

دانشگاه صنعتی اصفهان

ریاضی عمومی ۲

نیمسال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

محسن خانی

توجه: اطلاعات درس را به دقت مطالعه کنید. در بخش اطلاعات.

- منابع درس: ① جزوه پایه ششم ② نوشته های من در کلاس (محسن خانی) ③ کتاب استیواریت ④ جزوه تدبیر من.

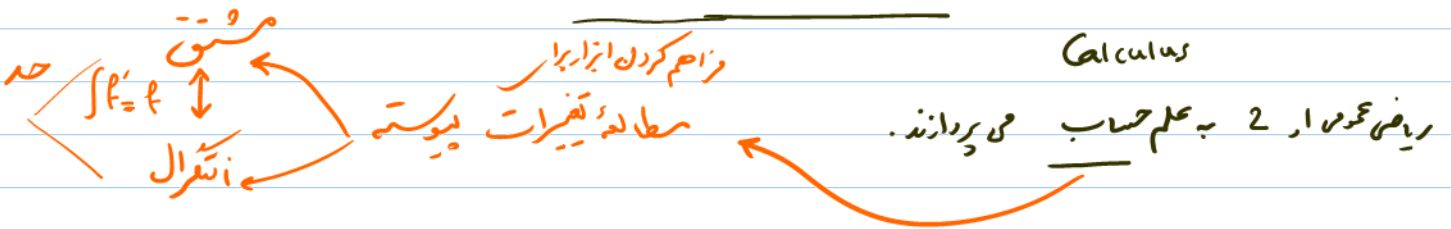
ارتباط با من: ① mohsen.khani@iut.ac.ir

② پیام صوتی: mosen.hani در تلگرام

③ از طریق آمار زارع ← دستیار آموزشی

④ تالار گفتگو ← لطفاً سوالات را این جا پرسید.

فروع رسمی درس ریاضی عمومی 2



در ریاضی 1 حساب توابع یک متغیره را مطالعه کردیم.

$$f'(a) \quad y = f(x) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

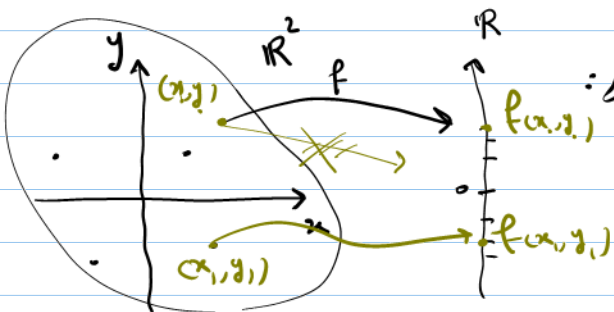
در ریاضی 2 حساب توابع چند متغیره را مطالعه میکنیم.

$$f'(a,b) \quad z = f(x,y)$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dx dy$$

انتگرال دوگانه

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$$



تعریف: منظور از یک تابع در متغیره یک رابطه سانه f است به صورت زیر:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

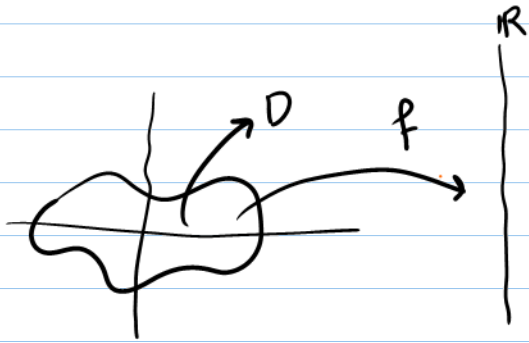


در این صورت می‌توانیم $z = f(x, y)$ یعنی x, y دو متغیر مستقل هستند و تابع

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

از آن جدا است.

توابع ممکن است $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

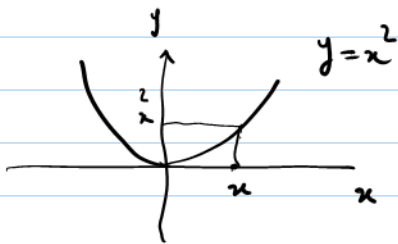


مثال $z = x + y$

$$f(x, y) = x + y$$

مثال $z = \sin\left(\frac{x}{x^2 + \ln y}\right)$

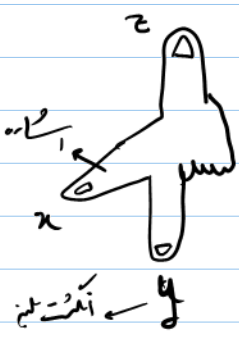
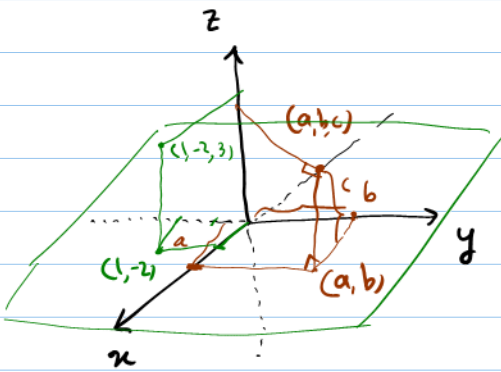
مثال $z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$



یاد آوری توابع یک متغیره را رسم می‌کردیم.

یعنی $\{(x, y) \mid y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ را می‌کش می‌کردیم.

برای رسم توابع دو متغیره نیاز به فضای سه بعدی $\mathbb{R}^3$ داریم.



نقطه (a, b, c) در فضای $\mathbb{R}^3$

مثال نقطه $(1, -2, 3)$ را پیدا کنید.

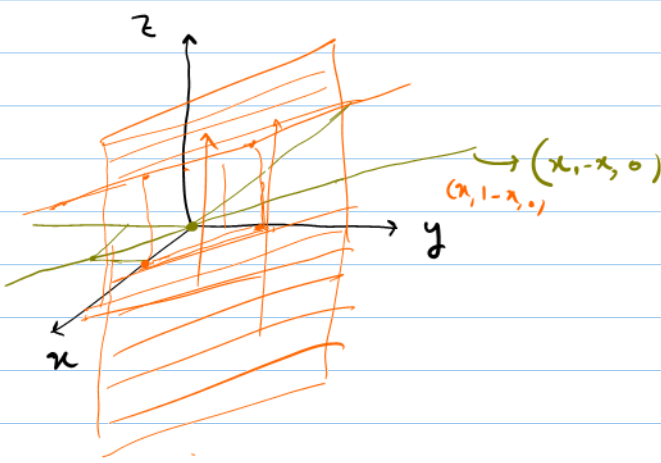
تمرین: $(-1, -2, -3)$ را پیدا کنید.

تعریف منظور از رسم تابع $z = f(x, y)$ پیدا کردن نقاط زیر در $\mathbb{R}^3$ است:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

توابع ضمیمه، لا نهاده است و $y^2 + z^2 = 1$ ، $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ توابع محدود است

توابع مربع: $z = x^2 + 3y$ ، $y = x^2$



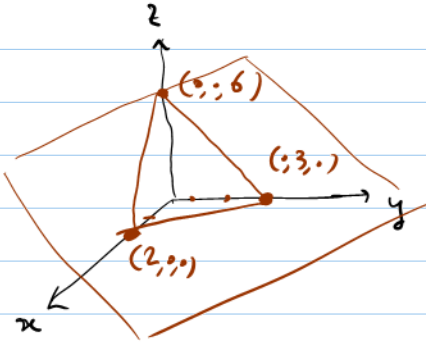
مثال تابع $z = x + y$ را رسم کنید.

$$z = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x$$

$$z = 1 \Rightarrow x + y = 1$$

$$(1, 0)$$

$$(0, 1)$$



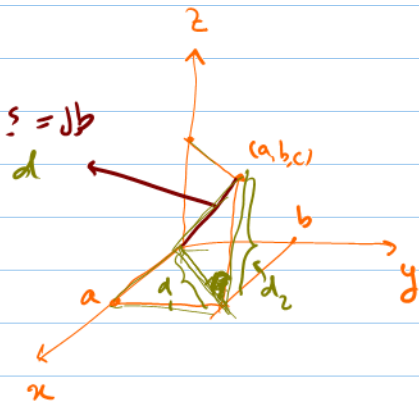
مثال تابع $z = 6 - 3x - 2y$ را رسم کنید.

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 2 & 0 \end{matrix}$$

مثال تابع $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ را رسم کنید.

$$\{(x, y, z) \mid z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

درجه فاصله نقطه (a, b, c) از مبدأ مختصات چگونه محاسبه می شود؟



$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$

$$d_2 = c$$

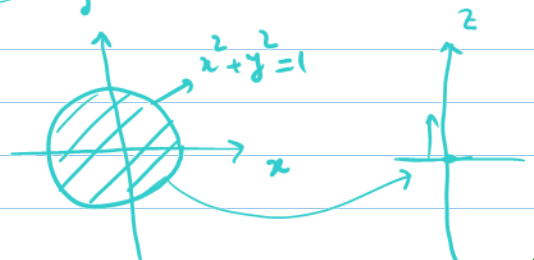
$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

برای رسم کردن تابع $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ را رسم کنیم. درجه کنید که دامنه این تابع به چه صورت است:

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\text{دامنه تابع} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$



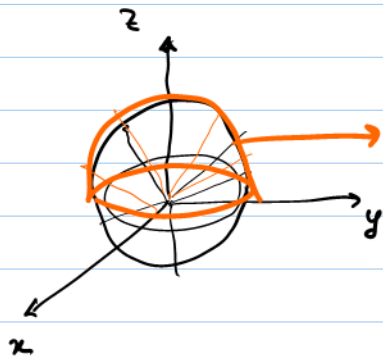
$$z^2 = 1 - x^2 - y^2$$

برای رسم تابع در فضای سه بعدی (فک کنید که اولاً $z \geq 0$ و ثانیاً

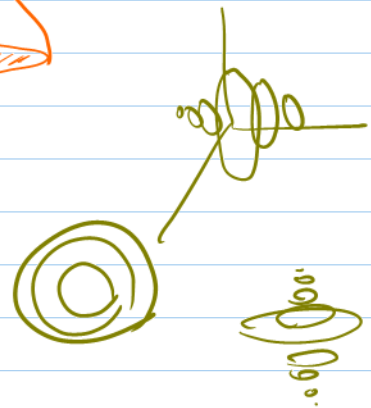
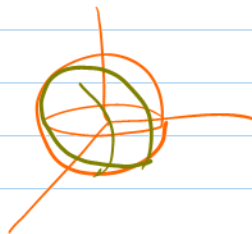
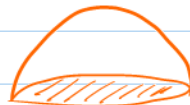
$$(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$$

پس به دنبال رسم نقاط هستیم: $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$

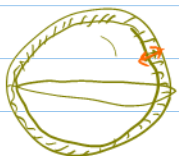
پس به دنبال نقاط هستیم که حاصل آنها از هم 1 است و از آنجا می توانیم است.



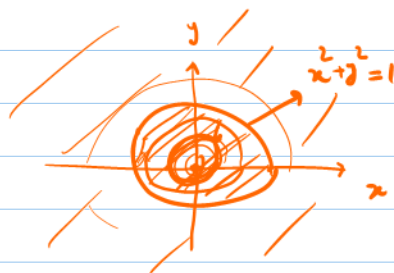
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$



$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

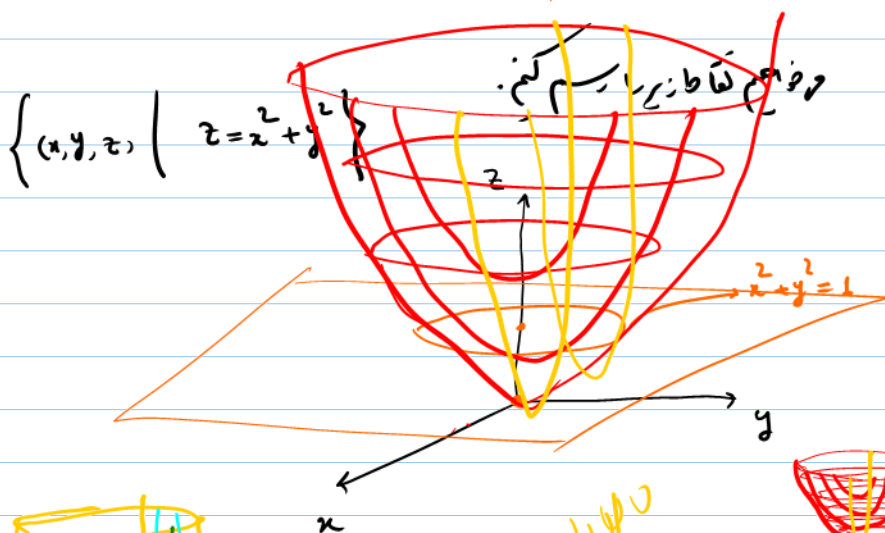


دو کره ضخیم: $\{(x, y, z) \mid \frac{9}{16} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$



$$x^2 + y^2 = 1$$

دو



$$\{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2\}$$

در فضای سه بعدی رسم کنیم.

$$z = x^2 + y^2$$

مثال

$$z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$$

$$z < 0 \Rightarrow \text{تصویر نداریم}$$

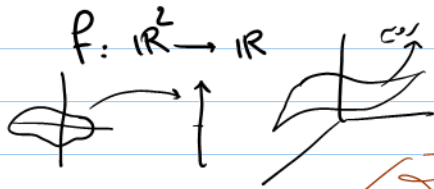
$$z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$z = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow z = y^2$$

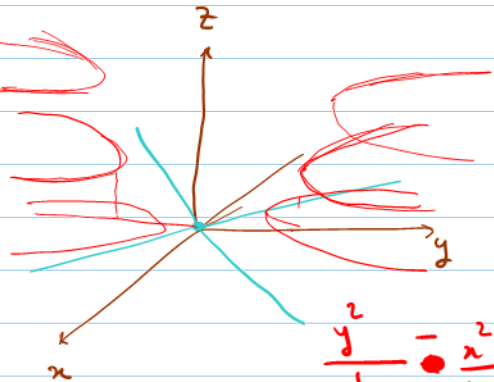
$$y = 0 \Rightarrow z = x^2$$

مجموعه نبره با تابع $z = f(x, y)$ رسم آنها آسانتر آشنا شوم.



ح دهم

مثال رسم $z = y^2 - x^2$ را رسم کنید.



$$z=1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$$

$$z=2 \Rightarrow y^2 - x^2 = 2$$

$$\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

$$z=\frac{1}{2} \Rightarrow y^2 - x^2 = \frac{1}{2}$$

$$z=0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow$$

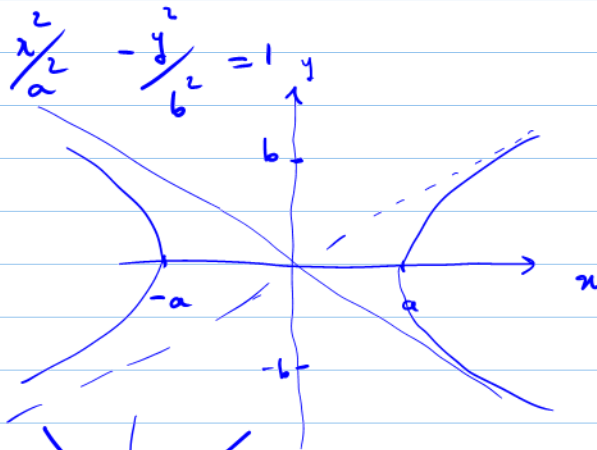
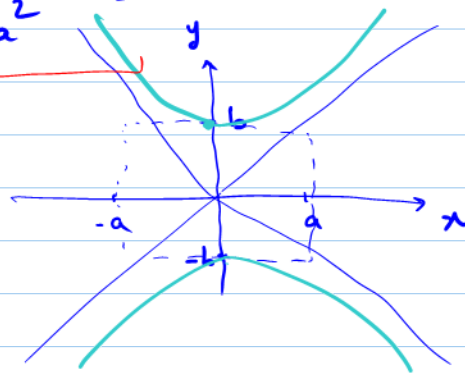
$$(y-x)(y+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ y=-x \end{cases}$$

یاد آوری (ارتقاء درجه سه)

التماس کار در این مسئله

$$\frac{y^2}{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$



هذلولی
hyperbola

$$y^2 - x^2 = 1$$

دو

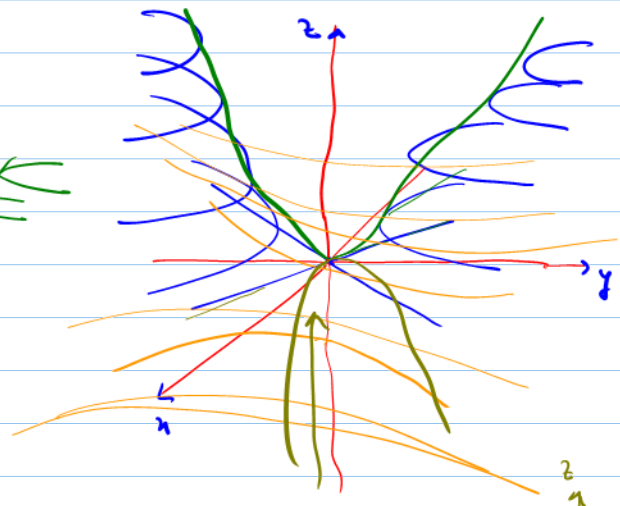
ادامه

$$z = y^2 - x^2$$

برای z ثابت، هندسه در صفحه xy را می‌بینیم.

$$z = -1 \Rightarrow y^2 - x^2 = -1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$$

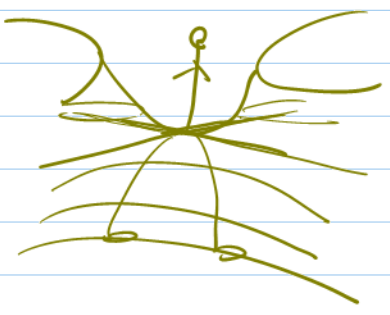
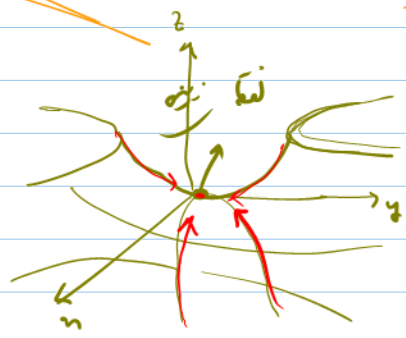
$$z = -2$$



$$z = y^2 - x^2$$

خواب

نقطه



آزمایش

$$z = y^2 - x^2$$

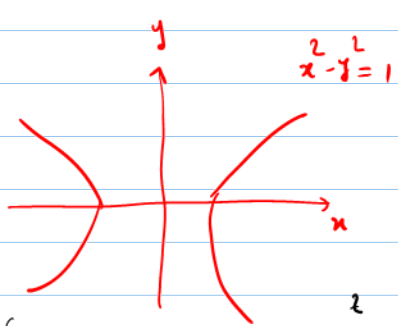
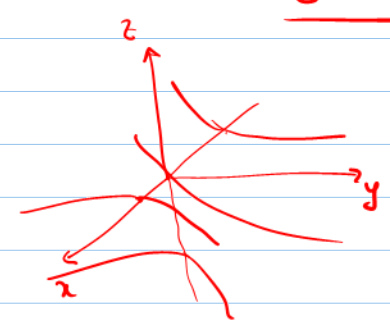
$$z = -1$$

$$\Downarrow$$

$$y^2 - x^2 = -1$$

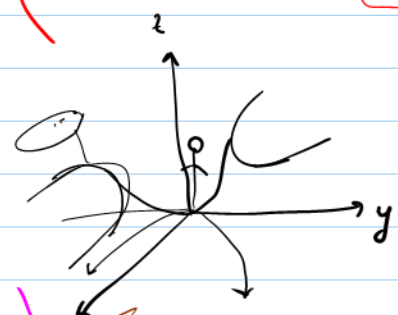
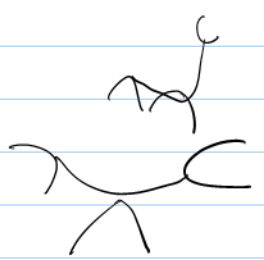
$$\Downarrow$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

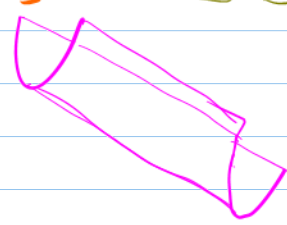


$$z = x^2 - y^2$$

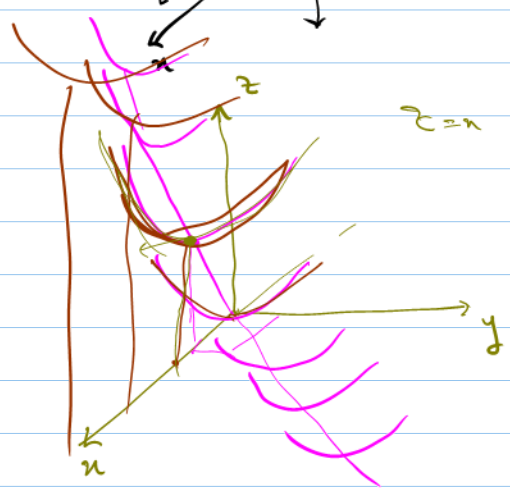
نمایش



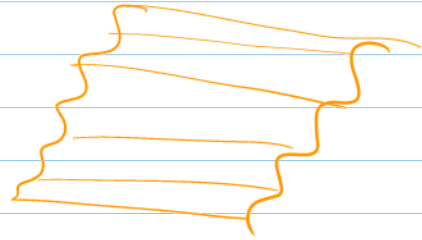
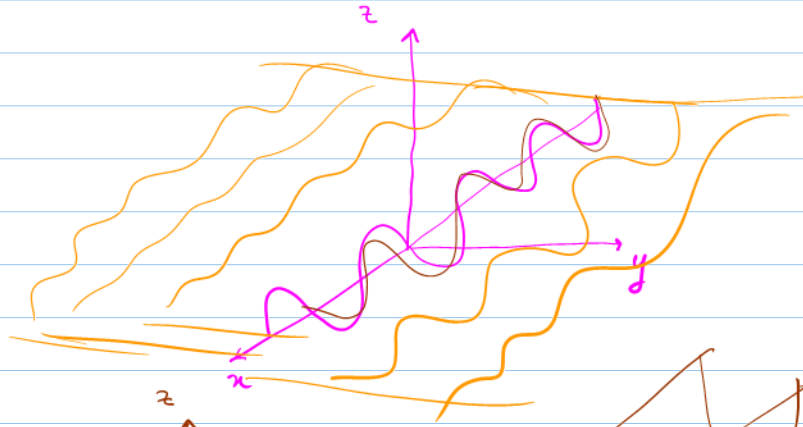
مثال در $z = x + y^2$ را رسم کنید.



$$x = 1 \Rightarrow z = y^2 + 1$$



مثال در $z = \sin x$ را رسم کنید.



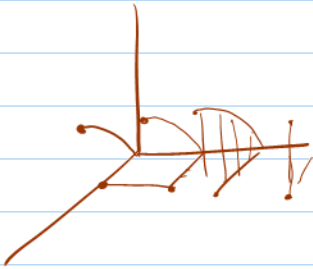
$$z = y^2$$

مثال

توجه: تابع $z = \sin x = f(x, y)$ به صورت زیر است:

$$(x, y) \mapsto \sin x$$

$$z = f(x, y)$$

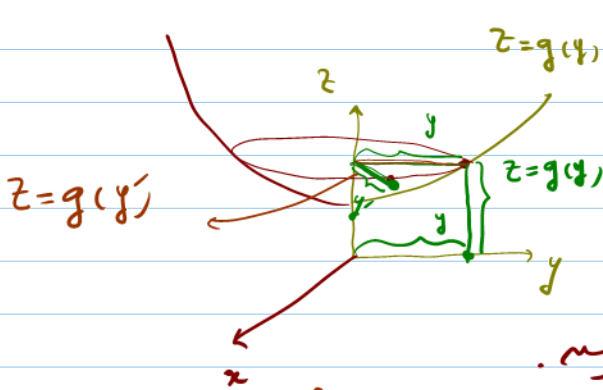


رسم کنید.

$$z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

مثال تابع

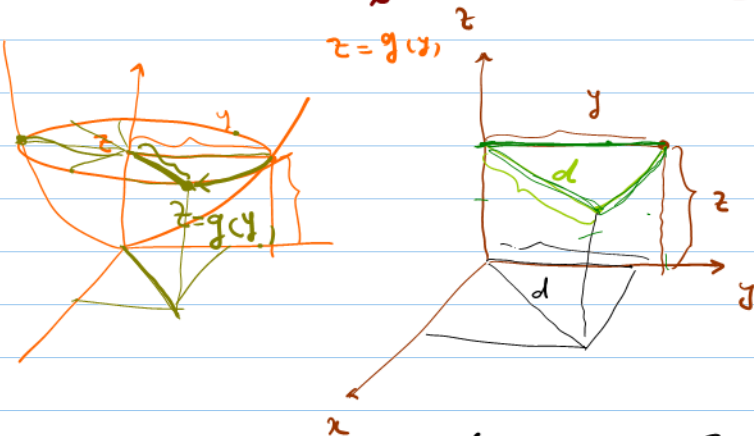
$$z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$$



$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

توجه: متغیر $z = g(y)$ را در صفحه yz در نظر بگیرید.

این متغیر را حول محور z دوران دهید. معادله در مختصات را بنویسید.



$$z = g(y)$$

$$z = g(d)$$

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y > 0$$

توجه: اگر متغیر $z = g(y)$ را حول محور z دوران دهید در مختصات

ایجاد می شود

$$z = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$(y > 0)$
 $z = e^y$

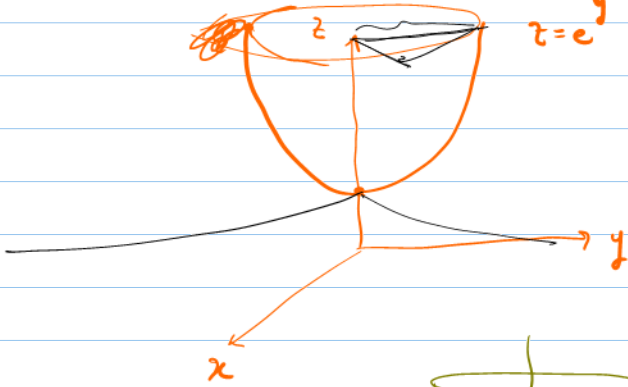
توجه کنید از همان منحنی

یاب

مثال $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

محل

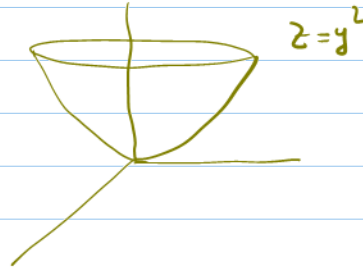
حول محور z می‌دهد $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ ایجاد می‌شود.



مثال $z = x^2 + y^2$ را رسم کنید.

محل

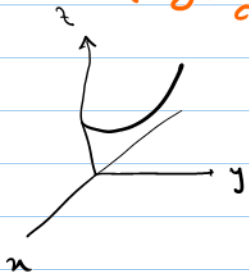
از همان حول محور z ایجاد می‌شود.



$z = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$

$x > 0$

فرض کنید اگر منحنی $g(x, y) = 0$ را حول محور z دوران دهیم به شکل:



$g\left(x, \sqrt{\frac{z}{2} + \frac{x^2}{3}}\right) = 0$

و اگر حول x دوران دهیم $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

مثال اگر $z = e^x$ را حول z دوران دهیم:

$\sqrt{y^2 + z^2} = e^x$

مثال $z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ را رسم کنید.

محل

هذه را یکبار

paraboloid of one-sheet

را رسم کنید.

$z^2 + 1 = x^2 + y^2$

در این به معادله

مثال

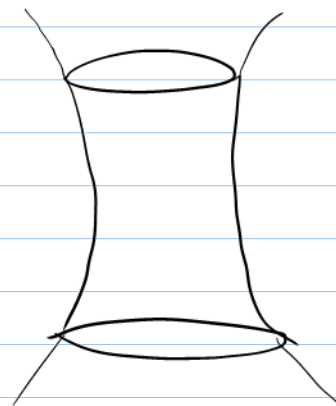
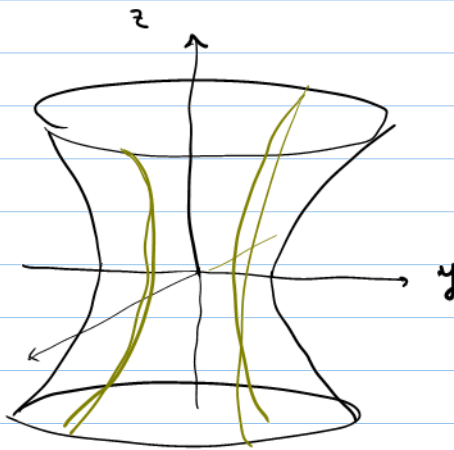
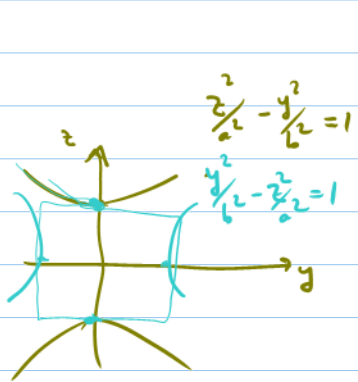
یاب معادله فوق را به صورت $z^2 + 1 = \left(\pm \sqrt{x^2+y^2}\right)^2$ پس معادله نظر از دوران منحنی

رسم $z^2 + 1 = y^2$ می‌دهد
 $y^2 - z^2 = 1$

رسم

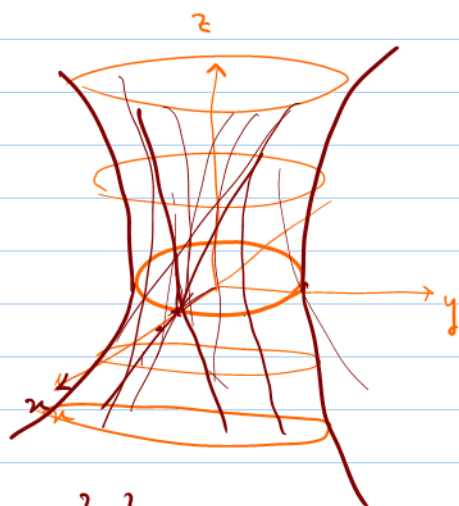
حول محور z ایجاد می‌شود.

$z^2 + 1 = y^2$
 $z^2 + 1 = x^2$



$$z^2 + 1 = x^2 + y^2$$

نگاه از زاویه دیگر



$$z=0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$z=1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$x=0 \Rightarrow z^2 + 1 = y^2 \Rightarrow y^2 - z^2 = 1$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow z^2 + 1 = \frac{1}{4} + y^2 \Rightarrow y^2 - z^2 = \frac{3}{4}$$

$$x=1 \Rightarrow z^2 = y^2$$

$$z^2 + x^2 = 1 + y^2$$

$$(z-y)(z+y)=0 \Rightarrow \begin{cases} z=y \\ z=-y \end{cases}$$

$$x^2 - z^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

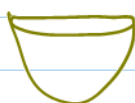
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$z = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{z^2}{x^2+y^2}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

$$z = x^2 + y^2$$



$$z^2 + 1 = x^2 + y^2$$



$$z^2 - 1 = x^2 + y^2$$



$$z = y^2 - x^2$$



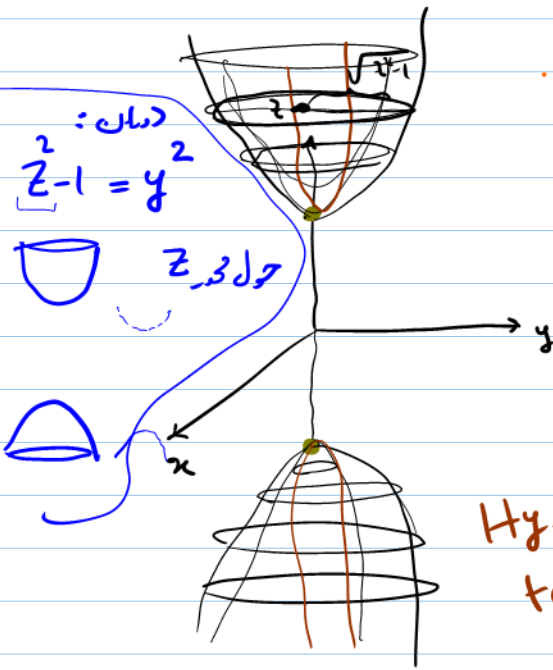
$$z^2 = x^2 + y^2$$



ج دوم

مثال مکان پهنه نقاط صادق در معادله $\boxed{z^2 - 1 = x^2 + y^2}$ را رسم کنید.

مثال مکان پهنه نقاط صادق در معادله



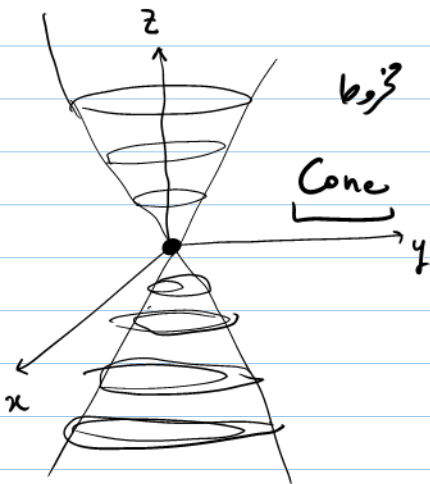
$x=0 \Rightarrow \boxed{z^2 - y^2 = 1}$
حذلولی

$z=1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$
 $z=-1 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

همچنین شکل ایجاب می‌کند $-1 < z < +1$

$z = \sqrt{2} \Rightarrow$

حذلولی را در دو نیمه
Hyperboloid of
two sheets
sheet



خروط

مثال مکان پهنه نقاط صادق در معادله $\boxed{z^2 = x^2 + y^2}$ را رسم کنید.

$x=0 \Rightarrow z^2 = y^2 \Rightarrow z = \pm y$

درج مخروط مثال بالا از حذلولی متغیر $z^2 = y^2$ حوله محور z ایجاب می‌کند:



$a_1 z^2 + b_1 y^2 + c_1 x^2 + a_2 xy + b_2 yz +$

درج به طور کلی با استفاده از معادله

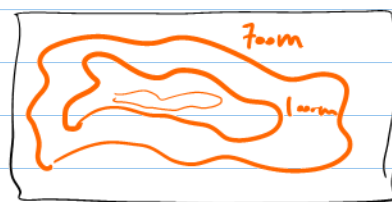
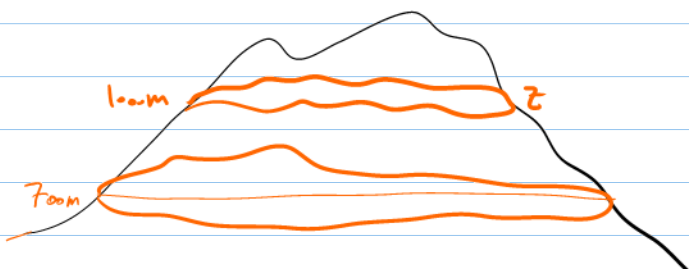
$c_1 xz + a_2 x + b_2 y + c_2 z + D = 0$

مثال $\boxed{z = xy}$

نکته از شکل حاصل بالا ایجاب می‌کند.

level curves

مختصات متر

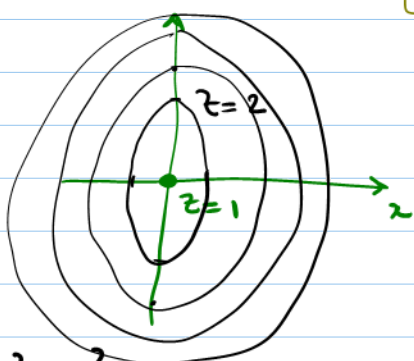
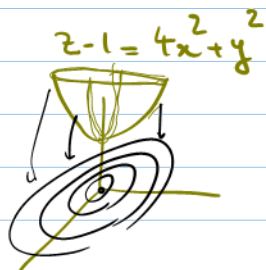


نقشه توپوگرافیک

xy

تعریف فرض کنید $z = f(x, y)$ یک تابع در متغیرها باشد. به هر کدام از متغیرها $k = f(x, y)$ یک منحنی برای تابع f گفته می‌شود. متغیرها x و y را در یک رسم مرتبه می‌کنیم.

مثال منحنی برای تابع $z = 4x^2 + y^2 + 1$ را رسم کنید.



$$z=3 \Rightarrow$$

$$4x^2 + y^2 = 2$$

$$2x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

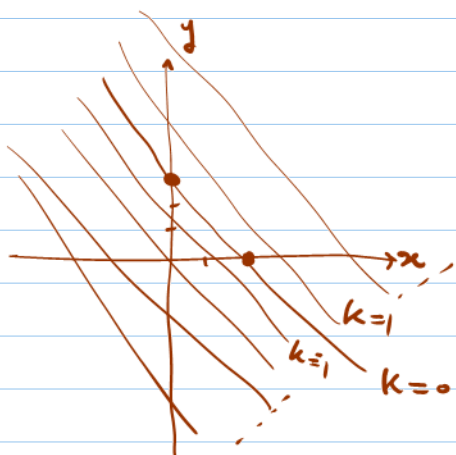
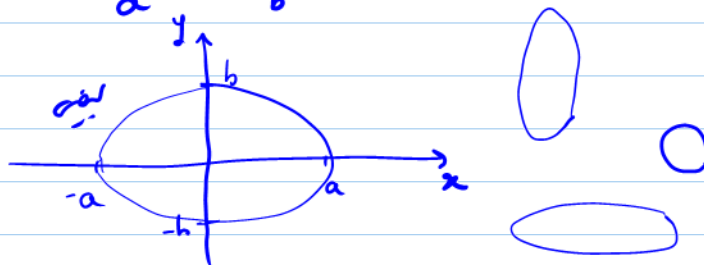
$$z=1 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 0$$

$$z=2 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 1$$

یادداشت

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)} + y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



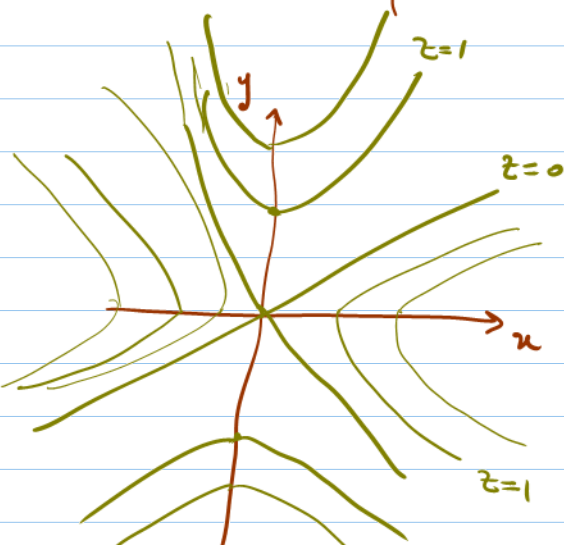
مثال $z = 6 - 3x - 2y$

$$z=0 \Rightarrow 3x + 2y = 6$$

$$(2, 0)$$

$$z=1 \Rightarrow 3x + 2y = 5$$

$$z=-1 \Rightarrow 3x + 2y = 7$$



مثال منحنی برای تابع $z = y^2 - x^2$ را رسم کنید.

$$z=-1 \Rightarrow y^2 - x^2 = -1$$

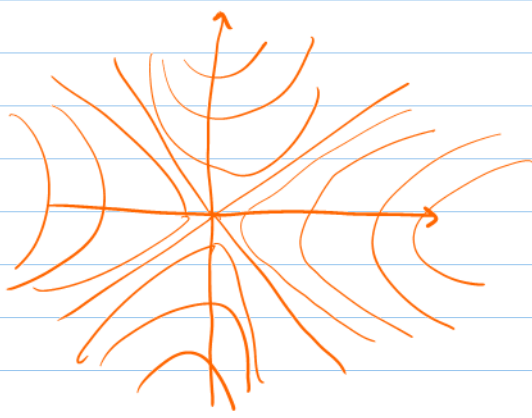
$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 1$$

$$z=0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow y = \pm x$$

$$z=1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$$

$$z=2 \Rightarrow y^2 - x^2 = 2$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1$$



منطقه مرکز را مشخص کنید

$$z = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$$

مثال

$$z=0 \Rightarrow y=0$$

$$z = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + 1 = -6y \Rightarrow$$

$$x^2 + (y^2 + 6y) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + (y+3)^2 = 8$$

$$z = -\frac{1}{2} \Rightarrow +\frac{1}{2} = \frac{+3y}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 = 6y \Rightarrow x^2 + (y-3)^2 = 8$$

$$z = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$z = -\frac{1}{3} \Rightarrow +\frac{1}{3} = \frac{+3y}{x^2 + y^2 + 1} \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 = 9y \Rightarrow x^2 + (y-4.5)^2 = 8$$

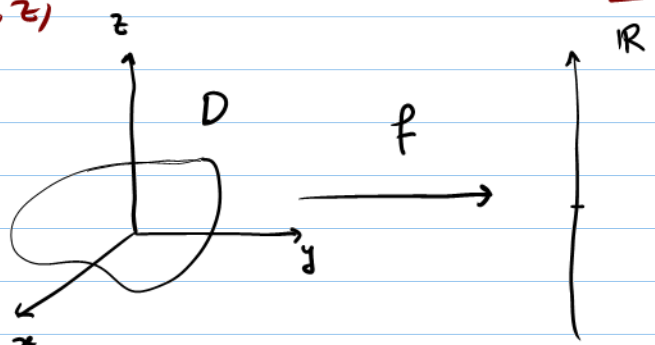
توابع متغیره

تعریف: منظور از توابع متغیره تابعی است که از فضای ۳ بعدی به فضای ۱ بعدی نگاشت دهد.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

$$w = f(x, y, z)$$

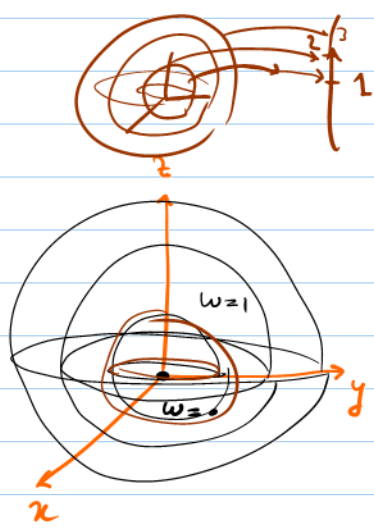
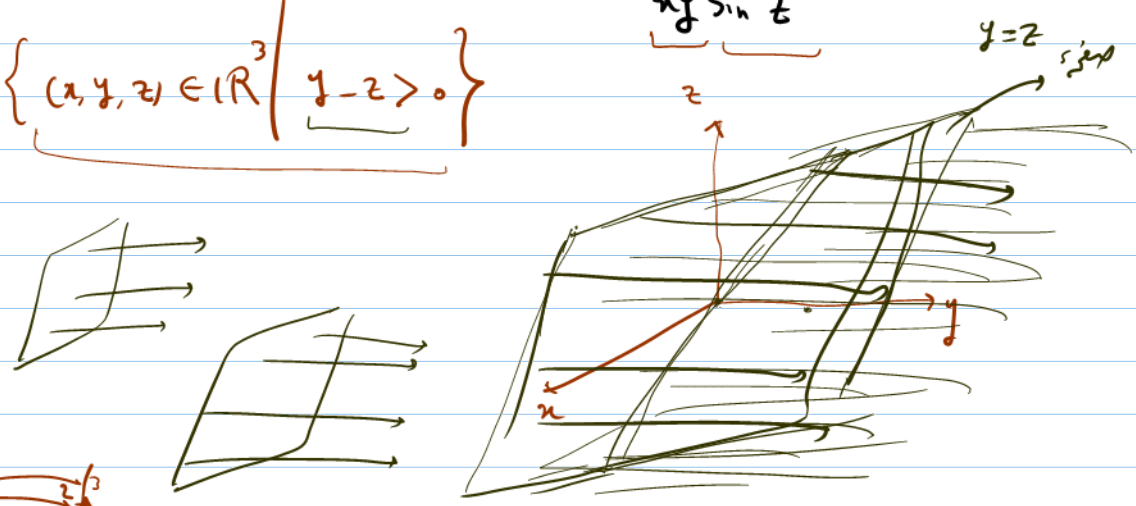


نوع به مرکز، سطح مرکز و غیره

$$T = f(x, y, z)$$

مثال ۱: دانه تابع $f(x, y, z) = \ln(y-z) + xy \sin z$ را بیا به $\mathbb{R}^3$ رسم کنیم

$\text{Dom } f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y-z > 0 \}$

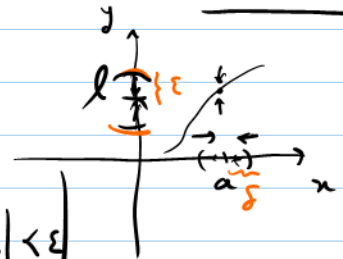


مثال ۲: سطح تراز تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ را رسم کنیم.
 $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ $w = x^2 + y^2 + z^2$

کره واحد: $\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$
 حد یکواحد

یادداشت: (تابع بر متغیر) فرض کنیم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff$

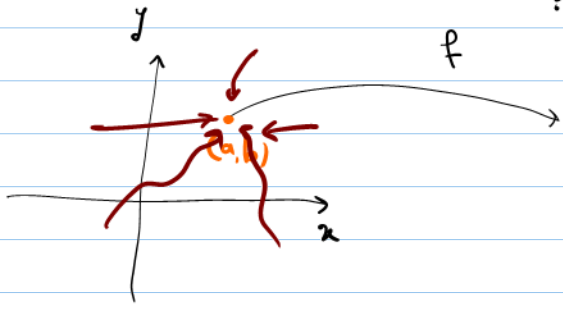


$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-l| < \epsilon)$

مقادیر ϵ به هر اندازه دلخواه به l نزدیک می‌شوند
 به شرطی که مقادیر x به اندازه کافی به a نزدیک شوند.

توجه: مفهوم فاصله برای نزدیک شدن حد نقص کلیه بازه‌ها.

حال فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد:

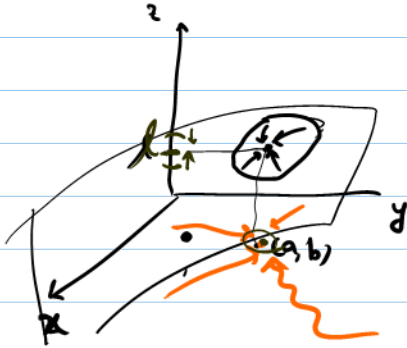


$$(a, b) \in \text{Dom } f$$



هدف تعریف عبارت زیر:

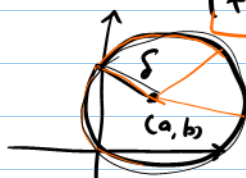
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$$



تعریف مگریم $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$ بر مبنای مقایسه:

$f(x,y)$ به اندازه دلخواه به l نزدیک شود به شرطی که (x,y) به اندازه دلخواه به (a,b) نزدیک شود.

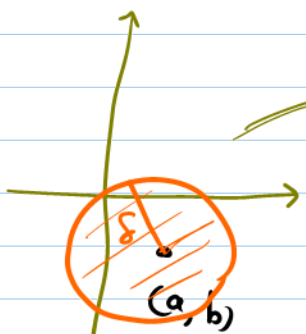
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x,y) \left(0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon \right)$$



تکرار شود یعنی:

$$|f(x,y) - l| < \varepsilon$$

مقایسه با l به اندازه epsilon به شرطی که (x,y) به اندازه delta به (a,b) نزدیک شود.

