xrightarrow{f}} \mathfrak{N}_2$.

اثبات. ۱ $\Leftarrow$ ۲. زبان $L_{\mathfrak{M}} = L \cup \{c_m \mid m \in M\}$ را در نظر بگیرید. حال تعریف کنید:

$$T^* = T \cup \{\varphi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) \mid a_1, \dots, a_n \in M \ , \ \mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \ , \ \ \varphi \in \Delta\}.$$

ادعا می‌کنیم T^* دارای مدل است. کافی است نشان دهیم هر بخش متناهی T^* دارای مدل است. یک بخش متناهی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$T \cup \{\varphi_1(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}), \dots, \varphi_k(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})\}$$

با توجه به این که Δ تحت $\wedge$ بسته است، می‌نویسیم:

$$T \cup \{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})\}$$

و یا راحت تر:

$$T \cup \{\varphi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})\}$$

که $\varphi \in \Delta$. در این صورت $\mathfrak{M} \models \exists y_1, \dots, y_n \quad \varphi(y_1, \dots, y_n)$، زیرا $\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$. پس یک مدل $\mathfrak{N} \models T$ وجود دارد که $\mathfrak{N} \models \exists\, y_1, \dots, y_n\ \varphi(y_1, \dots, y_n)$. قرار دهید $c_{a_i}^{\mathfrak{N}} = y_i$. بنابراین یک مدل، برای این بخش متناهی پیدا شد.

بنا به قضیهٔ فشردگی، T^* دارای مدل است. فرض کنید $\mathfrak{N}_2 \models T^*$. در این صورت $\mathfrak{N}_2$ در شرط ۲ صدق می‌کند.

۱ $\Rightarrow$ ۲. از نماد گذاری قبل به راحتی نتیجه می‌شود. □

تعریف ۵۴. دو ساختار $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ را هم ارز مقدماتی گوییم هرگاه برای هر جمله φ داشته باشیم:

$$\mathfrak{N} \models \varphi \iff \mathfrak{M} \models \varphi$$

در این صورت می‌نویسیم: $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.

نتیجه ۵۵. فرض کنید $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو L ساختار باشند و Δ یک مجموعه از فرمول‌ها باشد که تحت $\exists, \wedge$ بسته است. در این صورت موارد زیر با هم معادلند:

۱. جمله‌های Δ که $\mathfrak{M}$ درست هستند در $\mathfrak{N}$ درست هستند: $\mathfrak{M} \overset{\Delta}{\Longrightarrow} \mathfrak{N}$.

۲. ساختار $\mathfrak{N}'$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}'$ و $\mathfrak{M} \underset{f}{\overset{\Delta}{\longrightarrow}} \mathfrak{N}'$.

اثبات. از لمِ ۵۳ استفاده می‌کنیم و در آن قرار می‌دهیم $T = Th(\mathfrak{N})$. □

یک حالت خاص از نتیجه بالا دو نتیجهٔ زیر است (با توجه به تمرین‌ها)

نتیجه ۵۶. نشان دهید که $\mathfrak{M} \underset{f}{\overset{\exists}{\longrightarrow}} \mathfrak{N}$ معادل است با این که $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

نتیجه ۵۷. فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو ساختار باشند به طوری که $\mathfrak{M} \overset{\exists}{\Longrightarrow} \mathfrak{N}$. در این صورت ساختار $\mathfrak{N}'$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}'$ و $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$.

تمرین ۸. نشان دهید که $\mathfrak{M} \underset{f}{\overset{\exists\forall}{\longrightarrow}} \mathfrak{N}$ معادل است با $\mathfrak{M} \underset{f}{\overset{\forall}{\longrightarrow}} \mathfrak{N}$

نتیجه ۵۸. فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو ساختار باشند به طوری که $\mathfrak{M} \overset{\exists\forall}{\Longrightarrow} \mathfrak{N}$. در این صورت ساختار $\mathfrak{N}'$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}'$ و $\mathfrak{M} \underset{f}{\overset{\forall}{\longrightarrow}} \mathfrak{N}'$.

تعریف ۵۹. فرض کنید L یک زبان مرتبه اول باشد و $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو L ساختار باشند و $\mathfrak{M} = (M, f^{\mathfrak{M}}, R^{\mathfrak{M}}, c^{\mathfrak{M}})$ و $\mathfrak{N} = (N, f^{\mathfrak{N}}, R^{\mathfrak{N}}, c^{\mathfrak{N}})$ می‌گوییم $\mathfrak{M}$ یک زیرساختار از $\mathfrak{N}$ است و می‌نویسیم $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$، هرگاه:

$$M \subset N \ , \ f^{\mathfrak{M}} = f^{\mathfrak{N}} \mid_M \ , \ c^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{N}} \ , \ R^{\mathfrak{M}} = R^{\mathfrak{N}} \mid_M .$$

مثال ۶۰. $(\mathbb{Z},+,\cdot) \subset (\mathbb{R},+,\cdot)$.

قضیه ۶۱. فرض کنید L_1 و L_2 دو تئوری باشند. موارد زیر باهم معادل هستند.

۱. یک جمله عمومی φ وجود دارد به طوری که $T_1 \vdash \varphi$ و $T_2 \vdash \neg\varphi$.

۲. اگر $\mathfrak{M}_2 \models T_2$ و $\mathfrak{M}_1 \models T_1$ آن‌گاه $\mathfrak{M}_2 \nsubseteq \mathfrak{M}_1$.