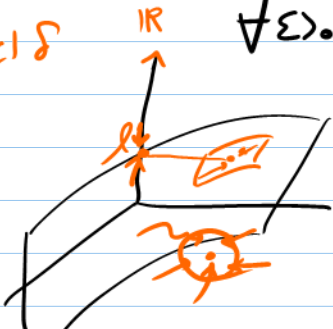


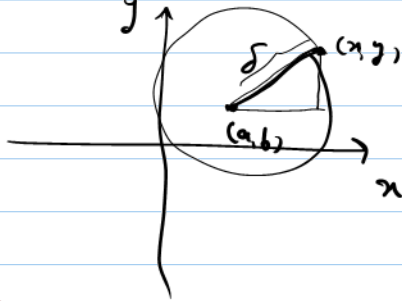
$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

یعنی (x,y) را فاصله کمتر از delta از (a,b) داشته

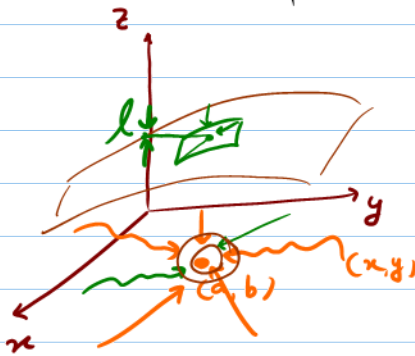
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x,y) \left(0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon \right)$$





$$\delta = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$



یاد آوری تقریب حد توابع در متغیره

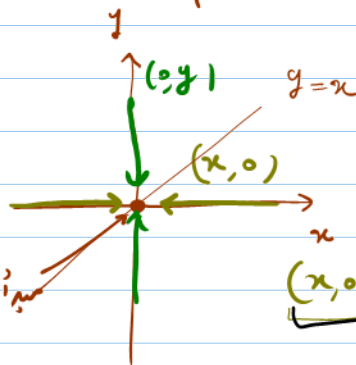
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \downarrow (x,y)$$

$$\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \rightarrow |f(x,y) - l| < \epsilon \right)$$

آنگاه از هر مسیری که (x,y) به (a,b) میل کند، حد تابع

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$$

همان l است.



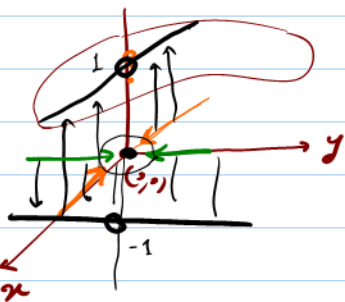
مثال $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ را بررسی کنید.

مشاهده ① روی محور x حتماً به نقطه $(0,0)$ نزدیک می‌شویم. یعنی روی $(x,0)$

به $(0,0)$ نزدیک می‌شویم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

توجه کنید که روی خط $(x,0)$ مقدار تابع ثابت است: $f(x,0) = \frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = 1$

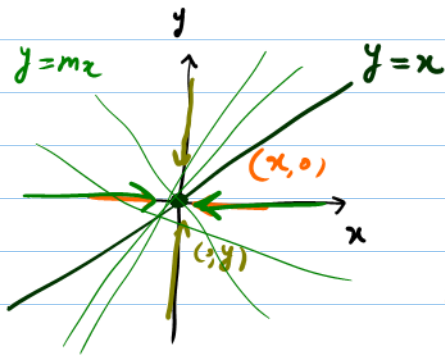


② حال در محور y به $(0,0)$ نزدیک می‌شویم. مقدار تابع در محور y به صورت زیر می‌باشد:

$$f(0,y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

توجه کنید که تابع در $(0,0)$ تقریباً شواست.

در مسیر (n,0) مقدار تابع به 1 میل می کند و در مسیر (0,n) مقدار تابع به 1- میل می کند



$$f(x,0) = 0$$

در این تابع در (0,0) حد ندارد

مثال $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

در مسیر (n,0) مقدار تابع برابر با صفر است و حد تابع نیز در این مسیر صفر است.

در مسیر (0,n) مقدار تابع برابر با صفر است و حد تابع نیز صفر است.

در مسیر (x,x) داریم: $f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$ و حد تابع نیز در این مسیر $\frac{1}{2}$ است.

به طور کلی در هر خط $y=mx$ اگر به (0,0) نزدیک شویم:

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{x^2 m}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

یعنی در هر خط خاص با شیب خاص مقدار تابع به (در آن نزدیک شویم) به اعداد مختلفی نزدیک می شود

سوال فرض کنید تابع f به گونه ای باشد که در هر خط $y=mx$ به سمت صفر حد یکسان داشته باشد. آیا می توان گفت که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f = l$ درست است؟



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3+y^4}$$

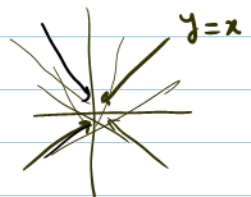
تقریب

در مسیر خاص $y=mx$ این تابع را بررسی می کنیم:

مثال $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

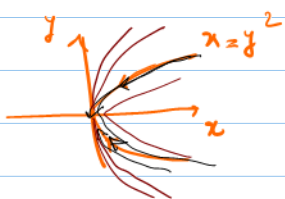
$$f(x, mx) = \frac{x m^2 x^2}{x^2 + m^4 x^2} = \frac{m^2 x^3}{x^2(1+m^4)} = \frac{m^2 x}{1+m^4} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = 0$$

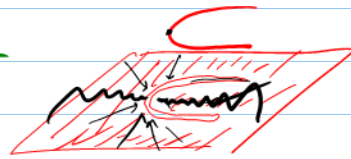
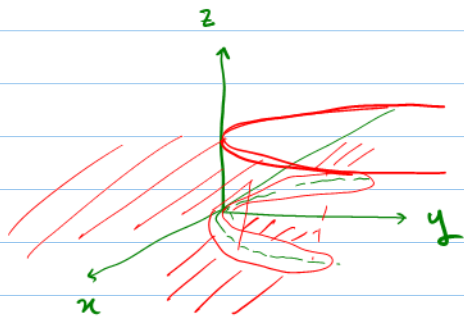


$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$$

مثال مسیر $x=y^2$ را در نظر بگیرید.



بنابر این نتایج محدود نظر مایل (و) محدود (ن) (ن) سطح مختلف $x = my^2$ را در نظر بگیرید



$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & y = x^2 \\ 0 & y \neq x^2 \end{cases}$$

مثال

فرض کنید $\epsilon > 0$ به دلخواه باشد.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

مثال نشان دهید که

هدف پیدا کردن δ به طوری که

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow \left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| < \epsilon$$

از (ب) (x, y) $\sqrt{x^2+y^2}$

$$x^2 \leq x^2 + y^2$$

$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

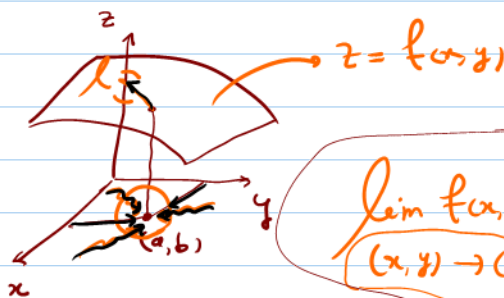
چونکه

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{3(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = 3\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$$

را اِجاء کنید $\sqrt{x^2+y^2}$

با $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ قرار دهیم. اگر $\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \frac{\epsilon}{3}$ آنگاه

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta = 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon \quad \checkmark$$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x, y) \quad \left(0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \rightarrow |f(x, y) - l| < \epsilon \right)$$



مثال نشان دهید که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$



$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$

چون در نزدیکی

$|f(x,y) - L| < \epsilon \Leftrightarrow$

$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon$

$\begin{cases} |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \\ |x|^2 = x^2 \leq x^2 + y^2 \end{cases}$

تغییر ϵ موجب δ می شود

نزدیک δ موجب

$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon$

$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x|^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|f(x,y) - L| < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta < \epsilon$

پایان چگونگی

فرض کنید $\epsilon > 0$ به ما داده شده باشد. قرار دهیم $\delta = \epsilon$. در این صورت اگر $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ آنگاه

$|f(x,y) - L| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \epsilon$

$\left(\begin{array}{l} \epsilon \\ \delta \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{تغییر} \\ \text{نزدیک} \end{array} \left(\begin{array}{l} \epsilon \\ \delta \end{array} \right) \rightarrow \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon$

$\left(\begin{array}{l} \epsilon \\ \delta = \epsilon \end{array} \right) \rightarrow \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| < \sqrt{x^2 + y^2} < \epsilon$

$\sqrt{x^2 + y^2} < x^2 + y^2$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

فرض کنید $\epsilon > 0$ به ما داده شده است. هدف ما پیدا کردن یک عدد δ است به طوری که اگر $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ آنگاه

$$\left| \frac{x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \epsilon$$

چون $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ و $|\sin y| \leq 1$ داریم:

$$\left| \frac{x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 < \epsilon$$

$$\frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2 < \epsilon$$

پس اگر $\delta = \epsilon/2$ انتخاب کنیم، آنگاه $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ آنگاه $\left| \frac{x \sin y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \epsilon$ خواهد بود.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \pm g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f \pm \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f \cdot g = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g} \quad \text{if } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g \neq 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} cf = c \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f$$

نقد و بررسی

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$$

$$f(x,y) = x$$

$$(c,d) \mapsto c$$

مثال

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{2x - y^2 + x^2 y}{1} = 2a - b^2 + a^2 b$$

مثال

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{\pi}{3}, 2)} y \sin\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi/3}{2}\right) = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

تکرار مثال قبل

$$0 \leq \left| \frac{x \sin y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

↓ ↓

0 0

پایان

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

(0,0)

مثال قبل را به یاد دارید :

از عرض تابع یاد شده در (0,0)

تعریف نشده است.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

تابع زیر را در نظر بگیرید :

(0,0) ≠ (x,y)

(0,0) = (x,y) ← 0

در (0,0) پیوسته می‌باشد

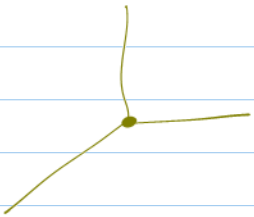
تعریف هر گوییم تابع $z = f(x, y)$ در نقطه (a, b) پیوسته است اگر

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$



مثال تابع $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ در همه نقاط غیر از $(0, 0)$ پیوسته است.
در این نقطه تعریف نشده است.

مثال تابع $g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ را در نظر بگیرید. آیا تابع g در مبدأ پیوسته است؟

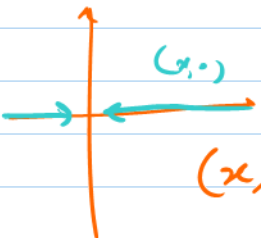


پاسخ برای اینکه تابع g در $(0, 0)$ پیوسته باشد باید داشته باشیم

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) = g(0, 0) = 0$$

یعنی باید داشته باشیم

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$$



اگر محدود قرار بدهیم که y را صفر بگذاریم و x را صفر نکنیم

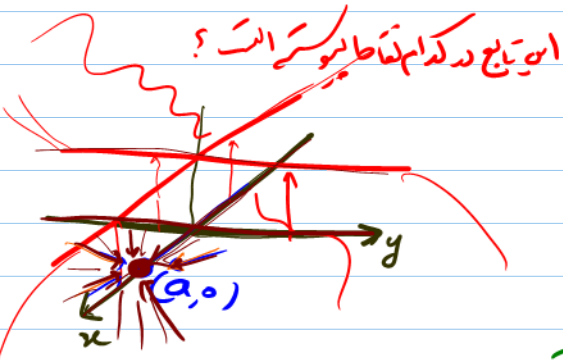
$$\frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1$$

تابع در مبدأ ذکر شده به 1 میل میکند پس در این نقطه پیوسته نیست.

لوح حل مسئله چارچوب حل تمرین دو کلا آمار زاده
چارچوب: داده درس

مثال $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & x \cdot y \neq 0 \\ 1 & x \cdot y = 0 \end{cases}$



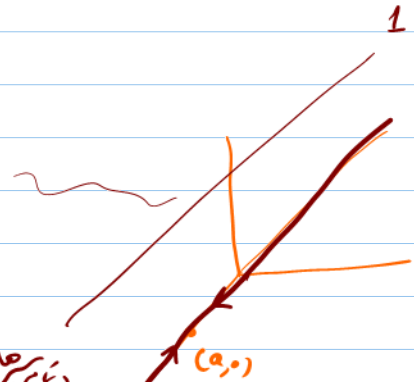
توجه کنید که تابع فوق در تمام نقاط غیر از نقاط $x \cdot y \neq 0$ پیوسته است.

بنابراین در تمام $\mathbb{R}^2$ غیر از خط $x=0$ یا $y=0$ تابع f پیوسته است.

فرض کنید $(a,0)$ نقطه ای روی محور x باشد. آیا تابع f در نقطه $(a,0)$ پیوسته است؟

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1 = f(a,0)$$

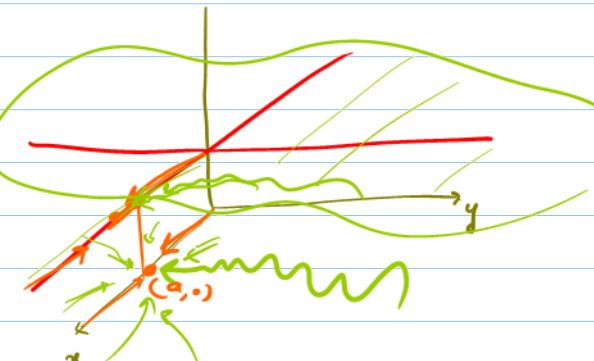
$$(x,y) \rightarrow (a,0) \Rightarrow xy \rightarrow 0$$



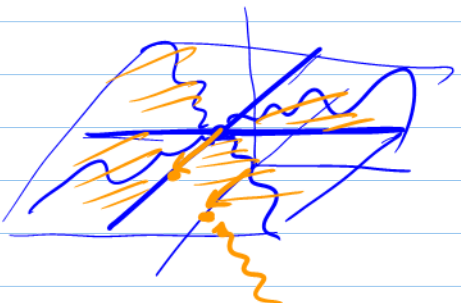
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,0)} f(x,y) = \begin{cases} \lim_{xy \rightarrow 0} \frac{\sin xy}{xy} & \text{در تمام غیر از } y=0 \\ = 1 & \\ 1 & \text{در } y=0 \end{cases}$$

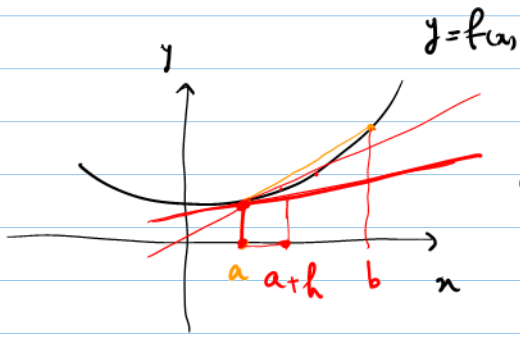
ملاحظه کنید که تابع در تمام نقاط $(a,0)$ و $(0,a)$ پیوسته است.



$$\frac{\sin xy}{xy}$$

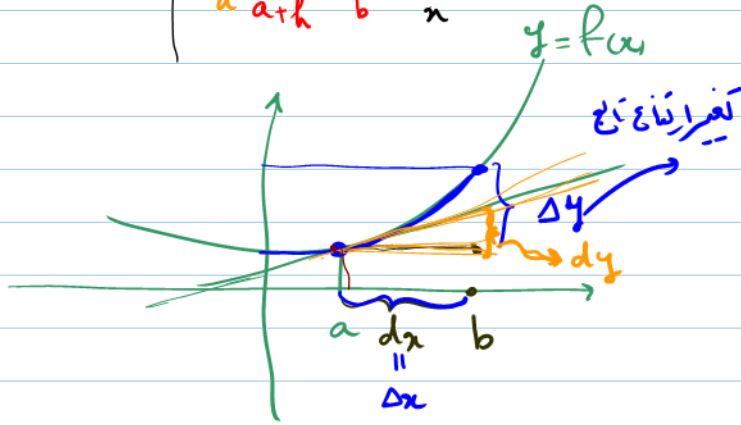


مشتقات جزئی



یا دآدمی فرض کنید $y = f(x)$ بر تابع $y = f(x)$ بر تغییر باشد.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
 شیب خط



$$dy = f'(a) dx$$

تغییرات تابع dy مقدار

$\Delta y =$ تغییرات تابع

$\Delta y \sim dy$: مشتق جزئیات

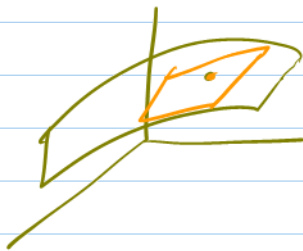
$dy =$ تغییرات خطای بر تابع



سوال 1) برا $z = f(x, y)$ چگونه مشتق دیگر تغییرات را می‌توانیم؟

$$?? \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b+h) - f(a, b)}{h} ??$$

سوال



سوال 2) تغییرات مشتق چیست؟
 آیا به مشتق دماس را جادار؟



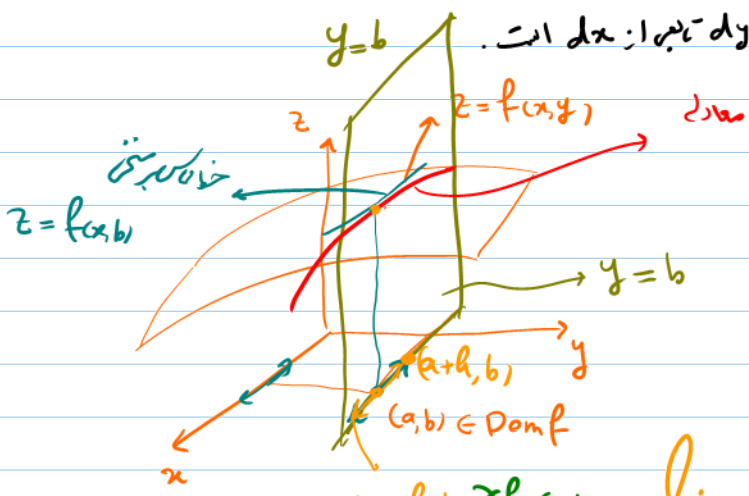
بین خطا

$f'(a)$: شیب خط مماس

$$dy = f'(a) dx$$

$$\lim \Delta y - dy = 0$$

$$\Delta y \approx dy$$



$$z = f(x, y) \text{ مقدار}$$

فرض کنید $z = f(x, y)$ یک تابع دمتغیر باشد.

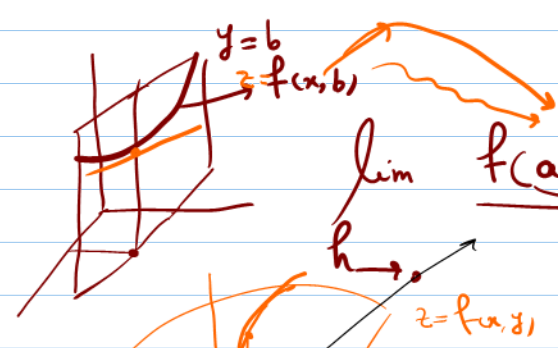
هنگام مطالعه تغییرات بر حسب x وقتی y ثابت است

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(a,b)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

مشتق تابع $z = f(x, y)$ در نقطه $x=a$

round 2

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

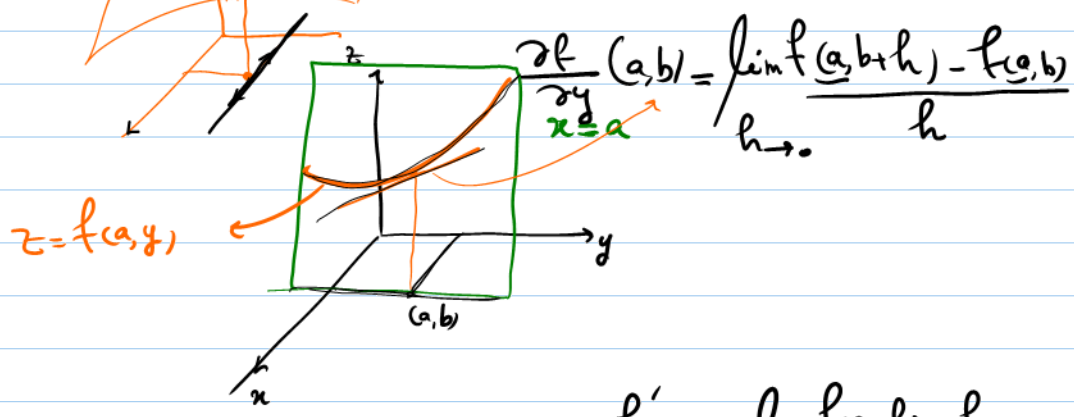


$$z = f(x, y) \\ (a, b) \in \text{Dom } f$$

توضیح مجدد:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

ملاحظات تقریب میزنیم:



$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

یا رادوس

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b}$$

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2 \quad \text{مثال}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = ?$$

$$f(x,y) = \underbrace{x^3}_{\text{مشتق 3 مرتبه}} + \underbrace{x^2}_{\text{مشتق 2 مرتبه}} \underbrace{y^3}_{\text{مشتق 3 مرتبه}} - 2y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 3 \times (2)^2 + 2(2)(1)^3 = \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2x^2 - 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 3(1)^2 \times 2 - 4(1)$$

در جواب مشتق بگیر

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right) \quad \text{مثال}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{1}{1+y}\right) \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$\frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(x \frac{-1}{(1+y)^2}\right) \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$\sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$\left(\frac{f}{a}\right)' = \frac{f'a}{a^2} = \frac{f'}{a}$$

$$f(x,y) = e^{xy} \cos(x+y) \quad \text{تمرین}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi) = ?$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) = ?$$

نویس اگر $z = f(x, y)$ یک تابع دمتغیره باشد در بعضی موارد توان $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ را حساب کرد. یعنی

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\frac{\partial f}{\partial x}: (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}: (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

سوال اول آیا تابع f در $(0, 0)$ پیوسته است؟

مثال
 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

دستر $y = x$ دریم:

$f(x, x) = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) \neq 0$

$\Rightarrow$ پیوسته در $(0, 0)$ نیست

در این مسیر حد تابع معین نیست پس تابع پیوسته نیست.

سوال دوم در مورد محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ ؟

$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ ؟

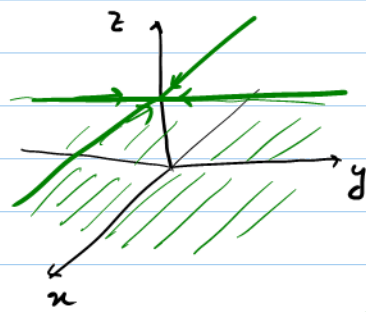
$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$

مشاهده تابع بالا در بعضی $(0, 0)$ پیوسته نیست ولی $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در آن موجودند.

یعنی وجود مشتقات جزئی در یک نقطه موجب پیوستگی تابع در آن نقطه نمیگردد.



مثال

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x=0 \text{ یا } y=0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

بر دو محور، در دو رانج، سه که نایج می‌گردد نیست.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

ارائه مثال

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

مثال

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{-2x^2y + 2y^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ به هر طریقی که بخواهیم.

مثال

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{-2x^2y + 2y^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

مگر

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ?$$

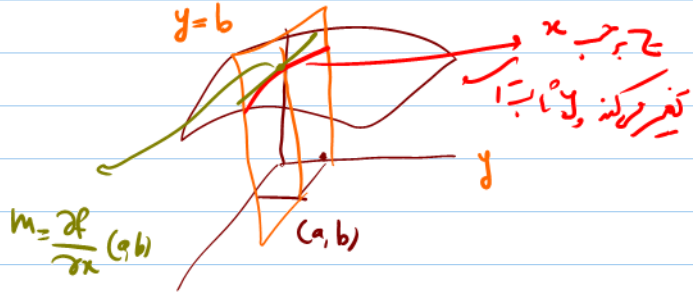
سوال آیا نایج $\frac{\partial f}{\partial x}$ در $(0,0)$ می‌گردد است؟

به نام خدا

یا در آدرس اگر $z = f(x,y)$ به نایج در متغیرها تعریف کردیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b}$$



درجه ناهمبند دیگر را مستقیماً فرض

فرض کنید $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b) = D_1 f(a, b) = D_x f(a, b) = f_1(a, b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b) = D_2 f(a, b) = D_y f(a, b) = f_2(a, b)$$

سوال اول آیا f پیوسته است؟

سوال دوم $f_x(0,0)$ را حساب کنید

سوال سوم $f_y(0,0)$ را حساب کنید

سوال چهارم f_x را به طور کلی حساب کنید

سوال پنجم آیا f_x در $(0,0)$ پیوسته است؟

مثال فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

حالا سوال اول در $y=x$ به سمت مبدأ داریم

$$f(x, x) = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 1 \neq 0 = f(0, 0)$$

پس تابع f پیوسته نیست.

حالا سوال دوم

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

حالا سوال سوم f_x را حساب کنید

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2y(x^2 + y^2) - 2x(2xy)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^2y + 2y^3}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در سوال پنجم به کار می آید

هناك طريقتان لحل هذه المسألة: f_x خذ مشتقها بتابع از (x,y) است.

سوال آیا f_x در (0,0) می‌تواند صفر باشد؟ $y=mx$ را امتحان کنید.

$$f_x = \begin{cases} \frac{-2x^2y + 2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x, mx) = \frac{-2x^2mx + 2m^3x}{(x^2+m^2x)^2} = \frac{-2mx + 2m^3}{x^2(1+m^2)^2}$$

$$= \frac{2x^3(-m+m^3)}{x^4(1+m^2)^2} = \frac{2(-m+m^3)}{x(1+m^2)^2}$$

در $x=0$ این عبارت به بی‌نهایت میل می‌کند و نه به مقدار تابع که صفر است. بنابراین تابع f_x نامرکوست است. $m \neq 1, -1$

خود f در (0,0) می‌تواند صفر باشد / $f_x(0,0)$ / $f_y(0,0)$ هر دو موجودند / f_x در (0,0) می‌تواند صفر باشد / (یعنی در مشتق جزئی مرتبه یک می‌تواند صفر باشد) f می‌تواند صفر باشد

$$f(x) = \sin(x) \quad f'(x) = \cos(x)$$

مثال فرض کنید f بر تابع h متغیر باشد و فرض کنید $z = f(h(x,y))$ تابع از دو متغیر x, y است

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

نکته: در اینجا z تابعی از x و y است.

$$z = F(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \times f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \times f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f'\left(\frac{x}{y}\right) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$y \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

+

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

توجه: $h(x,y) = \frac{x}{y}$ یک تابع متغیر است. $f(x) = \sin x$ یک تابع یک متغیره است.

$$f(h(x,y)) = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

سوال اول آیا f در $(0,0)$ پیوسته است؟

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{سوال}$$

$x = 2y$ $f(2y,y) = \frac{8y^3 - y^3}{4y^2 + y^2} \rightarrow 0$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = ?$

نیاید زیرا $0 = 0$

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2 |x|}{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = 0$ کاملاً مشابه $0 \leq \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq |y|$

بنابراین تابع f در نقطه $(0,0)$ پیوسته است. تمرین حتماً با دو روش دیگر هم ثابت کنید.

سوال دوم $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ادامه سوال

سوال اول $\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)}$ را محاسبه کنید.

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{-y^3}{y^2} - 0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1$$

سوال دوم $f_x(x,y)$ را محاسبه کنید.

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

سوال سوم $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

سوال آیا تابع f_x در $(0,0)$ پیوسته است؟
 $y=0$ $\rightarrow$ $(x,0)$

$$f(x,0) = \frac{x^4}{x^4} \rightarrow 1$$

$x=0$ $\rightarrow$ $(0,y)$

$$f(0,y) = 0 \rightarrow 1$$

در مسیر $(0,0)$ تابع f_x یکر میل نمی کند پس پیوسته نیست.

تمرین آیا f_y در $(0,0)$ پیوسته است؟

مثال فرض کنید z تابعی از x, y باشد و رابطه ضمنی زیر نیز برقرار باشد:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xy z = 1$$

در این صورت $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

از طرفین بر حسب x مشتق میگیریم:

$$3x^2 + \frac{\partial z}{\partial x} \times 3z^2 + 6yz + \frac{\partial z}{\partial x} \times 6xy = 0$$

$z = f(x,y)$
 $z^3 = (f(x,y))^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} (3z^2 + 6xy) = -3x^2 - 6yz$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3x^2 - 6yz}{3z^2 + 6xy}$$

$z = f(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} (a,b) = \frac{-3a^2 - 6b f(a,b)}{3(f(a,b))^2 + 6ab}$$

مثال در مثال اول $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

از طرفین مشتق میگیریم

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xy z = 1$$

$$3y^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 6xz + \frac{\partial z}{\partial y} 6xy = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} (3z^2 + 6xy) = -3y^2 - 6xz$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3y^2 - 6xz}{3z^2 + 6xy}$$

z تابع از x, y است.

$$\frac{\partial (z^3)}{\partial x}$$

$$z = f(x, y)$$

$$z^3 = (f(x, y))^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \times 3 (f(x, y))^2$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \times 3z^2$$

مثال فرض کنید $z = f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$

مسئله معادله خط مماس بر منحنی محل تقاطع سطح f با صفحه $y=1$ در نقطه $x=1$ را بنویسید.

$$\begin{cases} y=1 \\ z - z_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

شیب = ؟

جواب غیب بر روی جواصم کرده.

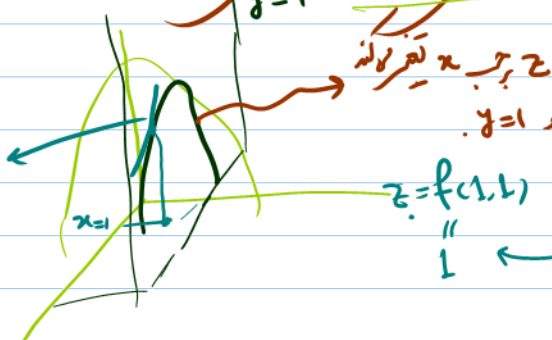
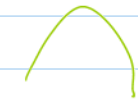
تکرار مثال فرض کنید $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$

$$z = 4 - x^2 - 2y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$$

$$f(1, 1) = 4 - 1 - 2 = 1$$

این معادله خط مماس بر منحنی محل تقاطع سطح f با صفحه $y=1$ در نقطه $x=1$ را بنویسید.



چون z بر حسب x تغییر کند معادله خط مماس به صورت زیر است:

$$f_x(1, 1)$$

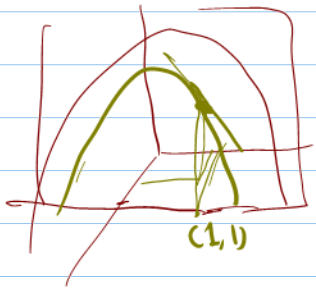
$$z - z_0 = m(x - x_0)$$

$$m = \frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = -2$$

$$z - 1 = -2(x - 1)$$

معادله مماس

ج) معادله خط مماس بر منحنی محل تقاطع دو سطح با هم $x=1$ دارد یعنی $y=1$ بنویسیم.



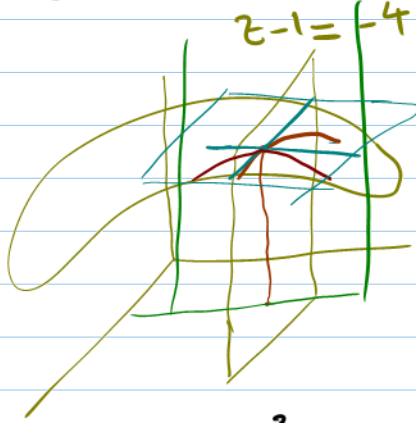
$$\begin{cases} x=1 \\ z-z_0 = m(y-y_0) \end{cases}$$

$$m = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$$

$$z = 4 - x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4y$$

$$z-1 = -4(y-1)$$



مسوالات مثال

مسوالات آیا f در نقطه یکتا است؟

$$\begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\left(\frac{3}{x+y} \right) \sin \left(\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x+y}} \right)}_{\text{کرانه}} = 0$$

مثال فرض کنید $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^3+y^3) \sin \left(\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x+y}} \right)}{\frac{x^2+y^2}{x+y}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

مسوالات $f_x(x,y)$ را محاسبه کنید.

اگر $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow f_x(x,y) = \frac{3x^2 \sin \left(\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x+y}} \right) - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \cos \left(\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x+y}} \right) (x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}$

اگر $(x,y) = (0,0)$ آنوقت $f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x^2}}{x}$

مسوالات آیا تابع f_x در نقطه $(0,0)$ یکتا است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 0$$

میریم $y=0$ را برقرار کنیم پس $(x,0)$:

$$f_x(x,0) = 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^4} \cos \left(\frac{1}{x^2} \right) (x^3)$$

$$= 3x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$$

درجه دراز : $\lim_{x \rightarrow 0} f_x(x,0)$

در میریم $x=0$ حد تابع f_x در نزدیکی f_x یکتا نیست.

تمرین f_y را محاسبه کنید در هر یک از آن آيا f_y هم رفته؟ (دنيا) یوگس است یا نه.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$$

نکته

مثال

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \tan y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

سوال آيا f در (0,0) یوگس است؟
 سوال f_x را محاسبه کنید

سوال آيا f_x در (0,0) یوگس است؟
 سوال f_y را محاسبه کنید

سوال آيا f_y در (0,0) یوگس است؟

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

مسئله اگر $z = f(x, y)$ یک تابع دتغیر باشد آنگاه $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ نیز دتغیر هستند
 و در مورد بار داری حد داشتن آنها یا یوگس بودن آنها می‌پردازد. در واقع توان مشتقات جزئی این تابع را نیز حساب کرد

تابع دتغیر

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

مثال فرض کنید $f(x, y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$

$$f_y = 3x^2 y^2 - 4y$$

$$f_{yy} = 6x^2 y - 4$$

$$f_x = 3x^2 + 2xy^3$$

$$f_{xx} = 6x + 2y^3$$

$$f_{xy} = 6xy^2$$

$$f_{yx} = 6xy^2$$

$$f_{xx} = ?$$

$$f_{xy} = ?$$

سوال دوم در مثال اول f_{yx} و f_{xy} با هم برابر شدند.

سوال آیا این اتفاق برای همیشه f_{yx} و f_{xy} با هم برابر می‌شود.

(در صورتی که درست باشد) ✓
 $\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} \right) (xy)$
 $\downarrow$
 $\frac{x^3y}{(x^2+y^2)^2}$

مثال

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

سوال اول f_x و f_y را می‌یابیم.

$$f_x = \begin{cases} \frac{3x^2y(x^2+y^2) - 2x(x^3y)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0-0}{x} = 0 & (x,y) = (0,y) \end{cases}$$

سوال دوم $f_{xy}(0,0) = ?$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = 0 \quad \checkmark$$

انتخاب f_x
 مرتبه دوم
 مشتق می‌گیریم

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

مثال

$$f_y = \begin{cases} \frac{x^3(2y) - 2y(x^3y)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = 0 & (x,y) = (x,0) \end{cases}$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^4x} = 1$$

نوع دایره‌ساز $f_{yx}(z) \neq f_{xy}(z)$

$$z = x$$

$$\underbrace{f(x, y)} = \underbrace{x} \quad (a, b) \rightarrow a$$

درستی

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} = f_y$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

معادله $x^2 + 2x = 4$ x باید باشد

نوع به معادله که مجهولات یک تابع باشد و در آن اشیاء گفته در مورد : مثال یک تابع $f(x, y)$ باید باشد که $f'(x, y) = f(x, y)$

مثال از معادله در آن اشیاء $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ تابع u به گونه ای باشد که معادله لاپلاس

تمرین نشان بده که تابع $u(x, y) = e^x \sin y$ در معادله لاپلاس صدق نکند.

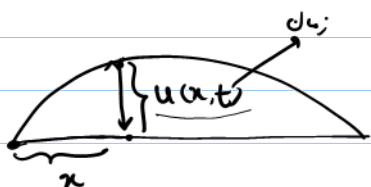
$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

مثال معادله موج

$$f_n(x, y) = (3x^2) \times \frac{1}{3} (x^3 + y^3)^{-\frac{2}{3}}$$

به نظر می رسد که جود دارد

برای f_n : تعریف :

$$\boxed{f'_x(0,0)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$u(x,y) = x^3 + y^3$$
$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

سوال چرا با نرول مستقیم حساب شد؟

مثال $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ از مشتق ندهد!

$$f(x,y) = \sqrt[3]{u(x,y)}$$

$f(x,y) = \sqrt{u(x,y)}$
 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{1}{3} [u(x,y)]^{-2/3}$
 در؟ کند که $\sqrt[3]{t}$ $t = 0$ مشتق می
 نیست.

$$u(x, y) = x^3 + y^3$$

$$h(t) = \sqrt[3]{t}$$

$$h(u, y) = \sqrt[3]{u^3 + y^3}$$

$$(h(w))_x = u_x \times \underbrace{h'(w)}$$

در $u=0$ دبی زیاد ✓

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$f_{xy}(i, j)$, $f_{yx}(i, j)$ متساوی ہوتے ہیں۔

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f_{xx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$f_{xx}(0, 0) = 0$$

$$f_{xy}(0, 0) = ?$$

$$f_{yx}(0, 0) = ?$$

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^3 y^2}{y^4 y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^5}{y^5} = -1$$

$$f_{xx}(x, y) = \begin{cases} \frac{[y(x^2 - y^2) + 2x(xy)](x^2 + y^2) - 2x(xy)(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

بنابراین $f_{xy}(0, 0) = -1$ به طوری که $f_{yx}(0, 0) = +1$ و این

$$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$$



(Clairau)

قضیه کلرو

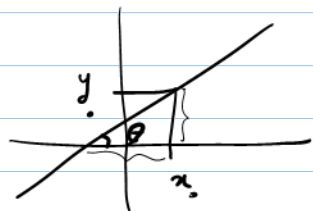
اگر $f_{xy}(x, y)$ و $f_{yx}(x, y)$ در یک دایره به مرکز نقطه (a, b) پیوسته باشند

(اتفاقاً یکسان خواهند بود - می‌توانیم)

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

تساوی

tangent plane صفحه مماس بر منحنی



معادله خط:

یا دامنه

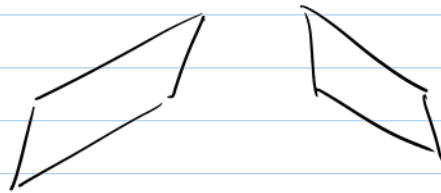
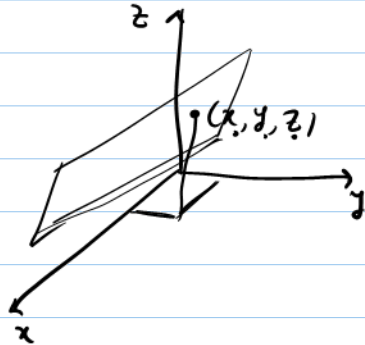
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Delta y = m \Delta x$$

معادله خط

$$ax + by + c = 0$$

توجه: معادله خط را می‌توان به صورت زیر نوشت:



معادله صفحه:

$$z - z_0 = m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0)$$

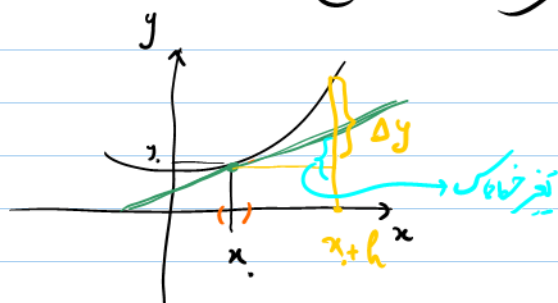
معادله خطی

$$\Delta z = m_1 \Delta x + m_2 \Delta y$$

معادله صفحه:

$$ax + by + cz + d = 0$$

تقریب خطی: در تقارن درجه خطی در نقطه تقریب با تابع در نزدیکی آن نقطه:



تغییرات $\Delta y \approx dy$ تغییرات تابع

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

div

$$\sin x \sim x$$

$$\sin x - 0 \approx 1(x-0) \Rightarrow \sin x \sim x$$

$$f(x+h) - f(x) = h f'(c)$$

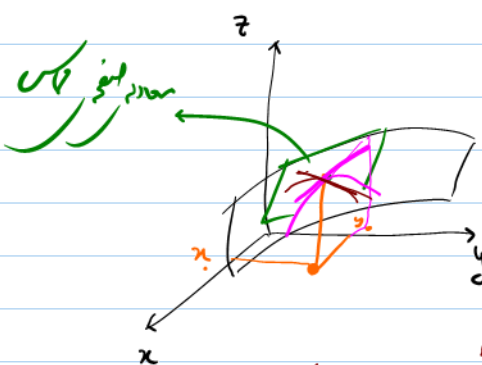
$c \in (x, x+h)$

تقریب مقدار میگیریم

معادله خطی در نقطه

$$z - z_0 = m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0)$$

m_1, m_2 را باید پیدا کنیم



این دو خطی در صفحه خطی واقعند

مشکل: خطی است



درجه خطی که در صفحه باید در معادله معنی پیدا کند

$$y = y_0 \Rightarrow z - z_0 = f_x(x - x_0)$$

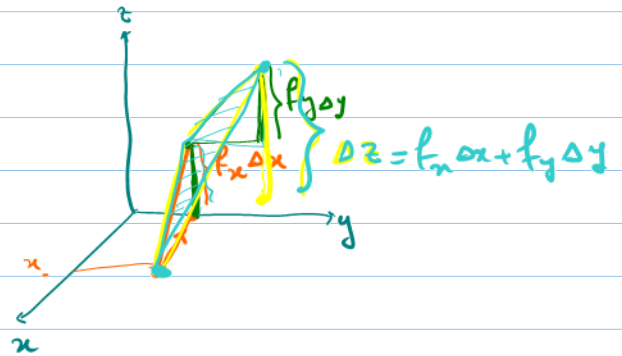
$$x = x_0 \Rightarrow z - z_0 = f_y(y - y_0)$$

نقشه محاوره‌ای سطح در نقطه (x_0, y_0)

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\Delta z = f_x \Delta x + f_y \Delta y$$

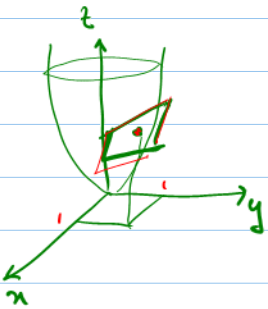
شکل زیر یک شبهه دایره است و آن را تغییر دهید.



تعریف: فرض کنید مستطای فرم $z = f(x, y)$ در (a, b) پیوسته باشند. اگر محاوره‌ای سطح در (x_0, y_0) به صورت زیر است:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

مثال: محاوره‌ای سطح $z = x^2 + y^2$ را در $(1, 1)$ بنویسیم.



$$f_x(x, y) = 2x$$

$$f_x(1, 1) = 2$$

$$f_y(x, y) = 2y$$

$$f_y(1, 1) = 2$$

$$z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$$

$$z = 2x + 2y - 2$$

مثال: محاوره‌ای سطح $z = x e^{xy}$ را در $(1, 0)$ بنویسیم.

: محاوره‌ای سطح در $(1, 0)$

$$f_x = e^{xy} + x y e^{xy}$$

$$f_x(1, 0) = 1$$

$$f_y = x^2 e^{xy}$$

$$f_y(1, 0) = 0$$

$$z - 1 = 1(x - 1) + 0(y - 0) \Rightarrow$$

$$z - 1 = (x - 1) \Rightarrow$$

$$z = x$$

41

$$\Delta z \approx \text{تغییرات صغریا} = (x-1) + y$$

$$z-1 \approx (x-1) + y$$

مقدار تابع با ۰.۰۱ در نقطه $(1, 0.01, 0)$ تخمین بزنید:

$$z-1 \approx (0.01) + 0$$

$$\Delta z \approx dz$$

تغییرات صغریا

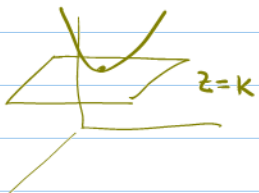
نقطه تابع $z = x + y$ در نزدیکی نقطه $(1, 0)$ تقریباً برابر تابع xe^{xy} است.

تقریب خطی فرض کنید $z = f(x, y)$ یک تابع باشد (f_x, f_y) بسط.

یک تقریب خطی برای تابع f در اطراف نقطه (x_0, y_0) به صورت زیر است:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y$$

مسئله در کدام نقطه، صغریا صفر است؟ $z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$



$$z - z_0 = f_x (x - x_0) + f_y (y - y_0)$$

افق است؟

باید نقطه را پیدا کنیم که در آن f_x, f_y صفر شوند.

$$f_x = 2x - 4y + 12 = 0$$

$$f_y = -4x - 4y - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x = -4 \\ y = 1 \end{matrix}$$

در نقطه $(-4, 1)$ صغریا صفر است.

افق است.

مصادر صغریا:

مردود یکبار آمده

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

اثبات: قضیه سکوود
 قضیه اگر f_{xy} در (a,b) در برعکس
 به سبب باشند آنرا
 $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$

$$f(a+h_1, b+h_2) - f(a+h_1, b) - f(a, b+h_2) + f(a, b)$$

رابطه در حلقه محاسبه کنیم.

طریق اول (با استفاده از قضیه سکوود می‌توانیم)
 $h_2 f_y(a+h_1, c) - h_2 f_y(a, c)$

$$\exists c \quad b < c < b+h_2$$

$$h_2 (f_y(a+h_1, c) - f_y(a, c)) = h_2 h_1 f_{yx}(d, c)$$

$h_1 f_{yx}(d, c)$
 $a < d < a+h_1$
 $h_1 h_2 \rightarrow 0$
 $\sim h_1 h_2 f_{yx}(a, b)$

طریق دوم
 $h_1 (f_x(c, b+h_2) - f_x(c, b))$

$$h_1 h_2 f_{xy}(c, d) \rightarrow f_{xy}(a, b)$$

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

درس امروز مشتق نیویس و دفرانسیل کل

مورد اگر $z = f(x, y)$ (شرایط مطلوب داشته باشد) معادله صفر یکس در برعکس (۲, ۱)

به صورت زیر است:
 $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
 تغییرات صفر یکس

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

معادله صفر یکس تقریباً برای تابع در اطراف نقطه (x_0, y_0) است.

مثال مقدار تقریب تابع $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + e^{2y}}$ در نقطه

$(2, 2, -0.2)$ محاسبه کنید

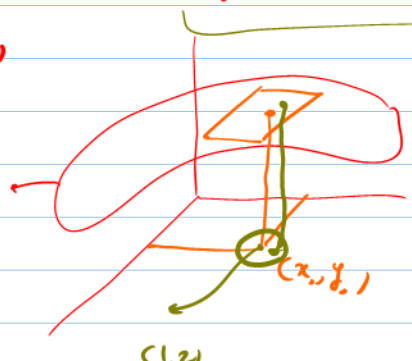

مقدار صفر در محاسبات در نقطه (2, 2) نیویس
 $f_y(x,y) = \frac{2e^{2y}}{2\sqrt{2x^2 + e^{2y}}} = \frac{e^{2y}}{\sqrt{2x^2 + e^{2y}}}$
 $f_y(2,0) = \frac{1}{3}$
 $f_x(x,y) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + e^{2y}}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + e^{2y}}}$

مقدار صفر در محاسبات در نقطه (2, 2)
 $f_x(2,0) = \frac{4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$

$$z - z_0 = f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0)$$

$$z - 3 = \frac{4}{3}(x-2) + \frac{1}{3}(y)$$

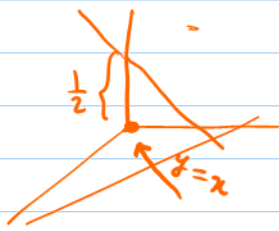
در اطراف نقطه (2, 2)
 $f(x,y) \approx 3 + \frac{4}{3}(x-2) + \frac{1}{3}y = \dots$
2.2 -0.2

تمرین مقدار تقریب $\sqrt{(1.06)^2 + (1.97)^3}$ رابطه نیویس
 $\sqrt{x^2 + y^3}$ (تابع) رابطه نیویس
 در اطراف نقطه (1, 2) خطی از (1, 2) می کشیم

 $z = f(x,y)$
 مقدار ثابت

سوال در بالا گفته شد که اگر تابع f شرایط مطلوب داشته باشد صفر در محاسبات تقریب خوب جدا است.
 آیا همیشه صفر در محاسبات تقریب خوب است؟

مقدار صفر
 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
 $z - z_0 = f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0)$
 در نقطه (0, 0) نیویس

$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$
 $f_y(0,0) = 0$
 $f(0,0) = 0$
 $z = 0$ صفر افته



آیا صغیر $h=0$ تقریب خوب برای تابع است؟
خیر. زیرا در $y=x$ مقدار تابع $\frac{1}{2}$ است.