اثبات. ۱ $\Leftarrow$ ۲. فرض کنید φ یک جملهٔ عمومی باشد به طوری که $T_1 \vdash \varphi$ و $T_2 \vdash \neg\varphi$. حال دقت کنید که به طور کلی اگر $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$ دو ساختار باشند، برای هر جملهٔ عمومیِ ψ داریم

$$\mathfrak{M}_1 \models \psi \Rightarrow \mathfrak{M}_2 \models \psi.$$

پس هیچ مدل T_2 نمی‌تواند زیرساختار یک مدل از T_1 باشد.
۱ $\Rightarrow$ ۲. فرض کنید هیچ جمله عمومی φ وجود نداشته باشد که $T_1 \vdash \varphi$ و $T_2 \vdash \neg\varphi$. بنا به قضیهٔ ۵۱ در این صورت دو مدل $\mathfrak{M}_1 \models T_1$ و $\mathfrak{M}_2 \models T_2$ وجود دارند که توسط جملات عمومی نمی‌توانند از هم جدا شوند. یعنی مدل $\mathfrak{M}_1 \models T_1$ و $\mathfrak{M}_2 \models T_2$ وجود دارند به طوری که $\mathfrak{M}_1 \overset{\forall}{\Longrightarrow} \mathfrak{M}_2$؛ و این یعنی $\mathfrak{M}_2 \overset{\exists}{\Longrightarrow} \mathfrak{M}_1$. بنابراین، بنا به نتیجهٔ ۵۷ یک ساختار $\mathfrak{M}_1' \equiv \mathfrak{M}_1$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{M}_2 \xrightarrow[f]{\exists} \mathfrak{M}_1'$. یعنی $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1'$. □

تعریف ۶۲. فرض کنید T یک تئوری و $\varphi(\overline{x})$ و $\psi(\overline{x})$ دو فرمول باشند. می گوییم φ و ψ تحت T با هم معادلند هرگاه

$$T \vdash \forall\overline{x}\ \ (\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x})).$$

قضیه ۶۳. فرض کنید T یک تئوری باشد و $\varphi(\overline{x})$ یک فرمول باشد. موارد زیر با هم معادل هستند:

۱. یک فرمول عمومی ψ وجود دارد که $T \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

۲. اگر $\mathfrak{N} \models T$ و $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ و $a_1,\ldots,a_n \in M$ آن‌گاه اگر $\mathfrak{N} \models \varphi(a_1,\ldots,a_n)$ داریم $\mathfrak{M} \models \varphi(a_1,\ldots,a_n)$. یعنی φ تحت زیر ساختارها حفظ می‌شود.

اثبات. ۱ $\Rightarrow$ ۲. ثوابت $c_1,\ldots,c_n$ را به زبان اضافه کنید. قرار دهید

$$T_1 = T \cup \{\varphi(c_1,\ldots,c_n)\}\ \ ,\ \ T_2 = T \cup \{\neg\varphi(c_1,\ldots,c_n)\}.$$

مورد ۲ در واقع بیانگر این است که هیچ مدل T_2 زیرساختار هیچ مدل از T_1 نیست. پس بنا به قضیهٔ ۶۱ یک جمله عمومی T_1 را از T_2 جدا می کند. یعنی یک جمله عمومی $\psi(c_1,\ldots,c_n)$ وجود دارد که

$$T \cup \{\varphi(\overline{c})\} \vdash \psi(\overline{c}) \quad , \quad T \cup \{\neg\varphi(\overline{c})\} \vdash \neg\psi(\overline{c}).$$

پس داریم

$$T \vdash \varphi(\overline{c}) \to \psi(\overline{c}) \quad , \quad T \vdash \neg\varphi(\overline{c}) \to \neg\psi(\overline{c}).$$

یعنی $T \vdash \varphi(\overline{c}) \leftrightarrow \psi(\overline{c})$. □

قضیه ۶۴. موارد زیر با هم معادل هستند:

۱. تئوری T دارای یک اصل بندی عمومی است. یعنی تئوری T با یک تئوری T' که همه جملات آن عمومی هستند معادل است.

۲. اگر $\mathfrak{N} \models T$ و $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ آن‌گاه $\mathfrak{M} \models T$.

اثبات. ۱ $\Rightarrow$ ۲. قرار دهید $T_\forall = \{\varphi \mid \varphi$عمومی است $,\ T \vdash \varphi\}$. ادعا می‌کنیم که اگر ۲ برقرار باشد T و $T_\forall$ مدل‌های یکسانی دارند.

برای این منظور کافی است نشان دهیم که اگر ۲ برقرار باشد و ψ جمله‌ای در T باشد، در این صورت $T_\forall \vdash \psi$.

برای این منظور نیز کافی است نشان دهیم که اگر ۲ برقرار باشد و ψ جمله‌ای در T باشد یک جمله عمومی χ هست که

$$\chi \vdash \psi \ , \quad T \vdash \chi$$

یعنی

$$\neg\psi \vdash \neg\chi \ , \quad T \vdash \chi$$

یعنی T را از $\{\neg\psi\}$ یک جمله عمومی جدا می‌کند.

اما ۲ می‌گوید که هیچ مدل $\neg\psi$ زیر ساختار هیچ مدل T نیست. زیرا $\psi \in T$ و ψ در زیرساختارهای مدل های T برقرار است. و این همان طور که می‌خواستیم یعنی هیچ جملهٔ عمومی T را از نقیض ψ جدا نمی‌کند. □

نتیجه ۶۵. $\mathfrak{M} \models T_\forall$ اگر و تنها اگر مدل $\mathfrak{N} \models T$ وجود داشته باشد به طوری که $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \models T$.

اثبات. در خلال اثبات قضیهٔ قبل، این نتیجه نیز اثبات شد. □

سوال ۱. چه زمانی T داری اصل بندی $\forall\exists$ است؟

۵.۱ جلسه پنجم، اصل‌بندیِ عمومی ـ وجودی، و حذف سور

تعریف ۶۶. فرض کنید $\mathfrak{M}_1$ و $\mathfrak{M}_2$ دو L ساختار باشند. گوییم $\mathfrak{M}_1$ یک زیرساختار مقدماتی $\mathfrak{M}_2$ است و می‌نویسیم $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_2$ هرگاه برای هر فرمول دلخواه $\varphi(\overline{x})$ و هر $\overline{a} \in M_1$ داشته باشیم $\mathfrak{M}_1 \models \varphi(\overline{a}) \iff \mathfrak{M}_2 \models \varphi(\overline{a})$.

تمرین ۹. فرض کنید $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$. در این صورت برای هر فرمول بدون سور $\varphi(\overline{x})$ و هر $\overline{a} \in M$ داریم

$$\mathfrak{M}_1 \models \varphi(\overline{a}) \iff \mathfrak{M}_2 \models \varphi(\overline{a}).$$

لم ۶۷. فرض کنید φ یک جمله به صورت $\forall\exists$ باشد. همچنین فرض کنید $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \ldots$ زنجیری از L ساختارها باشد به طوری که داریم $\mathfrak{M} \models \varphi$ برای هر i. در این صورت $\bigcup \mathfrak{M}_i \models \varphi$.

اثبات. فرض کنید $\varphi = \forall x \exists y \psi(x,y)$ و $\bigcup \mathfrak{M}_i \models \varphi$. یک a دلخواه در $\bigcup \mathfrak{M}_i$ در نظر بگیرید. فرض کنید $a \in \mathfrak{M}_i$. پس $b \in \mathfrak{M}_i$ وجود دارد که $\mathfrak{M}_i \models \psi(a,b)$. در نتیجه $\bigcup \mathfrak{M}_i \models \psi(a,b)$. □

تمرین ۱۰. ساختار $\bigcup \mathfrak{M}_i$ را شناسایی کنید.

قضیه ۶۸. فرض کنید T_1 و T_2 دو L تئوری باشند. موارد زیر باهم معادلند:

۱. یک جملهٔ $\forall\exists$ وجود دارد به طوری که $T_1 \vdash \varphi$ و $T_2 \vdash \neg\varphi$.

۲. اگر $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \ldots$ یک زنجیر از مدل‌های T_1 باشد، آن‌گاه $\bigcup \mathfrak{M}_i \not\models T_2$.

اثبات. ۱ $\Rightarrow$ ۲. نقیض ۱ به نقیض ۲ را ثابت می‌کنیم. فرض کنید هیچ جملهٔ $\forall\exists$ تئوری T_1 را از تئوری T_2 جدا نکند. در این صورت یک مدل $\mathfrak{M}_1 \models T_1$ و یک مدل $\mathfrak{M}_2 \models T_2$ وجود دارند به طوری که $\mathfrak{M}_1 \overset{\forall\exists}{\Longrightarrow} \mathfrak{M}_2$. بنابراین $\mathfrak{M}_2 \overset{\exists\forall}{\Longrightarrow} \mathfrak{M}_1$. بنا به نتیجهٔ ۵۸ $\mathfrak{M}'_1 \equiv \mathfrak{M}_1$ موجود است به طوری که $\mathfrak{M}_2 \xrightarrow{\forall} \mathfrak{M}'_1$.

اما از این نتیجه می‌گیریم $\mathfrak{M}'_1 \underset{L_{\mathfrak{M}_2}}{\overset{\exists}{\Longrightarrow}} \mathfrak{M}_2$. بنابراین بنا به نتیجهٔ ۵۷ $\mathfrak{M}_3$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{M}_2 \overset{L_{\mathfrak{M}_2}}{\equiv} \mathfrak{M}_3$ یعنی $\mathfrak{M}_2 \prec \mathfrak{M}_3$ و $\mathfrak{M}'_1 \subset_{L_{\mathfrak{M}_2}} \mathfrak{M}_3$. دقت کنید که مدل $\mathfrak{M}_1$ را تنها به صورت کمکی استفاده کرده‌ایم (آن را وارد زنجیر نکرده‌ایم) و با استفاده از آن

و $\mathfrak{M}_2$ دو مدل $\mathfrak{M}'_1$ و $\mathfrak{M}_3$ را ایجاد کرده‌ایم. دوباره همین روند را برای دو مدل $\mathfrak{M}_1 \models T_1$ و $\mathfrak{M}_3 \models T_2$ تکرار کنید و زنجیر زیر را بسازید:

$$\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}'_1 \subset \mathfrak{M}_3 \subset \mathfrak{M}'_2 \subset \cdots .$$

دقت کنید $\bigcup \mathfrak{M}_i = \bigcup \mathfrak{M}'_i$ که $\mathfrak{M}_i$ ها یک زنجیر مقدماتی از مدل‌های T_2 و $\mathfrak{M}'_i$ یک زنجیر (عادی، و نه لزوماً مقدماتی) از مدل‌های T_1 هستند.

□

تمرین ۱۱. پاسخ این تمرین در اثبات بالا آمده است: فرض کنید $\mathfrak{M} \xrightarrow{\forall} \mathfrak{N}$. نشان دهید که یک توسیع مقدماتیِ $\mathfrak{M}'$ از $\mathfrak{M}$ موجود است به طوری که $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}'$.

قضیه ۶۹. موارد زیر باهم معادل هستند:

۱. فرمول φ از نظر تئوری T با یک فرمول $\forall\exists$ معادل است.