سوال چرا زمانی صغیر h تقریب خوب است؟

پاسخ تابع $y=f(x)$ را در نقطه x مشتق می‌گیریم و می‌بینیم که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

مشتق $f'(x)$ در واقع یک تغییر است. یعنی خط مماس تقریب خوبی برای تابع است:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0$$

تغییر y = $f'(x)(x-x_0)$
 $dy = f'(x)dx$

تعریف فرض کنید $z=f(x,y)$ یک تابع دو متغیره باشد. می‌گوییم این تابع در نقطه (x_0, y_0) مشتق پذیر (دifferentialiable) است اگر (معادله تقریب خوبی برای تابع باشد):

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h_1 - f_y(x_0, y_0)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

بنابراین وقتی می‌گوییم f در نقطه (x_0, y_0) differentialiable است یعنی اولاً $f_x(x_0, y_0)$ و $f_y(x_0, y_0)$

$$dy = f'_y dx$$

بر دو مورد در اینجا حد بالا برقرار است. در این صورت می‌نویسیم:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = f_x dx + f_y dy$$

(توجه کنید که dz تابع از dx, dy است. dz در هر نقطه (x, y) یک تابع متغیر است)

$$dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$

در نقطه (x, y)

$$dy = f'(x) dx$$

$$dz = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

توجه

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

مثال فرض کنید $z = x^2 + 3xy + y^2$ dz را حساب کنید.

$$dz = f_x dx + f_y dy \Rightarrow dz = (2x + 3y) dx + (3x + 2y) dy$$

اگر x از 2 به 2.05 و y از 3

به 2.9 تغییر کند dz و dz را حساب کنید.

$$dz = 2dx + 3dy$$

در نقطه $(1, 0)$

$$\begin{cases} dz = 0.6449 \\ dz = 0.65 \end{cases}$$

مثال نشان دهید که تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

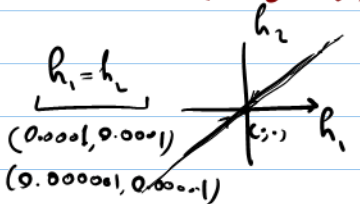
$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h}$$

$$f_y(0, 0) = 0$$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y) - h_1 f_x(x, y) - h_2 f_y(x, y)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h_1, h_2) - 0 - h_1 f_x(0, 0) - h_2 f_y(0, 0)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} \neq 0$$



نویسنده که $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} \neq 0$ زیرا در $h_1 = h_2$ مقدار $\frac{1}{2}$ است

در در این صورت برابر با $\frac{1}{2}$ است. یعنی تابع مورد نظر در (0,0) مشتق نپذیرد.

- نویسنده میگوید که تابع f در (a,b) موجب مشتق نپذیرد.
- ① و در $f_n(x,y), f_g(x,y)$ موجب مشتق نپذیرد.
 - ② اگر تابع مشتق نپذیرد میگویند (ج به آدین مرصع)
 - ③ (یعنی اگر تابع میگویند نپذیرد، مشتق نپذیرد)

مثال تابعی که تابع زیر در مبدأ مشتق نپذیرد.

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{|x|} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 \sin \frac{1}{|y|}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{|y|} = 0$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \begin{cases} f_x(0, 0) = 0 \\ f_y(0, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0, 0) - h_1 f_x(0, 0) - h_2 f_y(0, 0)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{(h_1^2 + h_2^2) \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \right) \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

صفر $\times$ صفر = صفر

مثال $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ در مبدأ مشتق می‌گردد.

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} = 1$$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0, 0) - h_1 f_x(0, 0) - h_2 f_y(0, 0)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt[3]{h_1^3 + h_2^3} - h_1 - h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \stackrel{?}{=} 0$$

$$h_1 = h_2 \quad \frac{\sqrt[3]{2h_1^3} - 2h_1}{\sqrt{2}h_1} \rightarrow 0$$

در $h_1 = h_2$ حد فوق صفر نشود.

معمول اگر $f_x(x, y)$ و $f_y(x, y)$ پیوسته باشند و

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y) - h_1 f_x(x, y) - h_2 f_y(x, y)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

تکونیم تابع f دیزانسی نوزات و

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

دیزانسی نوزات

مرو کړتاه $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(a+h_1, b+h_2) - f(a, b) - f_x(a, b)h_1 - f_y(a, b)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$



قضیه: اگر f_x و f_y در یک نقطه (a, b) پیوسته باشند، آنگاه f دیزانسی نوزات است. (اگر علاقه مند به اثبات این قضیه هستید، لطفاً کتاب ریاضیات را ببینید)

مثال: تابع $f(x, y) = x e^{xy}$ در تمام نقاط دیزانسی نوزات است.

$$f_x = e^{xy} + x y e^{xy}$$

پیوسته

$$f_y = x^2 e^{xy}$$

پیوسته

$$dz = (e^{xy} + x y e^{xy}) dx + (x^2 e^{xy}) dy$$

تمرین: نشان دهید تابع زیر در مبدأ مشتق پذیر است در حاکه f_x و f_y در مبدأ
یوگستر نیستند.



$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

نکته: اگر f بر تابع دایره‌ای z با $z = (0,0)$ مشتق پذیر است. اما فقط در $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مبدأ
یوگستر نیستند.

نتیجه: اگر $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در (a,b) یوگستر باشند $\Rightarrow f$ مشتق پذیر است $\Rightarrow f$ یوگستر است.

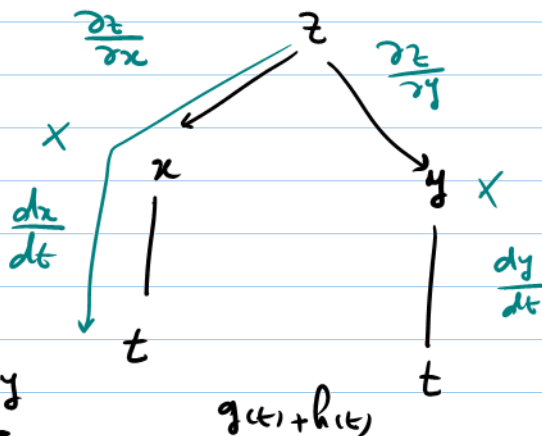
قاعده زنجیره

$$t \xrightarrow{x} x(t) \xrightarrow{y} y(x(t))$$

یا دایره

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dx} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right) = x'(t) \times y'(x(t))$$

حال فرض کنید z تابع از x و y باشد: $z = f(x,y)$



و x و y هر دو تابع از t باشند

$$x = g(t)$$

$$y = h(t)$$

در این صورت z تابع از t است:

$$z = f(x,y) = f(g(t), h(t))$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

نیز برای زمان $\frac{dz}{dt}$ را می‌توانیم بدست آوریم:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

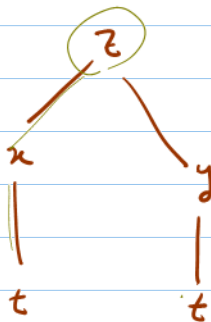
فرض کنیم $z = f(x, y)$ یک تابع دینامیک و (x, y) تابعهای آن باشد.

هم چنین فرض کنیم $x = g(t)$
 $y = h(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right)$$

آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial x} (g(t), h(t)) g'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} (g(t), h(t)) h'(t)$$



$$z = x^2 y + 3xy^4$$

$$x = \sin 2t$$

$$y = \cos t$$

$$z(t) = (\sin 2t)^2 \cos t + 3(\sin 2t) \cos^4 t$$

$$\frac{dz}{dt} = ?$$

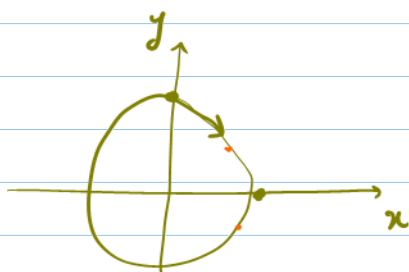
$$z'(t) = \dots$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$= 2(2xy + 3y^4) \cos 2t + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t)$$

$$= 2(2 \sin 2t \cos t + 3 \cos^4 t) \cos 2t + ((\sin 2t)^2 + 12 \sin 2t \cos^3 t)(-\sin t)$$

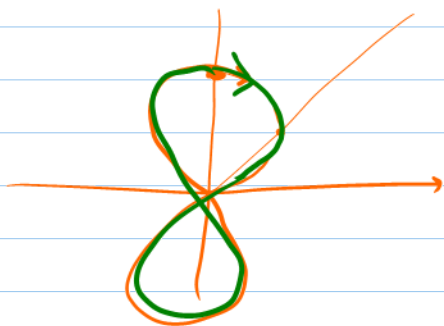
مسئله: ما در فضای دو بعدی داریم $(\cos t, \sin t)$ را می‌توانیم به صورت (x, y) بنویسیم.



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$t = 0$$

$$t = \pi/2$$



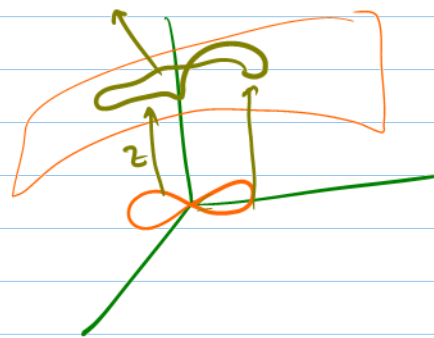
برای امتحان $(\sin 2t, \cos 2t)$ را رسم کنید. (ن)

0, $\frac{\pi}{2}$, π

1, $\frac{\pi}{4}$

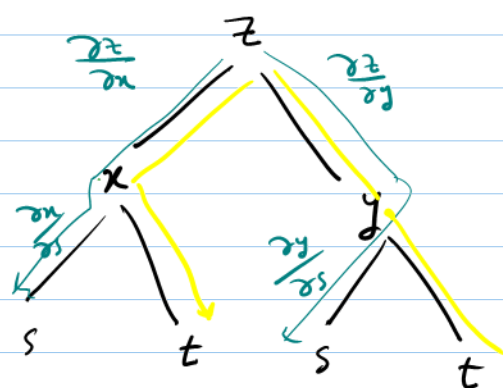
$$z = f(x, y)$$

$$(x, y) = (\sin 2t, \cos 2t)$$



فرض کنید z تابع از x, y باشد، $y = h(s, t)$, $x = g(s, t)$

تعیین ماکسیمم و مینیمم

$$z = f(x, y)$$


$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$z = e^{\sin(s^2 t)}$$

$$z_s = ?$$

$$z_t = ?$$

$$z = e^{\sin y}$$

$$x = s^2 t$$

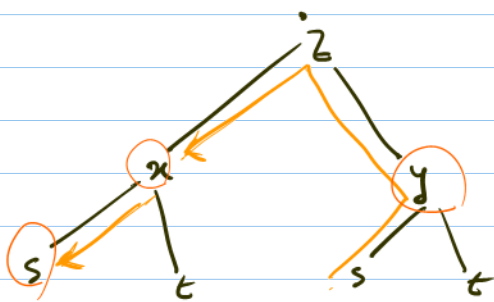
$$y = s^2 t$$

در

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$e^{s^2 t} \sin(s^2 t) t + e^{s^2 t} \cos(s^2 t) (2st)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \left(e^{\sin y} \right) (2st) + \left(e^{\cos y} \right) s^2$$



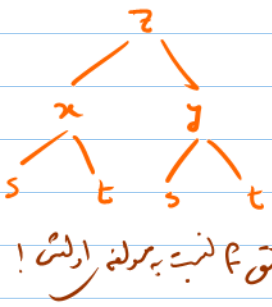
$$z = f(x, y) \Rightarrow z = f(g(s, t), h(s, t))$$

$$x = g(s, t)$$

$$y = h(s, t)$$

$$z = k(s, t)$$

نکته اگر f بر تابع متغیره باشد و سه متغیره f متغیره مستقیم f بر حسب متغیره z است. مثلاً از $\frac{\partial f}{\partial y}$ متغیره مستقیم f بر حسب متغیره z است.



مثال فرض کنید $g(s, t) = f(\underbrace{s^2 - t^2}_x, \underbrace{t^2 - s^2}_y)$ نشان دهید که

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} (2s) + \frac{\partial f}{\partial y} (-2s) \right] \quad \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} (-2t) + \frac{\partial f}{\partial y} (2t)$$

متغیره f نسبت به متغیره z است!

$$t \frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} 2st + \frac{\partial f}{\partial y} (-2st) \quad s \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} (-2st) + \frac{\partial f}{\partial y} (2st)$$

$$\Rightarrow t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

کیده جز لیگ نکته: $z = f(\underbrace{x^2}_u, \underbrace{x+2y}_v)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[\frac{\partial f}{\partial u} (2x) + \frac{\partial f}{\partial v} (1) \right]$$

متغیره f نسبت به متغیره z است!

متغیره f نسبت به متغیره z است!

$$f(u, v) = \underbrace{x^2 + y^2}_{z}$$

مثال: $z = f(\underbrace{x^2}_u, \underbrace{x^2 + y^2}_v) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} (2x) + \frac{\partial f}{\partial v} (2xy)$

متغیره f نسبت به متغیره z است!

این مثال را می‌توانید برای خودتان امتحان کنید.

$$f(u, v) = u^2 + v^2$$

$$u = xy \quad v = x^2 y$$

$$z = f(u(x, y), v(x, y))$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} =$$

مثال فرض کنید f یک تابع دمتغیره باشد (x, y)

(نقشه) $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

فرض مستقیم f نسبت به x و y برابر باشند f نسبت به x و y

قرار دهیم $g(x, y) = f(x+y, x-y)$ $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (-1) = 0$

$f(x)$ دمتغیره

$x = ax + by$

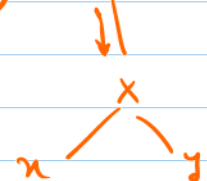
مثال فرض کنید $z = f(ax - by)$ $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$b \frac{\partial z}{\partial x} + a \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial z}{\partial x} = a f'(ax - by)$

$\frac{\partial x}{\partial x} x f'(x)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -b f'(ax - by)$



(نقشه) مثال فرض کنید به این معنی تابع از x و y است و رابطه ضمنی زیر برقرار است:

$f\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2 - xy$ $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

از درون معادله بالا به دست می آوریم:

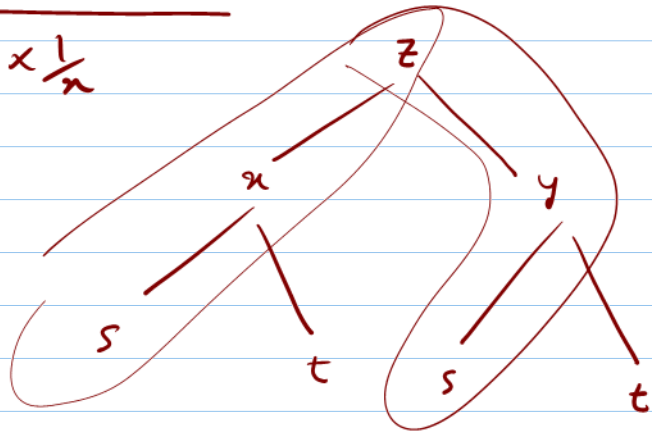
$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial x}{\partial z} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{z}{x} \right) = 0$

$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial x}{\partial z} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{z}{x} \right) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial x}{\partial z} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{z}{x} \right) = 0$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} \right] = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{1}{x} \times \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \dots$$



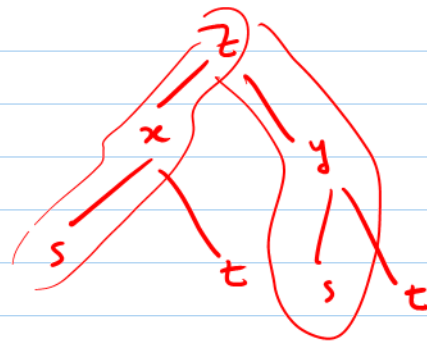
f_x

f_y

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z}}$$

ادانه دس



Implicit

مشتق گیری ضمنی

مشتق نوری

مبدأ فرض کنیم که تابع از x و y باشد و رابطه زیر برقرار باشد:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

در این مورد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید. از دوطرف بر حسب x مشتق می گیریم:

$$3x^2 + \frac{\partial z}{\partial x} 3z^2 + (6yz + \frac{\partial z}{\partial x} 6xy) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} (3z^2 + 6xy) = -6yz - 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-6yz - 3x^2}{3z^2 + 6xy}$$

مبدأً $\frac{\partial z}{\partial y}$ محاسبه می شود.

مثال

فرض کنید z تابعی از x و y باشد

$$f\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 1$$

یک رابطه می‌باشد

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$$

نتیجه درستی

~~$z = f(xy, x-y)$~~

از طرف دیگر مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{z}{y} + \frac{xy}{y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{z}{x} + \frac{xy}{y} \right] = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \dots \Rightarrow \left(\frac{z}{x^2} + \frac{1}{y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{z}{xy} + 1 \right) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\left(\frac{z}{x^2} + \frac{1}{y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{z}{xy} + 1 \right) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \dots$$

مثال فرض کنید z تابعی از x و y باشد، $z = f(xy, z)$ نتیجه درستی

$$\frac{\partial z}{\partial x} y - \frac{\partial z}{\partial y} x = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(xy, z) \left(yz + \frac{\partial z}{\partial x} (xy) \right)$$

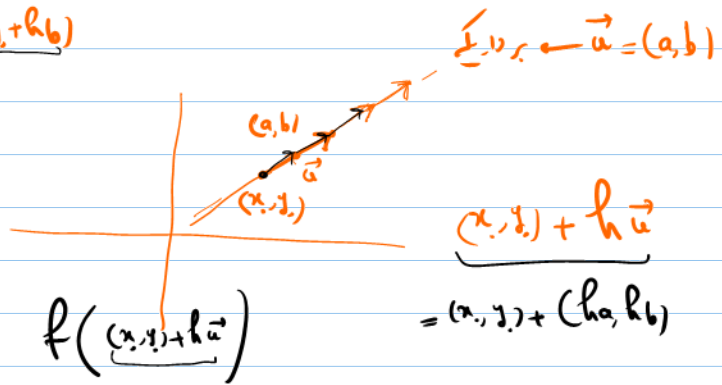
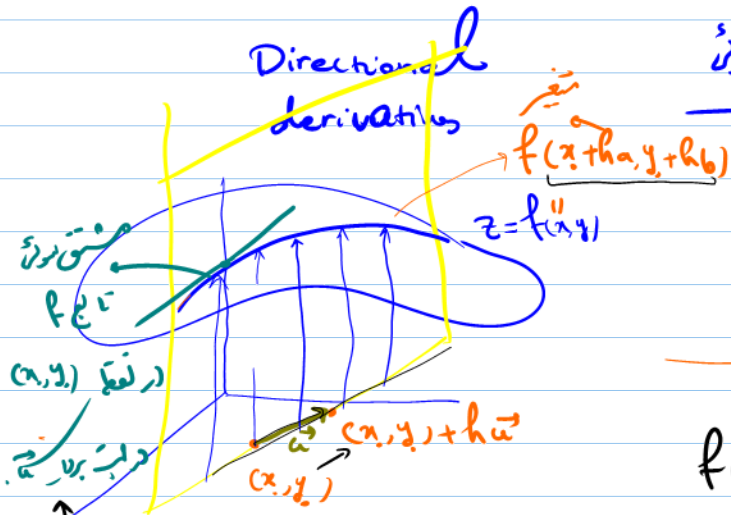
$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(xy, z) \left(xz + \frac{\partial z}{\partial y} (xy) \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f'(xy, z) yz}{1 - f'(xy, z) xy}$$

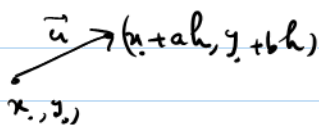
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f'(xy, z) xz}{1 - f'(xy, z) xy} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} y - \frac{\partial z}{\partial y} x = 0$$

Directional
derivative

مشتق سوزنی

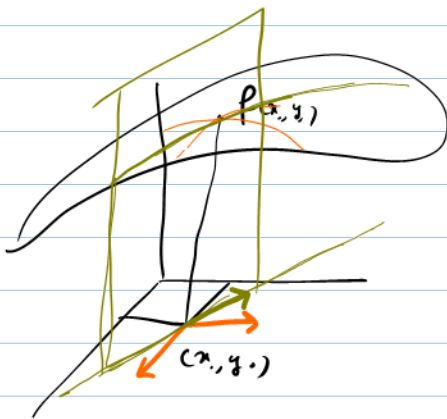


$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah, y+bh) - f(x, y)}{h}$$



$$\vec{u} = (1, 0) \Rightarrow D_{\vec{u}} f(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = f_x(x, y)$$

$$\vec{u} = (0, 1) \Rightarrow D_{\vec{u}} f(x, y) = f_y$$



$$(x, y) + h\vec{u}$$

$$= (x+ha, y+hb)$$

مثال مشتق سوزنی تابع $f(x, y) = x^2 + 4xy$ را در نقطه $(1, 2)$ و درجهت بردار $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ حساب کنید.

$$D_{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} f(1, 2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h\frac{1}{2}, 2+h\frac{\sqrt{3}}{2}) - f(1, 2)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{h}{2})^2 + 4(1+\frac{h}{2})(2+h\frac{\sqrt{3}}{2}) - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+\frac{h^2}{4}+h+4(2+\frac{h\sqrt{3}}{2}+h+\frac{h^2\sqrt{3}}{4})-9}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(\frac{h}{4}+1+2\sqrt{3}+4+h\sqrt{3})}{h} = 5+2\sqrt{3}$$

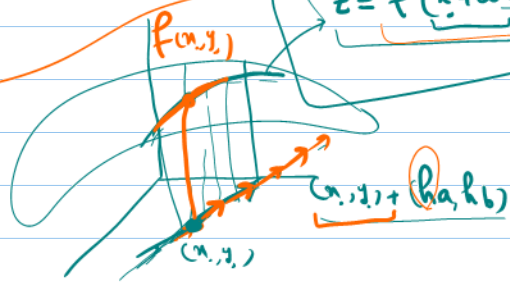
دوباره به تعریف مشتق سوئی توجه کنید:

توجه

$$Df(\vec{u})_{\vec{u}=(a,b)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah, y+bh) - f(x, y)}{h}$$

مشتق تابع

در اینجا $z = f(x, y)$ و $z(h) = f(x+ah, y+bh)$



$z(h) = f(x+ah, y+bh)$

در اینجا $z(0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(h) - z(0)}{h} = z'(0)$$

پس $Df(\vec{u})_{\vec{u}=(a,b)}$ در واقع مشتق تابع

$$z = f(x+ah, y+bh)$$

در نقطه $h=0$ است. بنابراین

$$Df(\vec{u})_{\vec{u}=(a,b)} = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b$$

توجه: فرض کنید $z = f(x, y)$ یک تابع دینامیک باشد.

آنجا که مشتق تابع f در نقطه (x, y) در راستای بردار $\vec{u} = (a, b)$ برابر است:

$$Df(\vec{u})_{\vec{u}=(a,b)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah, y+bh) - f(x, y)}{h} = f_x(x, y) a + f_y(x, y) b$$

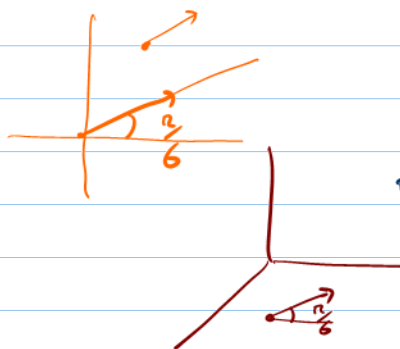
مثال: فرض کنید $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$. مشتق سوئی f در جهت بردار $\vec{u}$

با افت زوایه $\frac{\pi}{6}$ موازی با محور y است. در نقطه $(1, 2)$.

$$\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$Df(\vec{u})_{\vec{u}=(a,b)} = f_x(x, y) \frac{\sqrt{3}}{2} + f_y(x, y) \frac{1}{2} =$$

$$\Rightarrow Df(\vec{u})_{\vec{u}=(a,b)} = (3x^2 - 3y) \frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y) \frac{1}{2}$$



مثال جالب: با استفاده از مشتق هارو نشان دهید که تابع زیر در (0,0)

مشتق می‌گرفت!

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \tan y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a,b)
(0,0)

فرض کنید $u = (a,b)$ یک بردار کوچک باشد

$$\begin{cases} f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \\ f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D_u f(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+ah, 0+bh) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 h^2 \tan bh}{(a^2 + b^2) h^2 \times h} = \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan bh}{h} =$$


$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin bh}{\cos bh \times h} = b$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 \tan bh}{(a^2 + b^2) h} = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$$

توجه کنید با استفاده از تعریف مشتق هارو می‌بینیم که تابع f در نقطه (0,0)

$$\cdot \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$$

در جهت هر بردار $u = (a,b)$ مشتق می‌گرفت. مشتق آن برابر با

دوم: اگر تابع f در نقطه (0,0) مشتق می‌گیرد آن‌گاه باید برابر جهت (a,b) داشته باشیم:

$$D_u f(0,0) = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} = f_x(0,0)a + f_y(0,0)b = 0 + 0$$

می‌بینیم که با این که تابع f در جهات مشتق می‌گرفت، به طرک مشتق می‌گرفت زیرا اگر مشتق می‌گرفت

$$D_u f = f_x a + f_y b$$

با این داریم:

"
(a,b)

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

جمع نہیں

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z = f(x, y)$$

$$dz = f_x dx + f_y dy$$



$$D_{\vec{a}} z = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah, y+bh) - f(x, y)}{h} \stackrel{\text{مشتق}}{=} f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

ف: مشتق:

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y) - h_1 f_x(x, y) - h_2 f_y(x, y)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

اگر f_x, f_y حول (a, b) پیوستہ ہوں اور f در (a, b) مشتق پذیر

(دکلو) - اگر f_{xy} اور f_{yx} حول (a, b) پیوستہ ہوں تو

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

- اگر f در (a, b) مشتق پذیر ہے تو

- در f_x, f_y ہر جگہ پیوستہ ہوں تو مشتق پذیر ہے

- اگر تابع در تمام جگہ مشتق پذیر ہے (لیے ہر مشتق پذیر) آں نیت!

- اگر f مشتق پذیر ہے (در تمام جگہ) مشتق پذیر ہے

$$D_{\vec{a}} = f_x a + f_y b$$

$\vec{a} = (a, b)$

- اگر f مشتق پذیر ہے (بہاں معنی نیت) مشتق پذیر ہے (در تمام جگہ) بہم برابر

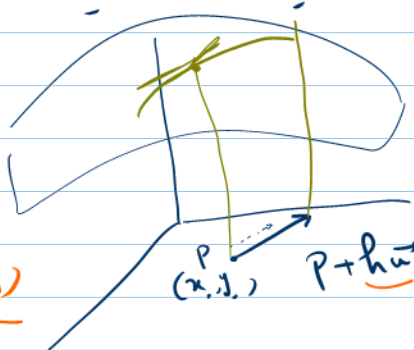
اولین جعبه از عمده : یادآوری : برای مطالعه نرخ تغییرات جهت بردار خاص ،

از مشتق بردار استفاده میکنیم.

(x, y) نقطه
بردار $\vec{u} = (a, b)$

$z = f(x, y)$

$DF(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ha, y+hb) - f(x, y)}{h}$
 $\vec{u} = (a, b)$



تفسیر : اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد آنگاه در تمام جهات مشتق میگیرد به علامت :

$DF(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$
 $\vec{u} = (a, b)$

آیا این تابع در نظر میگیریم؟

$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ را در نظر بگیرید.
 $(0, 0) + h(a, b)$

مثال : مشتقات بردار تابع

در نظر بگیرید

پیشدار : یک مقدار از تابع

$DF(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+ha, 0+hb) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^3a^3 + h^3b^3}}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[3]{a^3 + b^3} = \sqrt[3]{a^3 + b^3} \Rightarrow$ مشتق تابع f در جهت بردار (a, b)
در نظر بگیرید $(0, 0)$ برابر است با $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$

$f_x(0, 0) = \vec{i} = (1, 0)$ مشتق f در جهت بردار $(1, 0) = 1$

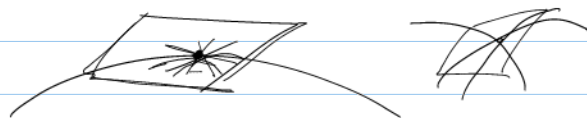
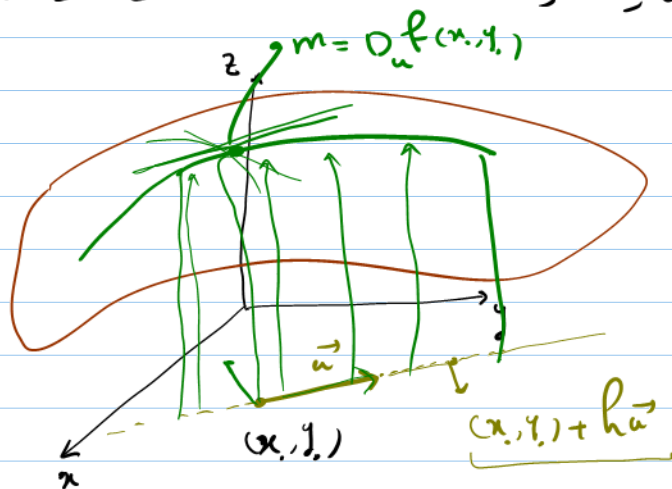
$f_y(0, 0) = \vec{j} = (0, 1)$ مشتق f در جهت بردار $(0, 1) = 1$

توجه کنید که اگر f در نظر بگیرید $(0, 0)$ در نظر میگیریم به علامت : (a, b) داریم :

$DF(0, 0) = f_x(0, 0)a + f_y(0, 0)b$
 $\vec{u} = (a, b)$

$$\sqrt[3]{a^3 + b^3} \stackrel{?}{=} a + b$$

وابعاد که عبارت از آن درجه به است (۹، ۶) برقرار نیست. پس تابع f در (۰، ۱) دلفرانیس پذیر نیست.



مثال میزان تغییرات تابع $f(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ را در نقطه $(0, 1)$ درجه به برابر

f مشتق پذیر است.

$$\vec{a} = i + j$$

$$\vec{a} = 3i$$

$$\vec{a} = j - 2i$$

$$\vec{a} = i + 2j$$

$$D_{\vec{a}} f = f_x a + f_y b$$

(۹، ۶)

$$f_x = 2y^3 + 2xy^2$$

$$f_y = 4y^3 + 6xy^2 + 2x^2y$$

$$f_x(0, 1) = 2$$

$$f_y(0, 1) = 4$$

$$Df(0, 1) = \frac{2 \times 1 + 4 \times 2}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$$

$$D_{\vec{a}} f = f_x a + f_y b$$

$$= (f_x, f_y) (a, b)$$

$$D_{\vec{a}} f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) \cdot \vec{a}$$

مورد: اگر f دلفرانیس پذیر باشد.

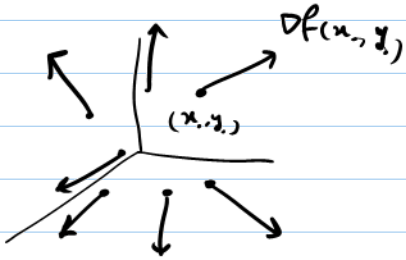
$$\text{def } \nabla f = (f_x, f_y)$$

$\vec{u}$ Δ f ∇ f ∇ f

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}$$

رسمی تر:



$$\nabla f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (\cos x + y e^{xy}, x e^{xy}) \quad \text{مثال}$$

$$\nabla f(0, 1) = (2, 0)$$

$$P(2, -1) \quad \text{مثال} \quad \text{مشتق درجه 2} \quad f(x, y) = x^3 y^2 - 4y$$

$$v = 2i + 5j \quad \text{درجه 2 بردار} \quad \text{باید}$$

$$\nabla f = (2x^2 y^2, 3x^3 y - 4)$$

یکه نیست!

$$\nabla f(2, -1) = (-4, 8)$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{29}} (2, 5)$$

$$D_{\vec{u}} f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{29}} [(-4, 8) \cdot (2, 5)] = \dots$$

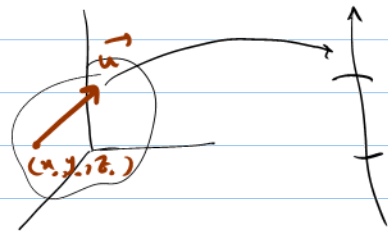
تعیین بردار گرادیان

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

$$w = f(x, y, z)$$

$$(x, y, z) + h(a, b, c)$$



$$D_{\vec{u}} f(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + ah, y + bh, z + ch) - f(x, y, z)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x, y, z) + h(a, b, c)) - f(x, y, z)}{h}$$

$$\nabla f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$$

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u} \quad (\text{اگر } f \text{ مشتق پذیر باشد})$$

$$\lim_{h_1, h_2, h_3 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_1, y+h_2, z+h_3) - f(x, y, z)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} = \frac{h_1 f_x(x, y, z) + h_2 f_y(x, y, z) + h_3 f_z(x, y, z)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}} = 0$$

ف مشتق پذیر است بر مبنای:

$$Df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

$$f(x, y, z) = x \sin yz$$

مثال

$$\vec{v} = 2i + 2j - k$$

در جهت بردار $(1, 3, 0)$

$$\vec{u} = \frac{(1, 2, -1)}{\sqrt{6}}$$

مشتق f را بگردانید
محاسبه کنید.

$$D_{\vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u}$$

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (\sin yz, xz \cos yz, xy \cos yz)$$

$$\nabla f(1, 3, 0) = (0, 0, 3)$$

$$D_u f = \underbrace{\nabla f \cdot \vec{u}} = \frac{(0, 0, 3) \cdot (1, 2, -1)}{\sqrt{6}} = \frac{-3}{\sqrt{6}}$$

دقت کنید: گفتیم که اگر تابع f مشتق پذیر باشد:

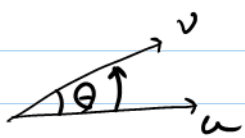
$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u} \quad \text{دشیره} \quad f_x a + f_y b \quad u = (a, b)$$

$$\text{نارینه سین برادر کرادیک برادر} \quad f_x a + f_y b + f_z c \quad u = (a, b, c)$$

$$|\nabla f| |\vec{u}| \cos \theta$$

یادآوری فرض کنید $\vec{u}, \vec{v}$ دو بردار باشند

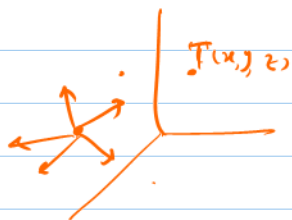
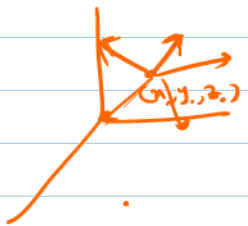
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$



$$D_u f = \nabla f \cdot u = |\nabla f| \cos \theta$$

سوال فرض کنید $w = f(x, y, z)$ یک تابع متغیره مشتق پذیر باشد

بنابراین ما در تمام جهات مشتق میگیریم. در کدام جهت بیشترین تغییرات f حاصل میگردد؟



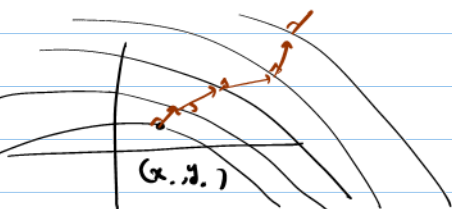
تغییر (x, y, z)

در جهت بردار گرادیان (یعنی وقتی $\theta = 0$) تابع حداکثر تغییرات را در موردی از این تغییرات پیدا میکند
و در خلاف بردار گرادیان ($\theta = \pi$) تابع حداقل تغییرات را دارد



$$w = f(x, y, z)$$

$$\nabla f = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$$



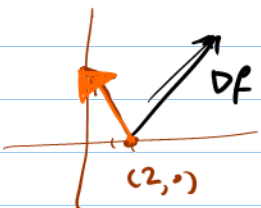
درجه دوم خواصیم دیدیم که بردار گرادیان بر منحنیها عمود است.

$$f(x, y) = x e^y$$

مثال فرض کنید

الف) نرخ تغییرات تابع f در نقطه $(2, 0)$ و جهت بردار واحد $\vec{u}$ را محاسبه کنید.

ب) در کدام جهت بیشترین و کمترین نرخ تغییرات را داریم؟



$$\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 2 \right) = \left(-\frac{3}{2}, 2 \right)$$

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (e^y, x e^y)$$

$$\nabla f(2, 0) = (1, 2)$$

$$D_{\vec{u}} f(2, 0) = \frac{\nabla f(2, 0) \cdot \left(-\frac{3}{2}, 2 \right)}{\sqrt{\frac{9}{4} + 4}} = \frac{(1, 2) \cdot \left(-\frac{3}{2}, 2 \right)}{\sqrt{\frac{9}{4} + 4}} = 1$$

درجهٔ بردار واحد $\vec{u} = (1, 2)$ (جهت بردار واحد تغییرات را داریم).

$$\vec{u} = \frac{(1, 2)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{j}$$

$$\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

میزان افزایش: طول بردار واحد:

مورد

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| \cos \theta$$

مشتق جهت بردار واحد $\vec{u}$ مقدار دارد و این مقدار برابر با $|\nabla f|$ است.

$$\underline{\nabla f = (f_x, f_y)} \Leftrightarrow z = f(x, y) \quad \text{یا دایره}$$

$$\underline{\nabla f = (f_x, f_y, f_z)} \Leftrightarrow \underline{w = f(x, y, z)}$$

$$\underline{Df = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| |\vec{u}| \cos \theta}$$

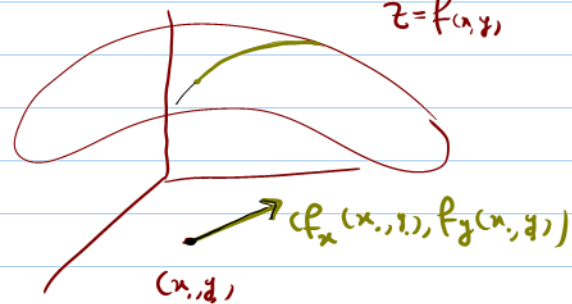
نتیجه برای یک تابع

$w = f(x, y, z)$ در یک نقطه (x, y, z) مشتق سوخت در جهت بردار $\nabla f(x, y, z)$ حداکثر مقدار را دارد و این مقدار برابر با $|\nabla f|$ است.

مثلاً برای یک تابع $z = f(x, y)$ در یک نقطه (x, y) مشتق سوخت در جهت بردار

$$z = f(x, y)$$

$\nabla f(x, y)$ حداکثر مقدار را در این مقدار برابر $|\nabla f|$ است. $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$



مثال: فرض کنید دما تابع در یک نقطه (x, y, z) توسط رابطه

$$T(x, y, z) = \frac{80}{1 + x^2 + y^2 + 3z^2}$$



دارد. سده باشد و ما در نقطه $(1, 1, -2)$ واقع هستیم. در کدام جهت حرکت کنیم تا دما حداکثر افزایش را داشته باشد و میزان این افزایش را بیابیم.

$$\nabla T = (f_x, f_y, f_z) =$$

$$\left(\frac{-160x}{(1+x^2+y^2+3z^2)^2}, \frac{-320y}{(1+x^2+y^2+3z^2)^2}, \frac{-480z}{(1+x^2+y^2+3z^2)^2} \right)$$

$$\vec{u} = \left(\frac{-160}{256}, \frac{-320}{256}, \frac{+960}{256} \right) : (1, 1, -2) \text{ بردار گرادیان در نقطه}$$

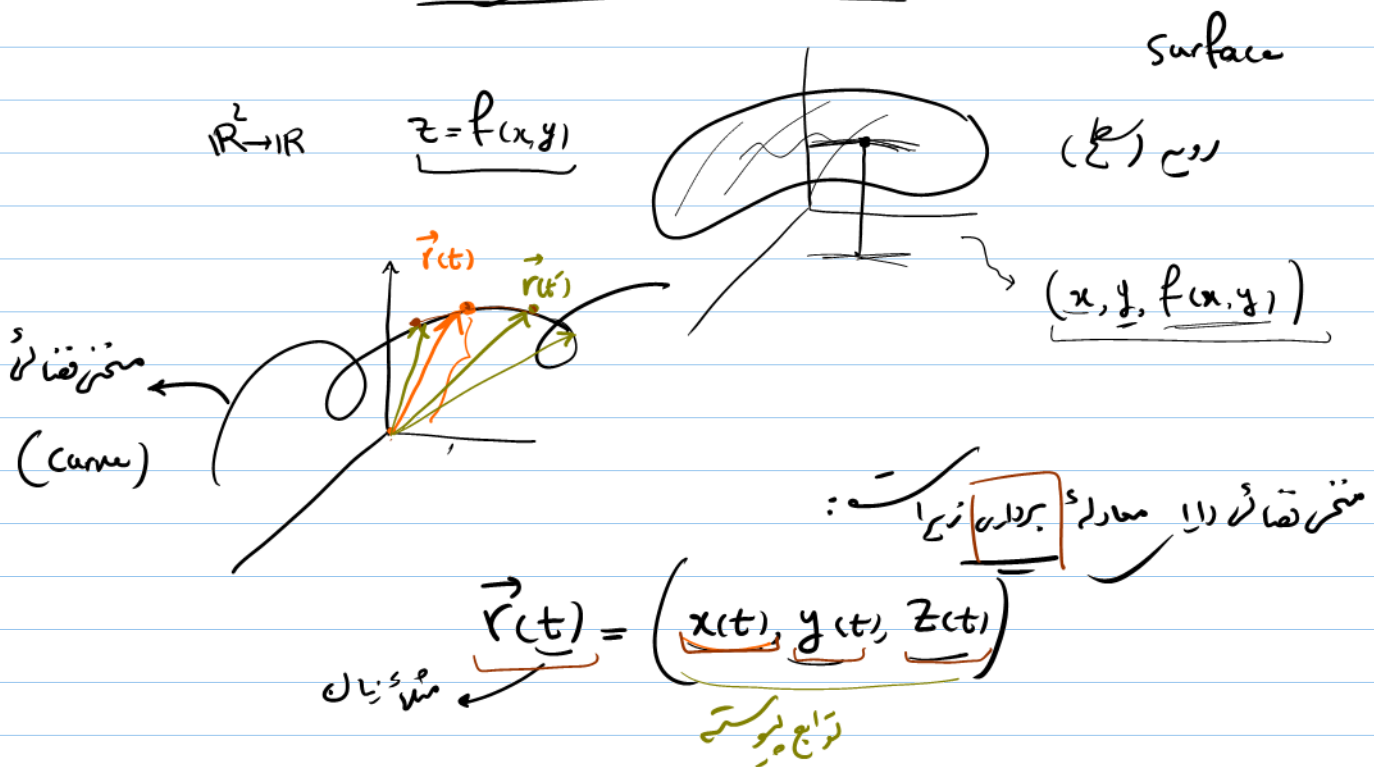
$$= \frac{5}{8}(-i - 2j + 6k)$$

مقدار این اترالیه $\vec{a} = \frac{v}{|v|}$ صدای من از اترالیه دارد

برای $|v| = \sqrt{1+4+36}$ یعنی $\left| \frac{5}{8}(-i-2j+6k) \right|$ است

$$\frac{5}{8} \sqrt{1+4+36}$$

مقدار در باره مترها فضای



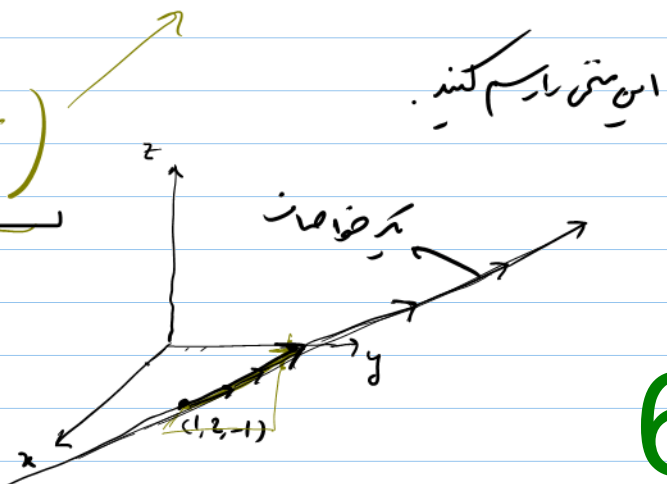
کدام مثال جالب از مترهای فضای

مثال $\vec{r}(t) = (1+t, 2+5t, -1+6t)$ که متر فضای است.

$\vec{r}(t) = (1, 2, -1) + t(1, 5, 6)$

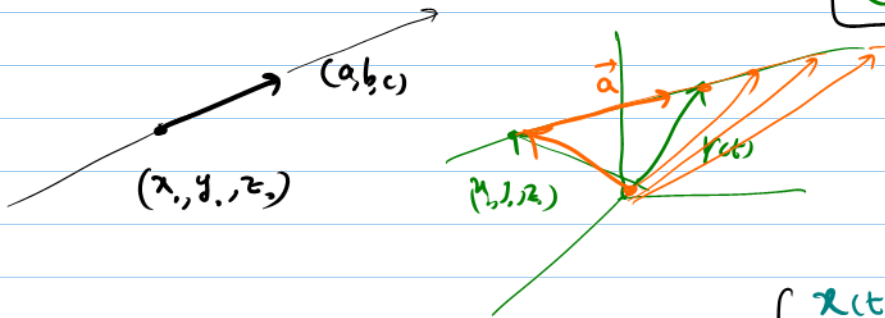
متغیر

$\vec{v} = (1, 5, 6)$



نوع ۱ به چارگه معادله بردار خط گذرنده از نقطه (x_0, y_0, z_0) در جهت بردار (a, b, c) به صورت زیر است:

$$\vec{r}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) = (\underbrace{x_0 + at}, \underbrace{y_0 + bt}, \underbrace{z_0 + ct})$$



نوع ۲ معادله پارامتر خط ۱):

نوع ۳ معادله تقاطع خط:

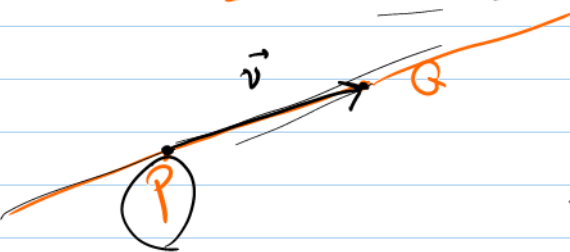
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \\ z(t) = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

مثال معادله بردار پارامتر تقاطع خط گذرنده از نقطه $(2, 5, 6)$ در جهت بردار $(1, 3, 3)$ را بیابیم.

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-6}{3}$$

مثال معادله بردار خط گذرنده از نقطه $(1, 3, -2)$ و $(2, -1, 3)$ را بیابیم.



$$\vec{v} = (1, -4, 5)$$

$$\vec{r}(t) = (1+t, 3-4t, -2+5t)$$

$$\vec{r}(t) = (2+t, -1-4t, 3+5t)$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{5}$$

$$\vec{r}(t) = (1, 3, -2) + t(1, -4, 5)$$

ارائه منحنی ها فضائی

مثال منحنی فضائی $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $0 \leq t \leq 4\pi$

Helix

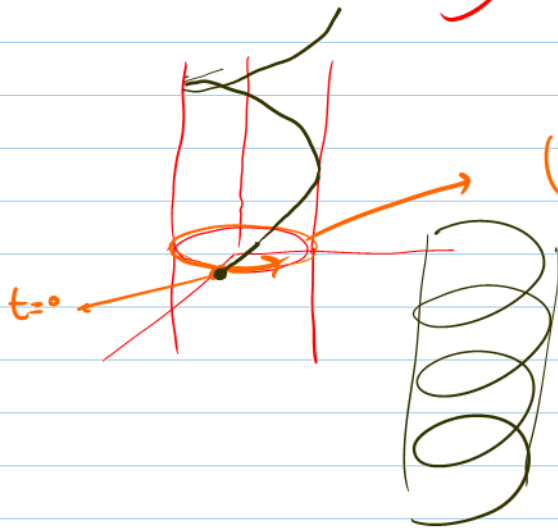
پارسم کنید.

داده

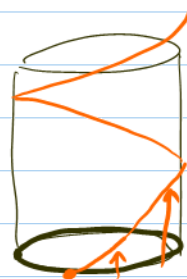
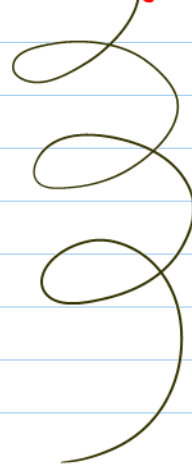
$$x(t)^2 + y(t)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

توجه کنید که $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$ یعنی منحنی فضائی موربطه با دایره استوار $x^2 + y^2 = 1$ واقع است.

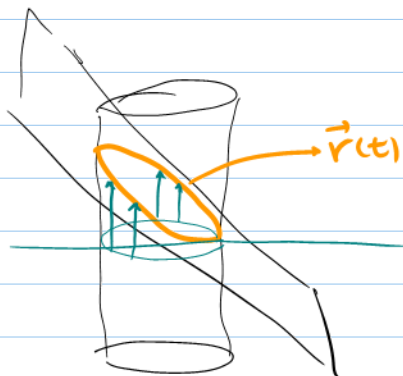


$$(\cos t, \sin t)$$



$$z = 2 - y$$

مثال معادله برداری خم محل اشتراک استوار $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $y + z = 2$ را بنویسیم.