۲. اگر $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \cdots$ زنجیری از مدل‌های T باشد که در تک تک آنها φ برقرار است، آن‌گاه اگر $\bigcup \mathfrak{M}_i \models T$ خواهیم داشت $\bigcup \mathfrak{M}_i \models \varphi$.

اثبات. ۱ $\Rightarrow$ ۲. فرض کنید ۲ برقرار باشد. باید نشان دهیم که یک فرمول $\forall\exists$ وجود دارد به طوری که $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ و $T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$. اما این درست است، زیرا اجتماع یک زنجیر از مدل‌های $T \cup \{\varphi\}$ مدل $T \cup \{\neg\varphi\}$ نیست. □

نتیجه ۷۰. تئوری T دارای اصل‌بندی $\forall\exists$ است اگر وتنها اگر اجتماع هر زنجیر از مدلهای T، مدل T باشد.

اثبات. فرض کنید T تحت اجتماع زنجیرها، بسته باشد. فرض کنید $\varphi \in T$.

ادعا می‌کنیم که یک جمله $\forall\exists$ مانند ψ وجود دارد به طوری که $T \vdash \psi$ و $\psi \vdash \varphi$. یعنی φ از یکی از نتایج تئوری T که به صورت $\forall\exists$ است نتیجه می‌شود.

اما برای این منظور باید یک فرمول $\forall\exists$ به نام ψ را به گونه‌ای پیدا کنیم به طوری که $T \vdash \psi$ و $\neg\varphi \vdash \neg\psi$. اما چنین فرمولی موجود است؛ زیرا چون اجتماع یک زنجیر از مدلهای T مدل $\neg\varphi$ نیست). □

تمرین ۱۲. با استفاده از اثبات بالا، نشان دهید که $\mathfrak{M} \models T_{\forall\exists}$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M}$ اجتماع زنجیری از مدل‌های تئوری T باشد.

تعریف ۷۱ (حذف سور)**.** می گوییم تئوری T حذف سور دارد. هرگاه برای هر فرمول $\varphi(\overline{x})$، یک فرمول بدون سور $\psi(\overline{x})$ وجود داشته باشد به طوری که

$$T \vdash \forall\overline{x}\,(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \psi(\overline{x}))\,.$$

لم ۷۲. فرض کنید $\varphi(\overline{x})$ یک فرمول دلخواه باشد؛ آن‌گاه موارد زیر باهم معادل هستند:

۱. فرمول φ نسبت به تئوری T دارای یک معادل بدون سور است.

۲. اگر $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T$ و $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ یک زیر ساختار مشترک باشد و $\overline{a} \in A$ آنگاه $\mathfrak{M}_1 \models \varphi(\overline{a}) \iff \mathfrak{M}_2 \models \varphi(\overline{a})$.

اثبات. ۱ $\Leftarrow$ ۲.

$$\mathfrak{M}_1 \models \varphi(\overline{a}) \Rightarrow \mathfrak{M}_1 \models \psi(\overline{a}) \Rightarrow A \models \psi(\overline{a}) \Rightarrow \mathfrak{M}_2 \models \psi(\overline{a}) \Rightarrow \mathfrak{M}_2 \models \varphi(\overline{a}).$$

۱ $\Rightarrow$ ۲. برای این که نشان دهیم $\varphi(\overline{c})$ معادل بدون سور دارد کافی است نشان دهیم که یک فرمول بدون سور $\psi(\overline{c})$ وجود دارد که $T \cup \{\varphi(\overline{c})\} \vdash \psi(\overline{c})$ و $T \cup \{\neg\varphi(\overline{c})\} \vdash \neg\psi(\overline{c})$. برای این منظور نیز، بنا به لم ۵۱ باید نشان دهیم که هیچ دو مدل $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ وجود ندارد که $\mathfrak{M}_1 \overset{\text{بدون‌سور}}{\Longrightarrow} \mathfrak{M}_2$. یعنی اگر در $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T$ جملات بدون سور یکسانی در زبانِ $L_{\overline{c}}$ درست باشد در این صورت اگر $\mathfrak{M}_1 \models \varphi$ آن‌گاه $\mathfrak{M}_2 \models \varphi$. اما این دقیقاً همان چیزی است که شرط ۲ بیان می‌کند: فرض کنید جملات بدون سور یکسانی در $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ برقرار باشد. در این صورت ساختار تولید شده توسط $\overline{c}$ در $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ یکسان است. پس بنا به ۲، $\mathfrak{M}_1 \models \varphi(\overline{c})$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M}_2 \models \varphi(\overline{c})$. □

در اثبات بالا آشنایی با «ساختار تولید شده» به همراه محتوای تمرین ۱۴ نیاز است که در زیر دربارهٔ این جزئیات توضیح و تمرین داده شده است:

توجه ۷۳. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک L ساختار باشد و $\overline{a} \in M$. ساختار تولید شده توسط $\overline{a}$ در $\mathfrak{M}$ از عناصر زیر تشکیل شده است:

$$\langle \overline{a} \rangle^{\mathfrak{M}} = \{t^{\mathfrak{M}}(\overline{a}) \mid t \in \text{ترم}\}$$

تمرین ۱۳. $\langle \overline{a} \rangle^{\mathfrak{M}} = \bigcap_{\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}, \overline{a} \in \mathfrak{M}'} \mathfrak{M}'$

تمرین ۱۴. فرض کنید $\mathfrak{M}_1$ و $\mathfrak{M}_2$ دو L ساختار باشند، $\overline{a} \in M_1$ و $\overline{b} \in M_2$ در این صورت $\langle \overline{a} \rangle^{\mathfrak{M}_1} \cong \langle \overline{b} \rangle^{\mathfrak{M}_2}$ اگر وتنها اگر برای هر فرمول بدون سور $\psi(\overline{x})$ داشته باشیم $\mathfrak{M}_1 \models \psi(\overline{a}) \iff \mathfrak{M}_2 \models \psi(\overline{a})$.

توجه ۷۴. فرض کنید L یک زبان باشد. فرمولهای به صورت $t_1(\overline{x}) = t_2(\overline{x})$ و $R(t_1, \ldots . t_n)$ را فرمول‌های اتمی می‌نامیم. همچنین فرمولهای به صورت $\neg t_1 = t_2$ و $\neg(Rt_1 \ldots t_n)$ را نقیض اتمی می‌نامیم.

تعریف ۷۵. فرمول $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n$ را در نظر بگیرید که در آن هر ψ_i اتمی یا نقیض اتمی است به چنین فرمولی یک فرمول ساده می‌گوییم.

توجه ۷۶. تئوری T سورها را حذف می کند اگر وتنها اگر برای هر دو مدل $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T$ و زیر ساختار مشترک $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ و هر $\overline{a} \in A$. هر دستگاه معادلات باضرایب در A اگر در $\mathfrak{M}_2$ جواب داشته باشد در $\mathfrak{M}_2$ هم جواب داشته باشد.

لم ۷۷. اگر فرمولهای به صورت $\exists x\ (\psi_1(x) \wedge \cdots \psi_n(x))$ که در آن ψ_i ها اتمی یا نقیض اتمی هستند معادل بدون سور داشته باشد، همه فرمول‌ها معادل بدون سور دارند.

اثبات نادقیق و نیازمند بررسی جزئیات. هر فرمول را می توان به صورتی تبدیل کرد که سورها فقط در ابتدای فرمول بیایند. اگر فرمولهای به صورت ذکر شده معادل بدون سور داشته باشند، یکی یکی می‌توان سورهای فرمول را حذف کرد. برای اثبات دقیق به جزوه منطق مراجعه کنید. □

۶.۱ جلسه ششم، تئوری‌های مدل‌کامل و مقدماتی از تئوری‌های مدول‌ها

۱.۶.۱ تئوری‌های مدل‌کامل

تعریف ۷۸. تئوری T را مدل‌کامل می‌نامیم هرگاه برای هر دو مدل $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \models T$ اگر $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$ آن‌گاه $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_2$.

پس مدل‌کامل بودن یک تئوری یعنی این که: هر وقت که $\mathfrak{M}_1$ زیرساختاری از $\mathfrak{M}_2$ باشد، برای هر فرمول دلخواهِ φ و هر چندتایی دلخواهِ $\overline{a} \in M$ داشته باشیم $\mathfrak{M}_1 \models \varphi(\overline{a}) \iff \mathfrak{M}_2 \models \varphi(\overline{a})$.

نتیجه ۷۹. تئوری T مدل کامل است اگر وتنها اگر همه فرمول‌ها تحت T معادل عمومی داشته باشد.

اثبات. گفتیم که مدل‌کامل بودن یک تئوری، مستلزم حفظ شدن هر فرمول تحت زیرساختارها است. بنا به قضیهٔ ۶۳ در صفحهٔ ۱۲ زمانی یک فرمول تحت زیرساختار حفظ می‌شود که معادلی عمومی داشته باشد. □

مشاهده ۸۰. موارد زیر باهم معادل هستند

۱. هر فرمول نسبت به T دارای معادلی عمومی است.

۲. هر فرمول نسبت به T داری معادلی وجودی است.

توجه ۸۱. موارد زیر با هم معادل هستند:

۱. هر فرمول وجودی یک معادل عمومی دارد.

۲. هر فرمولی معادل عمومی دارد.

نتیجه ۸۲ (تست رابینسون). تئوری T مدل‌کامل است اگر وتنها اگر برای هر فرمول بدون سور $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ و هر $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$ و $\overline{a} \in \mathfrak{M}_1$ اگر $\mathfrak{M}_2 \models \exists\overline{x}\ \ \varphi(\overline{x},\overline{a})$ آن‌گاه $\mathfrak{M}_1 \models \exists\overline{x}\ \ \varphi(\overline{x},\overline{a})$. به بیان دیگر، یک تئوری زمانی مدل‌کامل است که برای هر دو مدلِ $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$ از آن تئوری، مدل $\mathfrak{M}_1$ در مدل $\mathfrak{M}_2$ **بستهٔ وجودی** باشد.

دقت کنید که مدل‌کامل بودن یک تئوری به معنی «کامل» بودن آن نیست. در واقع وقتی تئوری T مدل‌کامل است و $\mathfrak{M}$ مدلی از آن است، آنگاه تئوری $Th(\mathfrak{M})$ در زبان L_M یک تئوری کامل است و به این دلیل، به تئوری T، مدل‌کامل گفته می‌شود. همچنین وقتی یک تئوری حذف سور دارد، در این صورت برای هر مدل $\mathfrak{M} \models T$ و هر زیرساختارِ $A \subset \mathfrak{M}$ تئوری $Th(A)$ در زبان L_A یک تئوری کامل است؛ بنابراین یک تئوری دارای حذف سور را می‌توان «زیرساختار کامل» نامید.