$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \sin t)$$

$$- \leq t \leq 2\pi$$

$$y = x^2 \quad z = x^3$$

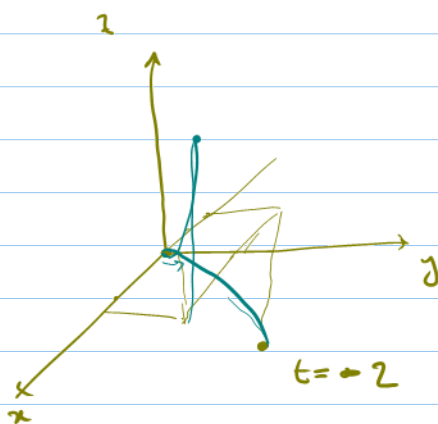
مثال منحنی فضائی $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ را رسم کنید.

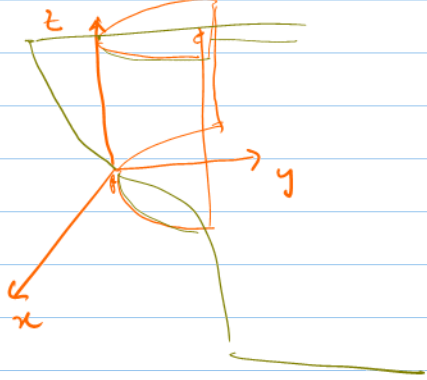
$$-2 \leq t \leq 2$$

twisted cubic

$$t = -2 \Rightarrow (-2, 4, -8)$$

$$t = 2 \Rightarrow (2, 4, 8)$$





سوال

$$\vec{r}(t) = (t \sin t, t, t \cos t)$$

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, e^{0.8t})$$

$$\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$$

دو؟ فرض کنید $\vec{r}(t) = (\underline{x(t)}, \underline{y(t)}, \underline{z(t)})$ بر مبنای قضایای!

$$\vec{r}'(t) = (\underline{x'(t)}, \underline{y'(t)}, \underline{z'(t)}) \rightarrow \text{یک بردار}$$

همه بردارها هم بر هم عمودند

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} =$$

$$\frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

$$\vec{r}(t), \vec{r}(t+h)$$

سوال مشتق

$$\vec{r}(t) = (1+t)^3 \vec{i} + t e^{-t} \vec{j} + \sin 2t \vec{k}$$

رایج است

$$\vec{r}'(t) = (3t^2, e^{-t} - t e^{-t}, 2 \cos 2t)$$

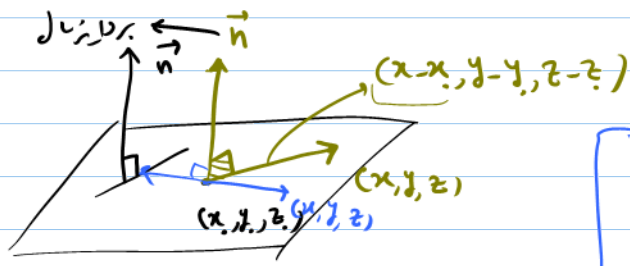
بردارها هم بر هم عمودند

در اینجا $t=0$ باید

$$\vec{r}'(0) = (0, 1, 2)$$

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{5}} (0, 1, 2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{j} + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{k}$$

یاد آوری معادله صفحه‌ای که شال نقطه‌ای (x_0, y_0, z_0) باشد و بردار $\vec{n} = (a, b, c)$ بر آن عمود باشد به صورت زیر است.



$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

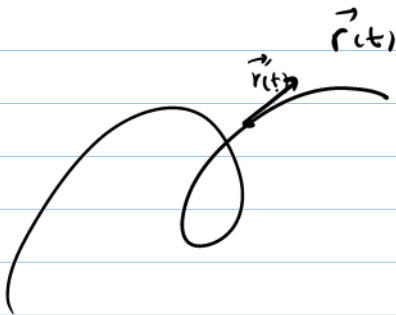
$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

مثال معادله صفحه‌ای را بنویسیم که شال نقطه $(0, 5, 2)$ است و بردار $(1, 2, 3)$ بر آن عمود است.

$$1(x - 0) + 2(y - 5) + 3(z - 2) = 0$$

$$x + 2y + 3z = 10 + 6 = 16$$

نکته معادله صفحه‌ای که بردار (a, b, c) بر آن عمود است $ax + by + cz = d$



$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

مرد

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

- معادله خط که از نقطه (x_0, y_0, z_0) بگذرد و بردار (a, b, c) شال آن است:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$$

$$x^{(t)} = x_0 + at$$

$$y^{(t)} = y_0 + bt$$

$$z^{(t)} = z_0 + ct$$

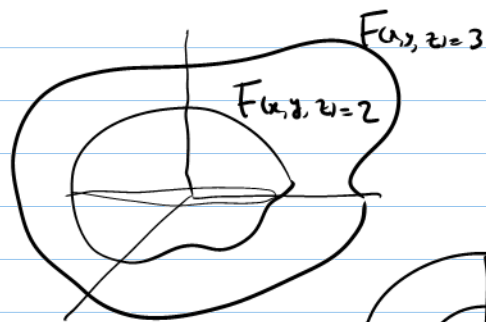
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- معادله صفحه‌ای که بردار (a, b, c) شال آن است و از نقطه (x_0, y_0, z_0) می‌گذرد:

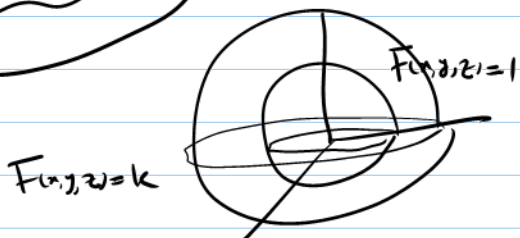
$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

$$(a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0)$$

تفصیل فرم کنید $F(x, y, z) = k$ معادله سطح F در (x, y, z) (در واقع) $z = f(x, y)$
 $z - f(x, y) = 0$

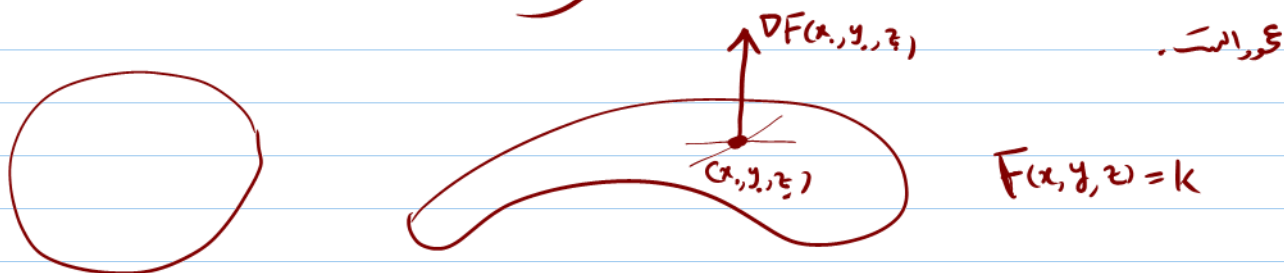


$F(x, y, z) = k$ معادله سطح F در (x, y, z) برای تابع $w = F(x, y, z)$ است



$$(F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$$

این سه بردار $\nabla F(x, y, z)$ در نقطه (x, y, z) بر سطح $F(x, y, z) = k$ عمود است.



توجه کنید که: بردار $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ در هر لحظه t بر سطح $F(x, y, z) = k$ واقع شده است. اگر $\vec{r}(t)$ را تغییر دهیم، بردار $\vec{r}(t)$ نیز تغییر می‌کند. این خطها حاکم بر سطح $F(x, y, z) = k$ هستند.

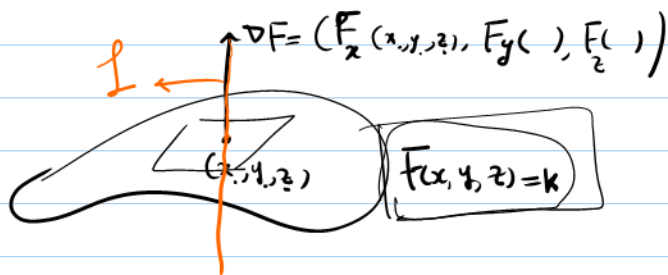
$$F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

لا مشتق بگیریم در نقطه t .

$$F_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_z(x(t), y(t), z(t))z'(t) = 0$$

$$F_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_z(x(t), y(t), z(t))z'(t) = 0$$

$$(F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)) \perp (x'(t), y'(t), z'(t))$$



نتیجه 1 معادله صفحه مماس بر سطح
 $F(x, y, z) = 0$ در نقطه (x_0, y_0, z_0)

به صورت زیر است:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

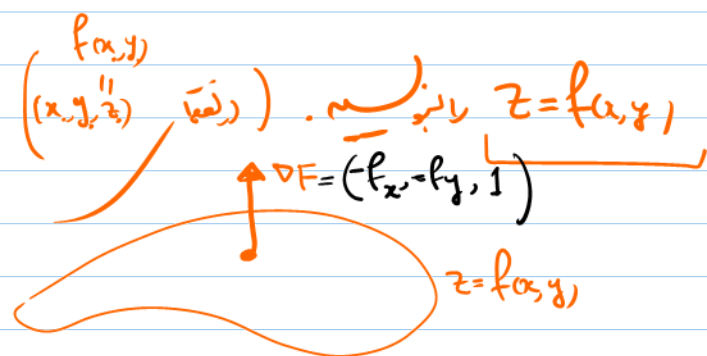
نتیجه 2 معادله خط مماس بر سطح در نقطه (x_0, y_0, z_0) به صورت زیر است:

بر حسب

$$\vec{r}(t) = (x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)t, y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)t, z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)t)$$

توجه

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$



حالت خاص معادله صفحه مماس بر سطح

$$F(x, y, z) = 0$$

$$F = z - f(x, y) = 0$$

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0$$

$$-f_x(x - x_0) - f_y(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$$

مورد 1 اگر معادله سطح به صورت $F(x, y, z) = k$ باشد بردار $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$

در هر نقطه بر روی سطح مماس است و معادله صفحه مماس بر سطح به صورت

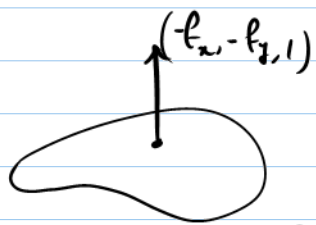
$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0$$

2 اگر معادله سطح به صورت $z = f(x, y)$ باشد آن را به صورت

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$$

موضوع: در این صورت $\nabla F = (-f_x, -f_y, 1)$ در نقطه برده عمود

مستوی مماس به سطح



$$-f_x(x-x_0) - f_y(y-y_0) + (z-z_0) = 0$$

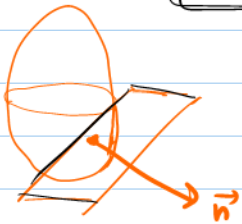
$$z = f(x, y)$$

$$F(x, y, z) = k$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{9} = 3$$

مثال: معادله مماس و خط نرمال بر بیضه دار

را در نقطه $(-2, 1, 3)$ بنویسیم.



$$\vec{n} = \nabla F(-2, 1, 3)$$

$$\nabla F = \left(\frac{x}{2}, 2y, \frac{2}{9}z \right)$$

$$\nabla F(-2, 1, 3) = \left(-1, 2, \frac{2}{3} \right)$$

بردار عمود بر مماس

معادله مماس:

$$-1(x+2) + 2(y-1) + \frac{2}{3}(z-3) = 0$$

در نقطه $(-2, 1, 3)$

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{\frac{2}{3}}$$

معادله خط عمود (لانه)

کفتم که اگر $w = F(x, y, z)$ یک تابع متغیر باشد

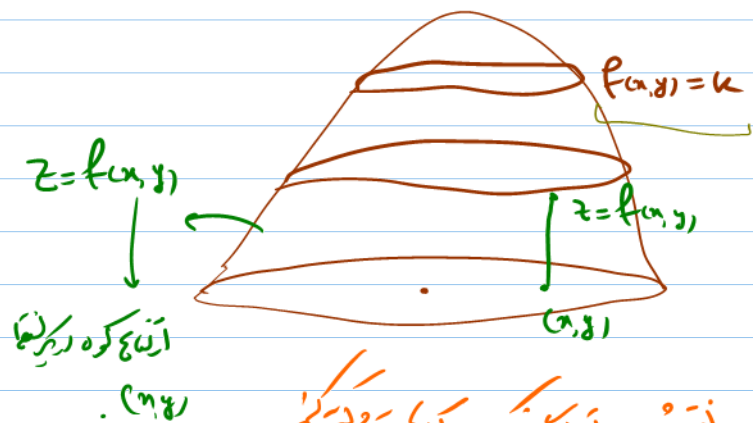
یک رویه ترانزیتال باشد آنگاه ∇F بر این رویه ترانزیتال عمود است.

در حالت خاص اگر $z = f(x, y)$ یک رویه باشد آنگاه ∇f بر خطوط ترانزیتال $f(x, y) = k$ عمود است.

$$(f_x, f_y)$$

$$z = f(x, y)$$

$$(-f_x, -f_y, 1)$$



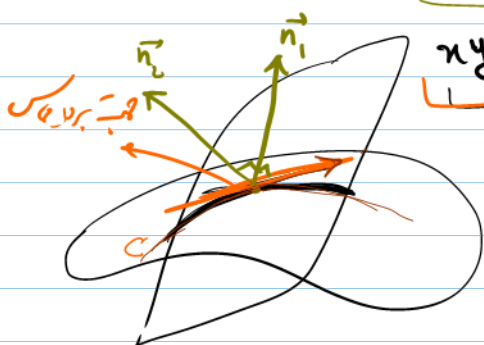
مثال: فرض کنید C خمی که معادلات $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ و $xy + z = 0$ را برقرار می‌کند. بردار مماس بر C در نقطه $(2, 1, -2)$ را بیابید.

نقشه توپوگرافیک

درجه بردار عمود بر منحنی ها

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$xy + z = 0$$



مثال: فرض کنید C خمی که معادلات $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ و $xy + z = 0$ را برقرار می‌کند. بردار مماس بر C در نقطه $(2, 1, -2)$ را بیابید.

بردار مماس بر C در نقطه $(2, 1, -2)$ را بیابید.

(2, 1, -2) نقطه روی C است. (خم C در این نقطه مماس دارد)



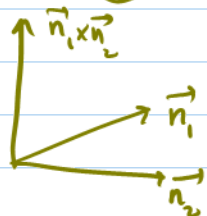
بردار مماس بر C در نقطه $(2, 1, -2)$ را بیابید.

یعنی هم بردار مماس بر C در این نقطه هم بردار مماس بر C در این نقطه است.

بردار مماس بر C در نقطه $(2, 1, -2)$ را بیابید.

$$\vec{n}_1 = \nabla F_1$$

$$\vec{n}_2 = \nabla F_2$$



$$\nabla F_1 = (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla F_1(2, 1, -2) = (4, 2, -4)$$

$$\nabla F_2 = (y, x, 1)$$

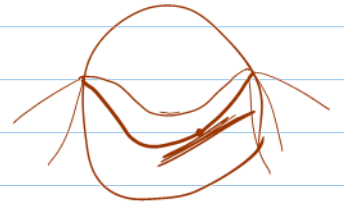
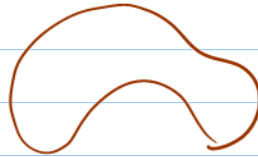
$$\nabla F_2(2, 1, -2) = (1, 2, 1)$$

$$\nabla F_1 \times \nabla F_2 = (4, 2, -4) \times (1, 2, 1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

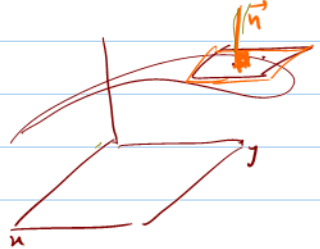
$$= i(10) - j(8) + k(6) = \underline{(10, -8, 6)}$$

معادله خط:

$$\begin{aligned} x &= 2 + 10t \\ y &= 1 - 8t \\ z &= -2 + 6t \end{aligned}$$



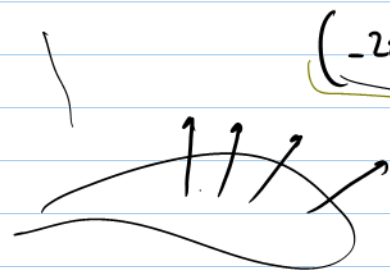
مثال در کلام لفظ دور روی $z = x^2 + xy + y^2$ صفحه‌ای موازی صفحه xy است.



$$(0, 0, a)$$

زمانی صفحه موازی محور xy است که بردار عمود بر آن به صورت

به $(0, 0, 1)$ باشد. معادله آن: $z - x^2 - xy - y^2 = 0$



بردار عمود بر رویه فوق در هر نقطه (x, y, z) به صورت: $(-2x - y, -x - 1, 1)$

$$-2x - y = 0 \Rightarrow y = -2x$$

$$-x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

در نقطه $(1, 2, 0)$ این بردار $(1, 2, 0)$ است.

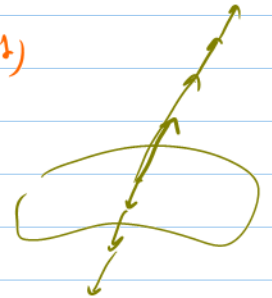
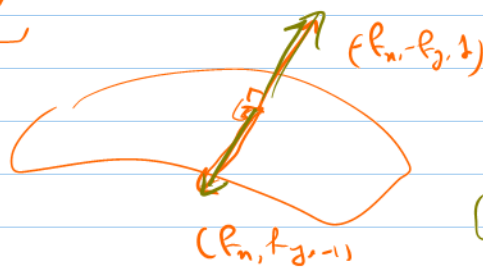
معادله صفحه: $-f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) + (z-z_0) = 0$

$$(f_x, f_y, -1)$$

$$(-f_x, -f_y, 1)$$

$$(2f_x, 2f_y, -2)$$

$$ax + by + cz = d$$



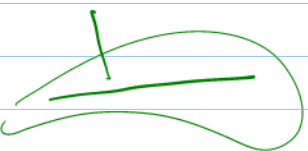
$$F(x, y, z)$$

مثال مکان هندسه نقاط را در

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 2xz + 4yz = 8$$

پیدا کنید که در آن صفحه موازی صفحه xy باشد.

$$\nabla F = (2x + y + 2z, 4y + x + 4z, 6z + 2x + 4y)$$



بایع نقاط را بایع می‌انیم که در آنجا، همزمان:

(2, 1, 2)

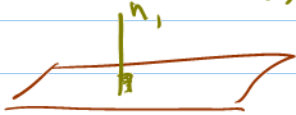
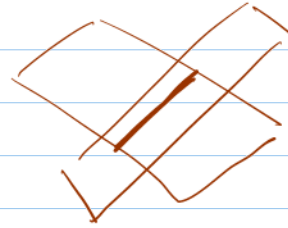
① $2x + y + 2z = 0$

② $4y + x + 4z = 0$
(1, 4, 4)

معادله یک صفحه

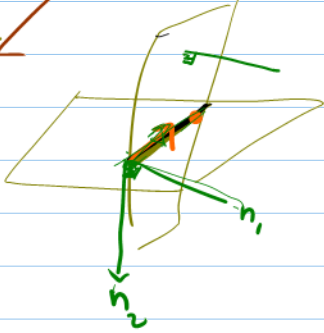
→ معادله صفحه

انترآکشن دو صفحه



$n_1 \parallel n_2$

صفحه‌ها موازی است



در همه فضا موازی نیست پس همگام را در یک خط تعریف می‌کنیم.

$2z = -2x - y$

$2z = -x/2 - 2y$

معادله خط:

$-2x - y = -x/2 - 2y$

$-\frac{3}{2}x - 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$

معادله خط: $(t, -\frac{1}{2}t, \frac{-3}{4}t)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ z = -\frac{1}{4}x \end{cases}$

سوال: به طریقی معادله یک خط را که در دو صفحه واقع شود:

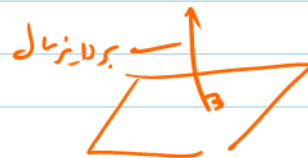
برای هر خط: $n_1 \times n_2$

$z^2 - 2x^2 - 4y^2 = 0$

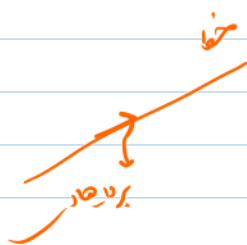
$z^2 = 2x^2 + 4y^2$ بیرون که صفحه محاس بر مخروط دایره نقاط

مثال: نقاط در مخروط

مواز صفحه: $12x + 14y + 11z = 25$



توجه



در همه زمان موازی هستند که بردار نرمال آنها موازی باشد

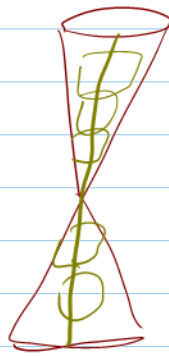
بردار نرمال صفحه A: $(12, 14, 11)$

بردار نرمال در صفحه: $(-4x, -8y, 2z)$

بایع نقاط را بایع می‌انیم که در آنجا:

$(-4x, -8y, 2z) = \pm (12, 14, 11)$

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = -\frac{14}{8}t \\ z = \frac{11}{2}t \end{cases}$$



$$\frac{-4x}{12} = \frac{-8y}{14} = \frac{2z}{11}$$

A

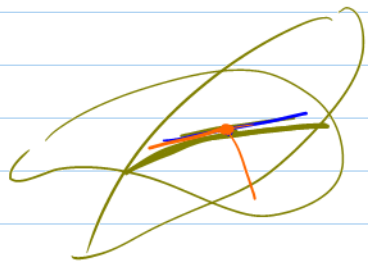
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ xy + z = 0 \end{cases}$$

B

مثال فرض کنید مستقیم c مماس بر مخروط

مماس خط مماس بر c را در نقطه $(2, 1, -2)$ بنویسید.

خط مماس بر c هم بر صفحه مماس بر A و هم بر صفحه مماس بر B واقع است.



$$n_1 = (2x, 2y, 2z) \Rightarrow$$

$$(4, 2, -4)$$

$$n_2 = (y, x, 1) \Rightarrow (1, 2, 1)$$

دو بردار همدار این دو خط برابر است:

$n_1 \times n_2$

بردار مماس

بردار مماس

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \dots$$

$$(2, 1, -2) \text{ نقطه}$$

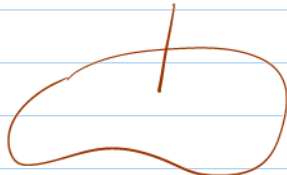
مثال معادله صفحه مماس بر سطح $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را در نقطه $(2, 2, \sqrt{7})$ بنویسید.

$$\text{مشتق: } 4(x-2) + 4(y-2) - 2\sqrt{7}(z-\sqrt{7}) = 0 \quad \nabla F = (2x, 2y, -2z)$$

$$\nabla F(2, 2, \sqrt{7}) = (4, 4, -2\sqrt{7})$$

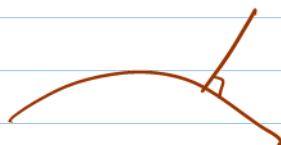
$$\text{خط مماس: } \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-\sqrt{7}}{-2\sqrt{7}}$$

$$F(x, y, z) = k$$



$$\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$$

$$f(x, y) = k$$

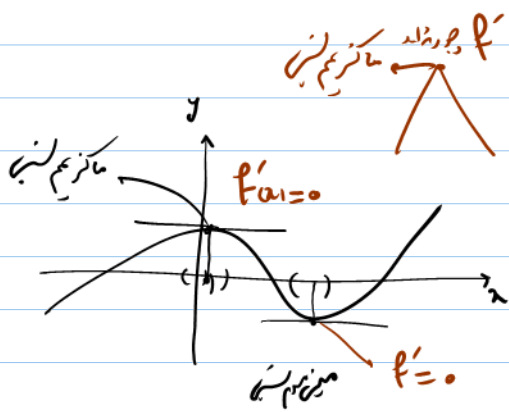


$$\nabla f = (f_x, f_y)$$

$$F = z - f(x, y) = 0$$



$$\nabla F = (-f_x, -f_y, 1)$$

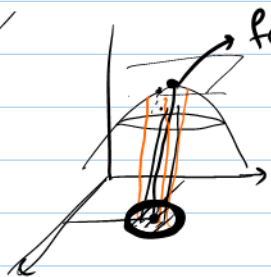


ادائیجس

$$y = f(x)$$

یاد آدس

تعریف فرض کیں $z = f(x, y)$ کو تابع دو متغیر ہے۔



نقطہ $(x, y, f(x, y))$ یا نقطہ ماکزیم موضعی

ہر جگہ کے گرد پڑا حوالہ P $(x, y, f(x, y))$ موجود ہے ہر جگہ کے

$$\forall (x, y) \in D \quad f(x, y) \leq f(x, y)$$

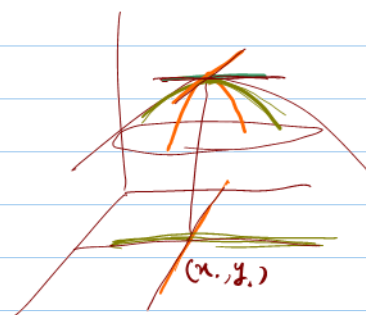


مقابلہ کو کمیم تابع f نقطہ $(x, y, f(x, y))$ میں کم موضع ہے ہر جگہ کے گرد پڑا حوالہ D (x, y)

$$\forall (x, y) \in D \quad f(x, y) \geq f(x, y)$$

ہر موضع یا ماکزیم موضعی، اکرم موضعی نقطہ

مشاہدہ فرض کیں $(x, y, f(x, y))$ اکرم موضعی ہے (برا تابع $z = f(x, y)$)



$$\begin{aligned} f_x(x, y, f(x, y)) &= 0 \\ f_y(x, y, f(x, y)) &= 0 \end{aligned}$$

(دستور کے موجود رہیں)
حکام کے موجود رہیں

بیان ہر: فرض کیں تابع $z = f(x, y)$ اکرم موضعی ہے ہر جگہ کے گرد پڑا حوالہ D (x, y)

$$(f_x, f_y) = (0, 0)$$

(نقطهٔ محلی در صورت دومر اضرات) پس اگر (x, y) اکترم موضعی باشد

یا f_x یا f_y در آن نقطه موجود نیست یا هر دو آنها صفرند.

Critical

به نقطه که در آن f_x یا f_y موجود نیست یا هر دو صفرند نقطهٔ بحرانی گفته می‌شود.

نکته: لزوماً در هر نقطه بحرانی اکترم افتان یا نرگه‌ای نیست اما اگر اکترم داشته باشیم آن اکترم در هر نقطه بحرانی رخ می‌دهد.

مثال اکترم هر موضعی تابع $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$ را بیابید.

ابتدا باید نقاط بحرانی را بیابیم.

$$f_x = 2x - 2 \quad f_x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f_y = 2y - 6 \quad f_y = 0 \Rightarrow y = 3$$

نقطه $(1, 3)$ همان $f_x = f_y = 0$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14 = 4 + (x-1)^2 + (y-3)^2$$

بنابراین نقطه $(1, 3)$ یک مینیمم موضعی است.

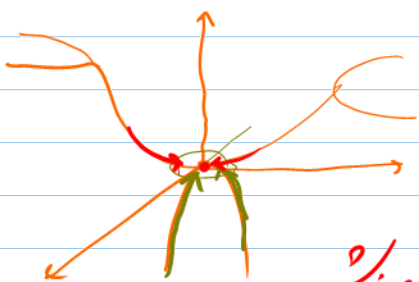
مثال اکترم هر موضعی تابع $f(x, y) = y^2 - x^2$ را بیابید (مثال ۱)

$$f_x = -2x$$

$$f_y = 2y$$

نقاط بحرانی:

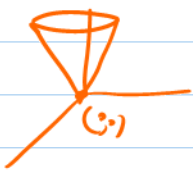
تنها نقطه بحرانی f نقطه $(0, 0)$ است



به نقطه $(0, 0)$ داریم تابع نقطهٔ زین Saddle گفته می‌شود.

نقطهٔ زین: نقطه که در آن $(f_x, f_y) = (0, 0)$ ولی این نقطه اکترم نباشد

(لزوماً در هر نقطه بحرانی تابع را می‌توانیم زیاده یا کمبود داشته باشیم)



$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$$

$$f_x = \begin{cases} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ \text{در دهم رندار} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{محدود}$$

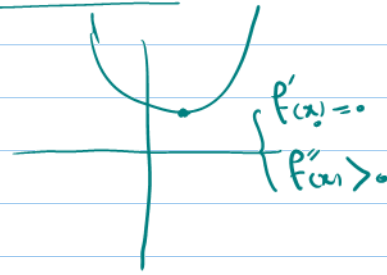
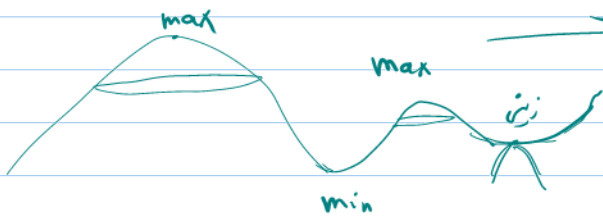
$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 0} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$$f_y = \begin{cases} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ \text{در دهم رندار} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

تاما نفعاً بران ايو تايج نفعاً (0,0) است. رايو نفعاً f_x, f_y هر دو در دهم رندارند.

(0,0) برا ايو تايج كير ميزم هم موهن ا سو.

تعیین اکстрیم‌ها تابع دو متغیره



روش استفاده از مشتق‌ها برای تعیین اکتریم تابع دو متغیره.

در این روش f و مشتقات جزئی آن را در (x, y) می‌نویسند.

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$$

فرض کنید (x, y)

به گونه‌ای باشند که

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

قرار دهی:

در میانه این ماتریس

$$= f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

$f_{xx} > 0$ می‌نویسند

$f_{xx} < 0$ ماتریس منفی

$$D > 0$$

حال: اگر

اگر $D < 0$ آن نقطه (x, y) یک نقطه زین است.

$$D = 0$$

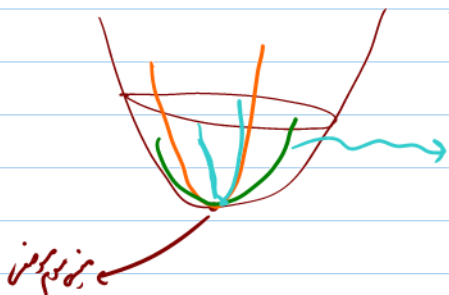
(Sketch of proof)

طرح این است.

$$z = f(x, y)$$

$$D_u^2 f > 0$$

مشتق دوم در جهت بردار u مثبت است.



$$g(h) = f(x, y) \Rightarrow f(x+ah, y+bh)$$

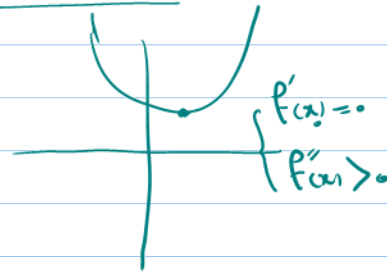
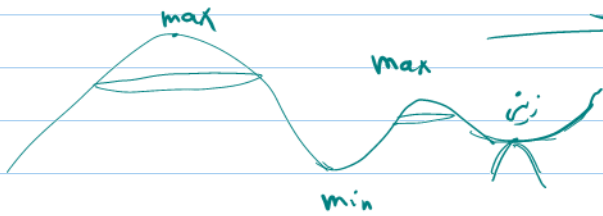
$$D_u = f_{xx}a + f_{yy}b$$

$$(f_{xx}(x+ah, y+bh)a + f_{yy}(x+ah, y+bh)b)$$

$$D_u^2 = ?$$

$$u = (a, b)$$

تعیین اکстрیم‌ها تابع دو متغیره



روش استفاده از مشتق‌ها برای تعیین اکتریم تابع دو متغیره.

در این روش P و مشتقات جزئی تابع f در (x, y) می‌گیریم.

$$f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$$

فرض کنید (x, y)

به گونه‌ای باشند که

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

قرار دهی:

در مینان این ماتریس

مشتقات جزئی اول

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix}$$

مشتقات جزئی دوم

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

ماتریس مشتقات دوم

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

(f_x, f_y)

$$= f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

$f_{xx} > 0$ مینیمم موضعی

$f_{xx} < 0$ ماکزیمم موضعی

$$D > 0$$

حال: اگر

اگر $D < 0$ آن نقطه (x, y) یک نقطه زین است.

$$D = 0$$

اگر

(Sketch of proof)

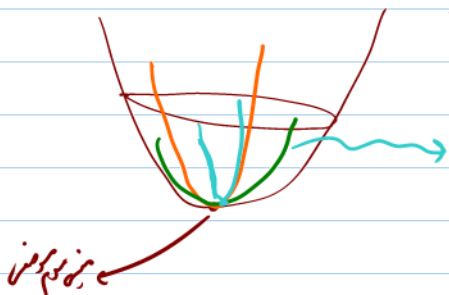
طرح این =

$$z = f(x, y)$$

$$D_u^2 f > 0$$

(a, b)

مشتق دوم در جهت بردار u مثبت است.



$$D_u = f_{xx}a + f_{yy}b$$

$$g(h) = f(x, y)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+ah, y+bh) - f(x, y)}{h}$$

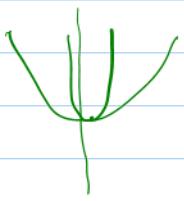
$(0, 0)$

$h=0$

$$(f_x(x+ah, y+bh)a + f_y(x+ah, y+bh)b)$$

$$D_u^2 = ?$$

$$u = (a, b)$$



$$= f_{xx} a^2 + 2f_{xy} ab + f_{yy} b^2 = f_{xx} \left(a + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} b \right)^2 + \frac{b^2}{f_{xx}} (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) \quad (D)$$

تقریب مشتق دوم تابع $z = f(x, y)$ در جهت بردار (a, b) برابر

مشتق سومی در $D^3 f$

$$D^2 f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah, y+bh) - f(x, y)}{h} \quad \begin{matrix} g(h) = f(x+ah, y+bh) \\ g'(0) \end{matrix}$$

مثال اگر هم کار نقاط زیر را بیاییم.

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

$$f_x = 4x^3 - 4y \Rightarrow (f_x = 0 \Rightarrow y = x^3) \Rightarrow y = y^9 \Rightarrow$$

$$f_y = 4y^3 - 4x \Rightarrow (f_y = 0 \Rightarrow x = y^3) \quad y - y^9 = 0 \Rightarrow y(1 - y^8) = 0$$

$$\begin{matrix} y = 0 \\ y = 1 \\ y = -1 \end{matrix}$$

نقاط بحرانی

$$\begin{pmatrix} 0, 0 \\ 1, 1 \\ -1, -1 \end{pmatrix}$$

در کلام نقاط f_x و f_y همزمان میزنند:

$$f_{xx} = 12x^2$$

$$f_{yy} = 12y^2$$

$$f_{xy} = -4$$

$$f_{yx} = f_{xy}$$

$$D = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} > 0 \quad : (-1, -1) \text{ (نقطه)}$$

$f_{xx} > 0 \Rightarrow$ میزنیم محلی

$$D = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix}$$

$$D(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

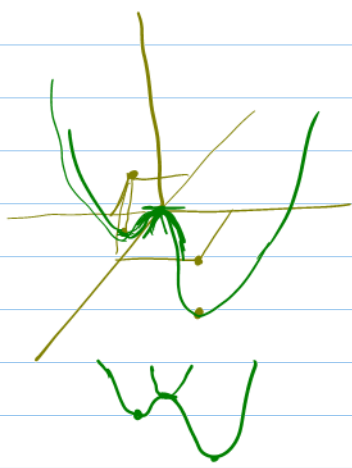
در نقطه $(0,0)$:

$$D = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{(نقطه (1,1))}$$

$f_{xx}(1,1) = 12 > 0$

در $(1,1)$ نقطه میزنند.

در $(-1,-1)$ میزنیم محلی است.



$$f(0,0) = 1$$

$$f(-1,-1) = -1$$

$$f(1,1) = -1$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4xy + 1$$

$$1 + 1 - 4 + 1$$

$$1 + 1 - 4 + 1$$

مثال کوتاه ترین فاصله نقطه $(1, -2)$ از صفحه $x + 2y + z = 4$ را بیابید.

فرض کنید (x, y, z) نقطه روی صفحه مستوی باشد. فاصله این نقطه از $(1, -2)$ برابر است با:

$$z = 4 - x - 2y$$

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2} =$$

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2}$$

هدف ما پیدا کردن کمترین این تابع است

برای یافتن $\min d^2$ را بیابیم و کم کنیم.

$$f_x = 2(x-1) - 2(6-x-2y) \Rightarrow$$

در اینجا عدد منفی نشود؟

$$f_y = 2y - 4(6-x-2y)$$

$$f_x = 0 \Rightarrow 2(x-1) - 2(6-x-2y) = 0$$

$$-y + 2(x-1) = 0 \Rightarrow y = 2x - 2$$

$$f_y = 0 \Rightarrow -y + 2(6-x-2y) = 0$$

$$y = 2x - 2$$

$$-2x + 2 + 2(6-x-4x+4) = 0$$

↓

$$-12x = -2 - 12 - 8 = -22$$

$$x = \frac{22}{12} = \frac{11}{6} \quad y = \frac{22}{6} - \frac{12}{6} = \frac{10}{6}$$

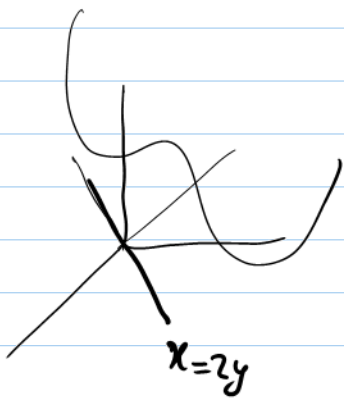
با دو به هم وصل کردیم و با دو به هم وصل کردیم و با دو به هم وصل کردیم
 $(\frac{11}{6}, \frac{1}{6}, f(\frac{11}{6}, \frac{1}{6}))$

$$d = \sqrt{f(\frac{11}{6}, \frac{1}{6})}$$

مثال $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$

$$f_x = 2x - 4y \Rightarrow (f_x = 0 \Rightarrow x = 2y)$$

$$f_y = 8y - 4x \Rightarrow (f_y = 0 \Rightarrow x = 2y)$$



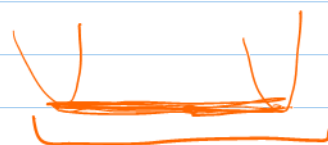
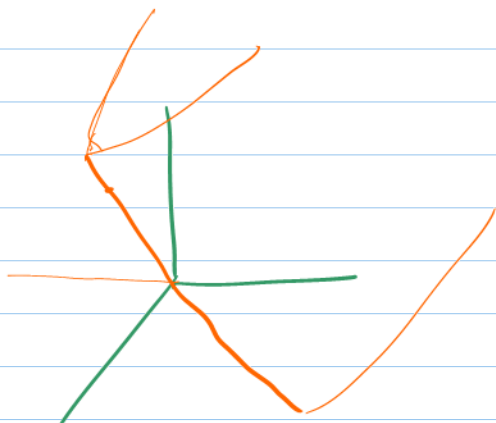
در تمام نقاط دایره بر خط $x=y$ نقاط بحرانی داریم.

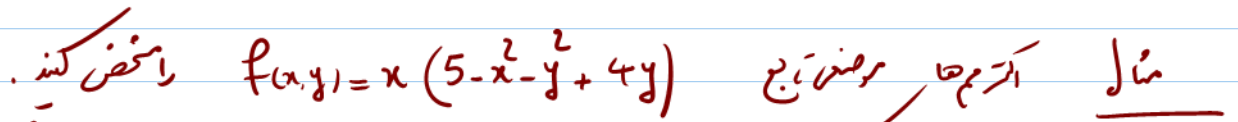
$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$

D در تمام نقاط (بحرانی) صفر است زیرا مشتق دوم همواره صفر است.

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2 = \underline{(x-2y)^2} + 2$$

بنابراین در تمام نقاط که $x=2y$ داریم





$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

- $D > 0$:
 - $f_{xx} > 0$: محلی کم‌ترین (local minimum)
 - $f_{xx} < 0$: محلی بیش‌ترین (local maximum)
- $D < 0$: سرج (saddle point)
- $D = 0$: احتیاط (caution)

$$\begin{aligned} \underbrace{f_y = 0} &\Rightarrow -2xy + 4x = 0 \Rightarrow \\ 2x(-y + 2) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x=0 \Rightarrow f_x = 5 - y^2 + 4y$$

$$y^2 - 4y - 5 = 0 \Rightarrow (y - 5)(y + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \end{cases}$$

$(0, 5)$
 $(0, -1)$

$$y=2 \Rightarrow f_x = 5 - 3x^2 - 4 + 8 = 9 - 3x^2$$

$$9 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

نقطه b $(\sqrt{3}, 2)$ و $(-\sqrt{3}, 2)$ نیز مستقیم بر خط مماس است.

رابطہ (5):

$$D(5) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

$D(1, -1) = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} < 0$

88 (۸۸) کرم لعل زینہ است۔

$$f_y = -2xy + 4x$$

$$D(\sqrt{3}, 2) = \begin{vmatrix} -6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} \end{vmatrix} > 0$$

نقطه $(\sqrt{3}, 2)$
ماکزعم موضعی

$$D(-\sqrt{3}, 2) = \begin{vmatrix} 6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} > 0$$

نقطه $(-\sqrt{3}, 2)$

مینیمم موضعی

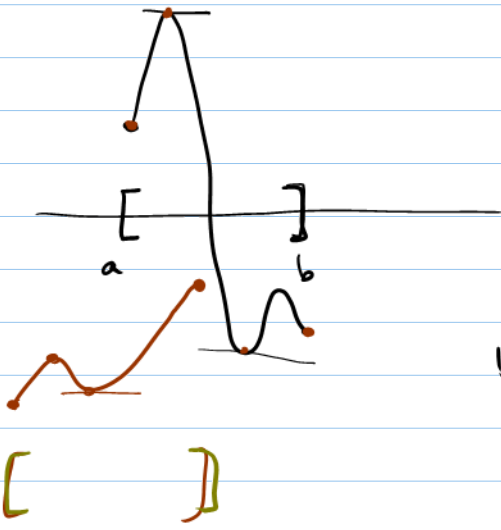


$$y = x^3$$

آزمون مشتق دوم با محاسبه
الزخمها

تمرین الزخم تابع $f(x, y) = y(x-1)$ را تعیین کنید.

یادآوری [قضیه متاریم نایل]



یک تابع یوگسته در یک بازه بسته کراندار دارای متاریم ماکزیمم و
مینیمم مطلق است. (برای یافتن آنها فقط کافزالت متاریم تابع را
در دو انتهای بازه و در نقاط بحرانی محاسبه کنیم و با هم مقایسه کنیم)

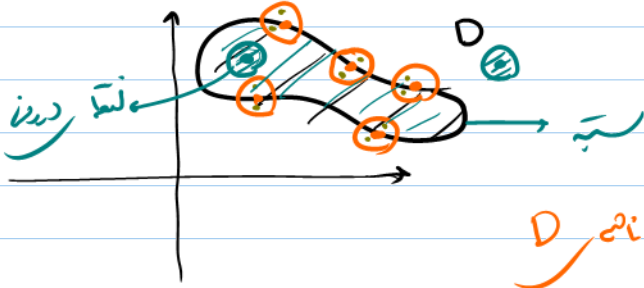
قضیه. فرض کنید تابع $f(x, y)$ در یک ناحیه بسته کراندار $D \subseteq \mathbb{R}^2$

یوگسته باشد. در این صورت f در این ناحیه دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است.



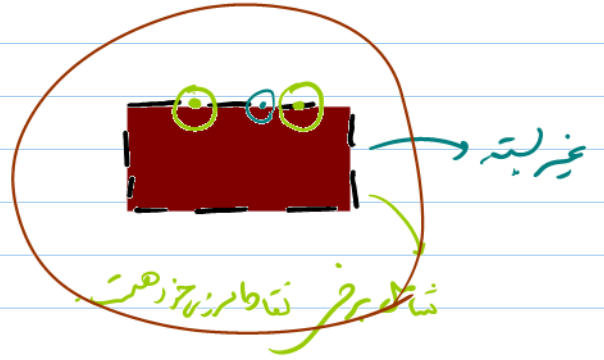
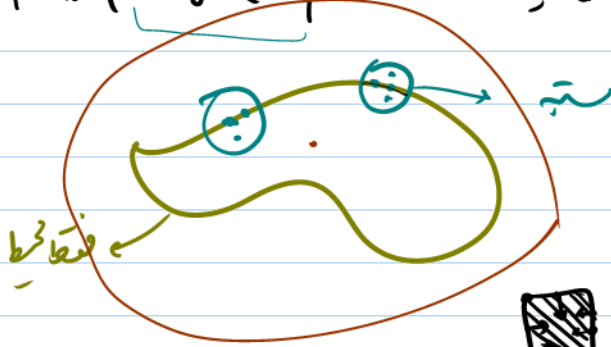
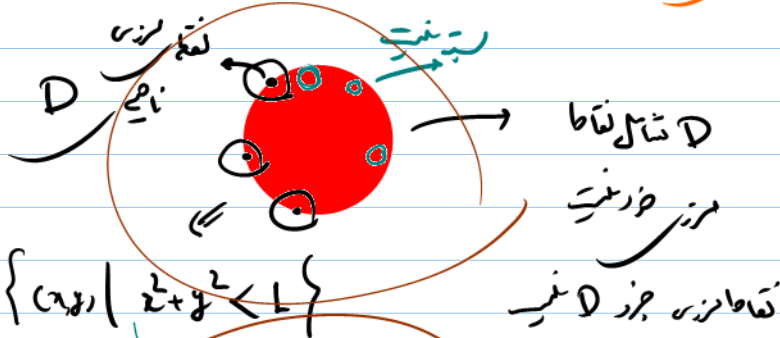
برای تعیین این الزخمها مطلق کافزالت متاریم تابع را در ∂D با متاریم تابع
در نقاط بحرانی درون D مقایسه کنیم.

نمونه کرانه در $\mathbb{R}^2$ یعنی چه؟



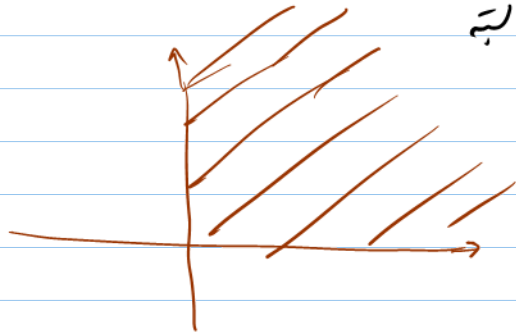
نمونه مرز: حریف بی‌آشغال نمونه از نمونه D

نمونه خارج از نمونه D است.



نمونه کرانه: نمونه است که شامل تمام نقاط مرز خود باشد.

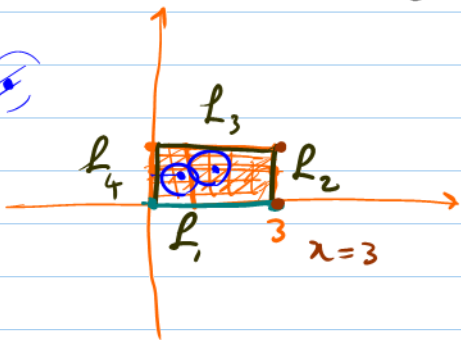
نمونه کرانه: نمونه است که کل آن زیر مجموعه یک کرانه باشد.



نمونه از نمونه بد کرانه: $\{ (x,y) \mid x > 0, y > 0 \}$

نمونه اکثریم سطح تابع $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ را در ناحیه

$$D = \{ (x,y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 \}$$



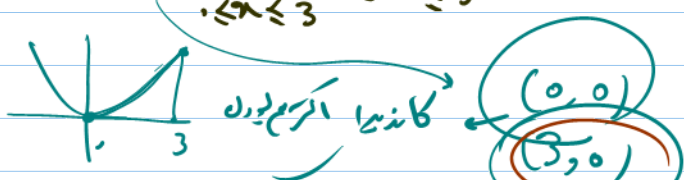
معین کنید: ① محاسبه نقاط بحرانی درون D:

$$f_x = 2x - 2y \Rightarrow (f_x = 0 \Rightarrow y = x)$$

$$f_y = -2x + 2 \Rightarrow (f_y = 0 \Rightarrow x = 1)$$

(1,1) نقطه بحرانی درون D

تابع در ناحیه مشخص: $y=0$ خط L_1 : $0 \leq x \leq 3$



② بررسی تابع در مرز نمونه D.

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y \quad x=3 \quad \text{بررسی تابع در } f_2 : \quad 0 \leq y \leq 2$$

$$z = \underbrace{9 - 4y}_{\text{تغییر}} \quad 0 \leq y \leq 2$$

$$\text{نقاط گانجی:} \quad (3,0) \quad (3,2)$$

$$\begin{cases} (0,2) \\ (3,2) \\ (2,2) \end{cases}$$

$$z = \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{2x-4=0} \quad \uparrow \quad [0,3]$$

$$y=2 \quad \text{بررسی تابع در } f_3 : \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$x=0 \quad \text{بررسی تابع در } f_4 : \quad z=2y \quad 0 \leq y \leq 2$$

$$(0,0) \quad (0,2)$$

مقادیر تابع را به دست آوریم و تمام این نقاط را مقایسه کنیم

$$\begin{matrix} (3,0) & (3,2) & (0,0) \\ (1,1) & (2,2) & (0,2) \end{matrix} \quad \text{نقاط گانجی:}$$

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$$

$$f(3,0) =$$

$$f(1,1) =$$

$$f(1,1) = 0$$

$$f(2,2) =$$

$$f(2,2) =$$

$$f(3,2) =$$

از این بزرگتر!

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4xy \quad \text{تابع دایره ای}$$

$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$$

مثال: اگر هم خطی داشته باشیم

حاصل کنیم: قدم اول: نقاط بحرانی در D:

$$f_x = 2x - 4y$$

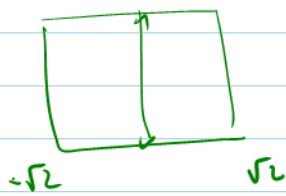
$$f_y = 2y - 4x$$

$$f_x = 0 \Rightarrow x = 2y$$

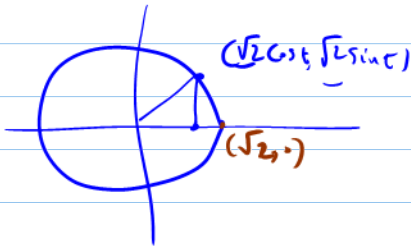
$$f_y = 0 \Rightarrow y = 2x$$

$$\Rightarrow x = 4x \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \right\} \leftarrow \text{نقطه بحرانی}$$



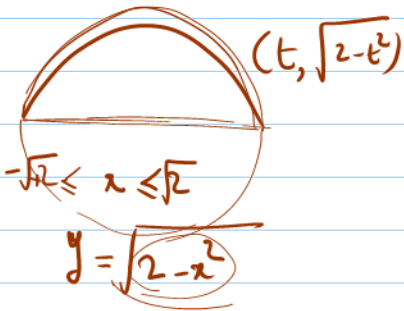
$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2\} \quad \text{مرکز: } (0, 0)$$



$$x = \sqrt{2} \cos t$$

$$y = \sqrt{2} \sin t \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$



$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$$

تعیین نقاط بحرانی

$$g(t) = 2 - 4\sqrt{2} \cos t \sqrt{2} \sin t = 2 - 4 \sin 2t$$

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

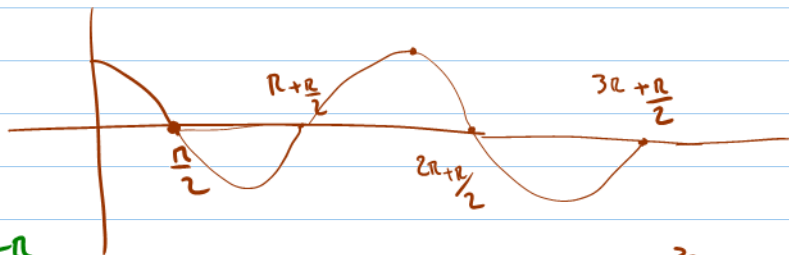
$$t \in [0, 2\pi]$$

تعیین نقاط بحرانی

مرکز: $(\sqrt{2}, 0)$

$$g'(t) = -8 \cos 2t = 0$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

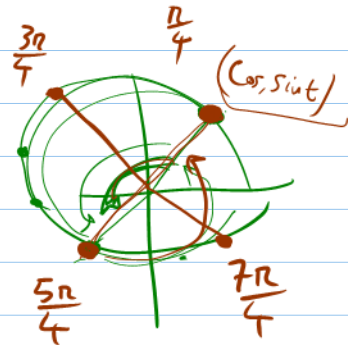


$$t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

نقاط بحرانی

$$\left(\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$(\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$$



$$\left(\sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right), \sqrt{2} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$\left(\sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right), \sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$$\left(\sqrt{2} \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right), \sqrt{2} \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$$



نقاط بحرانی

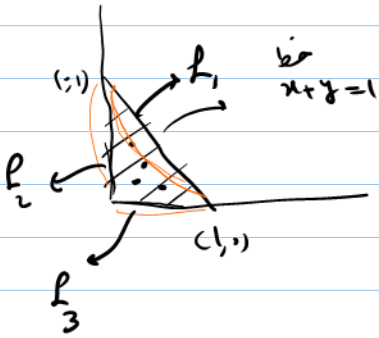
نقاط بحرانی

مثال آزمون سطح تابع $f(x,y) = \sin(\pi xy)$ تابع مرکب

$$D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$$

یک ناحیه لبه دگانه

بیایید



تابع ① به آ کردن نقاط بحرانی درون ناحیه:

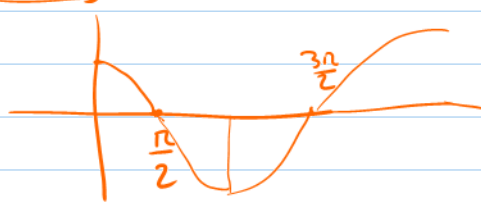
$$f_x = \pi y \cos(\pi xy)$$

$$f_y = \pi x \cos(\pi xy)$$

$$\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$\{(x,y) \mid \cos(\pi xy) = 0\}$$

فقط نقاط بحرانی هستند



$$\begin{matrix} xy = \frac{1}{2} \\ xy = \frac{3}{2} \\ \vdots \end{matrix}$$

چون x و y هر دو ≥ 0 هستند فقط $xy = \frac{1}{2}$ / $xy = \frac{3}{2}$ / ...

$$\{(x,y) \mid xy = \frac{1}{2}\}$$

در ناحیه ② برابرند

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$y = 1 - x$$

$$x + y = 1$$

خط

خط L_1 :

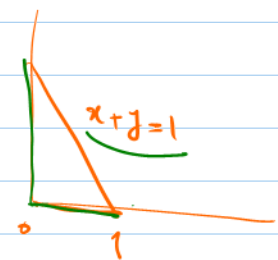
② بررسی تابع در مرزها

$$f(x,y) = \sin(\pi xy)$$

$$g(x) = \sin(\pi x(1-x))$$

$$0 \leq x \leq 1$$

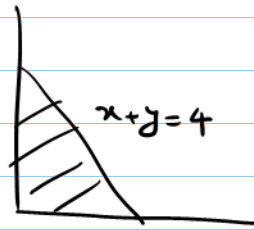
اداره تابع سوال به عمده



$$f(x,y) = xy e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$$

① آزمون آری

① اکثریم ها مطلق: $f(x,y) = 2xy$
 نام: $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$



③ اکثریم ها مطلق: $f(x,y) = xe^{2-(x+y)}$

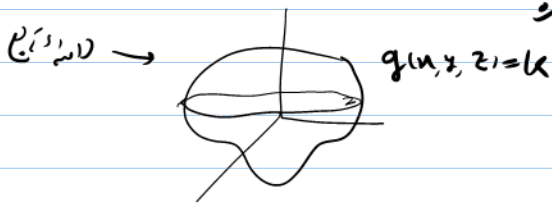


④ اکثریم ها: $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

روش ضرب لاجرانژ Lagrange multipliers

از این روش برای پیدا کردن اکثریم ها مطلق تابع با درجه یک محدودیت استفاده می شود.

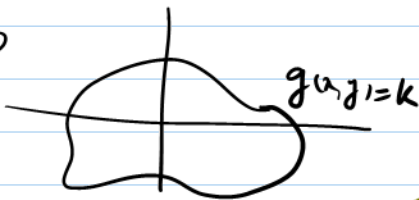
برای مثال ①: $g(x,y,z) = k$ را در نظر بگیرید. $w = f(x,y,z)$ متغیر



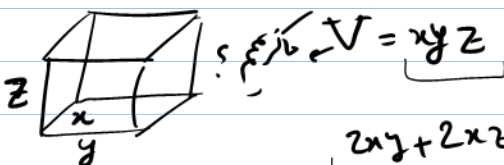
پیدا کنید.

② (درستی) ماکزیمم و مینیمم ها مطلق تابع

$z = f(x,y)$ را در نظر بگیرید. $g(x,y) = k$ را پیدا کنید.



مثال: ماکزیمم حجم یک جعبه مستطیل که مساحت جانبی آن ۱۲ است را بیابید.



$V = xyz$ ماکزیمم؟
 $2xy + 2xz + 2yz = 12$

مثال اگر هم سطح تابع $f(x,y)=2xy$ را در نظر داریم $x^2+y^2=2$ بیابیم.

روش ضرب لانژانر: برای پیدا کردن اکسترم‌ها سطح تابع $f(x,y,z)$ با محدودیت $g(x,y,z)=K$ با فرض این که اکسترم‌ها موجودند و $\nabla g \neq 0$

مقادیر (x,y,z) را به گونه ای پیدا کنیم که $\nabla f \parallel \nabla g$ و در هر کدام از این نقاط مقدار تابع را محاسبه و به هم مقایسه کنیم. $g(x,y,z)=K$



مثال اگر هم سطح تابع $f(x,y)=x^2+2y^2$ را در نظر داریم $x^2+y^2=1$ محاسبه کنیم.

$$(2x, 4y) = \lambda (2x, 2y)$$

$$\nabla f \parallel \nabla g \Rightarrow \nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\nabla f = (2x, 4y)$$

$$\nabla g = (2x, 2y)$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda(2x) \\ 4y = \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \lambda=1 \end{cases}$$

$$(\lambda=0)$$

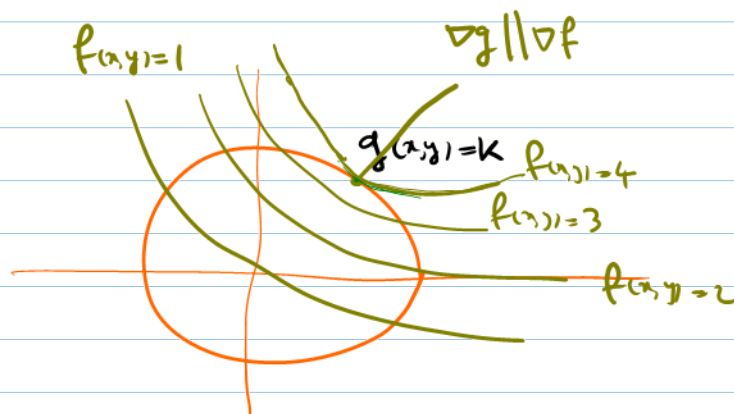
$$y = \pm 1, x = 0$$

بنابراین نقاط $(0,1)$ و $(0,-1)$ جزو کاندیدها هستند.

اگر $\lambda=1$ در این صورت $y=0$ و $x=\pm 1$ بنابراین نقاط $(1,0)$ و $(-1,0)$ هم جزو کاندیدها هستند.

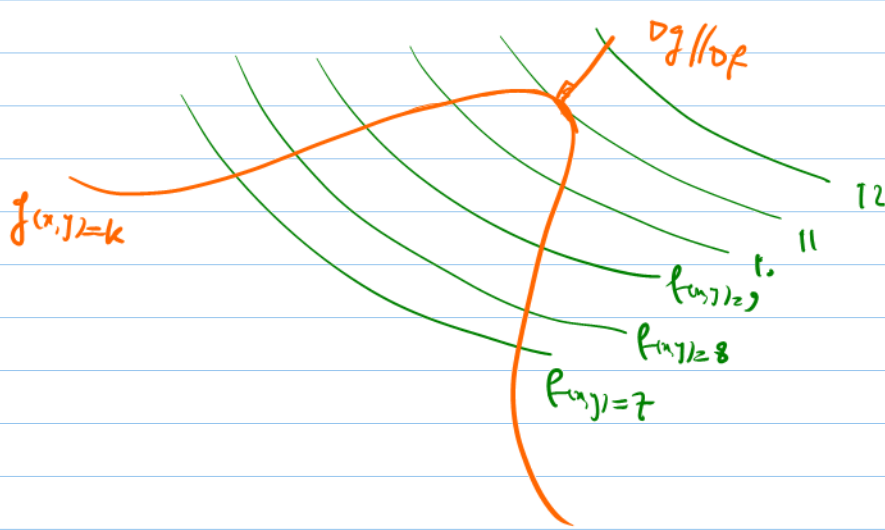
$$f(x,y)=x^2+2y^2$$

$$\begin{cases} \text{مقادیر} \\ f(0,1) = 2 \\ f(0,-1) = 2 \\ \text{مقادیر} \\ f(1,0) = 1 \\ f(-1,0) = 1 \end{cases}$$

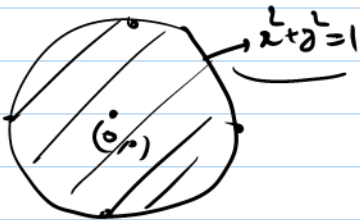


توضیح جدول

$$z = f(x,y)$$



مثال اکثر کم و بیش مقادیر تابع $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+2y^2}$ را در ناحیه $x^2+y^2 \leq 1$ محاسبه کنید.



① در مرز ناحیه: از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم
نقاط کاندید: $(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)$

② درون ناحیه نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم: $(0,0)$

مثال اکثر کم و بیش مقادیر تابع $f(x,y,z) = x^2 - 2yz$ را با شرط $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} f_x &= 2x \\ f_y &= -2z \\ f_z &= -2y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x = \lambda(2x) \\ -2z = \lambda(2y) \\ -2y = \lambda(2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{aligned} \lambda &= 1 \\ x &= 0 \\ \lambda = 1 &\Rightarrow z = -y \end{aligned}$$

اگر $x=0$ و $y, z \neq 0$ و $\lambda \neq 0$
از اینجاست $\frac{z}{y} = \frac{y}{z}$

یعنی $z^2 = y^2$ و $2y^2 = 2$ بنابراین $y = \pm 1$
 $z = \pm 1$

$(0, 1, 1)$

$(0, 1, -1)$

$(0, -1, 1)$

$(0, -1, -1)$

توجه آیا اینکه $x=0$ ، y, z را به هر چه خواستیم!

در این حالت $z=0$ ، $x^2+y^2+z^2=2$ و $x=0$ و $y, z \neq 0$ وقت.

$\lambda = 1$ اگر به عبارتی $z = -y$
 $x^2 + 2y^2 = 2$

$R = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{array}{l} z = -y \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{array} \right\}$



کانه ها هستند.

$\min f(0, 1, 1) = ? -2$

$\max f(1, 1, -1) = ? 2$

$\min f(1, -1, -1) = ? -2$

$\max f(1, -1, 1) = ? +2$

$\max f(x, y, z) = 2$

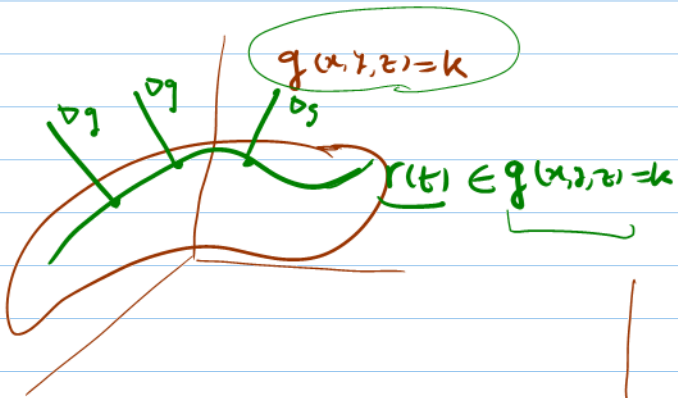
$(x, y, z) \in R$

$f(x, y, z) = x^2 - 2yz$

در سطح R مقدار f برابر است با:

$x^2 + 2y^2 = 2$

توابع دیگر در باره سطح دستش لاگراژ:



$f(x, y, z)$

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$
 در سطح f حرکت

راشته نایج

دانه f ماکزیمم $R(t) = f(x(t), y(t), z(t))$

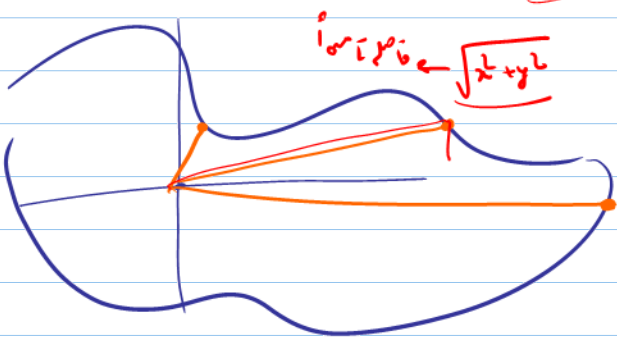
به همان t ماکزیمم f می باشد.

$\nabla f \cdot \vec{r}'(t) = 0 \Rightarrow \nabla f \perp \vec{r}'(t) \Rightarrow \nabla f \parallel \nabla g$
 $\frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial z} z' = 0$

$$g(x,y) = k \quad 17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$$

نقطه در مختصات

مثال



پیدا کنید که کمترین و بیشترین فاصله را تا مبدأ دارد.

هدف: پیدا کردن حداکثر و حداقل مقدار تابع $f(x,y) = x^2 + y^2$

با شرط $g(x,y) = k$

$$\begin{cases} 2x = \lambda(34x + 12y) \\ 2y = \lambda(12x + 16y) \\ 17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100 \end{cases} \quad \begin{matrix} y \neq 0 \\ \lambda \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{y} = \frac{34x + 12y}{12x + 16y} = \frac{17x + 6y}{6x + 8y}}$$

اگر $y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

اگر $x = 0 \Rightarrow \lambda \neq 0$

$$\cancel{6x^2 + 8xy} = \cancel{17xy + 6y^2} \Rightarrow \boxed{6x^2 - 6y^2 = 9xy}$$

$$\Downarrow \boxed{2x^2 - 2y^2 = 3xy}$$

$$\Downarrow 8x^2 - 8y^2 = 12xy$$

$$\begin{cases} 17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100 \\ 12xy = 8x^2 - 8y^2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$25x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x = 2 \Rightarrow 8 - 2y^2 = 6y \Rightarrow y^2 + 3y - 4 = 0$$

$$x = -2 \Rightarrow 8 - 2y^2 = -6y \Rightarrow y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow y^2 + 3y - 4 = 0 \Rightarrow (y-1)(y+4) = 0$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$x = -2 \Rightarrow y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow (y-4)(y+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

بنا

- (2, 1)
- (2, -4)
- (-2, -1)
- (-2, 4)

دراسه نفاذ $x^2 + y^2$ را می بیند کمینه، max، min را ببینید.

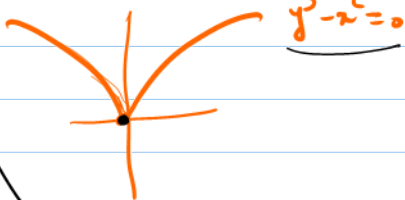
خلاصه درس امروز
اکثر هم ها را می بیند
 $f(x, y, z)$ به سبب
 $g(x, y, z) = k$

به صورت زیر حل می شود:

نقاط را می بیند که در آن
 $\nabla f \parallel \nabla g$
 $g(x, y, z) = k$

نمونه نزدیک ترین نقطه در دایره $z = x^2 + y^2 + 2$ به مبدأ مختصات چیست؟

نمونه $z = x^2 + y^2 + 2$ در دایره $z = 0$ را می بیند
نمونه $z = x^2 + y^2 + 2$ در دایره $z = 0$ را می بیند
نمونه $z = x^2 + y^2 + 2$ در دایره $z = 0$ را می بیند



Coming Soon!

$\iint f(x, y) dx dy$

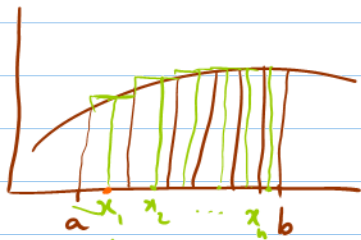
$\iiint f(x, y, z) dx dy dz$

$\int_3^4 \int_2^4$

Double integrals

انترال در گانه

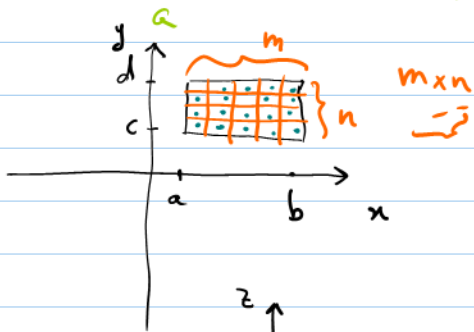
Summe



ریاض ۱: انترال به نوعی تقسیم جمع است. $y = f(x)$

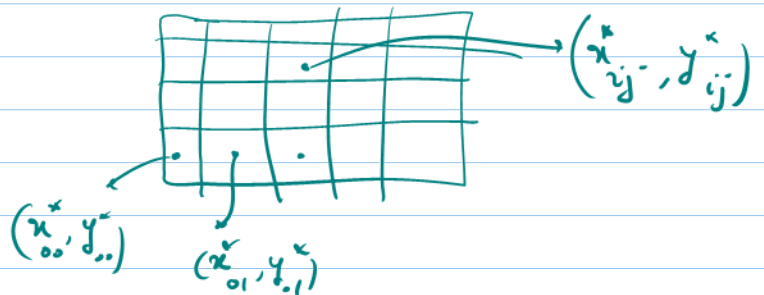
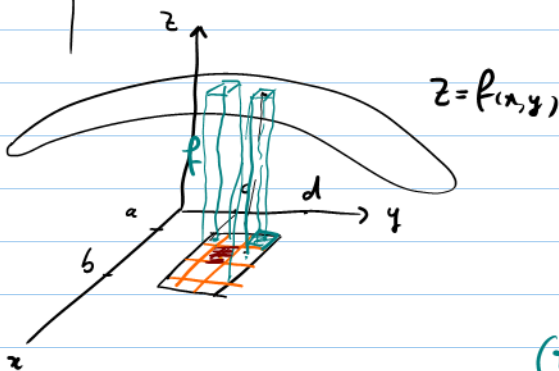
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$



فرض کنید $R = [a, b] \times [c, d]$

و $f(x, y)$ یک تابع باشد که در این سطح تعریف شده است.



$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$ جمع بر یک سطح



$$R = [a, b] \times [c, d]$$

$$\iint_R f(x, y) dA =$$

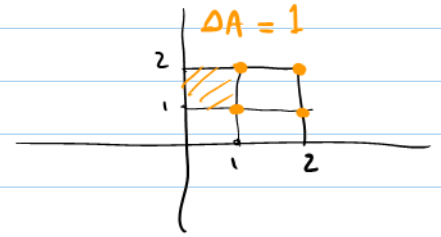
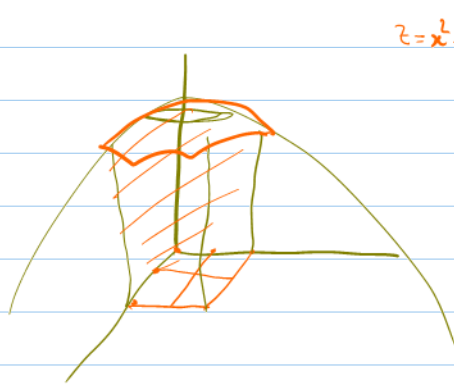
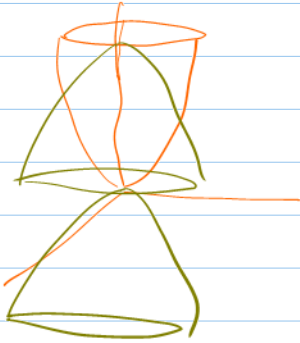
تعریف

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

اگر حد فوق وجود داشته باشد از آنجا که نقاط مثل باشد مجموع تابع f در ناحیه R انترال می‌باشد.

نرم اگر $f(x,y)$ آنگاه $\iint_R f(x,y) dA$ حجم زیر تابع و بالا ناحیه R به سمت z دهد.

مثال حجم زیر سطح $z = 16 - x^2 - y^2$ با مستطیل $R = [2, 4] \times [2, 4]$ را تخمین بزنید.



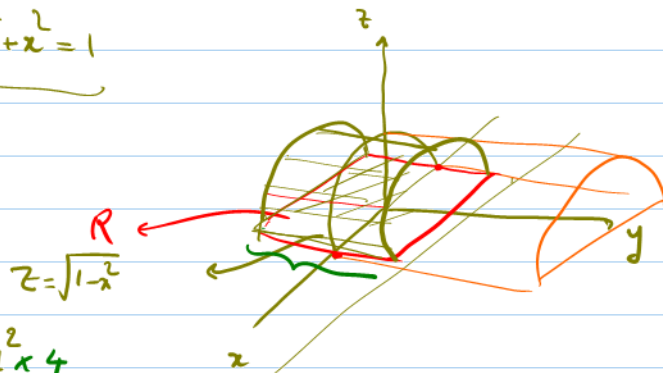
$(1,1), (1,2)$
 $(2,1), (2,2)$

$$\iint_R f(x,y) dA \approx f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2) =$$

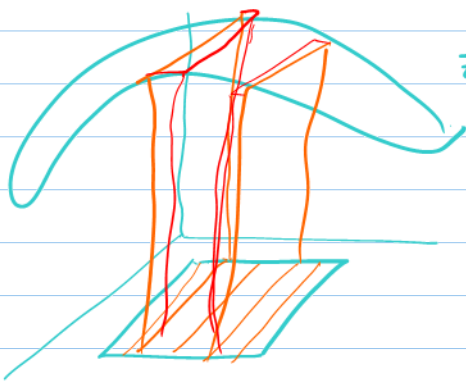
$$16 - x^2 - y^2 \quad \quad \quad 16 - (-3) + 16(-1-8) + \dots$$

مثال $\iint_R \sqrt{1-x^2} dA$ را می‌توان گفت که دایره $R = [-1, 1] \times [2, 2]$

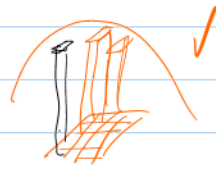
$$z = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow z^2 + x^2 = 1$$



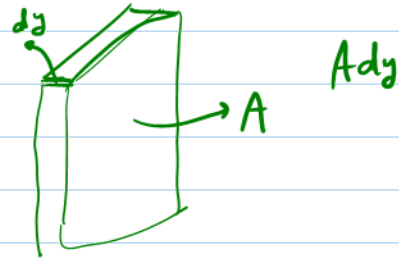
$$\iint_R \sqrt{1-x^2} dA = \text{حجم استوانه} = \frac{\pi \times 1^2 \times 4}{2} = 2\pi$$



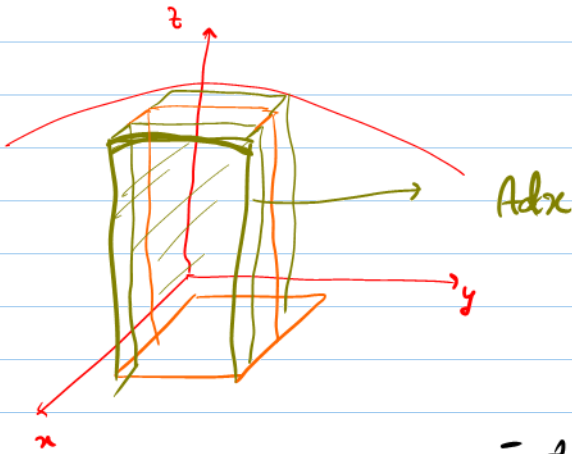
$$z = f(x, y)$$



حجم هر یک مستطیل متناهیات ؟



$A dy$



$A dx$

$$R = [a, b] \times [c, d]$$

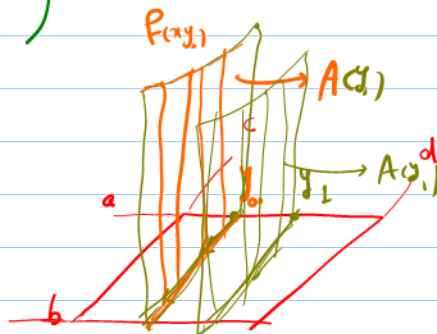
تقسیم دوبین

فرض کنید تابع f در ناحیه مستطیل R پیوسته باشد. در این صورت

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

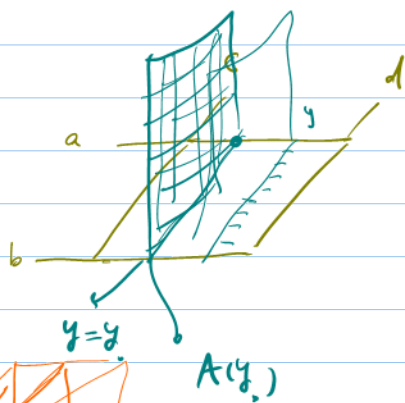
$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

یا برعکس.



توضیح

$$A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$



$$\int_a^b f(x, y) dx$$

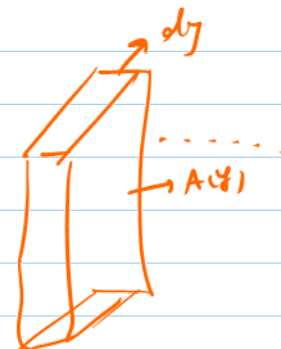
$$A(y) = \int_a^b \underbrace{f(x, y)}_{=1} dx$$

برای y :

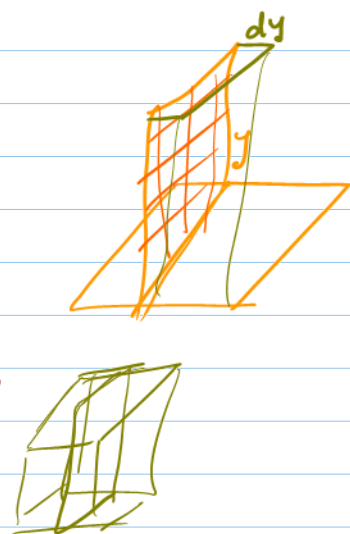
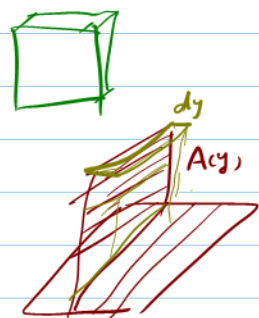


حجم مستطین

$$\int_c^d A(y) dy$$



$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$



$$A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

$$\text{حجم} : \int_c^d A(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

تقسیم مجدد

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dz =$$

تقسیم دوباره

محل هندسه این را ببینید

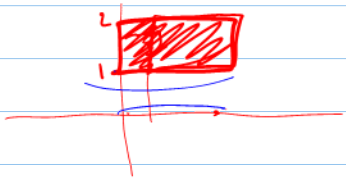
$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$

با استفاده از دینامیک

مثال

$$\iint_R (x - 3y^2) dA$$



$$\int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2) dy dx =$$

$$\int_1^2 (x - 3y^2) dy = \int_1^2 x dy - \int_1^2 3y^2 dy = xy \Big|_{y=1}^{y=2} - y^3 \Big|_{y=1}^2$$

خارج برداشت

$$= x - (7) = x - 7$$

$$\int_0^2 (x - 7) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - 7x \Big|_0^2 = 2 - 14 = \boxed{-12}$$

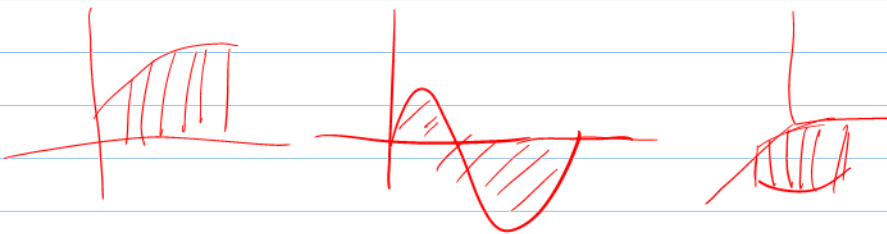
$$\int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2) dx dy$$

روش دوم (تغییر ترتیب انتگرال گیری)

$$\int_0^2 (x - 3y^2) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - 3y^2 x \Big|_0^2$$

$$= 2 - 3y^2(2) = 2 - 6y^2$$

$$\int_1^2 (2 - 6y^2) dy = (2y - 2y^3) \Big|_1^2 = (4 - 16) - (2 - 2) = \boxed{-12}$$



$$\int_1^2 \int_x^3 x^2 y \, dx \, dy = ? \quad \underline{\text{سوال}}$$

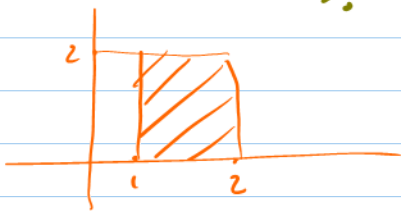
$$\int_1^3 x^2 y \, dx = y \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 = 9y$$

$$\int_1^2 9y \, dy = 9 \left. \frac{y^2}{2} \right|_1^2 = 9 \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 9 \times \frac{3}{2} = \frac{27}{2}$$

$$\int_1^2 \int_x^3 x^2 y \, dy \, dx = ? \quad \underline{\text{سوال}}$$

$$\int_1^2 x^2 y \, dy = \left. x^2 \frac{y^2}{2} \right|_1^2 = x^2 \left(2 - \frac{1}{2} \right) = x^2 \frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 x^2 \frac{3}{2} \, dx = \frac{3}{2} \times 9 = \frac{27}{2} \checkmark$$



$$\int_0^2 \int_1^2 y \sin(xy) \, dx \, dy \quad \underline{\text{سوال}}$$

$$\int_1^2 y \sin(xy) \, dx = \left. -\cos(xy) \right|_{x=1}^2 = \cos y - \cos 2y$$

$$\int_1^2 (\cos y - \cos 2y) \, dy = \dots$$

$$\int_1^2 \int_y^2 y \sin(xy) \, dy \, dx \quad \underline{\text{سوال}}$$

$$\int_1^2 y \sin(xy) \, dy$$

دوبارہ استفادہ از انٹیگریشن

$$\int_1^2 y \sin(2y) \, dy$$

ترتیب با ترتیب دیگر از یکدیگر
محاسبه راحت تر است!

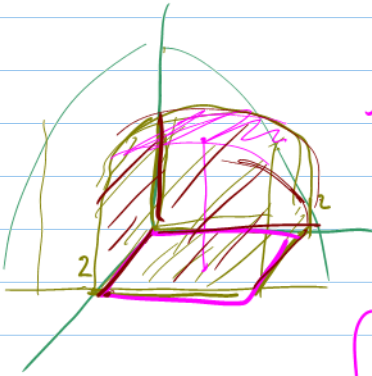
$$x^2 + 2y^2 + z = 16$$

عم جیس بابا یہ کہ توسط کھربا بیضی

مثال

$$z = 16 - x^2 - 2y^2$$

صفحات $x=2$ ، $y=2$ ، و صغیر و صفحات احاطہ شدہ است.



$$\text{عم مورد نظر} = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dy dx$$

$$\iint_R f(x, y) dA$$

$$\int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dy =$$

$$\int_0^2 (16 - x^2) dy - \int_0^2 2y^2 dy =$$

$$2(16 - x^2) - \frac{2}{3} y^3 \Big|_0^2 = 32 - 2x^2 - \left(\frac{16}{3}\right)$$

$$\int_0^2 \left(\left(32 - \frac{16}{3}\right) - 2x^2 \right) dx = \left(32 - \frac{16}{3}\right) \times 2 - \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^2 = \dots$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \neq$$

تو؟

$$\int_a^b f(x, y) dx \times \int_c^d f(x, y) dy$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos y) dy dx$$

مثال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos y) dy = \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy = \sin x \left(\sin y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \sin x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \cos y) dy = \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x)g(y) dy dx =$$

بہ نسبت

$$\int_a^b f(x) \left(\int_c^d g(y) dy \right) dx = \int_c^d g(y) dy \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 y dy dx = ?$$

نہیں

$$\int_0^2 x dx \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 y dy = \dots$$

$$R = [0, 1] \times [-3, 3]$$

$$\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1} dA$$

نہیں

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

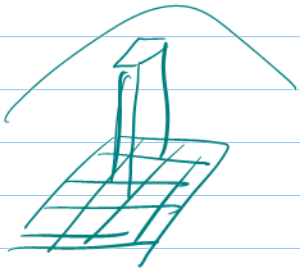
$$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$\iint \frac{\tan \theta}{\sqrt{1-t^2}} dA$$

نہیں

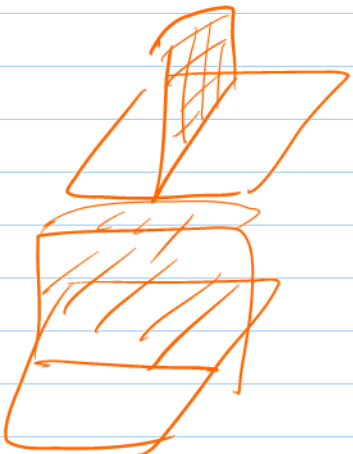
$$\iint_R x \sin(x+y) dA$$

$$R = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$



$$\iint_R f(x,y) dA = \sum \sum f(x,y) \Delta A$$

مجموع دس لیه



$$\int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx$$

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

$$\int_a^b \left(f(x) \int_c^d g(y) dy \right) dx = \int_c^d g(y) dy \times \int_a^b f(x) dx$$

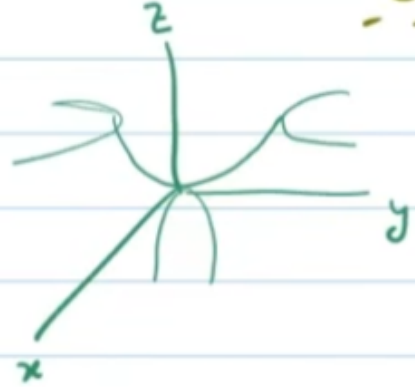
فرد ج روز 3 غنہ پارسه!

a

b

مسئله حجم زیر سطح دایره ای را محاسبه کنید. $z = 3y^2 - x^2 + 2$ و بالا سطح است.

$$z = y^2 - x^2$$



اینها را $R = [-1, 1] \times [1, 2]$



09

$$\int_{-1}^1 \int_1^2 (3y^2 - x^2 + 2) dy dx = \int_{-1}^1 \left[y^3 - x^2 y + 2y \right]_1^2 dx$$

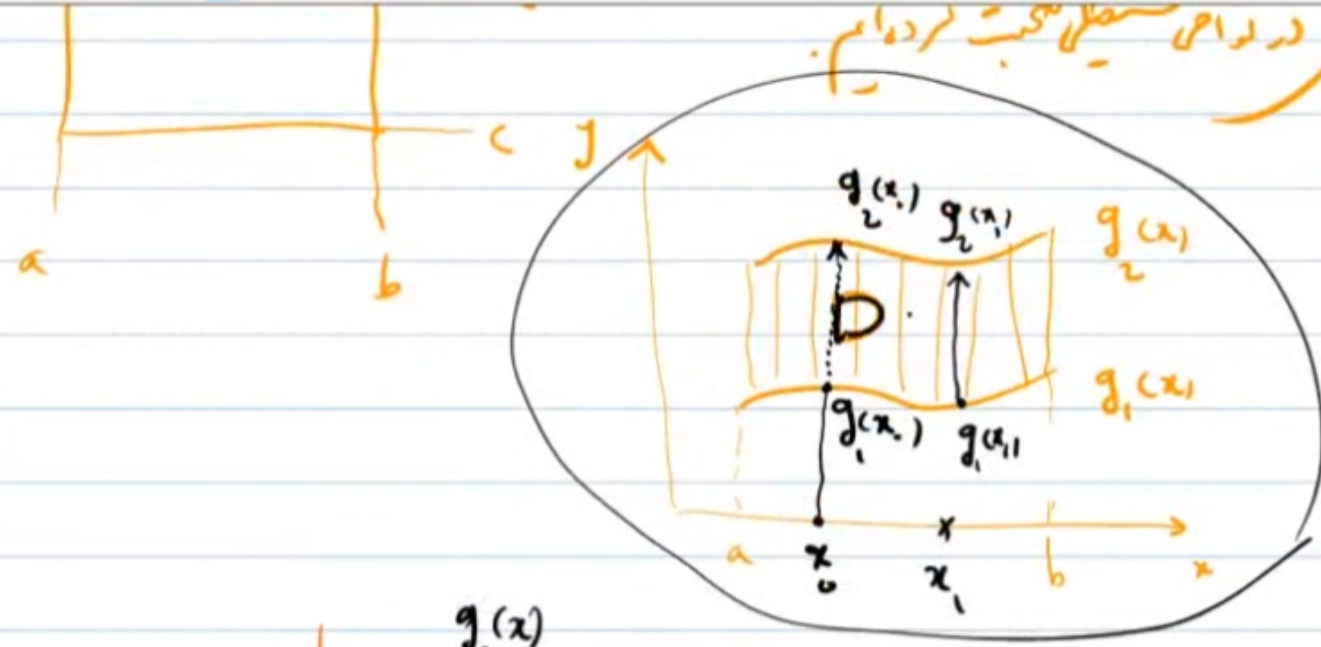
$$= \int_{-1}^1 (7 - x^2 + 2) dx = \left(7x - \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-1}^1 = \dots$$

110

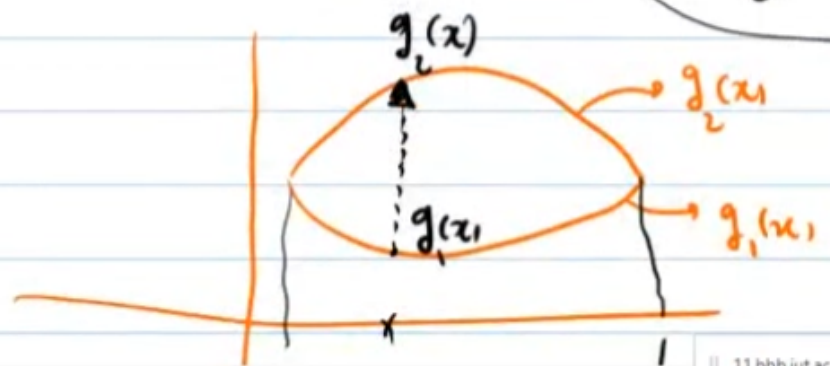
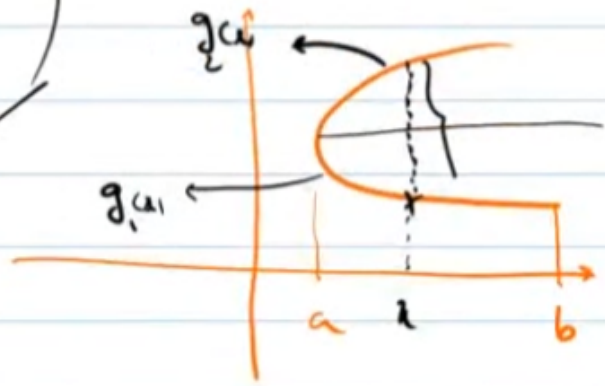
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy \quad \underline{25}$$

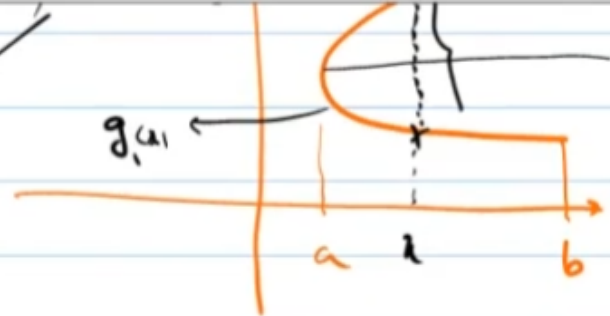
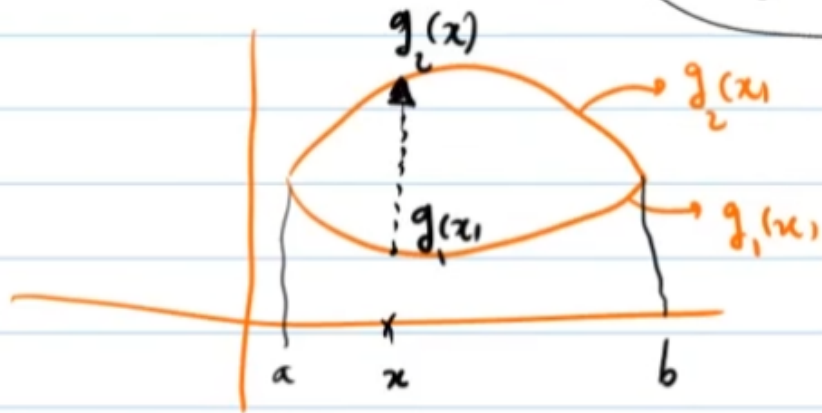
111

تفاوت دو تابع را در یک سطر می‌توان نوشت



ناحه نزاع اول





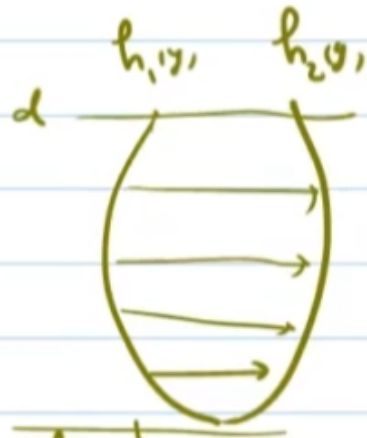
$$\iint_D f(x,y) dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy \right) dx$$



$$c \leq y \leq d$$

$$h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$

$$D = \{ (x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \}$$



نصف دوم

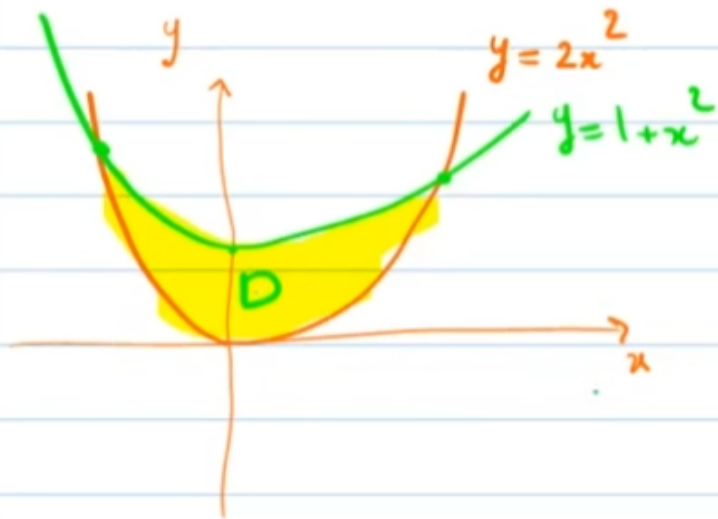
10

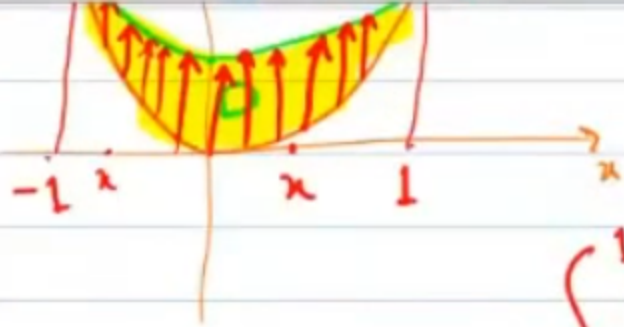
مسئله 10: محاسبه کثرت در ناحیه D از صفحه مختصات

$$\iint_D (x+2y) dA$$

مثال حل انتگرال

بین منحنیها $y=2x^2$, $y=1+x^2$ است.





$$2x^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y) dy dx =$$

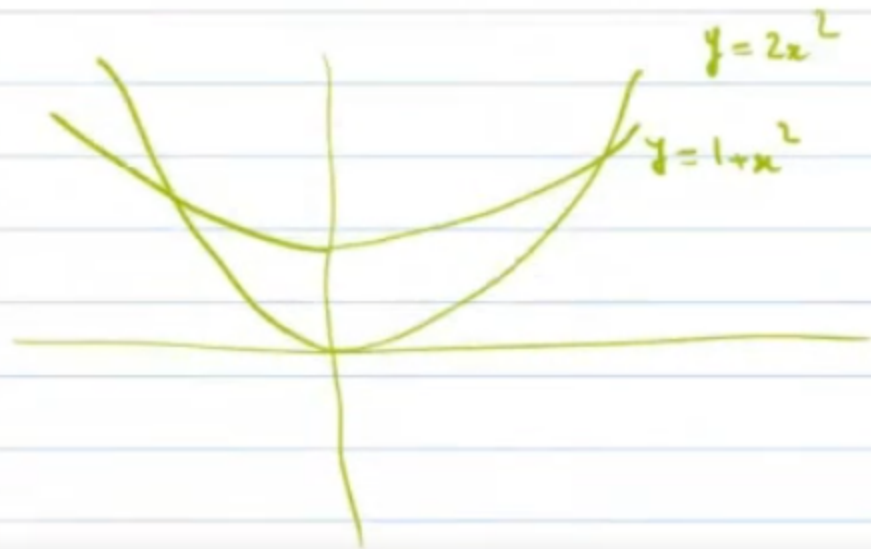
$$\int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y) dy = \left[xy + y^2 \right]_{2x^2}^{1+x^2}$$

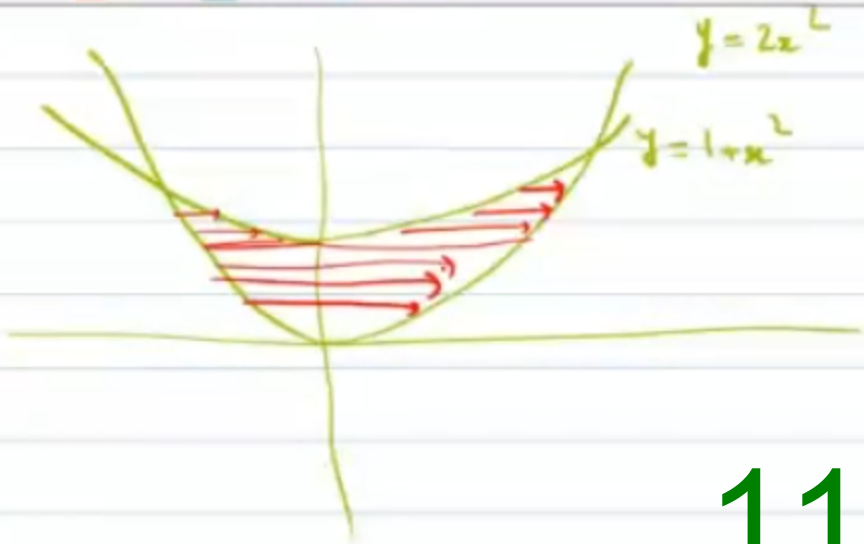
$$\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y) dy dx =$$

$$\int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y) dy = \left[xy + y^2 \right]_{2x^2}^{1+x^2}$$

$$\int_{-1}^1 \left[xy + y^2 \right]_{2x^2}^{1+x^2} dx = \int_{-1}^1 \left(x(1+x^2) + (1+x^2)^2 - \left(x(2x^2) + (2x^2)^2 \right) \right) dx$$

$= \dots$

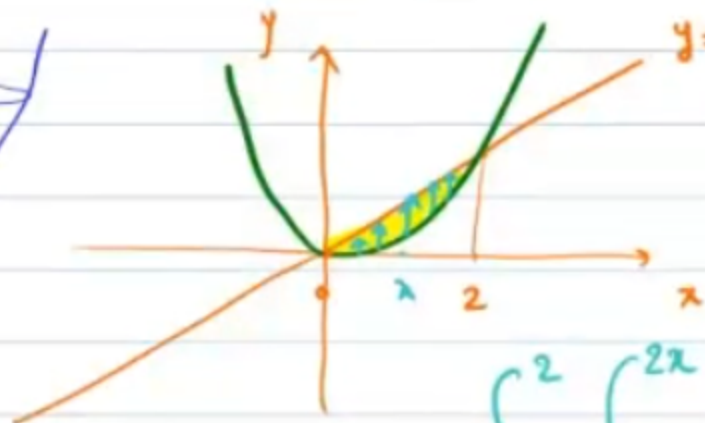




مثال حجم سطحه را بیابید که زیر کمره $z = x^2 + y^2$ و بالا ناحیه D احاطه شود که سطح منتهای

$y = x^2$ و $y = 2x$ واقع شده است.