۲.۶.۱ مقدماتی از جبر مدول‌ها

یادآوری ۱. فرض کنید G یک گروه آبلی باشد و $H \subset G$ یک زیرگروه از آن باشد. در این صورت

$$\frac{G}{H} = \{aH \mid a \in G\}$$

متشکل از عناصری به صورت $aH = \{ah \mid h \in H\}$ با ضربی به صورت

$$aH \cdot bH = abH$$

یک گروه است که به آن گروه خارج قسمتی G نسبت به H می‌گوییم. تعداد اعضای $\frac{G}{H}$ را با $[G : H]$ نشان می‌دهیم و آن را اندیس زیرگروه H از گروه G می‌نامیم. واضح است اگر $H \subset G$ زیرگروه باشد و $\frac{G}{H}$ نامتناهی باشد در این صورت برای هر $a_1, \ldots, a_n \in G$ داریم $G \nsubseteq a_1H \cup \cdots \cup a_nH$.

قضیه ۸۳ (نویمن). [1] فرض کنید $H_1, \ldots, H_n$ زیرگروه‌هایی از گروه G باشند، به طوری که برای هر i بدانیم که $[G : H_i]$ نامتناهی است. در این صورت G با تعدادی متناهی از هم‌دسته‌های H_i های مختلف پوشیده نمی‌شود.

اثبات. با استقرا روی تعداد H_i حکم را ثابت می‌کنیم. می‌دانیم حکم برای $n = 1$ برقرار است. حال فرض کنید حکم برای $i < n$ برقرار است. دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت اول: یک $i < n$ وجود دارد که $[H_n : H_i \cap H_n]$ متناهی است. حال اگر G توسط تعدادی متناهی از هم‌دسته‌های $H_1, \ldots, H_n$ پوشیده شود. از آن‌جا که H_n با هم‌دسته‌های H_i پوشیده می‌شود نتیجه می‌گیریم که G توسط تعداد متناهی از هم‌دسته‌های $H_1, \ldots, H_{n-1}$ پوشیده شده است، و این تناقض است.

حالت دوم: تمام $[H_n : H_n \cap H_i]$ ها نامتناهی هستند. فرض کنید G توسط تعدادی متناهی از هم دسته‌های H_i های مختلف پوشیده شده است. در این پوشش یک تعداد متناهی از هم‌دسته‌های H_n هم استفاده شده‌اند. پس بقیهٔ هم‌دسته‌های H_n توسط هم‌دسته‌های دیگر H_i ها پوشیده شده است. فرض کنید مثلاً H_n توسط هم‌دسته‌های H_i های $i < n$ پوشیده شده است.

$$a + H_n \subset (a_1 + H_1) \cup (a_2 + H_2) \cup \cdots (a_{n-1} + H_{n-1}).$$

بنابراین H_n توسط تعداد متناهی هم‌دسته H_i ها پوشیده می‌شود (با جمع کردن $-a$ با طرفین عبارت بالا). اما این تناقض است؛ زیرا تمام $[H_n : H_n \cap H_i]$ ها نامتناهی هستند و فرض استقرا می‌گوید که نمی‌توان با هم‌دسته‌های $n - 1$ زیرگروه که اندیس همهٔ آنها نامتناهی است، یک گروه را پوشاند. □

یک بیان معادل از قضیهٔ فوق را در زیر آورده‌ایم. یادآوری می‌کنیم که منظور از $sym(X)$ گروه متشکل از تمامی توابع یک‌به‌یک و پوشای روی X است، با عمل ترکیب توابع. برای یک گروه $G \subseteq sym(X)$ منظور از مدار یک عنصر $a \in X$ مجموعهٔ $\{f(a) : f \in G\}$ است.

[1] B.H. Neumann

قضیه ۸۴ (نویمن). [۲] فرض کنید $G \subset sym(X)$ و فرض کنید $c_1, \ldots, c_n \in X$ به گونه‌ای باشند که مدار هر c_i نامتناهی است. همچنین فرض کنید $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ یک زیرمجموعهٔ متناهی دلخواه از X باشد. در این صورت $g \in G$ وجود دارد به طوری که $g(c_i) \notin B$ برای هر i.

برای یک حالت بسیار خاص و ساده، c را در نظر بگیرید به طوری که $\{g(c) \mid g \in G\}$ نامتناهی است. واضح است که $g \in G$ وجود دارد به طوری که $g(c) \notin B$.

۷.۱ جلسه هفتم، حذف سور در مدول‌ها

اثبات قضیهٔ ۸۴ با استفاده از قضیهٔ ۸۳ . قرار دهید $H_c = \{g \in G \mid g(c) = c\}$. در این صورت برای هر $g_1, g_2 \in sym(X)$ داریم $g_1 H_c = g_2 H_c$ اگر و تنها اگر $g_1(c) = g_2(c)$. بنابراین اندیسِ $[G : H_c]$ برابر است با اندازهٔ مجموعهٔ $\{g(c) : g \in sym(X)\}$. پس این که مدار عنصر c نامتناهی باشد بدین معنی است که $[G : H_c]$ نامتناهی باشد.

همچنین دقت کنید که $g(c) = a$ هرگاه $gH_c = hHc$ برای یک نگاشت h به طوری که $h(c) = a$.

حال مجموعهٔ متناهی B را مطابق صورت قضیه در نظر بگیرید. از آن جا که تک تک $[G : H_{c_i}]$ نامتناهی است، بنا به قضیهٔ ۸۳ گروه $G = sym(X)$ توسط هیچ تعداد متناهی از هم‌دسته‌های H_{c_i} ها پوشیده نمی‌شود. فرض کنید $K = \{h_1, \ldots, h_k\}$ همهٔ نگاشتهایی باشند که یکی از c_i را به یکی از a_i ها می‌برند. به طور خاص داریم:

$$sym(X) \not\subseteq \bigcup_{h \in K, c \in \{c_1, \ldots, c_n\}} hH_{c_i}.$$

□

تمرین ۱۵. اثباتی برای قضیهٔ ۸۳ با استفاده از قضیهٔ ۸۴ ارائه کنید.