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x \Rightarrow x=0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$



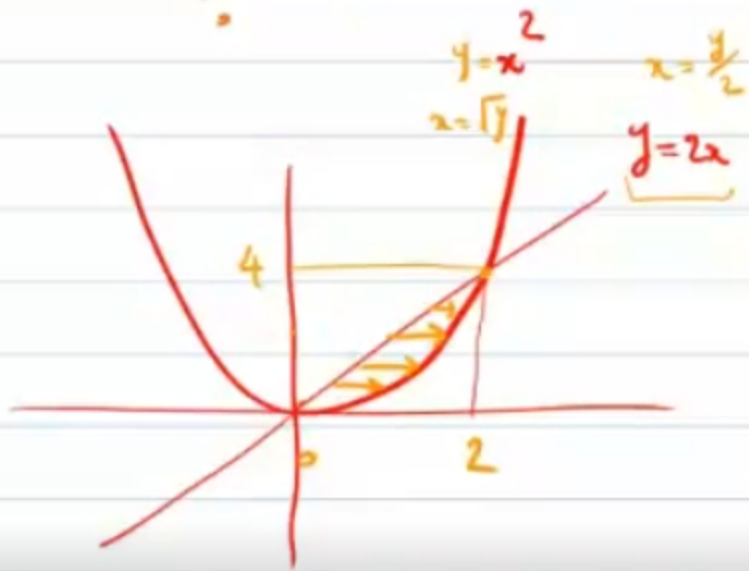
$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx$$

11

$$\int_x^{2x} (x^2 + y^2) dy = x^2 y + \cancel{\frac{y^3}{3}} \Big|_x^{2x} = \underbrace{x^2(2x - x) + \left(\frac{(2x)^3}{3} - \frac{x^3}{3} \right)}_y$$

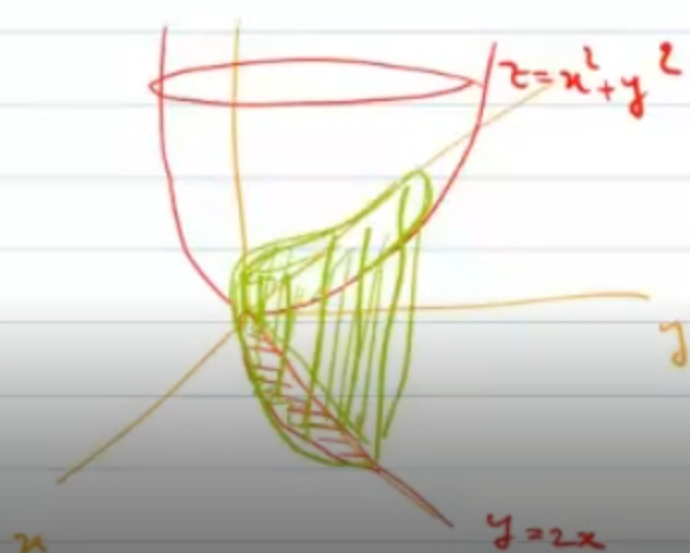
$$\int_0^2 \left(x^2(2x - x^2) + \left(\frac{(2x)^3}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \right) dx = \dots$$

121



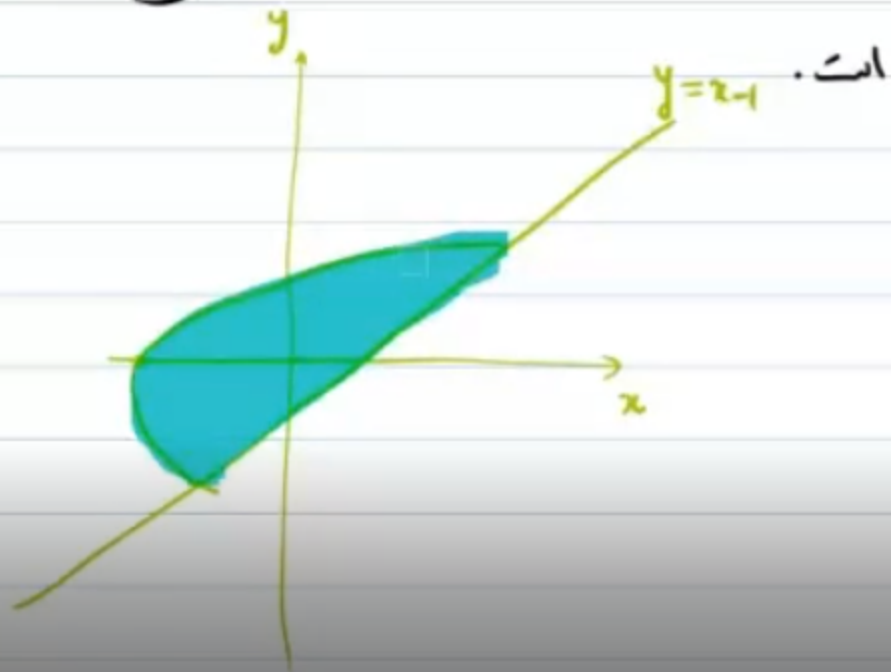
$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx dy$$

روش دیگر:

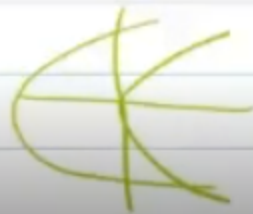


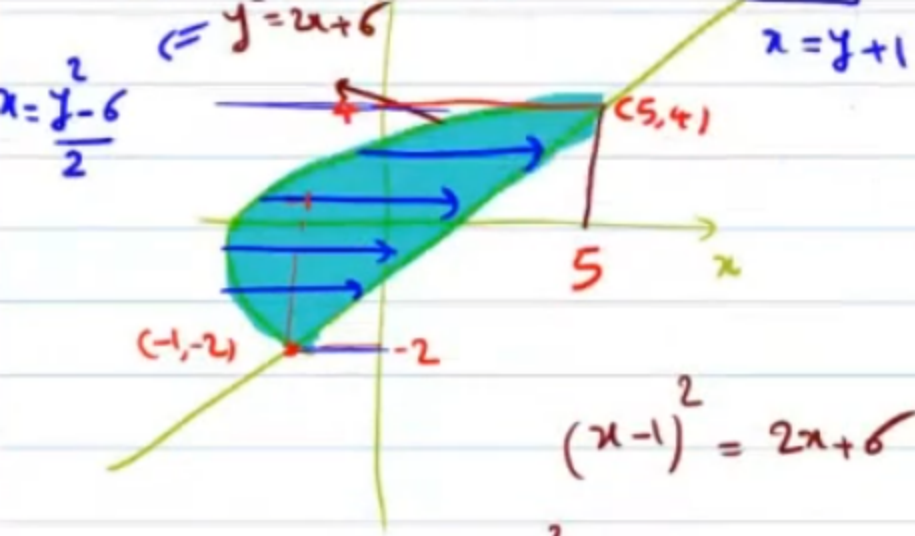
$y^2 = 2x + 6$ و $y = x - 1$ خط D نحص بين خط

$\iint_D (xy) dA$ مطلوب



$$x = \frac{y^2}{2} - 3$$





$$(x-1)^2 = 2x+6$$

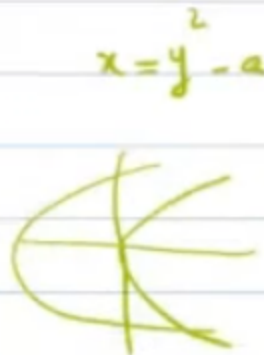
$$x^2 + 1 - 2x = 2x + 6$$

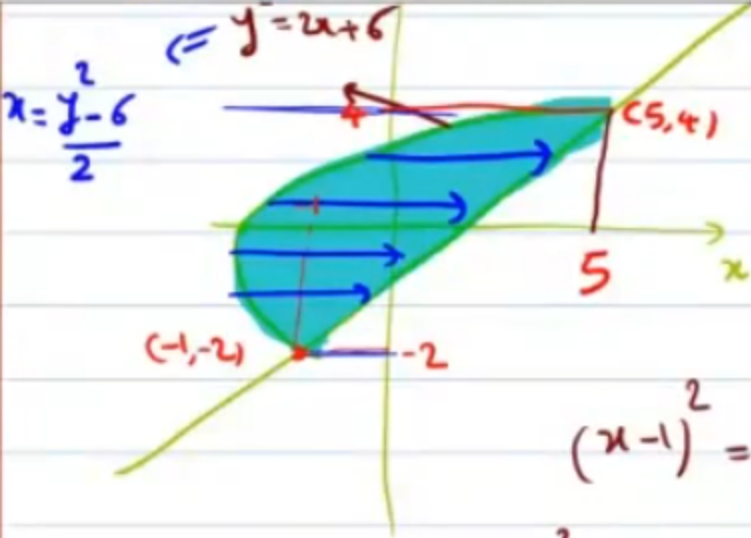
$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 5$$

$$\int_{-2}^4 \int_x^{\frac{y^2}{2}-3} dy dx$$





$$(x-1)^2 = 2x+6$$

$$x^2 + 1 - 2x = 2x + 6$$

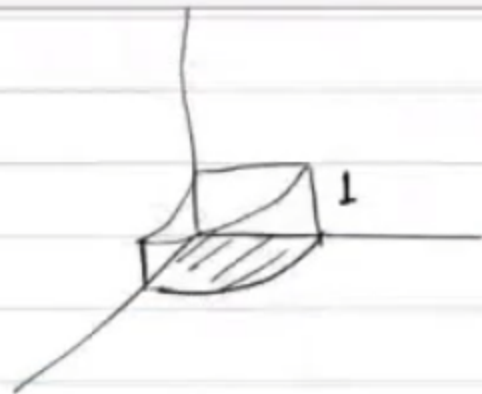
$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 5$$

$$\int_{-2}^4 \int_{y^2/2-3}^{y+1} (xy) dx dy = \dots$$

$$\int_{\frac{y}{2}-3}^{y+1} dx = x \bigg|_{\frac{y}{2}-3}^{y+1} = \left(y+1 - \frac{y^2}{2} + 3 \right)$$



$$\int_{-2}^4 \left(y+4 - \frac{y^2}{2} \right) dy = \dots$$

مثال حجم چهار وجهی احاطه شده توسط صفحات

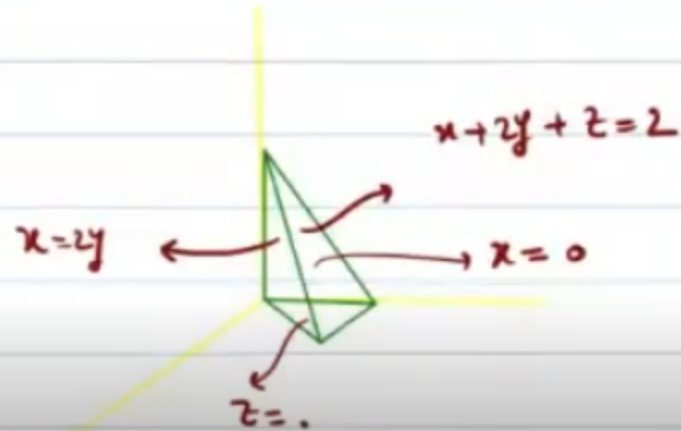
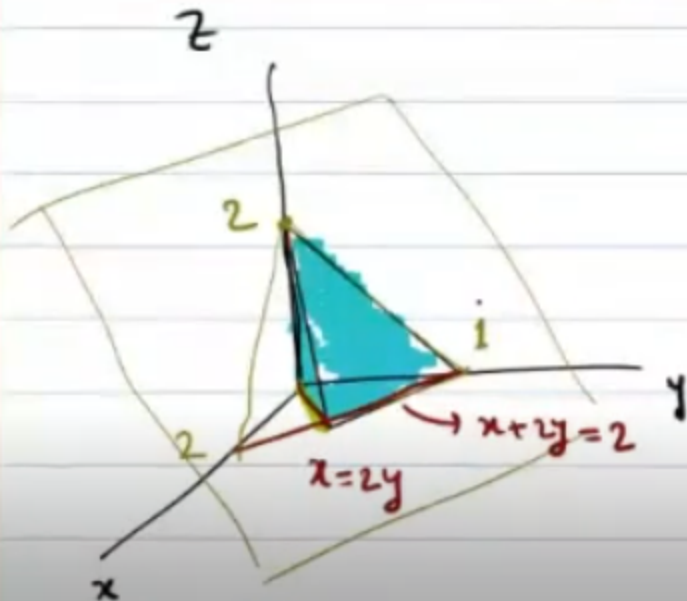
$$x + 2y + z = 2$$

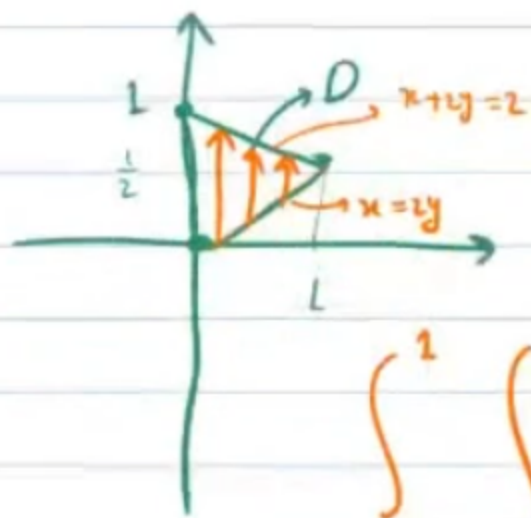
رایبایید.

$$x = 2y$$

$$z = 0$$

$$x = 0$$





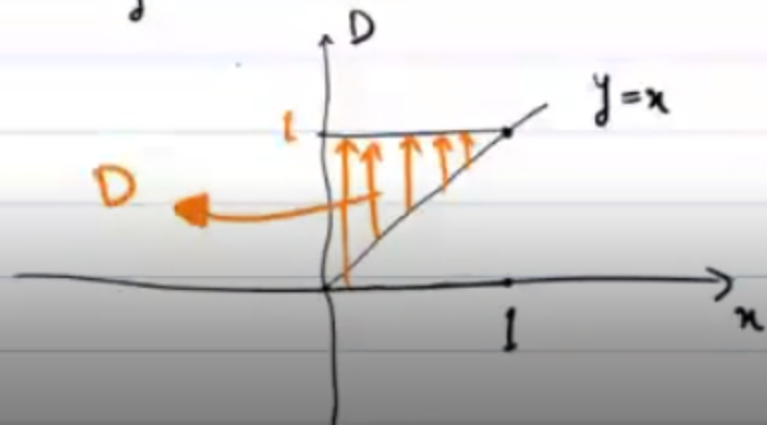
$$\iint_D (2-x-2y) \, dA$$

$$\int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2-x-2y) \, dy \, dx$$

13

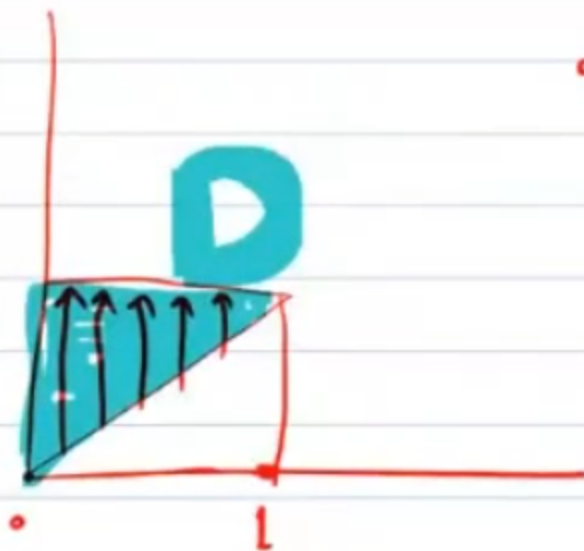
$$I = \int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx \quad \underline{I_0}$$

$$\int_x^1 \sin(y^2) dy = \text{سخت!}$$



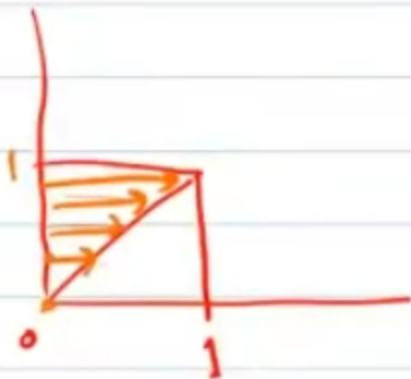
130

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx = \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) dy dx$$

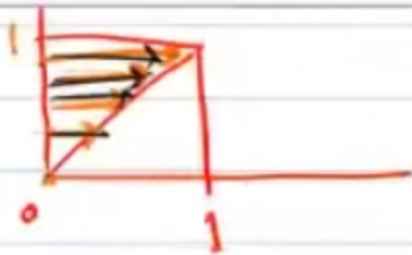


دیس کے عکس

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx \quad \underline{\text{نکلا}}$$



$$\int_0^1 \int_0^y dy dx$$



$$\int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) dx dy$$

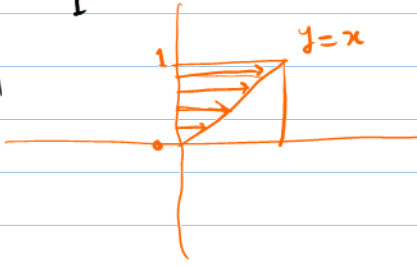
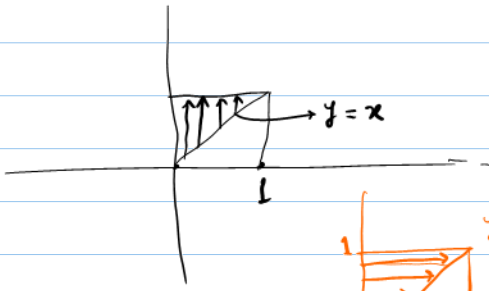
$$\int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) dx dy =$$

$$\int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) dx dy = \int_0^1 \left[\sin(y^2) x \right]_0^y dy$$

$$= \int_0^1 y \sin(y^2) dy$$

$$= \int_0^1 \left[\underbrace{y}_{\frac{du}{2}} \sin(\underbrace{y^2}_u) \right] dy = \frac{-\cos(y^2)}{2} \Big|_0^1 = -$$

جواب 7 اور ریجیٹ =



$$\int_0^1 \int_{\frac{x}{y}}^1 \sin(y^2) dy dx \quad \text{منال}$$

$$\int_y^1 \int_x^y \sin(y^2) dx dy =$$

$$\int_0^1 \left[\sin(y^2) y \right] dy = -\frac{1}{2} \cos(y^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - \cos(1))$$

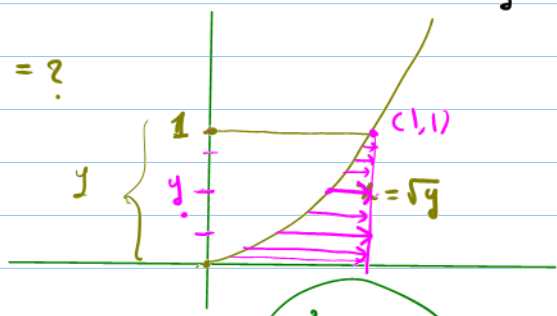
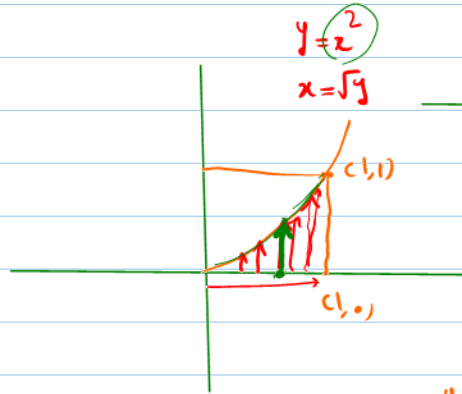
$$\int_{\sqrt{y}}^1 e^{\frac{y}{x}} dx$$

$$\int_y^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{\frac{y}{x}} dx dy \quad \text{منال}$$

$$\int e^{\frac{1}{x}} dx = ?$$

شمالی ناحہ آئیں الگری:

$$x = \sqrt{y} \Rightarrow y = x^2, y > 0$$



$$\int_x^1 \int_y^x e^{\frac{y}{x}} dy dx$$

$$\int_0^1 \int_{\frac{x}{y}}^1 =$$

$$= \int_0^1 \left[x e^{\frac{y}{x}} \Big|_{y=0}^{y=x^2} \right] dx$$

$$\int e^{\frac{1}{2}y} = 2e^{\frac{1}{2}y}$$

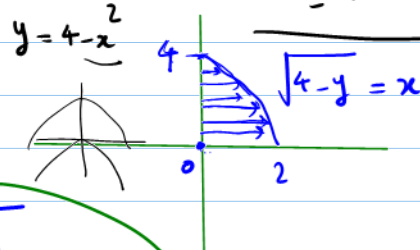
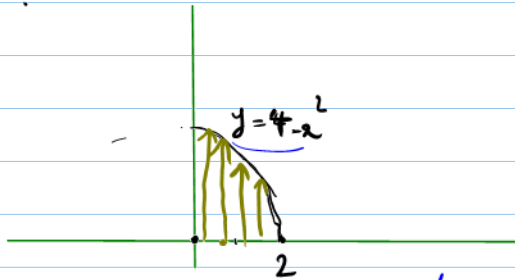
$$\int_0^1 \left[x \left(e^{\frac{x^2}{x}} - e^0 \right) \right] dx = \int_0^1 \underbrace{x e^x}_{u \cdot dv} dx - \int_0^1 \underbrace{e^0}_{\text{const}} dx$$

مثال

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y} dy dx$$

$$\int \frac{x e^{2y}}{4-y} = ?$$

تختص ناحیه انتگرالگیری



$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{x e^{2y}}{4-y} dx dy =$$

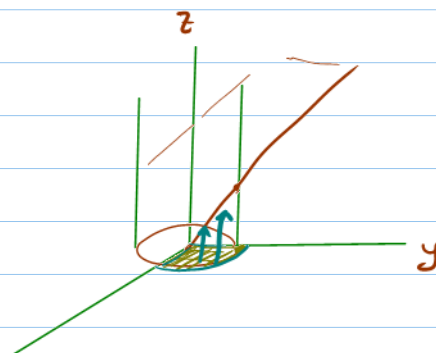
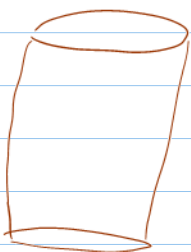
$$\int_0^4 \left(\frac{x e^{2y}}{4-y} \right) dx = \frac{e^{2y}}{2(4-y)} \left[x^2 \right]_0^{\sqrt{4-y}} = \frac{e^{2y} (4-y)}{2(4-y)} = \frac{1}{2} e^{2y}$$

$$\int_0^4 \frac{1}{2} e^{2y} dy = \frac{1}{4} e^{2y} \Big|_0^4 = \dots$$

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 x^4 e^x dx dy$$

تمرین

تمرین حجم نامتناهی احاطه شده توسط استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحات $z=0, x=0, y=0, z=2$



در یک سیستم اوردینات با بایاید.

تمرین حجم احاطه‌شده توسط مخروط را
 $z = x^2 + y^2 + 1$ ، یعنی $z=0$
 $y=0$
 $z=0$
 $x+y=2$ را بیابیم.

تمرین حجم زیر سطح $z = xy$ در بالا مثلث بارنس $(1,1)$ ، $(4,1)$ ، $(1,4)$ را بیابیم.

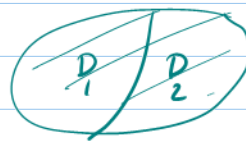
ویژگیها انتگرال دوگانه

$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y)) dA = \iint_D f(x,y) dA + \iint_D g(x,y) dA$$

$$\iint_D c f(x,y) dA = c \iint_D f dA$$

$$f \geq g \Rightarrow \iint_D f dA \geq \iint_D g dA$$

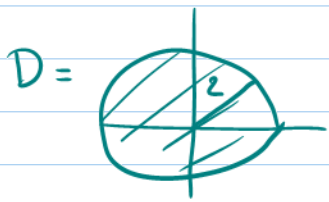
$$\iint_{D_1 \cup D_2} f dA = \iint_{D_1} f dA + \iint_{D_2} f dA$$



$$\iint_D dA = \text{مساحت } D$$

$$m \leq f(x,y) \leq M \Rightarrow \iint_D m dA \leq \iint_D f dA \leq \iint_D M dA \Rightarrow$$

$$m (\text{مساحت}) \leq \iint_D f dA \leq M (\text{مساحت})$$



$$\iint_D e^{\sin x \cos y} dA$$

حل

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos y \leq 1$$

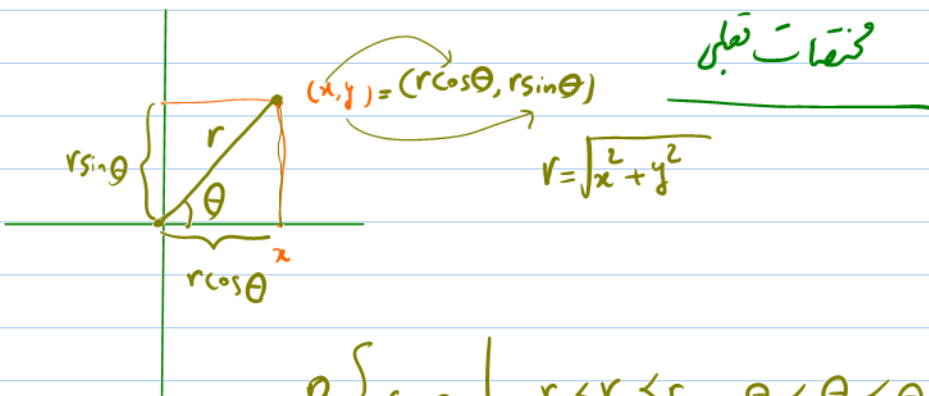
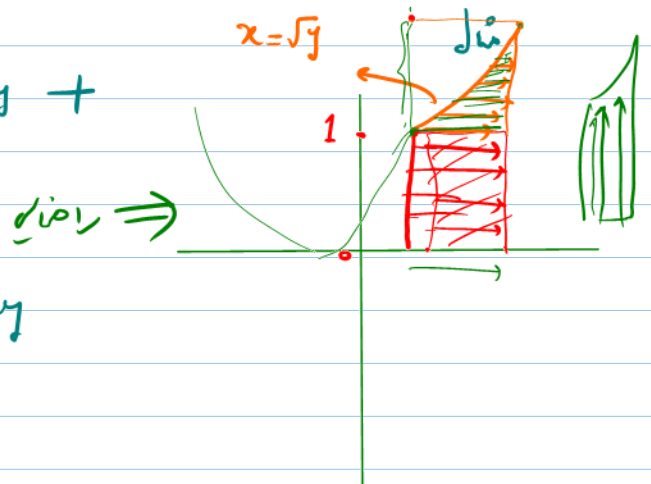
$$-1 \leq \sin x \cos y \leq 1$$

$$\frac{1}{e} \leq e^{\sin x \cos y} \leq e$$

$$\frac{1}{e} \times \pi \times 4 \leq \iint_D e^{\sin x \cos y} dA \leq e \times \pi \times 4$$

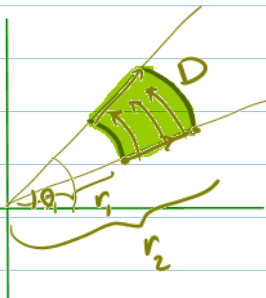
$$\int_0^1 \int_1^2 \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx dy +$$

$$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx dy$$



مستطيل قطري:

$$D = \{(r, \theta) \mid r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$$



$$\iint_D f(x,y) \underbrace{dA}_{dx dy} \stackrel{\text{تغییر قطبی}}{=} \iint_D f(\underbrace{r \cos \theta}, \underbrace{r \sin \theta}) \underbrace{r dr d\theta}$$

$$\int f(x) dx = \int f(\sin u) \cos u du$$

$x = \sin u$

$$dA = r dr d\theta$$

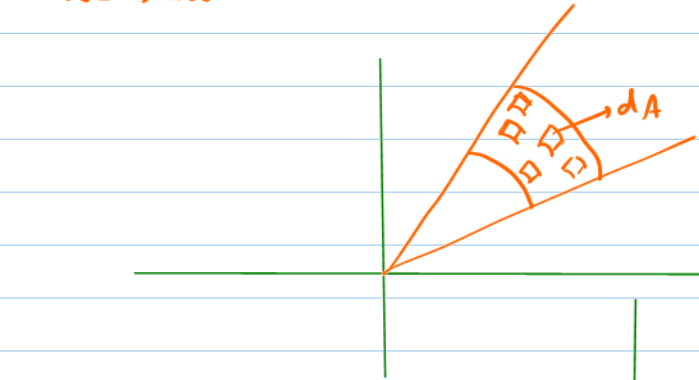
در فضا قطبی

$$dA = dx dy$$

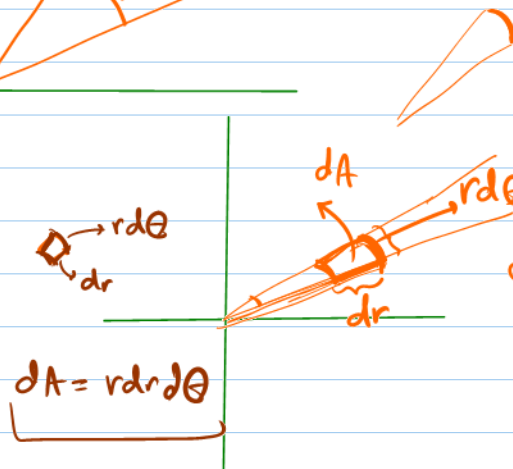
در فضا مستطیلی

توی نیم دایره:

2π



محیط دایره: $2\pi r$



$$dA = dr r d\theta = r dr d\theta$$

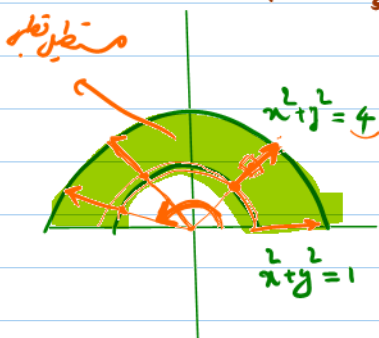
dA

$$\iint_R (3x + 4y^2) dA$$

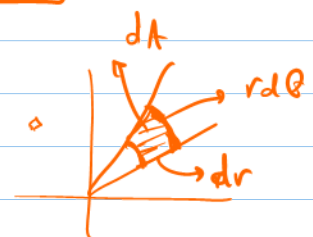
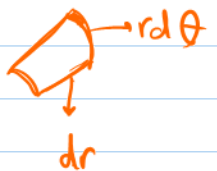
where $x = r \cos \theta$ and $y = r \sin \theta$

مثال

مثال: R به دو منحنی $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ بین دایره
 دایره $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$



$$\int_0^{\pi/2} \int_1^2 (3r \cos \theta + 4r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta$$



$$\int_0^{\pi/2} \int_1^2 3r^2 \cos \theta dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[r^3 \cos \theta \right]_1^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} (8 \cos \theta - \cos \theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} 7 \cos \theta d\theta = 7 \sin \theta \Big|_0^{\pi/2} = 7$$

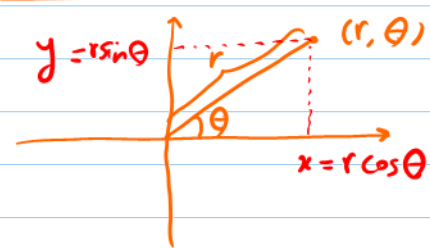
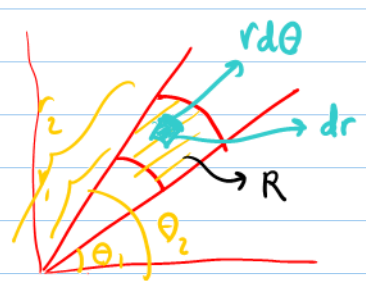
$$\int_1^2 3r^2 dr \times \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = 0$$

140

$$\int_0^{\pi} \int_0^2 \underbrace{4r^2 \sin^2 \theta}_{\text{circled}} r dr d\theta = \dots$$

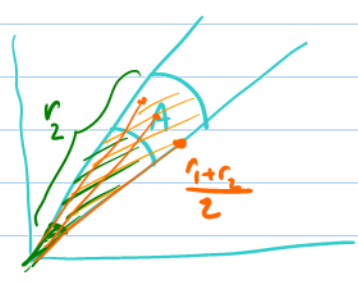
اردیبهشت ۱۱

نقاط قطبی



$$\{(r, \theta) \mid r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint f(r \cos \theta, r \sin \theta) \underbrace{r dr d\theta}_{dA}$$

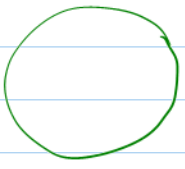


توجه: برای الان متراکمی

$$A = \text{ش} = \square - \square = \frac{1}{2} \Delta \theta r_2^2 - \frac{1}{2} \Delta \theta r_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \Delta \theta (r_2^2 - r_1^2) = \frac{1}{2} \Delta \theta (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) =$$

$$\Delta \theta \Delta r \underbrace{\frac{r_1 + r_2}{2}}_{r^*} = r^* \Delta r \Delta \theta$$



$$\pi r^2$$



با کوی نقاط R
 $x^2 + y^2 = 1$ بین دایره
 $x^2 + y^2 = 4$

$$\iint_R (3x + 4y^2) dA$$

مثال

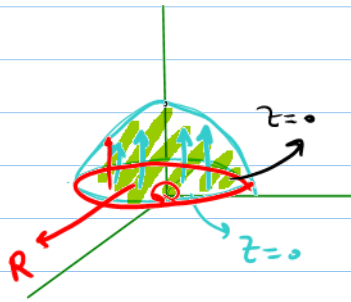


$$\int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos \theta + 4r^3 \sin^2 \theta) r dr d\theta = \dots$$

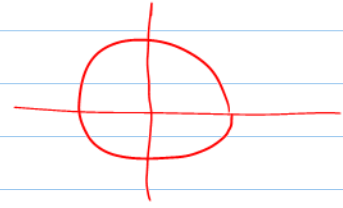
$$\int_0^\pi \int_1^2 3r^2 \cos \theta dr d\theta + \int_0^\pi \int_1^2 4r^3 \sin^2 \theta dr d\theta =$$

$$\left(\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \right) \times \left(\int_1^2 4r^3 dr \right) = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \times r^4 \Big|_1^2 = \dots$$

مثال: حجم صلب واقع فوق دائرة $z=0$ ونزح المحاور $z=1-x^2-y^2$ رايه.

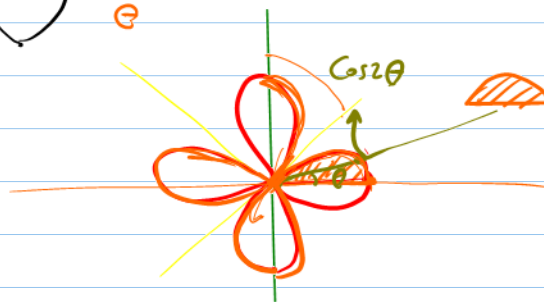
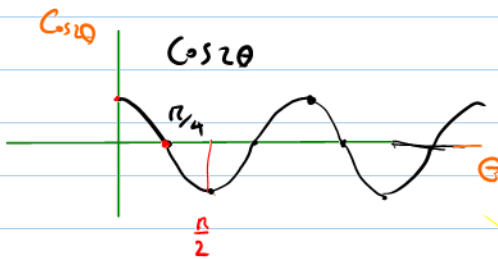


$$\iint_R f(x,y) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2) r dr d\theta =$$



$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r^2) r dr d\theta = \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 \times 2\pi = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \times 2\pi = \pi$$

مثال: مساحة كل ز $r = \cos 2\theta$ رايه.



$$\text{Area of one petal} \times 4 = \text{Total Area}$$

$$= 4 \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos 2\theta} r dr d\theta$$



$$= \int_0^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2} \Big|_0^{\cos 2\theta} \right] d\theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2(2\theta)}{2} d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 4\theta}{4} d\theta = \dots$$

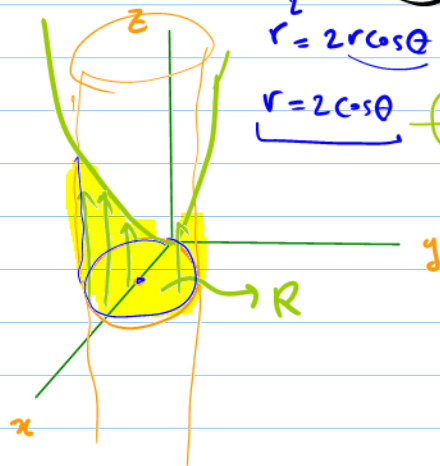
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$z = x^2 + y^2$$

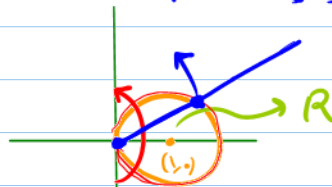
مثال: حجم دایره زیر کلاه

$$r^2 = 2r \cos \theta \Rightarrow r = 2 \cos \theta$$



$$r = 2 \cos \theta$$

$$r = 2 \cos \theta$$



$$\iint_R (x^2 + y^2) dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 r dr d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^3 dr d\theta = \dots$$

$$\int \cos^4 \theta d\theta = \int (\cos^2 \theta)^2 = \int \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right)^2 = \dots$$

نیم: یکدست استرال حلیم (حوضه دایره به کارگیری گویا)

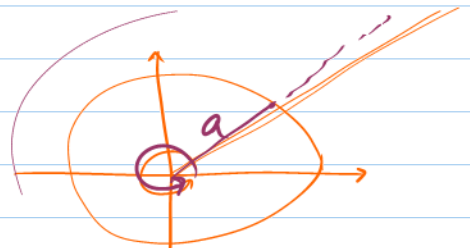
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2-y^2}}{e} dy dx$$

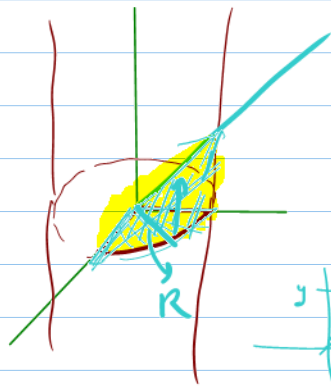
$$\int_0^{2\pi} \int_0^a r dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi$$



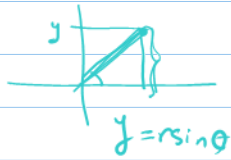
$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

مثال حجم صلبه را بیابید که در زیر مستویات و دایره استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و زیر صفحه $z = y$



دایره است.

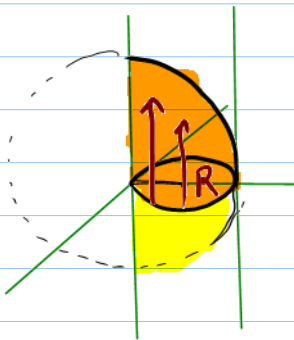
$$\iint_R y \, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$



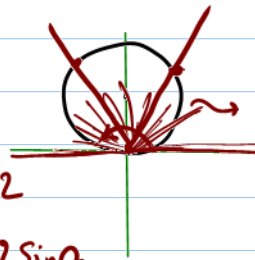
$$= \int_0^2 r^2 \, dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta = \dots$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

مثال حجم صلبه که در زیر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ، استوانه $x^2 + y^2 = 2y$ و دایره استوانه $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$



$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$



$$x^2 + y^2 = 2y$$

$$r^2 = 2r \sin \theta$$

$$r = 2 \sin \theta$$

حجم مرتکز = $2 \times$ نایب

$$\text{نایب} = \int_0^{\pi} \int_0^{2 \sin \theta} \sqrt{4 - r^2} \, r \, dr \, d\theta = \dots$$

$$\sqrt{4 - r^2}$$

$$x = \sqrt{2 - y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

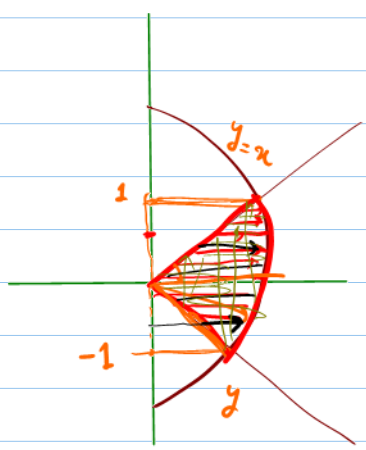
تغییر متغیر

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{2-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dx \, dy$$

مثال

$$\int \frac{1}{1+u^2} = \arctan u$$

$$y^2 = 2 - y^2$$



$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+r^2} \, r \, dr \, d\theta = \dots$$

$$\frac{1}{u} \, du$$

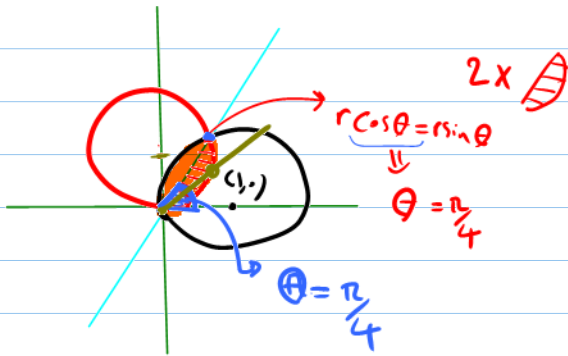
واجب کنید

$$x^2 + y^2 = 2y$$

$$x^2 + y^2 = 2x$$

مساحت کمر بین دایره

مثال



$$r^2 = 2r \cos \theta$$

$$r^2 = 2r \sin \theta \Rightarrow r = 2 \sin \theta$$

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \sin \theta} r dr d\theta$$

$$\int \sin^2 = \dots$$

$$\iint_R f(x,y) dA = \iint_R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$



$$dA = r dr d\theta$$

مرد

مرور: ① آنکزال دوگانه

$$\iint_D f(x,y) dx dy \quad dA = dx dy$$

۱۸ اریبیت

یک کعبه در دیگر آنکزال دوگانه

② نقاط قطره

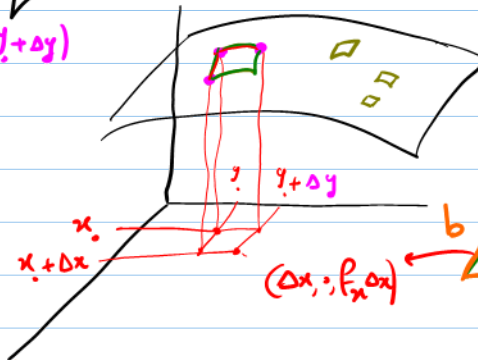
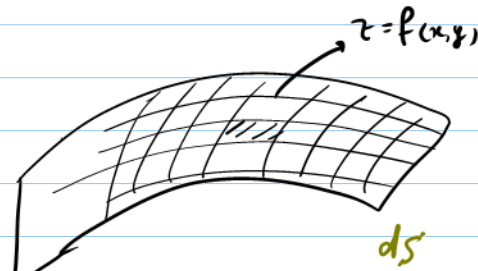
$$\int_0^{\theta} \int_r^{\rho} f(r,\theta) r dr d\theta$$

$$dA = r dr d\theta$$

$(x,y,f(x,y))$

$(x,y+\Delta y, f(x,y+\Delta y))$

$(x+\Delta x, y, f(x+\Delta x, y))$



محاسبه مساحت یک سطح

است.

$$\sum dS = ?$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$(\Delta x, 0, f(x+\Delta x, y) - f(x, y)) \Rightarrow (\Delta x, 0, f_x \Delta x) = \vec{a}$$

$$(0, \Delta y, f(x, y+\Delta y) - f(x, y)) \Rightarrow (0, \Delta y, f_y \Delta y) = \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta x & 0 & f_x \Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y \Delta y \end{vmatrix} = \vec{i} (-f_x \Delta x \Delta y) - \vec{j} (f_y \Delta x \Delta y) + \vec{k} \Delta x \Delta y$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{f_x^2 (\Delta x \Delta y)^2 + f_y^2 (\Delta x \Delta y)^2 + (\Delta x \Delta y)^2} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \Delta x \Delta y$$

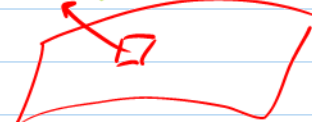
خط مساحت $z = f(x,y)$ با فرض اینکه بردار (f_x, f_y) - صورت زیرجای برشته:

$$A = \iint_{(x,y) \in D} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

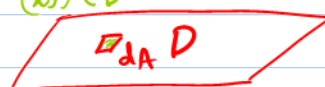
$(x,y) \in D$

اندازه بردار عمود بر سطح

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

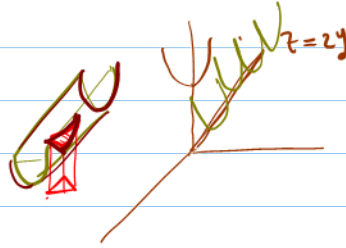
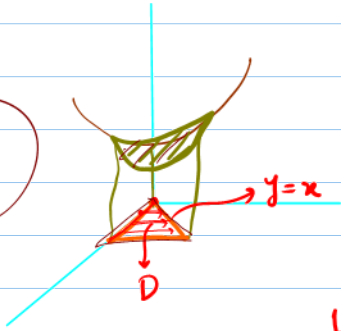


$(x,y) \in D$



مثال: مساحت قسمتی از سطح رویه $z = x^2 + 2y$ را بیابید که بالای مثلث بارش $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ واقع شده است.

$$ds = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA$$

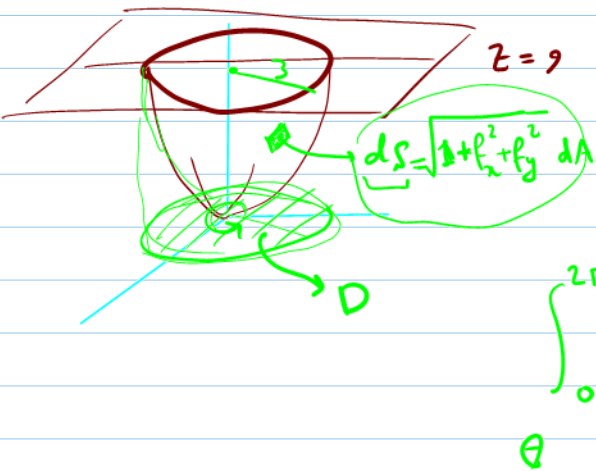


$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1 + 4x^2 + 4} dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x \sqrt{5 + 4x^2} dy dx = \int_0^1 \left[y \sqrt{4x^2 + 5} \right]_0^x dx = \int_0^1 x \sqrt{4x^2 + 5} dx$$

$\int_a^b k dy = k(b-a)$ $\frac{du}{dx} = 8$ $\int u du = \dots$

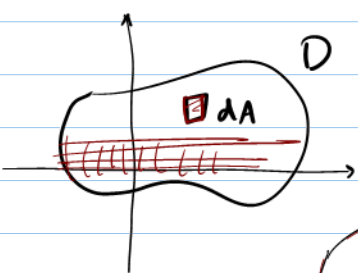
مثال: مساحت قسمتی از کهرمان $z = x^2 + y^2$ را بیابید که زیر صفحه $z = 9$ واقع شده است.