۱.۷.۱ مدول‌ها و حذف سور

فرض کنید R یک حلقه جابه جایی و یک‌دار باشد. برای مدولهای روی R زبان $L_{Mod} = \{+, -, \cdot, \{\lambda_r\}_{r \in R}\}$ را در نظر می‌گیریم. هر R مدول یک L_{Mod} ساختار به صورت

$$(M, +, -, \cdot, \{\lambda_r\}_{r \in R})$$

است که در آن $\lambda_r : M \longrightarrow M$ با ضابطه $\lambda_r(m) = rm$ است. تئوری مدول‌های روی حلقهٔ R به صورت زیر است: (این تئوری را با $T_{Mod}(R)$ نشان می‌دهیم.)

- $\forall x, y, z \quad x + (y + z) = (x + y) + z$
- $\forall x \quad x + (-x) = 0$.
- $\forall x \; x + 0 = 0 + x = x$
- $\forall x, y \; x + y = y + x$
- برای هر $r \in R$ یک اصل موضوعهٔ مجزا به صورت: $\forall x, y \quad \lambda_r(x + y) = \lambda_r(x) + \lambda_r(y)$
- برای هر $r_1, r_2 \in R$ یک اصل موضوعهٔ مجزا به صورت: $\lambda_{r_1 + r_2}(x) = \lambda_{r_1}(x) + \lambda_{r_2}(x) \quad \forall x$.
- برای هر $r_1, r_2 \in R$ یک اصل موضوعهٔ مجزا به صورت: $\forall x \quad \lambda_{r_1}(\lambda_{r_2}(x)) = \lambda_{r_1 r_2}(x)$

تعریف ۸۵. به هر فرمولِ $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ به صورت $r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n = 0$ یک **معادله** می‌گوییم.

[2] P. Neumann

تعریف ۸۶ (فرمول‌های مقدماتی مثبت). فرمول‌های به صورت زیر را **مقدماتی مثبت** [3] نامیم

$$\varphi(\overline{x}): \quad \exists \overline{y} \psi(\overline{x}, \overline{y})$$

که در آن $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ **عطفی از معادلات** است.

برای مثال، فرمول $\varphi(x_1, x_2)$ در زیر یک فرمول مقدماتی مثبت است:

$$\exists\, y_1, y_2 \quad \begin{cases} r_1 y_2 + r_2 y_2 = s_1 x_1 + s_2 x_2 \\ r'_1 y_2 + r'_2 y_2 = s'_1 x_1 + s'_2 x_2 \end{cases}$$

صورت زیر از قضیهٔ ۸۳ به درد ادامهٔ کار ما می‌خورد.

مشاهده ۸۷. فرض کنید H_i ها زیرگروه یک گروه آبلی باشند و $a_0 + H_0 \subset (a_1 + H_1) \cup \cdots \cup (a_n + H_n)$. همچنین فرض کنید $\frac{H_0}{H_0 \cap H_1}, \ldots, \frac{H_0}{H_0 \cap H_k}$ متناهی، و $\frac{H_0}{H_0 \cap H_{k+1}}, \ldots, \frac{H_0}{H_0 \cap H_n}$ نامتناهی باشند. در این صورت بنا به قضیهٔ ۸۳ داریم

$$a_0 + H_0 \subseteq (a_1 + H_1) \cup \cdots \cup (a_k + H_k).$$

مثال ۸۸. مشاهدهٔ فوق را اثبات کنید.

قضیه ۸۹. در تئوری $T_{Mod}(R)$ هر فرمولی معادل با ترکیبی از فرمول‌های مقدماتی مثبت است.

اثبات. نشان می‌دهیم که اگر $\varphi(x, y)$ فرمولی به صورت **ترکیبی بولی** از فرمول‌های مقدماتی مثبت باشد آن‌گاه $\forall x \varphi$ نیز ترکیبی بولی از فرمول‌های مقدماتی مثبت است. واضح است که از این نتیجه می‌شود که $\exists x \varphi$ هم ترکیبی بولی از فرمول‌های مقدماتی مثبت است. در این صورت، از آن‌جا که هر فرمول را می‌توان به صورت نرمال پیشوندی نوشت، نتیجه می‌شود که هر فرمول ترکیبی بولی از فرمول‌های مقدماتی مثبت است.

نخست مشاهده کنید که هرگاه $\varphi(\overline{x})$ یک فرمول مقدماتی مثبت باشد. در این صورت $\varphi(M^n) = \{\overline{a} \in M^n \mid M \models \varphi(\overline{x})\}$ زیرگروهی از M^n است. برای بررسی این گفته کافی است به راحتی نشان دهید که برای هر $\bar{a}, \bar{b}$ که در فرمول φ صدق کنند، $\bar{a} - \bar{b}$ نیز در فرمول $\varphi(M^n)$ صدق می‌کند.

حال دقت کنید که هر $\varphi(M, a)$ یک هم‌دسته از $\varphi(M, 0)$ است.