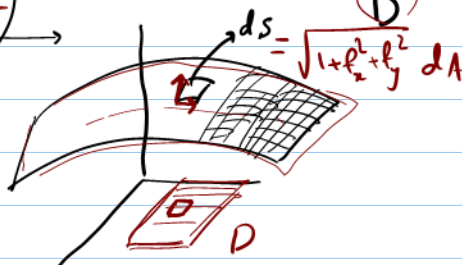
$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = 2\pi \times \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2} r dr$$

$\frac{du}{dr} = 8r$ $\int u du = \dots$

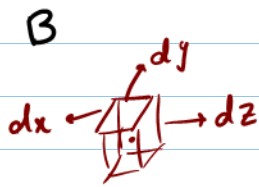
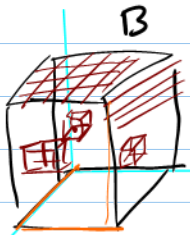


$$A(D) = \iint_D 1 dA$$



انٽرال سهڪانه

$$\iiint_B f(x, y, z) dv$$



$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$m, n, l \rightarrow \infty$$

اگر حاصل جمع بالا کير عدد محدود اسو

درستل از انتفا ب نقاط سه گانه کریم f انٽرال نه گير ات.

$$\iiint_B f dv = \iint_A \left(\int f dz \right) dA$$

B مکعب سه گانه:

$$B = \{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3 \}$$

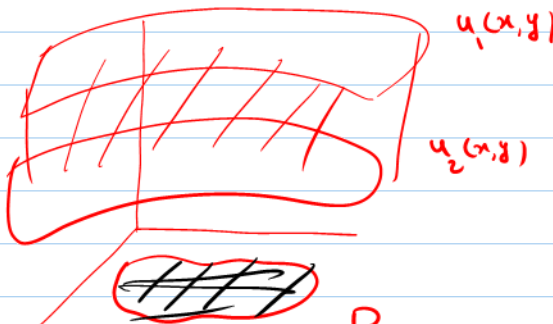
$$\iiint_B xy z^2 dv$$

مثال

$$\int_0^1 \int_{-1}^2 \int_0^3 (xy z^2) dz dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_{-1}^2 \left[xy \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=3} dy dx$$

$$\int_0^1 \int_{-1}^2 9xy dy dx = \dots$$



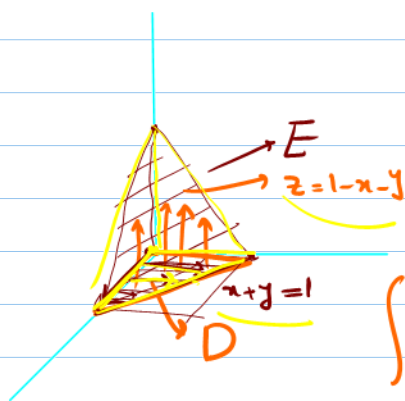
زاویه حاد

$$\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y) \}$$

رایج بکنند که در آن E جسم صلب احاطه شود

$$\iiint_E z \, dv$$

مید



روش تغییرات
 $x=0$
 $y=0$
 $z=0$

$$x + y + z = 1$$

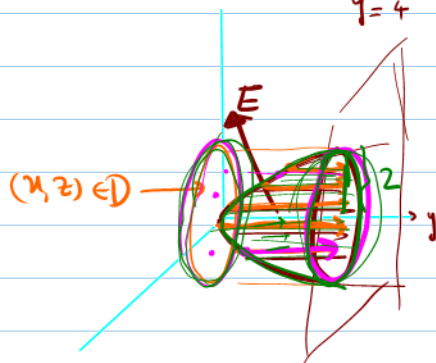
$$\iint_{(x,y) \in D} \int_0^{1-x-y} z \, dz \, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} \, dy \, dx = \dots$$

ایستگاه سوراخ در

$$y=4, \quad y=4, \quad y=x+z$$

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dv$$



$$\iint_{(x,z) \in D} \int_0^4 \sqrt{x^2 + z^2} \, dy \, dz \, dx$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^4 r^2 \, dy \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 (4 - r^2) \, dr \, d\theta = \dots$$

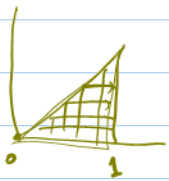
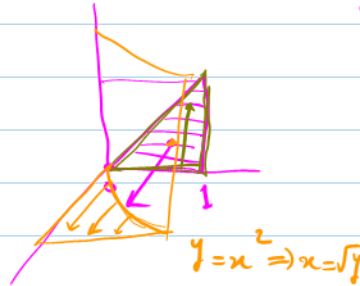
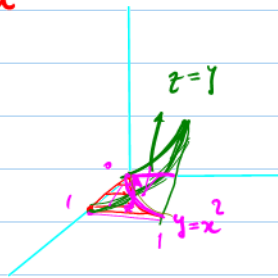
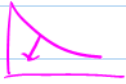
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^4 r^2 \, dy \, dr \, d\theta = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 (4 - r^2) \, dr \, d\theta \right) \times 2\pi = \dots$$

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x,y,z) dz dy dx = \underline{\underline{I_2}}$$

$$\int \int \int f(x,y,z) dx dz dy$$

$$\int_0^1 \int_0^y \int_0^{\sqrt{y}} dx dz dy$$

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y dz dy dx$$

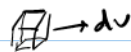


$$\iint$$

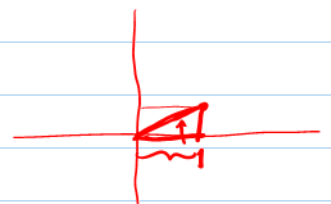
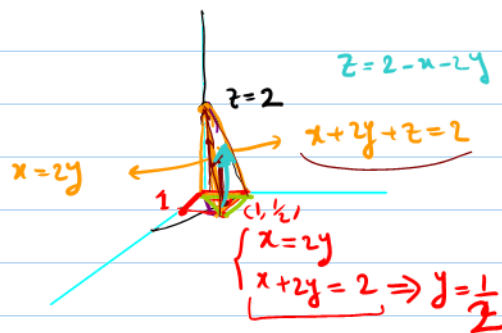
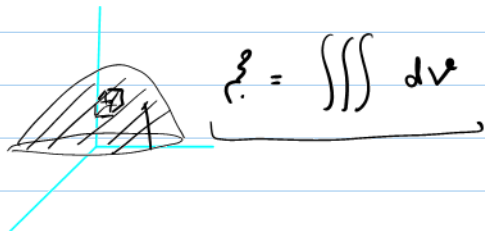


در حلقه قبل با انتگرال سه گانه آشنا شدیم.

$$\iiint_{xyz} f(x, y, z) \underbrace{dz dy dx}_{dv}$$

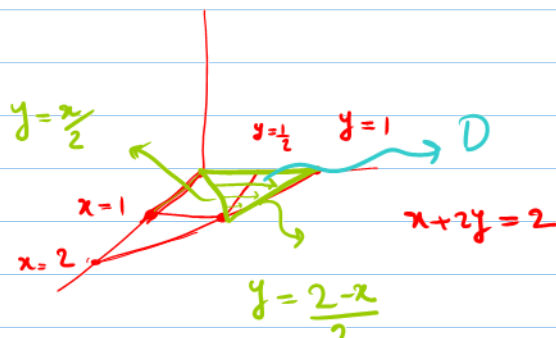


مثال حجم جسم احاطه شده توسط صفحات $x+2y+z=2$ رابعا به $x=2y$ $x=0$ $z=0$ (نرم) قدام با استفاده از انتگرال دوگانه این مثال را حل کردیم



$$\text{حجم} = \iiint dv =$$

$$\int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{1-x/2} \int_{z=0}^{2-x-2y} dz dy dx$$

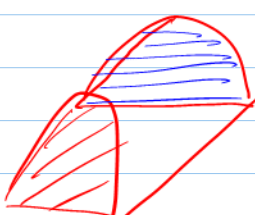
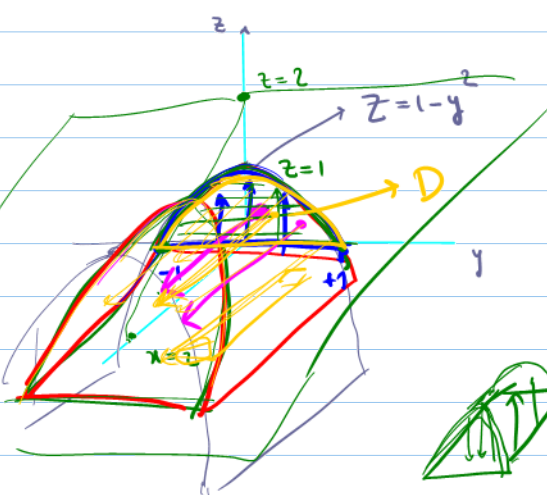


$$\iint_D (2-x-2y) dA$$

یا دایره با انتگرال دوگانه

مثال حجم عنصر توسط صفحه $z=1-y^2$ و صفحات $x+z=2$ $z=0$ $x=0$ رابعا به

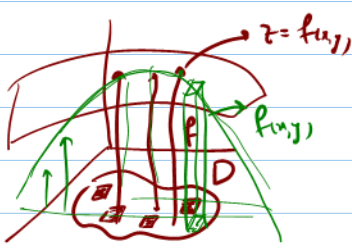
$$\text{حجم} = \iiint dv = ?$$



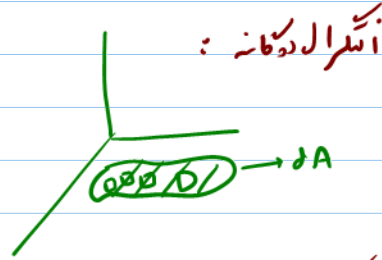
$$\int_{y=-1}^1 \int_{z=0}^{1-y^2} \int_{x=0}^{2-z} dx dz dy$$

$$\int_{-1}^{1-y^2} (2-z) dz = \left. 2z - \frac{z^2}{2} \right|_{-1-y^2}^{1-y^2} = 2(1-y^2) - \frac{(1-y^2)^2}{2}$$

$$\int_{-1}^1 \left(2(1-y^2) - \frac{(1-y^2)^2}{2} \right) dy = \dots$$



$$\iint_D f(x, y) dA$$

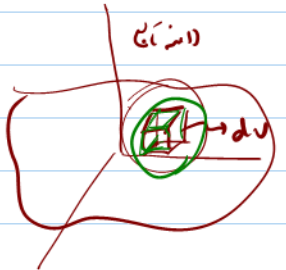


انتگرال دوگانه :

سرور

انتگرال سه گانه :

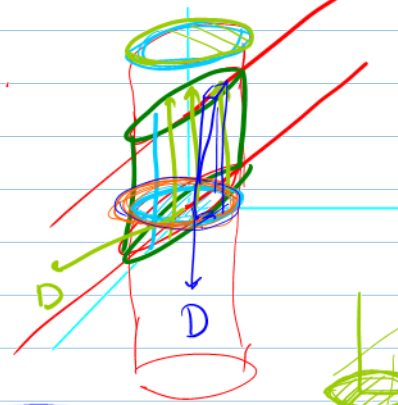
$$\iiint_E f(x, y, z) dV$$



مثال: $z = y+2$, $z = y$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ محصور شده است.

محیط $x^2 + y^2 = 1$, $z = y+2$, $z = y$, $z = 0$

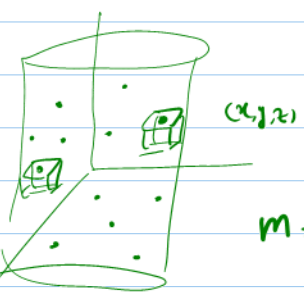
$$dV = dz dy dx$$



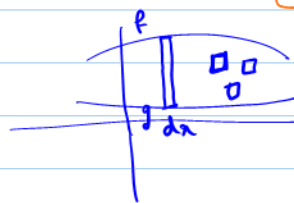
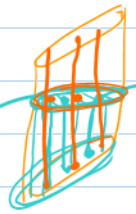
$$y = r \sin \theta$$

$$dz r dr d\theta = \dots$$

$$\int \int_D \int_y^{y+2} dz dy dx$$

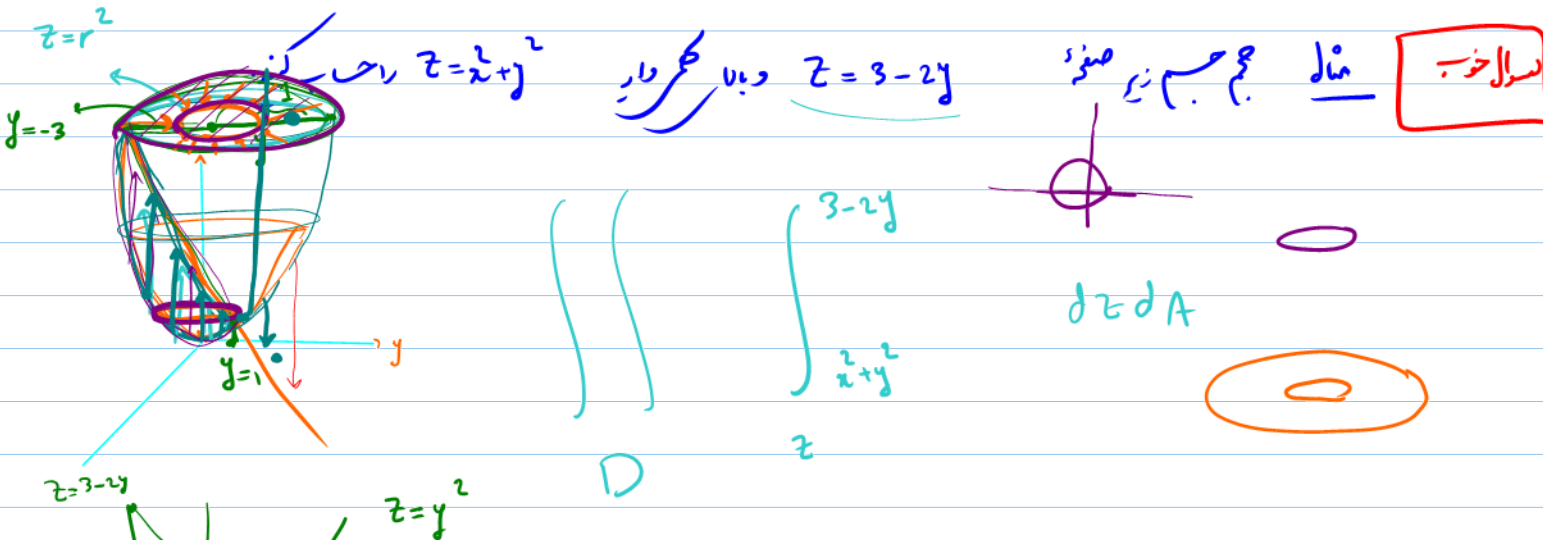


(x, y, z)



$$\int \int_D (f - g) dA$$

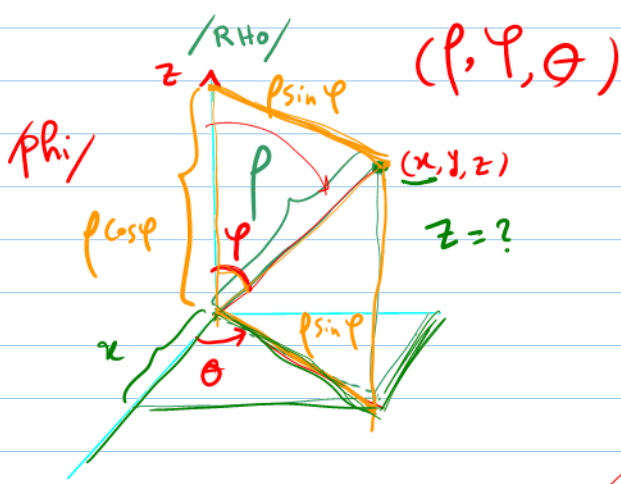
$$m = \iiint f(x, y, z) dV$$



$$y^2 = 3 - 2y \Rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (y - 1)(y + 3) = 0$$

$$y = 1$$

$$y = -3$$

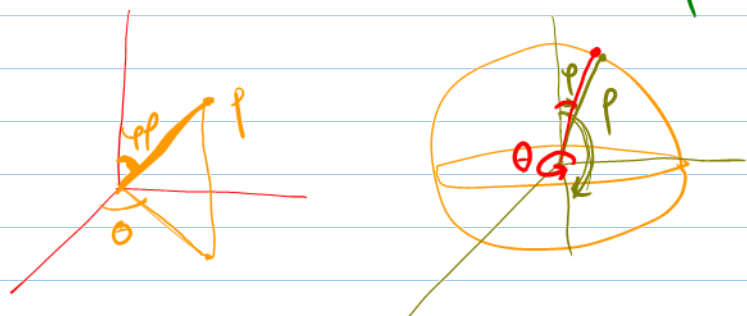


رابطه های کروی

$$z = \rho \cos \varphi$$

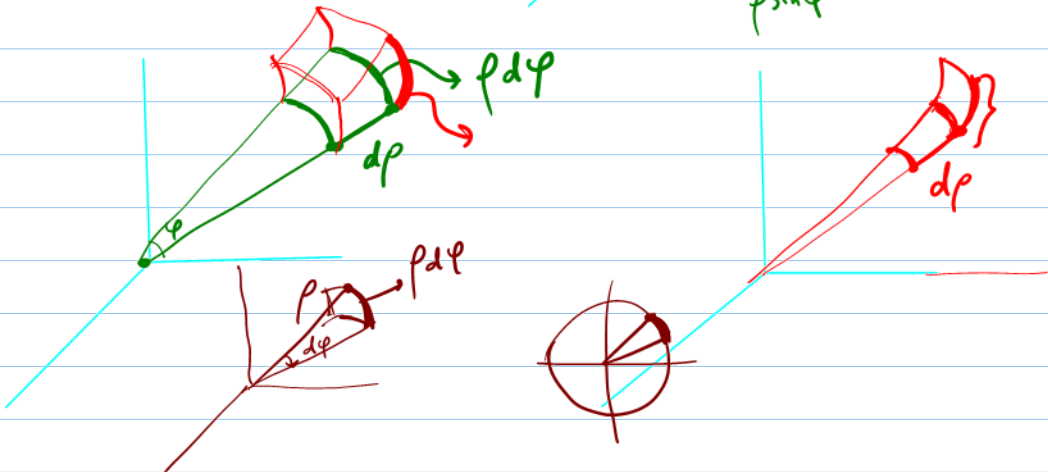
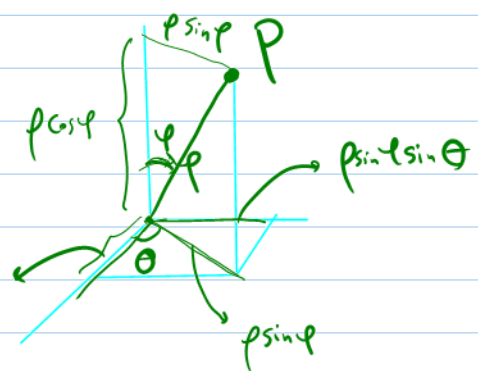
$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

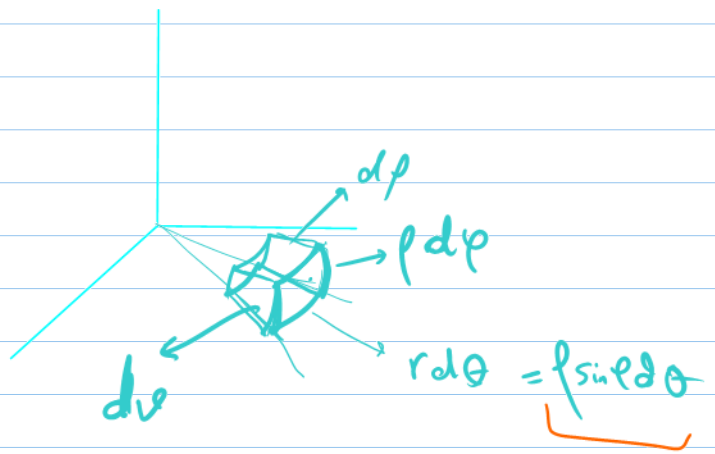
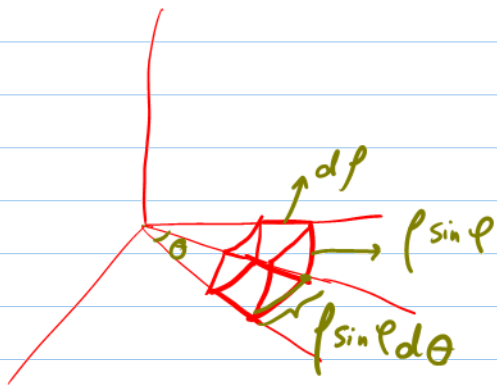
$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$



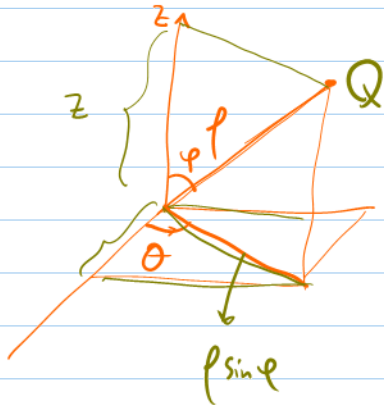
حجم در مختصات کروی: $dv = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$

حجم در مختصات کروی: $dv = ?$



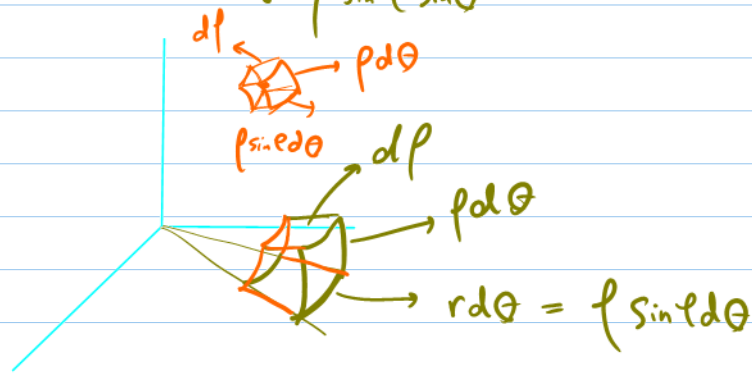


$$dV = r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta$$



$$\begin{aligned} z &= r \cos \phi \\ x &= r \sin \phi \cos \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \end{aligned}$$

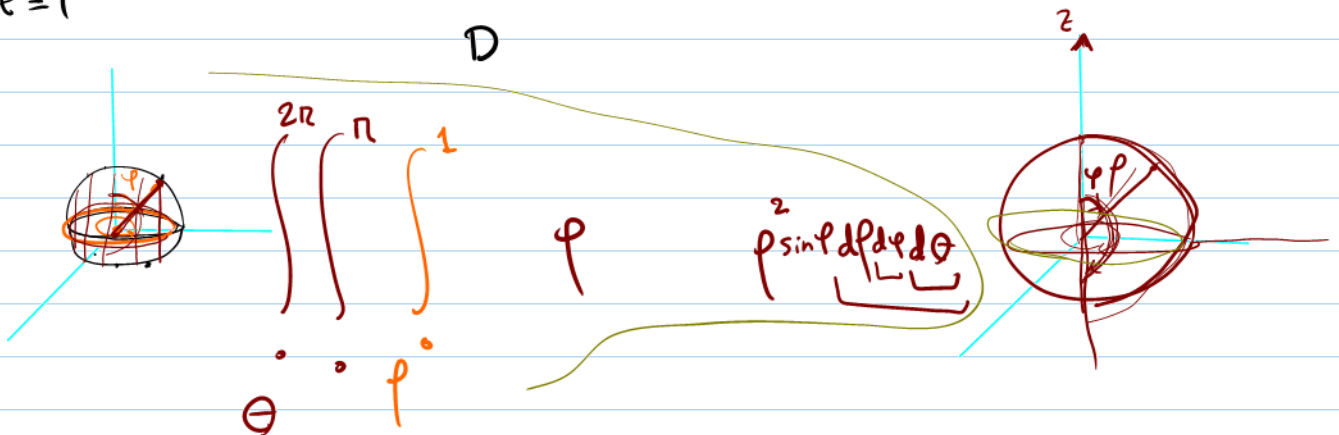
معلوم:



د حجم کا کروی ص

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$$



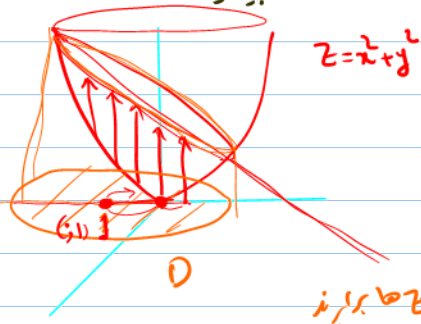
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^3 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \int_0^1 r^3 \, dr \times \int_0^{\pi} \sin \phi \, d\phi \times \int_0^{2\pi} d\theta =$$

*

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \frac{4\pi a^3}{3}$$

جمع کر رہے ہیں:

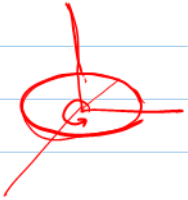
مثال مانند از ج. قتل

محکم جسم زیر معنی $z = 3 - 2y$ و با $z = x^2 + y^2$ را بیایید.

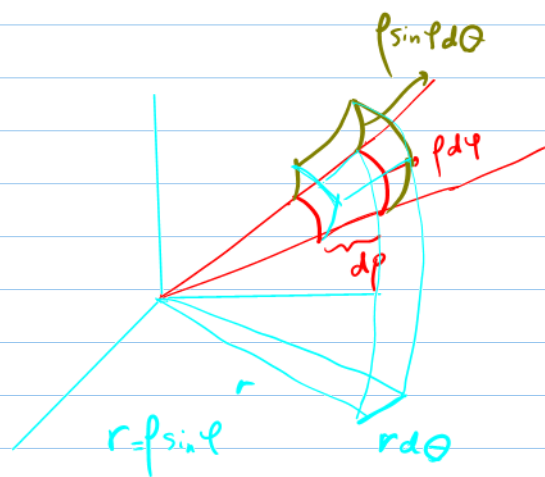
$$z = x^2 + y^2 \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 3 - 2y \quad \checkmark$$

$$x^2 + y^2 = 3 - 2y \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$(x, y) \in D$$

نقطه در آنجا z ها برابرند

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{x^2 + (y+1)^2}{2}}^{3 - 2(y+1)} r \, dz \, dr \, d\theta = \dots$$



کر دی spherical

$$dv = r^2 \sin \phi \, dp \, d\phi \, d\theta$$

را کسب کنید که در آن D ناحیه محصور بین دو کره در xy است.

$$\iiint_D \left(\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right) dx \, dy \, dz$$

مثال

محکم جسم زیر معنی $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و با $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{r^2} r^2 \sin \phi \, dp \, d\phi \, d\theta = \dots$$

$$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$$

و ناحیه درون مخروط

$\iiint_D$

$$(x^2 + y^2) dv$$

میدان

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

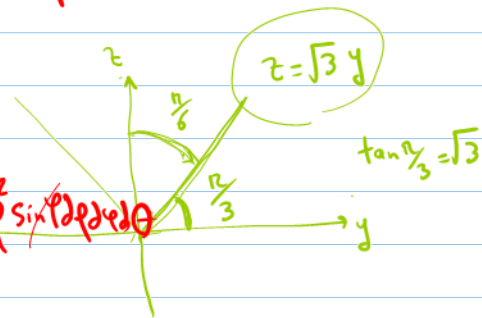


$$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$$

$$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$$

φ φ φ φ

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$



$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 \rho^4 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

$$\int \sin^3 \varphi \, d\varphi = \int \sin^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi =$$

$$\int \frac{(1 - \cos^2) \sin}{1 - u^2} du =$$

میزباید با استفاده از مختصات قطبی حل کرد.

$$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$$

$$3(x^2 + y^2) = 4 - (x^2 + y^2)$$

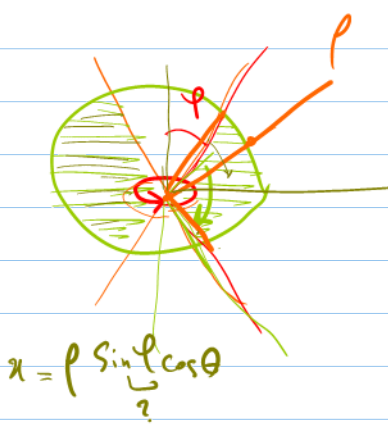
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

را حل کرد

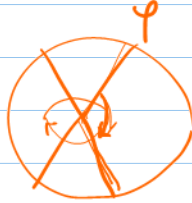
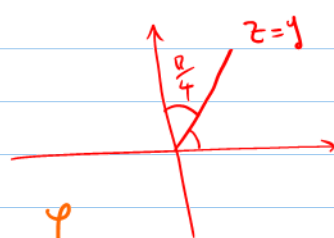


$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$$

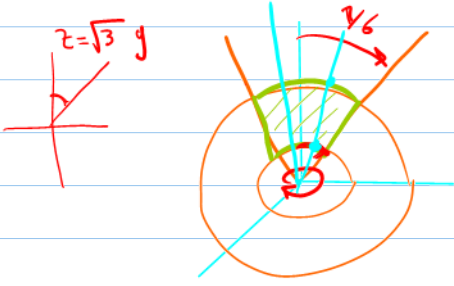
میدان حجم صلب خارج از مخروط، درون کره $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را می‌سبب کند.



$$\int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \dots$$



مثال حجم بین دو کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ و در د کره

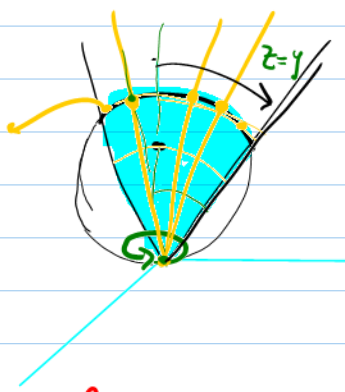


$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_{\sqrt{3}}^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \dots$$

رایج کنید

مثال حجم در د کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$



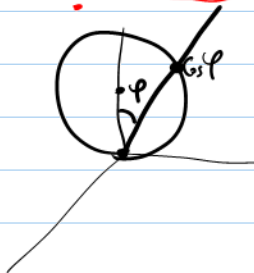
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

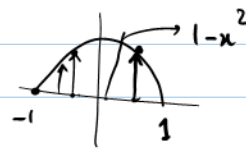
ایجاد

$$\int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \sin \phi d\rho = \sin \phi \frac{\rho^3}{3} = \sin \phi (8\cos^3\phi)$$

$$2\pi \times \int_0^{\pi/4} (\sin \phi) (8\cos^3\phi) d\phi = \dots$$

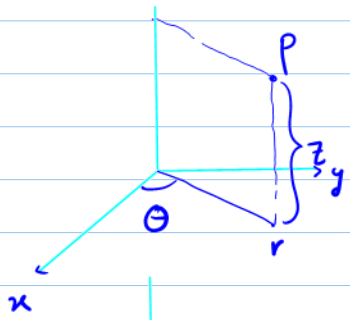


$\rho = 2\cos\phi$



$-1 \leq x \leq 1$

$0 \leq y \leq 1 - x^2$



$$\rho = (r, \theta, z)$$

$$dv = \underbrace{dx dy dz} = \underbrace{r dr d\theta dz}$$

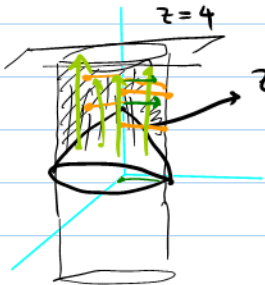
$$dv = r dr d\theta dz$$



مثال: جسم صلب E در استوانه $x^2 + y^2 = 1$ زیر صفحه $z = 4$ و بالای $z = 1 - x^2 - y^2$ قرار دارد.

دایره منتهی است. خطای این جسم نسبت مستقیم با ناله آن نفاذ محاسبات است.

چون جسم را حساب کنیم.



$$\rho = k \sqrt{x^2 + y^2}$$

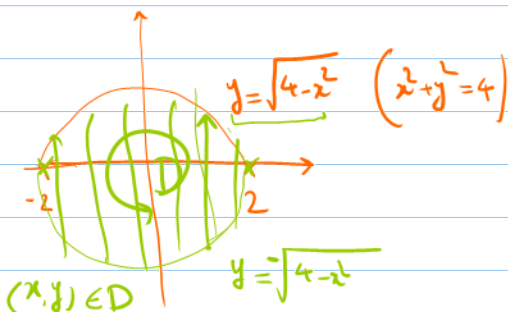
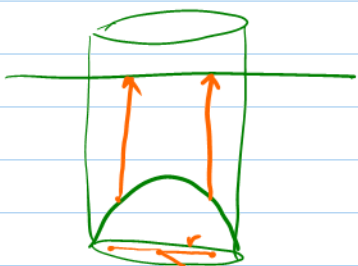
$$dv = r dr d\theta dz$$

$$M = \iiint \rho(x, y, z) dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 \underbrace{k r \cdot r dz dr d\theta}$$

$$\int_{1-r^2}^4 k r^2 dz = k r^2 (3 + r^2)$$

$$2\pi \times \int_0^1 k r^2 (3 + r^2) dr = \dots$$

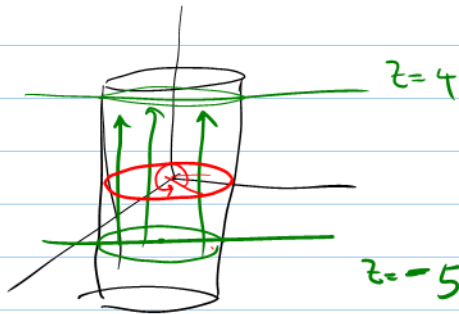


$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2+y^2) dz dy dx$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r \, dz \, dr \, d\theta = \dots$$

E داخل استوانه
 $x^2 + y^2 = 16$
 بين $z = -5$ و $z = 4$

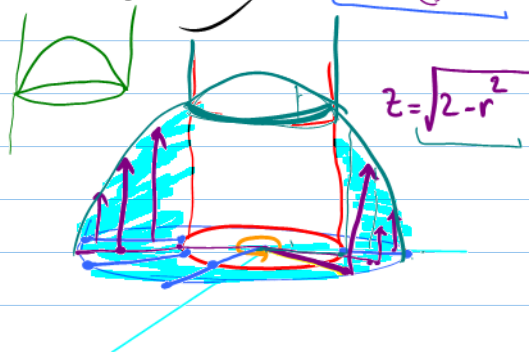
$$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} \, dv$$



$$\int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_{-5}^4 r \, dz \, dr \, d\theta = \dots$$

D خارج استوانه
 $x^2 + y^2 = 1$ مخروط
 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و بالا مخروط xy

$$\iiint_D \frac{z}{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$$



$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-r^2}} \frac{z}{r^2} r \, dz \, dr \, d\theta =$$

$$\int_0^{\sqrt{2-r^2}} \frac{z}{r^2} r \, dz = \frac{1}{r} \frac{z^2}{2} = \frac{(2-r^2)\sqrt{2-r^2}}{2r}$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{(2-r^2)\sqrt{2-r^2}}{2r^2} (r \, dr) =$$

$$\sqrt{2-r^2} = u \Rightarrow du = \frac{-r}{u} dr$$

$$2-r^2 = u^2$$

$$r^2 = 2-u^2$$

$$\int_1^0 \frac{-u \times u \times u}{2-u^2} du = \int_1^0 \frac{u^3}{u^2-2} du = \int_1^0 \frac{u-4+\frac{4}{u-2}}{u-2} du$$

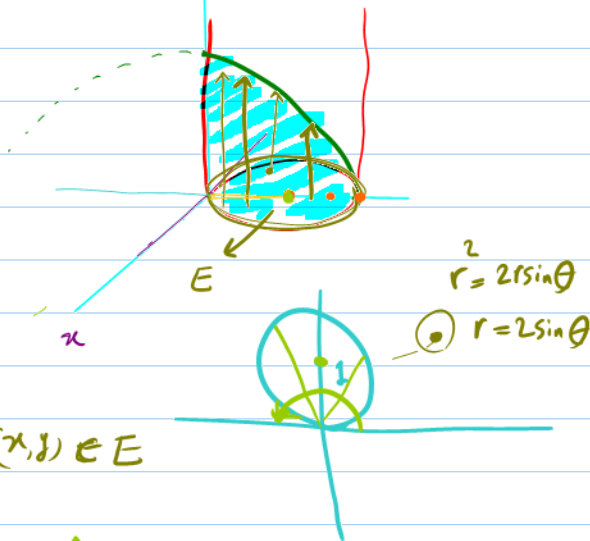
$$= \int_1^0 \left(\frac{u-4}{u-2} + \frac{4}{u-2} \right) du$$

$$\int_1^{\infty} \frac{4}{u^2 - 2} du = \frac{4}{2} \left(\frac{1}{u - \sqrt{2}} + \frac{1}{u + \sqrt{2}} \right) du = \dots$$

$x^2 + y^2 = 2y$ د نیمه کروی سطح استوانه

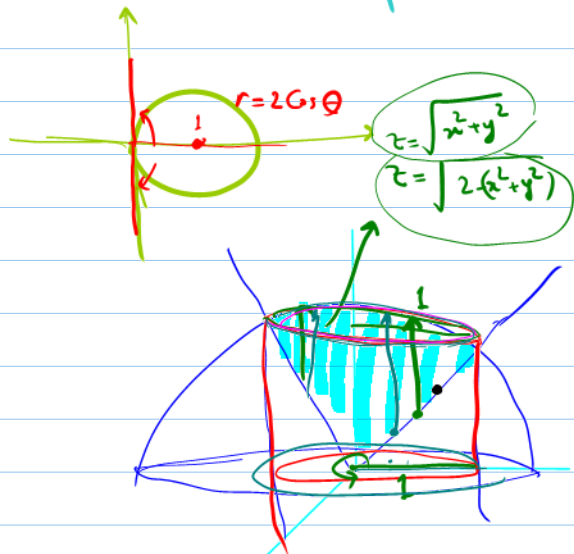
یا به عبارتی $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ د کروی سطح مرکز $(0, 1, 0)$

$\iiint_D 2z \, dv$ مثال



$x^2 + (y-1)^2 = 1$

$\int_0^{\pi} \int_0^{2 \sin \theta} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} 2z \, r \, dz \, dr \, d\theta$



$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

مثال: حجم ناحیه بالای مخروط

$z = \sqrt{2 - (x^2 + y^2)}$

و درون نیمکره

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

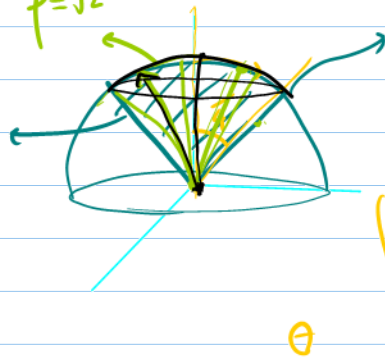
$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2 - (x^2 + y^2)}$

$x^2 + y^2 = 1$

$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta = \dots$

$z = \sqrt{2 - (x^2 + y^2)} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2$

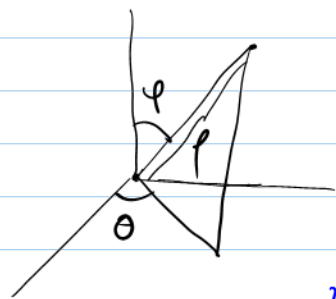
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$



همین کمال با همفقات کرد

$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

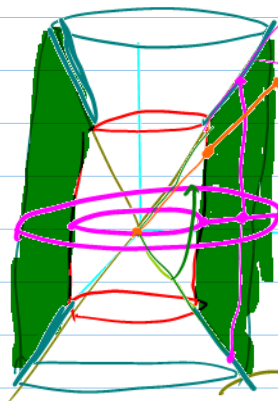
(ρ, ϕ, θ)



$$dv = \int \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$z = 4(x^2 + y^2)$ $x^2 + y^2 = 1$ $x^2 + y^2 = 4$
 و محصور به مخروط

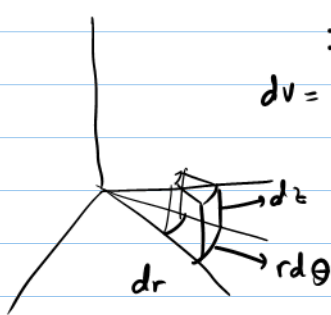
مسئله حجم بین استوانه و مخروط



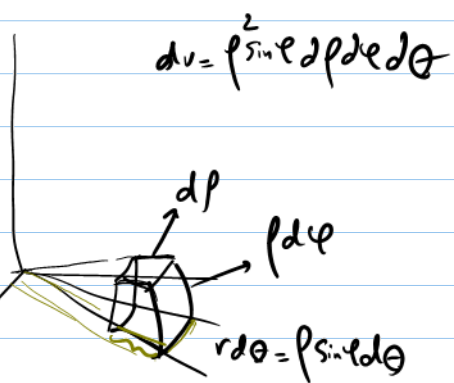
$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{-2r}^{2r} r dz dr d\theta$$

رایانه

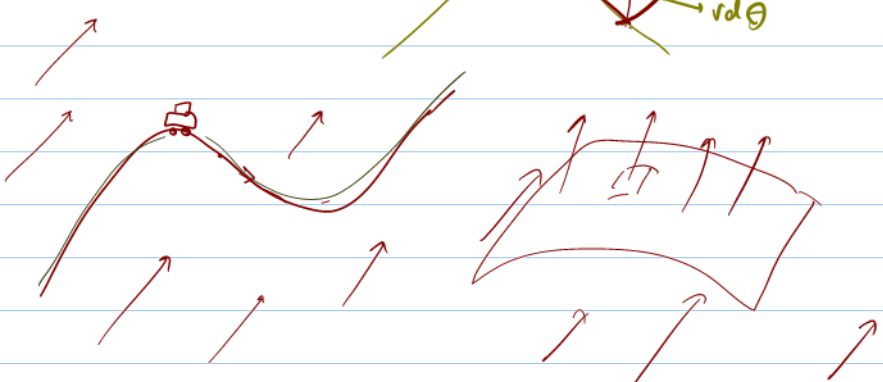
$z = -2r$ $z = 4(x^2 + y^2)$
 $z = -2\sqrt{x^2 + y^2}$

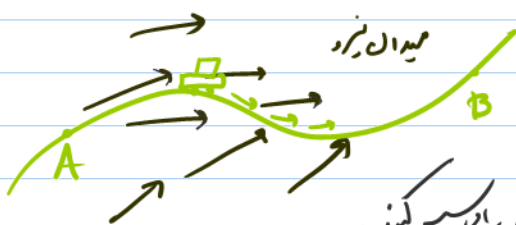


استان
 $dv = r dz dr d\theta$



$$dv = \int \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$





فرض کنید F یک میدان نیرو باشد و این نیرو جسمی

خلافه درس امروز

را در مسیر مستقیم C از نقطه A به نقطه B جابجا کند. کار انجام شده را حساب کنید.

کار = جابجایی $\times$ نیرو
 جابجایی $\times$ (نیرو در جهت جابجایی)

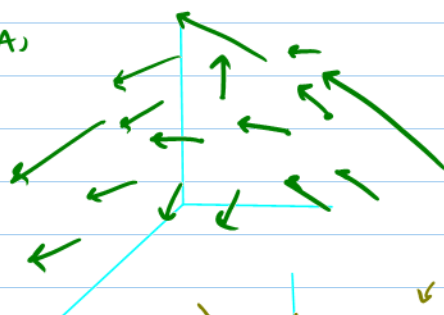
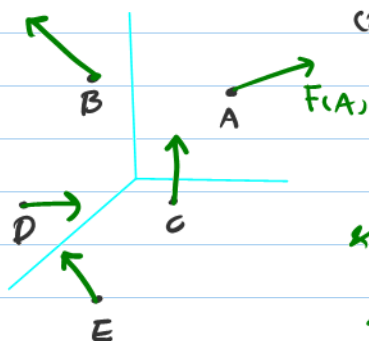
$$W = Fd$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

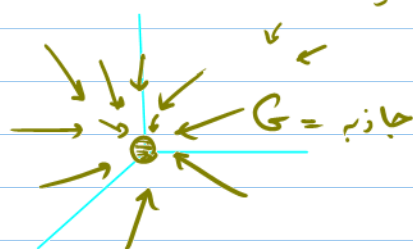
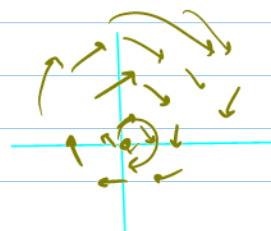
مانند میدان نیرو

تعریف (میدان برداری) نقطه رانگیر میدان برداری یک تابع $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ است. معین تابعی بر نقطه $(x, y, z) \mapsto$ یک بردار

در فضای سه بعدی که بردارها بر روی $\mathbb{R}^3$ باشد. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با $(x, y) \mapsto$



سرعت برداری



نوع به طور کلی یک میدان برداری $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$F(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}$$

$$(x, y, z) \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$\in \mathbb{R} \quad \in \mathbb{R} \quad \in \mathbb{R}$

$$P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

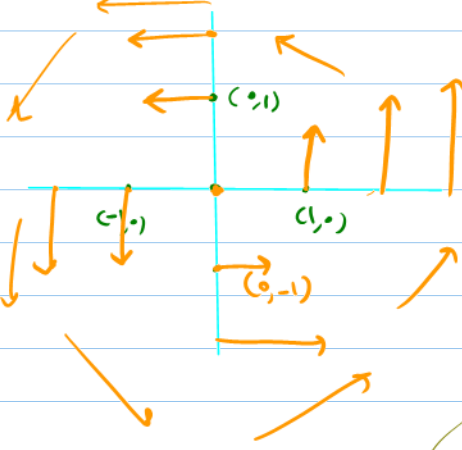
مثلاً یک میدان برداری $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ به صورت زیر است:

$$F(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$$

$$(x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y))$$

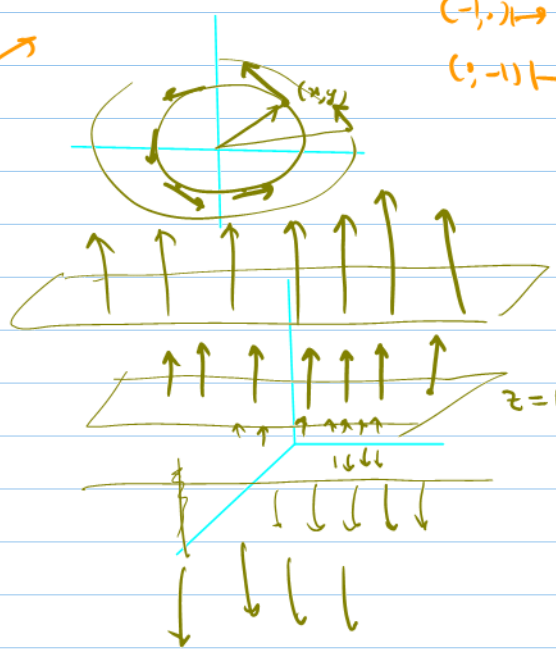
مثال

میدان برداری $F(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ را رسم کنید.