یک ترکیب بولی از فرمول‌های مقدماتی مثبت، با جایگزین کردن $\vee$ توسط $\rightarrow$، ترکیبی عطفی از فرمول‌های به صورت زیر است:

$$(\psi_0(x, y) \rightarrow (\psi_1(x, y) \vee \ldots \vee \psi_n(x, y)))$$

که در آن ψ_i ها مقدماتی مثبت هستند. دقت کنید که هر $\psi_i(x, y)$ در واقع یک همدسته به صورت $y + H_i$ تعریف می‌کند. یعنی x هایی که در آن صدق می‌کنند همدستهٔ $y + H_i$ را تشکیل می‌دهند. فرمولِ

$$\forall x \quad (\psi_0(x, y) \rightarrow (\psi_1(x, y) \vee \ldots \vee \psi_n(x, y)))$$

در نظر بگیرید. این فرمول می‌گوید که

$$y + H_0 \subseteq y + H_1 \cup \ldots y + H_n$$

بنا به قضیهٔ نویمن، یعنی قضیهٔ ۸۳ کافی است تنها H_i هایی در سمت راست در نظر گرفته شوند که اندیس $\frac{H_0}{H_0 \cap H_i}$ متناهی است. پس بدون کاستن کلیت فرض می‌کنیم تمام اندیس‌های $\frac{H_0}{H_0 \cap H_i}$ ها متناهی هستند.

حال فرض کنید یک مجموعهٔ متناهی مثلاً ۱۰ عضوی به نام A داریم و می‌خواهیم بگوییم که $A \subseteq B \cup C$. کافی است بیان کنیم که به حالت‌های مختلف، $A \subseteq B \cup C$ امکان‌پذیر است: مثلاً یک حالت این است که پنج عنصر در B و پنج عنصر در C باشند و هیچ عنصری در $B \cap C$ وجود نداشته باشد. می‌توانیم فصل تمام حالت‌های ممکن را بگیریم.

[3] pp-formula: positive primitive

حال اگر مثلاً سرآخر به فرمول $y + H_۰ \subseteq y + H_۱ \cup y + H_۲$ رسیده باشیم، که در آن $\frac{H_۰}{H_۱}, \frac{H_۰}{H_۲} < ۲$، کافی است حالت‌های مختلفی را بیان کنیم که بیان کند چه تعداد عنصر می‌تواند در هر یک از مجموعه‌های $\frac{H_۰ \cap H_۱}{H_۰ \cap H_۱ \cap H_۲}$ و $\frac{H_۰ \cap H_۲}{H_۰ \cap H_۱ \cap H_۲}$ وجود داشته باشد. وجود عناصر در چنین مجموعه‌هایی، طبیعتاً با قرار دادن سور وجودی در مقابل فرمول‌های مقدماتی مثبت بیان می‌شود که خود فرمولی مقدماتی مثبت است. $\square$

فصل ۲

تمرینها

۱.۲ تمرین نوبت اول: مهلت تا دوشنبه۲۰ فروردین

تمرین ۱۶. فرض کنید $L = \{f, c, g\}$ یک زبان مرتبه اول باشد که در آن f یک نماد تابعی دو موضعی، c یک نماد ثابت و g یک نماد تابعی تک موضعی است. دو $L-$ ساختار $\mathfrak{M}_۱ = (\mathbb{R}, +, ۰, -)$ و $\mathfrak{M}_۲ = (\mathbb{R}^+, \times, ۱, x^{-۱})$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که تابع $h(x) = \exp(x)$ یک ایزومورفیسم از $\mathfrak{M}_۱$ به $\mathfrak{M}_۲$ است.

تمرین ۱۷. زبان مرتبهٔ اول $L = \{+, \cdot, ۰, ۱, <\}$ را در نظر بگیرید. L ترم‌های این زبان به چه صورت هستند؟

تمرین ۱۸. فرض کنید X یک مجموعه متناهی باشد. نشان دهید F یک فیلتر روی X است.

$$F = \{A \mid A \subset X,\ \ X - A : \text{متناهی است}\}$$

تمرین ۱۹. فرض کنید F یک فیلتر روی مجموعهٔ X باشد. فرض کنید $\mathfrak{A} = \{\text{همه فیلترهای شامل } F\}$. روی $\mathfrak{A}$ ترتیب شمول را قرار دهید $(\mathfrak{A}, \subset)$.

$$F_۱ < F_۲ \Leftrightarrow F_۱ \subset F_۲.$$

هر زنجیر در $\mathfrak{A}$ با رابطه شمول دارای کران بالا است. بنابراین یک فیلتر ماکزیمال در $\mathfrak{A}$ وجود دارد. نشان دهید این فیلتر ماکسیمال، فرا فیلتر است.

تمرین ۲۰. نشان دهید که هر فرا فیلتر دلخواه غیر اصلی روی مجموعه نامتناهی X شامل فیلتر فرشه است.

۲.۲ تمرین نوبت دوم: مهلت تا دوشنبه ۲۹ فروردین

تمرین ۲۱. فرض کنید $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$. در این صورت برای هر فرمول بدون سور $\varphi(\overline{x})$ و هر $\overline{a} \in M$ داریم

$$\mathfrak{M}_1 \models \varphi(\overline{a}) \iff \mathfrak{M}_2 \models \varphi(\overline{a}).$$

تمرین ۲۲. ساختار $\bigcup \mathfrak{M}_i$ را شناسایی کنید.

تمرین ۲۳. $\langle \overline{a} \rangle^{\mathfrak{M}} = \bigcap_{\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}, \overline{a} \in \mathfrak{M}'} \mathfrak{M}'$

تمرین ۲۴. فرض کنید $\mathfrak{M}_1$ و $\mathfrak{M}_2$ دو L ساختار باشند، $\overline{a} \in M_1$ و $\overline{b} \in M_2$ در این صورت $\langle \overline{a} \rangle^{\mathfrak{M}_1} \cong \langle \overline{b} \rangle^{\mathfrak{M}_2}$ اگر وتنها اگر برای هر فرمول بدون سور $\psi(\overline{x})$ داشته باشیم $\mathfrak{M}_1 \models \psi(\overline{a}) \iff \mathfrak{M}_2 \models \psi(\overline{a})$.