- $(x,y) \mapsto (-y,x)$
- $(1,0) \mapsto (0,1)$
- $(0,1) \mapsto (-1,0)$
- $(-1,0) \mapsto (0,-1)$
- $(0,-1) \mapsto (1,0)$

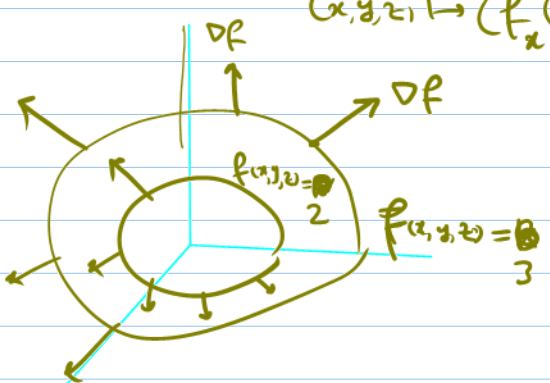
$(x,y) \cdot (-y,x) = -xy + xy = 0$



مثال $F(x,y,z) = z\vec{k}$

مثال ۲ - فرض کنید $\nabla f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد.

$(x,y,z) \mapsto (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))$



مثال

$F = (y, -2x, x)$

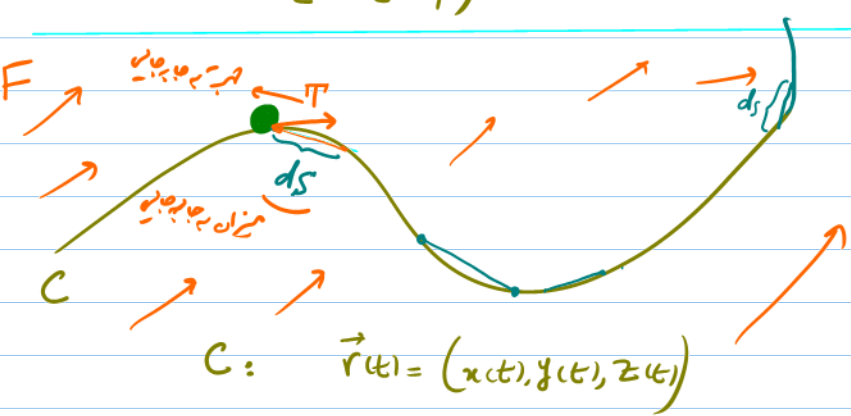
$F = (y, z, x)$

$F = (\frac{y}{2}, -\frac{x}{2}, \frac{z}{4})$

مثال $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

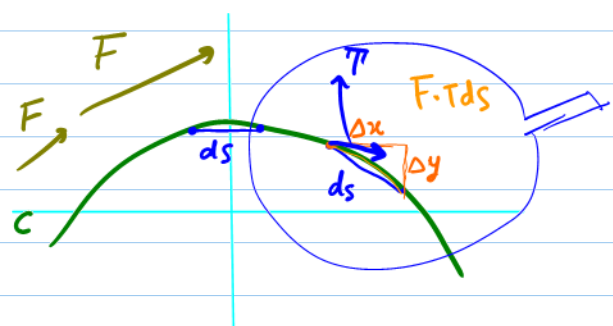
$F(x,y,z) = (x+y)\vec{i} + (xy)\vec{j} + z\vec{k}$

$F(x,y,z) = (x + \ln y + e^z)\vec{i} + \sin y z \vec{j} + xyz \vec{k}$



بر روی یک مساحت کوچک $T ds$

انرژی کار انجام شده: $F \cdot T ds$



$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \sim$$

$$\sqrt{(\dot{x}(t)\Delta t)^2 + (\dot{y}(t)\Delta t)^2} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} \Delta t$$

$$C = \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

$$\Delta x = \dot{x}(t) \Delta t$$

$$ds = |\dot{\vec{r}}(t)| dt$$

اندازه بردار سرعت

$$F \cdot T ds = F \cdot \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} |\dot{\vec{r}}(t)| dt = F \cdot d\vec{r}$$

در یک لحظه (میباشد)

خداوند کار انجام شده توسط میدان نیرو F بر جابجایی C را می‌دهد

$$\int_C F \cdot d\vec{r}$$

برابر است!

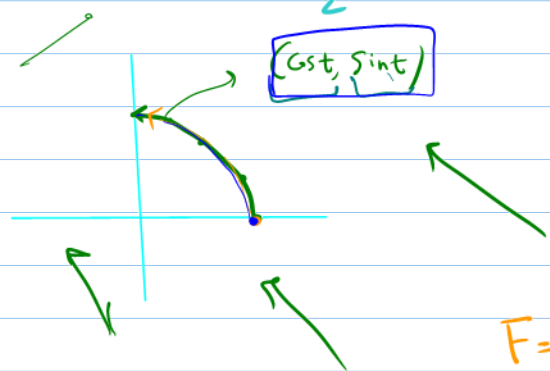
برای مثال اگر $C: \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ و $F = p(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$

$$\int_C F \cdot d\vec{r} = \int_C p(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_C p(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt + Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt$$

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

مثال کار انجام شده برای حرکت دایره‌ای در ربع اول دایره



$$F = (x^2 - y^2)\vec{i} - xy\vec{j}$$

میدان نیرو

$$\int_C F \cdot d\vec{r} = \int_C x^2 dx - xy dy$$

$$F = (p, Q) \quad d\vec{r} = (dx, dy)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left((\cos t)^2 (-\sin t) - \cos t \sin t \cos t \right) dt =$$

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{-\cos^2 t \sin t}_{u^2 du = \dots} dt - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t dt$$

$$F = (P, Q, R)$$

$$C = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\int_C F \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz = \int_t^t P(\vec{r}(t)) \dot{x}(t) dt + \int_t^t Q(\vec{r}(t)) \dot{y}(t) dt + \int_t^t R(\vec{r}(t)) \dot{z}(t) dt$$

$$\vec{F} = (x^2 - 2y) \vec{i} + (x+y) \vec{j}$$

(2,4) نقطه پایانی

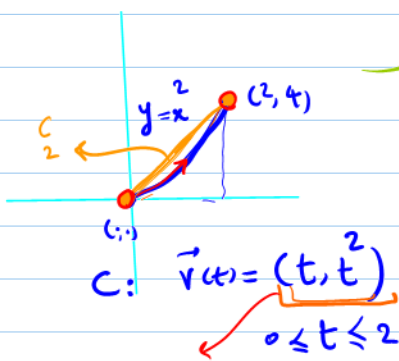
(0,0) نقطه

$\int_C F \cdot d\vec{s}$

مسیر را مشخص کنید

مسئله کار انجام شود توسط این دو

برای هر دو یک مسیر در حکم



$$\vec{r}(t) = (e^t, \frac{1}{e^t})$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy = \int_C (x^2 - 2y) dx + \int_C (x+y) dy$$

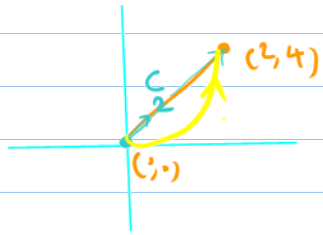
$$\int_0^2 (t^2 - 2t^2) dt + \int_0^2 (t+t^2) 2t dt$$

$$= \int_0^2 -t^2 dt + \int_0^2 2t^2 dt + \int_0^2 2t^3 dt = \int_0^2 t^2 dt + \int_0^2 2t^3 dt =$$

$$= \frac{1}{3} \times 8 + 8 = \frac{32}{3}$$

برای در مثال قبل از محاسبه حجم در خط راست از (0) به (2,4) رفته باشم. کاره را به کنده.

$$F = (x^2 - 2y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$$



$$\vec{r}(t) = (0,0) + t(2,4) = (2t, 4t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

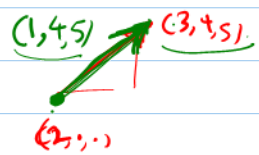
توجه کنید که در این مثال کار را به رفته
به مسیر بسته داشت.

$$\int_C F \cdot d\vec{r} = \int_C p dx + Q dy$$

$$= \int_0^1 (4t^2 - 8t) 2 dt + \int_0^1 (6t) 4 dt$$

$$= \int_0^1 8t^2 dt + \int_0^1 24t dt =$$

$$8 \frac{1}{3} + 4 = \frac{8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{20}{3}$$



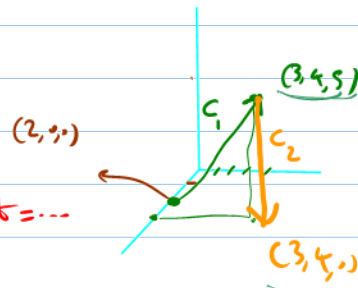
$$C = C_1 \cup C_2$$

C_1 : خط مستقیم از (2,0,0) به (3,4,5)

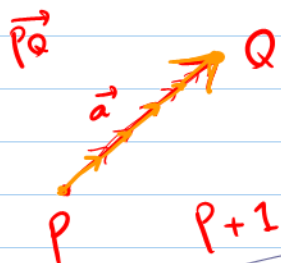
C_2 : خط عمود از (3,4,5) به (3,4,0)

$$\int_C y dx + z dy + x dz = \int_0^1 (4t) dt + \int_0^1 (5t) 4 dt + \int_0^1 (2+t) 5 dt = \dots$$

$$\int_C y dx + z dy + x dz$$



$$C_1: (2,0,0) + t(1,4,5) = (2+t, 4t, 5t) \quad 0 \leq t \leq 1$$



$$\vec{P} + 1\vec{PQ} = \vec{Q}$$

$$P + 1\vec{a} = Q$$

$$\int_{C_2} y dx + z dy + x dz = \int_5^0 3 dt = -15$$

$$C_2: \vec{r}(t) = (3, 4, t) \quad 5 \leq t \leq 0$$

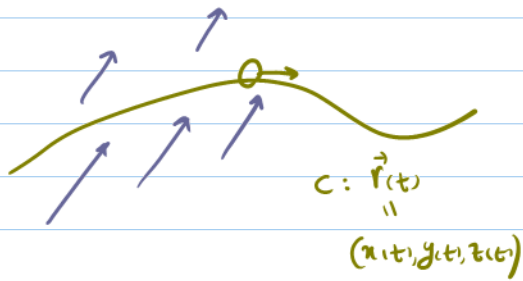
$$\vec{F} = (P, Q, R)$$

$$\int_C (\vec{F} \cdot \vec{r}'(t)) dt = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

$$C = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz$$

$$= \int_t p(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt$$



محاسبه

$$\int_C F \cdot d\vec{r}$$
 محاسبه کرم

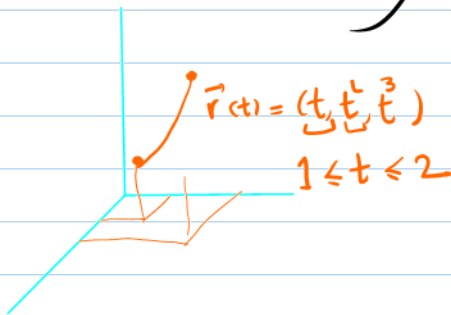
درجه که شسته در دور

$$F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$\int_C P dx + Q dy + R dz$$

از نقطه $(1,1,1)$ به $(2,4,8)$ مسیر (t, t^2, t^3)

د



مسئله

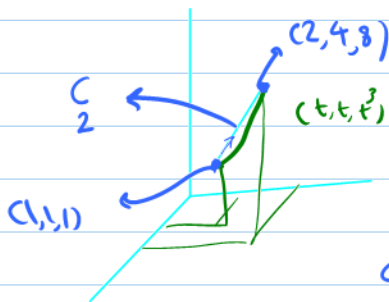
$$\int_C (y+z)dx + (x+2y)dy + (x-4z)dz$$
 محاسبه کنید

$$\int_1^2 \left((t^2 + t^3) dt + \int_1^2 (t + 2t^2) 2t dt + \int_1^2 (t - 4t^3) 3t^2 dt \right)$$

$2t^2 + 4t^3$ $3t^3 - 12t^5$

$$\int_1^2 (3t^2 + 8t^3 - 12t^5) dt = (8-1) + (32-2) - (2 \times 2^6 - 2) = A$$

مسئله انتگرال همان میان بر تیر روی مسیر خط صاف از $(1,1,1)$ به $(2,4,8)$ محاسبه کنید.



$$\int_{C_2} (y+z)dx + (x+2y)dy + (x-4z)dz = ?$$

$$C_2: \vec{r}(t) = (1,1,1) + t(1,3,7) = (1+t, 1+3t, 1+7t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_0^1 (2+1+t) dt + \int_0^1 (7t+3) 3 dt + \int_0^1 (-27t-3) 7 dt = \dots A$$

مسئله فرض کنید $\vec{r}(t)$ یک مسیر دایره از $(1,1,1)$ به $(2,4,8)$ باشد. محاسبه کنید

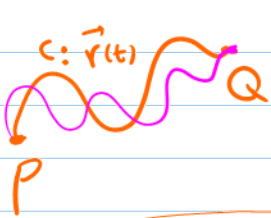
$(x(t), y(t), z(t))$

مسئله: آیا پتانسیل f وجود دارد که $F = \nabla f$? $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\nabla f = F$

$$(y+z)dx + (x+yz)dy + (x-4z)dz = ?$$

2 $F = (y+z)\vec{i} + (x+yz)\vec{j} + (x-4z)\vec{k}$ همان مقدار می شود.

مثال فرض کنید $\vec{r}(t)$ یک مسیر (خط) از نقطه P به نقطه Q باشد. فرض کنید $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$



$$(f_x, f_y, f_z) \cdot (dx, dy, dz)$$

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(Q) - f(P)$$

یک تابع باشد و در واقع

$$f' = f \quad \int df = f$$

(انتگرال یک تابع گرادیان به مسیر بستگی ندارد)

$$\nabla f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

$$= \int_{C=r(t)} f_x dx + f_y dy + f_z dz = \int_t \underbrace{f_x(\vec{r}(t))x'(t) + f_y(\vec{r}(t))y'(t) + f_z(\vec{r}(t))z'(t)}_{\left(\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) \right)'} dt$$

$$= \int_P^Q \left(\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) \right) dt = f(Q) - f(P)$$

تغییر می کند

مسئله: آیا پتانسیل f وجود دارد که $F = \nabla f$? $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\nabla f = F$

$$(y+z)dx + (x+yz)dy + (x-4z)dz = ?$$

2 $F = (y+z)\vec{i} + (x+yz)\vec{j} + (x-4z)\vec{k}$

$$f_z = x-4z$$

$$f_y = x+yz$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad f_x = y+z, \quad f_y = x+yz, \quad f_z = x-4z$$

$$f = yx + zx + y^2 - 2z^2$$

$$(2, 4, 8)$$

$$(1, 1, 1)$$

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,4,8)} F \cdot d\vec{r}$$

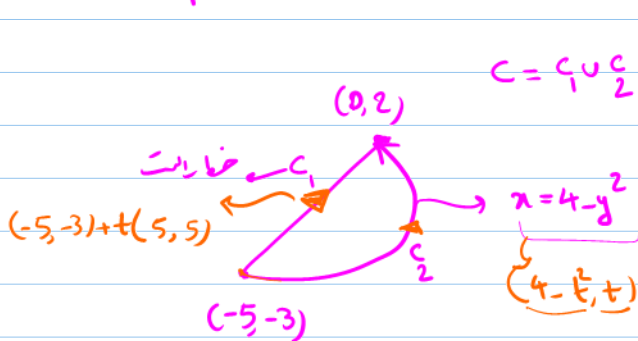
$$= \int_{(1,1,1)}^{(2,4,8)} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(2,4,8) - f(1,1,1)$$

$$f_x = y+z$$

$$yx + zx + y^2 - 2z^2$$

توجه: زمانه انتگرال به مسیر بستگی ندارد که میدان نیرو در نظر بگیریم میدان کنرادال باشد.

$$\int_P^Q \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(Q) - f(P)$$



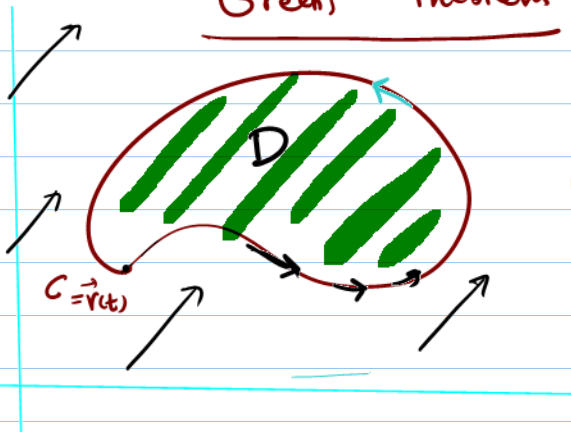
مثال

$$\int_C y^2 dx + x dy$$

$$= \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

$$F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$$

Green's theorem



قضیه گرین

C درجه مثبت (ضد ساعت)
C به طرف عقاربهار
C لبه ساده

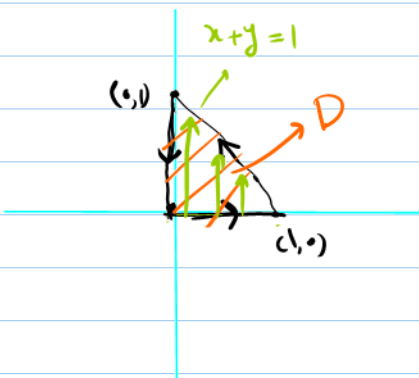
Q, P مشتقات جزئی
برای

$$\int_C \vec{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

$$F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

C مرز مثلث با رئوس (0,0), (1,0), (0,1)
درجه مثبت



نمایه قضیه گرین

$$\iint_D (Q_x - P_y) dA = \iint_D (y - 0) dA$$

مثال

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} y dy dx = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} \right) dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \dots$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} |dt|$$

$$ds = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} |dt| = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = \nabla \phi$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_C p dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 = -1$$

$$z = \pm i$$

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z = \pm i$$

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z = \pm i$$

$$z^2 + 1 = 0$$

$$z = \pm i$$

$$F = p\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

مرور کوتاه

$$C: \vec{r}(t)$$

$$\int_C F \cdot T ds = \int_C F \cdot dr = \int_C p dx + Q dy + R dz$$

قضیه گرین در صفحه

$$F = p\vec{i} + Q\vec{j}$$

$$p\vec{i} + Q\vec{j} = p(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

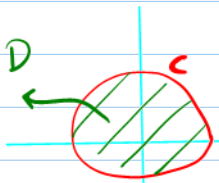
$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

$$F = (P, Q)$$

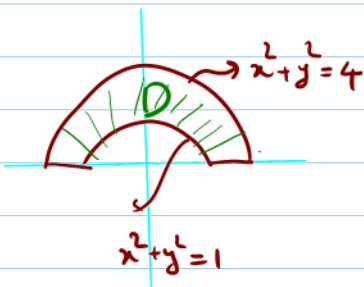
نکته اگر $Q_x = P_y$ آنوقت میدان بردار F پتانسیل است. یعنی $\oint F \cdot dr$ فقط به نقاط انتهای مسیر بستگی دارد و این یعنی $F = \nabla f$.

مثال ۱: $C: x^2 + y^2 = 1$ را محاسبه کنید.

$$\oint_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy$$



$$= \iint_D (Q_x - P_y) dA = \iint_D (7 - 3) dA = 4 \times \text{مساحت دایره} = 4 \times \pi$$



C مرز ناحیه D است

$$I = \oint_C \left(\sqrt{\frac{P}{y^2}} dx + \sqrt{\frac{Q}{3xy}} dy \right)$$

مثال

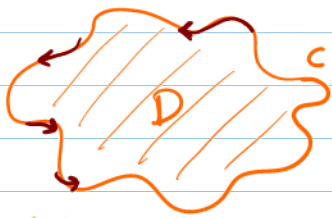
$$I = \iint_D (Q_x - P_y) dA = \iint_D (3y - 2y) dA$$

$$\int_0^\pi \int_1^2 (r \sin \theta) r dr d\theta = \dots$$

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$$

مباحث بعض

Die



C: $\vec{r}(t) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$: θ : الزاوية
 $\cdot \leq \theta \leq 2\pi$

بنا ہے قصہ کریں :

$$F = (0, x)$$

$$\oint_C \mathbf{x} dy = \iint_D 1 dA = \rho = \mathcal{L}$$

$$F = (-y, \cdot) \quad \oint_C y \, dx = \iint_D dA = 0 \quad \text{D.C.}$$

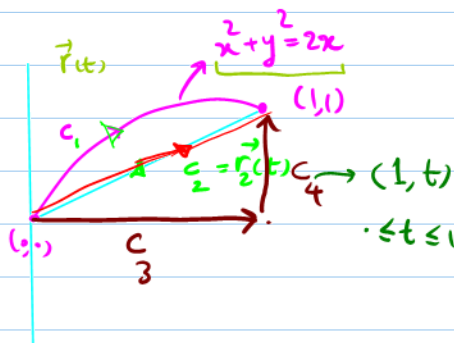
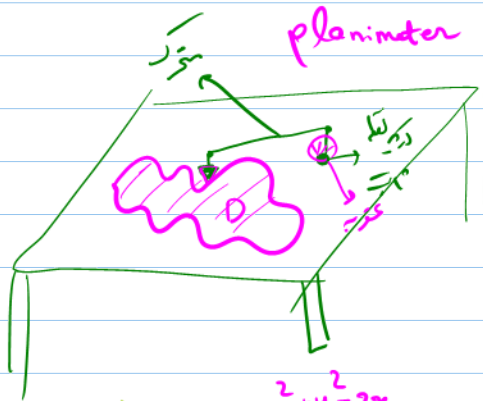
$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \quad D = \mathbb{R}$$

$$F = (-y, x)$$

$$D\vec{r} = \frac{1}{2} \int_C \underbrace{xdy - ydx} =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[(a \cos \theta)(b \cos \theta) - (b \sin \theta)(-a \sin \theta) \right] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \underline{ab} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab d\theta$$

$$= \pi a b$$



$$\int_C \underbrace{(3x^2 e^y) dx + (x^3 e^y + 1) dy}_{\text{du}} = \int_0^1 du = 1$$

$$F = (\underbrace{3x^2e^y}_P, \underbrace{xe^y + 1}_Q)$$

$$P_y = 3 \times 10^4$$

$$Q_x = 3x^2y$$

$$p_y = Q_x$$

$$\oint_{\text{cuc}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \underbrace{(Q_x - P_y)}_{=0} dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_{c_1} F \cdot dr + \int_{c_2} F \cdot dr = 0 \Rightarrow$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\tilde{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$-c_2: (0,0) + t(1,1) = (t,t) \quad \cdot \leq t \leq 1 \quad \cdot \leq t \leq 1$$

$$\int_{-C}^C \underbrace{(3x^2 e^y)}_{F_1} dx + \underbrace{(x^3 e^y + 1)}_{F_2} dy = \int_0^1 \left(\frac{2t}{3te + te + 1} \right) dt =$$

$$-C_2 \quad F = (\underbrace{3x^2 e^y}, \underbrace{x^3 e^y + 1})$$

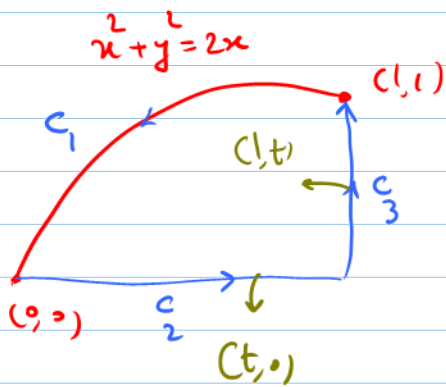
$$\int_0^1 \left[\frac{t}{e} (t^3 + 3t^2) + 1 \right] dt$$

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_3 \cup C_4} F \cdot dr = \int_{C_3} F \cdot dr + \int_{C_4} F \cdot dr = 1 + e \quad \text{... اصل ریم ...}$$

$$C_3 = (t, 0) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{C_3} F \cdot dr = \int_0^1 3t^2 dt = t^3 \Big|_0^1 = 1$$

$$\int_{C_4} F \cdot dr = \int_0^1 (e^t + 1) dt = (e^1 - 1) + 1 = e$$



$$F = (\underbrace{3x^2 e^y}, \underbrace{x^3 e^y + 1})$$

$$Q_x = P_y = 0 \quad \int (3x^2 e^y) dx + (x^3 e^y + 1) dy$$

$$\int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} F \cdot dr = 0$$

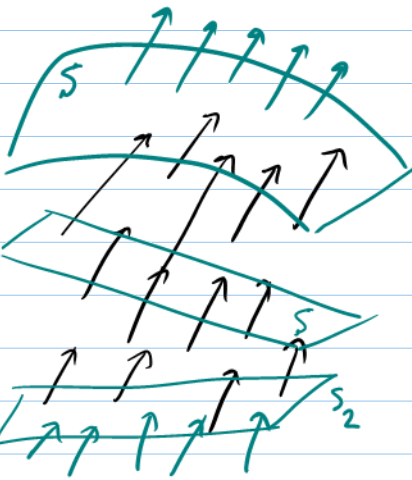
$$\iint (Q_x - P_y) dA$$

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2 \cup C_3} F \cdot dr$$

$$\int_{C_3} F \cdot dr = \int_0^1 (1 \cdot e^t + 1) dt = \dots$$

$$\int_{C_2} F \cdot dr = \dots$$

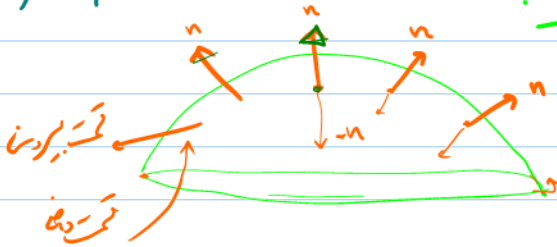
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C p dx + q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA \quad \underline{\text{خلاصه}}$$



درین جهت .

در ریس قبل کار انجام شد که سطح را مع ان برداریم برای حرکت دادن یک جسم دور یک منحنی واجب کردیم. اما این ریس می خواهم شمار گذرنامه از یک رویه را حساب کنم.

نوع برای تعیین شمار گذرنامه نیاز است که رویه مورد نظر ما همبسته باشد
Oriented



یعنی جهت و دور مشخص داشته باشد.

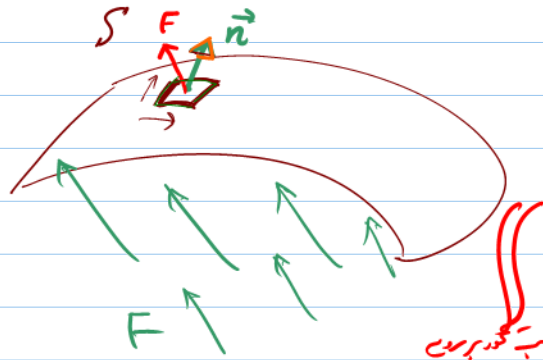
فشار بر یک سطح



حساب شمار گذرنامه میان F از رویه S.

$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy$$

$$z = f(x, y)$$



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

شماره ریس یک جسم در یک سطح

شماره S از رویه S

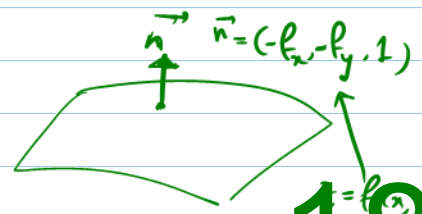
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{(x,y)} \left(\underbrace{(P, Q, R)}_{\text{بردار یک نقطه}} \cdot \underbrace{(-f_x, -f_y, 1)}_{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \right) \underbrace{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}_{\text{نرمال}} dx dy$$

$$z = f(x, y) \quad \mathbf{n} = (-f_x, -f_y, 1)$$

$$= \iint_{(x,y)} (-Pf_x - Qf_y + R) dx dy$$

انتگرال دوگانه

در جهت که سطح S به سمت بیرون باشد



$\iint_S \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{(x,y)} (-P f_x - Q f_y + R) \, dA$
 $S: z = f(x,y)$
 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$

$\mathbf{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

مثال فرض کنید $\mathbf{F}$ یک میدان بردار به صورت
 $\mathbf{F}(x,y,z) = \underbrace{z}_{P}\vec{i} + \underbrace{y^2}_{Q}\vec{j} + \underbrace{x}_{R}\vec{k}$

باشد. $\mathbf{F}$ از نیمه کره $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ را محاسبه کنید.
 $dS = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} \, dA$
 $\iint_S \mathbf{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{(x,y) \in \text{نیمه کره}} (-P f_x - Q f_y + R) \, dndy$
 $f_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
 $f_y = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
 $= \iint_{(x,y)} \left(\frac{zx}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + x \right) \, dndy$

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$
 $= \iint_{(x,y)} x + \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + x = \iint_{(x,y)} \left(2x + \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) \, dndy$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(2r \cos \theta + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1-r^2}} \right) r \, dr \, d\theta = \dots$

$\int \frac{r^3 \, dr}{\sqrt{1-r^2}} \quad \text{تبدیل} \quad r = \sin u$
 $\int \frac{\sin^3 u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \cos u \, du = \int \sin^2 u \sin u \, du = \int (1-\cos^2 u) \sin u \, du$
 $\int \sin^2 u \, du = \dots$

$S: z = f(x, y)$

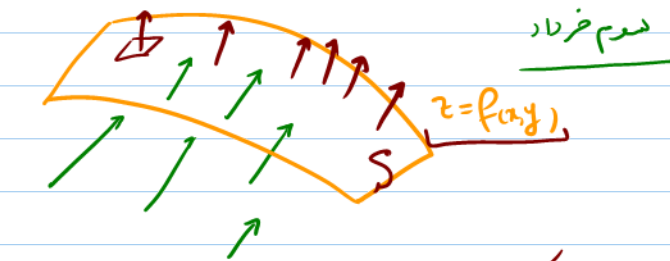
$P \cdot \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} dxdy$

$\underline{is}$

$\vec{F}$

$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{(x,y)} (-Pf_x - Qf_y + R) dxdy$

S



نوار (Flux)

$$F = (P, Q, R)$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{(x,y)} (-Pf_x - Qf_y + R) dx dy$$

نوار گذرنده از S :

$$\vec{n} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

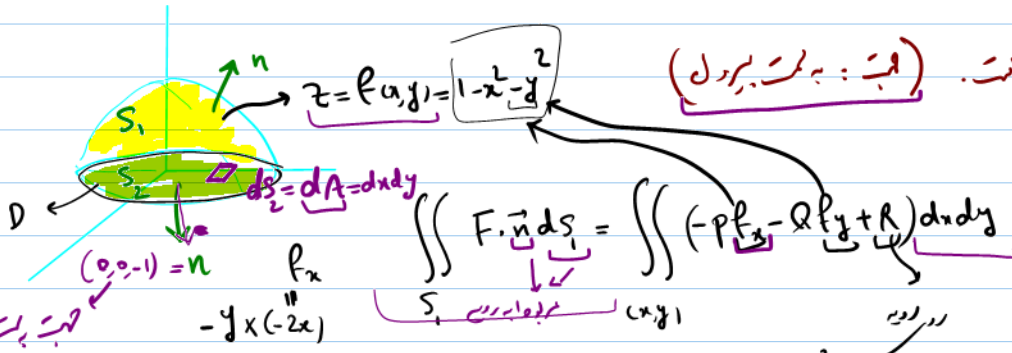
$$dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA$$

$$F = (P, Q, R) = (y, x, z)$$

مثال : نوار میان $F(x, y, z) = y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$ گذرنده از دو سطح S_1 و S_2 را بیابید. S مرز ناحیه محاطه توسط دو سطح

$z = 1 - x^2 - y^2$ و $z = 0$ (ایست : جهت بیرون)

نوار گذرنده از S_1 :



$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{(x,y)} (-Pf_x - Qf_y + R) dx dy$$

$$= \iint_{(x,y) \in D} (2xy + 2xy + 1 - x^2 - y^2) dx dy = \iint_D (4xy + 1 - x^2 - y^2) dx dy$$

$x = r \cos \theta$
 $y = r \sin \theta$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r^2 \cos \theta \sin \theta + 1 - r^2) r dr d\theta$$

$2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 \sin 2\theta) r^3 dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta = \dots$$

نوار گذرنده از S_2 :

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{(x,y) \in D} (y, x, z) \cdot (0, 0, -1) dx dy = 0$$

نوار کل : $S_1 + S_2$

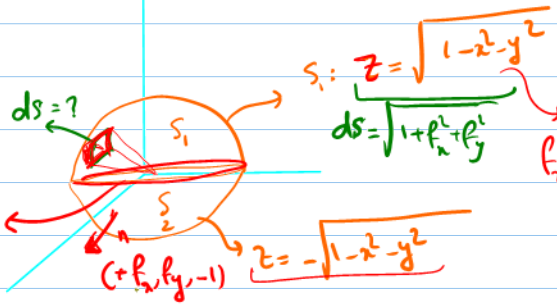
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{مربع كنيد}$$

$$F(x, y, z) = \vec{z}\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k} \quad \text{را از كره}$$

میل، نما، میدان

$\vec{n}$

مربع كنيد



$$\iint F \cdot \vec{n} ds = \iint (F_x P_x + F_y Q_y + F_z R_z) dA$$

$$z = f(x, y)$$

$$F_x = -2x$$

$$x\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\iint_D \left(\frac{z \cdot x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{y \cdot y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + x \right) dA = \iint_D \left(2x + \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right) dx dy$$

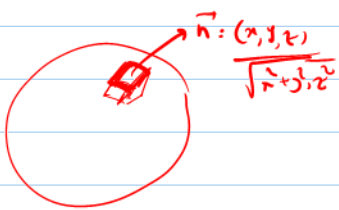
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(2r \cos \theta + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1-r^2}} \right) r dr d\theta$$

$$\int \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx$$

مشابه س1 : ...
مربع كنيد

$$\int \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}} dr = \int \frac{\sin^3 u \cancel{\cos u} du}{\cancel{\cos u}} =$$

$$\int \sin^2 \sin = \int (1 - \cos^2) \sin = \int (1 - A) dA \dots$$



$$\rho \sin \varphi d\theta$$

ك : س

$$F = (z, y, x)$$

میل، نما

$$\iint_S F \cdot \vec{n} ds = \iint (z, y, x) \cdot (x, y, z) (\rho^2 \sin \varphi d\varphi d\theta)$$

مربع كنيد

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \rho = 1$$



$$ds = \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

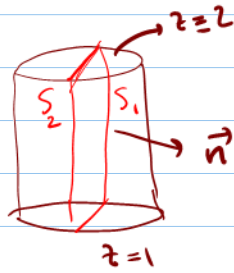
مربع كنيد !

$$S: \text{دایره} \quad x^2 + y^2 = 1$$

بین صفحات $z=1$ و $z=2$ به سمت بالا.

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, ds$$

$$F = (x+z)\vec{i} + y\vec{j} + (x^2+y^2)\vec{k}$$



$$\iint_{S_1} + \iint_{S_2} = 1$$

$$S: y = \sqrt{1-x^2}$$

$$f(x, z)$$

$$(-t_x, 1, -t_z)$$

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, ds = \iint_S (-P t_x + Q - R t_z) \, dndz$$

$$= \dots$$

Convergence

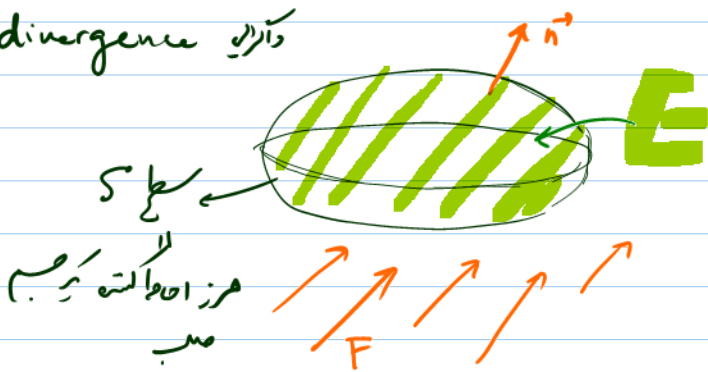
divergence

Divergence

تفرقه دیر و رانی

فرض کنید E یک ناحیه صلب سه بعدی باشد.

مرز آن S به سمت بیرون.



فرض کنید F یک میدان بردار باشد. دایره‌های

چند می‌تواند باشد.

$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_E (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \, dV = \iiint_E \text{Div}(F) \, dV$$

$$(P_x + Q_y + R_z) \, dV$$

انتگرال سطح

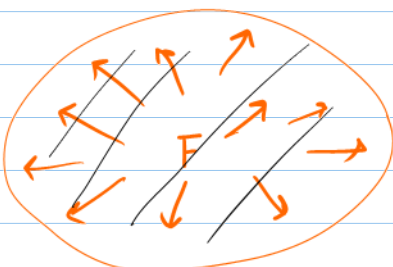
انتگرال حجم

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$F = (P, Q, R)$$

$$\vec{\nabla} \cdot F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{Div}(F)$$

دیر و رانی



$$\iint_S F \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V (\text{Div } F) \, dv$$

نوا

$\vec{\nabla} \cdot F$

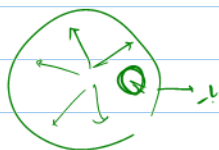


کے؟



$$\iiint_E \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (z, y, x) \, dv = \iiint_E 1 \, dv = \text{حجم كُر} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \frac{\rho \cdot dv}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



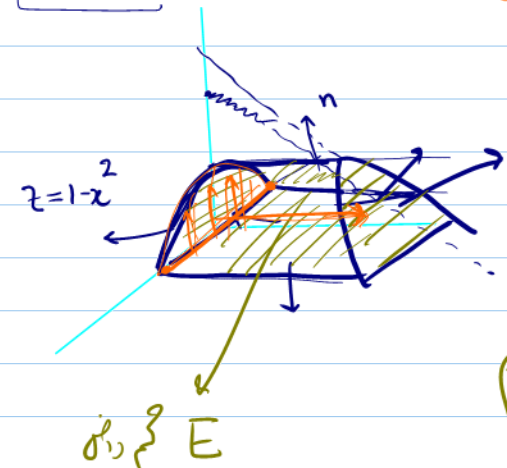
مبدأ

$\iint_S F \cdot nds$

ما می‌توانیم بگوییم که در آن

$$F = (xy)\vec{i} + (y + e^{x^2})\vec{j} + \sin(xy)\vec{k}$$

5 سطح احاطه نامه های E محصور به استوانه $x^2 + z = 2$, $y=0$, $z=0$ صفحات

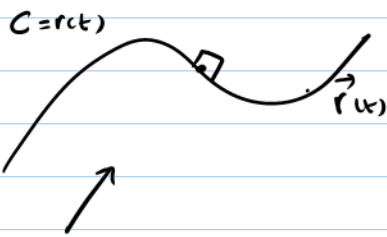


ثالث - (حجت بهیرد)

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_E (\nabla \cdot \mathbf{F}) dv =$$

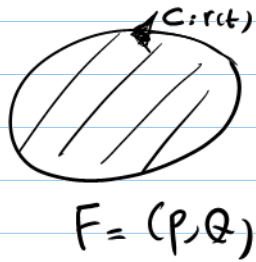
$$\iiint_E (P_x + Q_y + R_z) \, dv = \iiint_E (y + 2y) \, dv$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^{1-x} \int_0^{1-x^2} (3y) \, dy \, dz \, dx = \dots$$

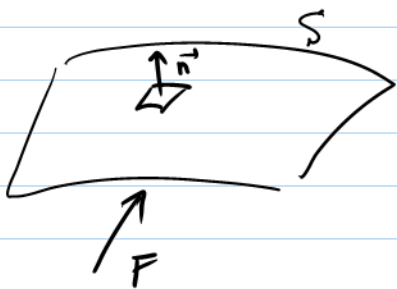


F

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_t p dx + Q dy + R dz$$

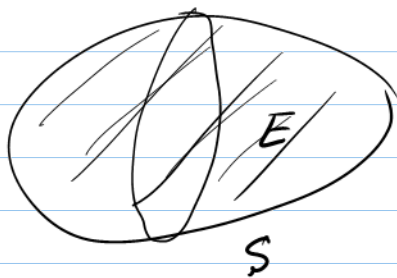


$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C p dx + Q dy = \iint_D \underbrace{(Q_x - P_y)}_{\text{curl } F} \underbrace{dx dy}_{dA}$$



$$\iint_S \boxed{\vec{F} \cdot \vec{n} dS} = \iint_{\omega''} (P F_x - Q F_y + R) dx dy$$

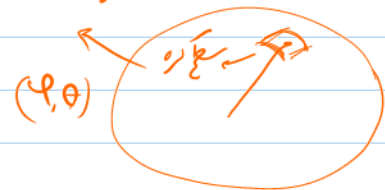
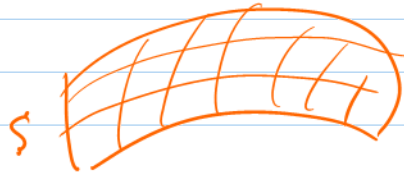
$z = f(x, y)$

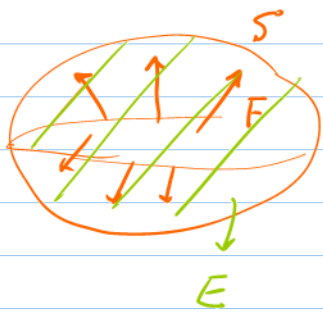


$$\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \overbrace{(\nabla \cdot \vec{F})}^{\text{div } F} dV$$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

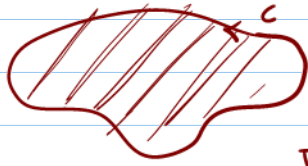
$$S: \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$





$$\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_E (\nabla \cdot \vec{F}) \, dv$$

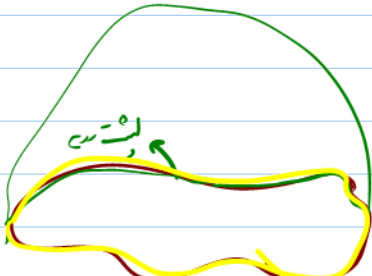
قضیه دیوژانس



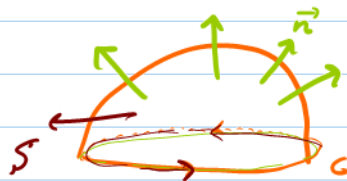
$$F = (P, Q)$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (Q_x - P_y) \, dA$$

قضیه گرین



$$C: \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds$$

قضیه استروکس

انتگرال سطح

انتگرال سطح

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (P, Q, R) =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

یک میدان برداری

قضیه استروکس فرض کنید S یک رویه صاف در یک نقطه هموار

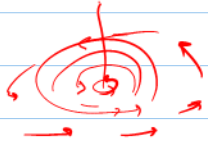
با یک کره در سطح آن هموار باشد به طر قاطعاً حوا C

بجهت مثبت احاطه شود. هم چنین فرض کنید F

یک میدان برداری باشد به طر قاطعاً حوا C

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds$$

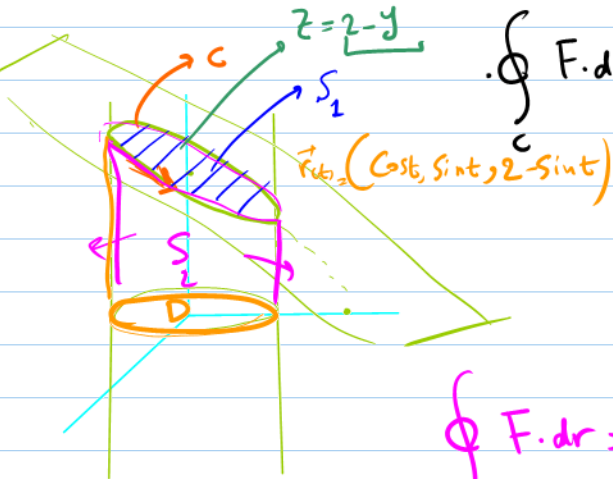
نویس F اگر F همگام بردار باشد، $\nabla \times F$ را با $\text{curl}(F)$ نشان دهیم



$$\text{curl}(F) = \nabla \times F$$

نویس به شکل

مثال فرض کنید $F = -y^2 \vec{i} + x \vec{j} + z^2 \vec{k}$ ، C محل اشتراک صفحه $y+z=2$



و استوانه $x^2+y^2=1$ باشد. مطلوب است محاسبه $\oint_C F \cdot dr$ (درجه مثبت)

هم از روی $\oint_C F \cdot dr$ و هم از روی $\iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot \vec{n} \, ds$

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot \vec{n} \, ds$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = \vec{i}(0) - \vec{j}(0) + \vec{k}(1+2y)$$

$$\text{curl } F = (1+2y) \vec{k} \quad \text{curl}(F) = G = (0, 0, 1+2y)$$

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_{S_1} ((1+2y) \vec{k}) \cdot \vec{n} \, ds =$$

$$\iint_S G \cdot \vec{n} \, ds = \iint_S (-P \vec{e}_x - Q \vec{e}_y + R) \cdot d\vec{\omega}$$

$$= \iint_{(x,y) \in D} (1+2y) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+2r \sin \theta) \, r \, dr \, d\theta = \dots$$

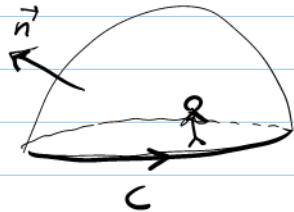
مسئله ۱۰۰ $\oint_C F \cdot dr$ مستقیماً حساب کرد

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \sin t)$$

$$F = (-y^2, x, z^2)$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_C p dx + q dy + r dz =$$

$$\int_0^{2\pi} [(-\sin^2 t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + (2 - \sin t)^2(\cos t)] dt$$

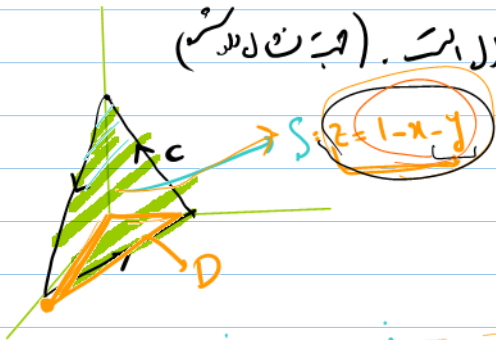


$$F = (x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$$

مثال ۱۰۱ $\oint_C (x^2 - y^2) dx + (y^2 - z^2) dy + (z^2 - x^2) dz$ را محاسبه کنید که در آن C خم حاصل از معادله $x + y + z = 1$ بصورت کفیات

$$\oint_C F \cdot dr$$

در یک مستطیل است. (به این شکل)



$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n} ds$$

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y^2 & y^2 - z^2 & z^2 - x^2 \end{vmatrix} = \vec{i}(+2z) + \vec{j}(+2x) + \vec{k}(+2y) \Rightarrow$$

$$\nabla \times F = (2z, 2x, 2y)$$

$$1 - x - y + x + y$$

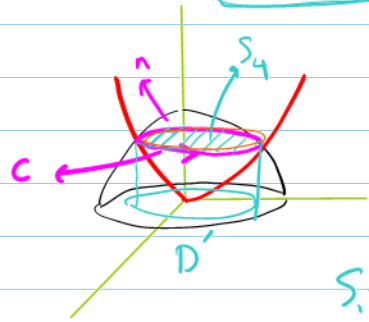
$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n} ds = \iint_{(x,y)} (2z + 2x + 2y) dndy = 2 \iint_S (2 + x + y) dndy$$

$$\iint (\nabla \times F) \cdot \vec{n} ds = \iint (p \vec{e}_x + q \vec{e}_y + r \vec{e}_z) \cdot (p \vec{e}_x + q \vec{e}_y + r \vec{e}_z) dndy$$

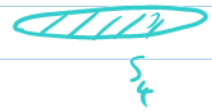
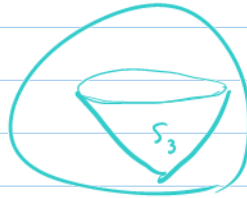
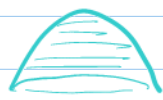
$$= 2 \iint_{(x,y) \in D} 1 dndy = \int_0^1 \int_0^{1-x} dy dx = \dots$$

$$\oint_C (xz)dx + (3yx + z^2)dy + y^2dz \quad \underline{\text{مطلوب}}$$

حل: C هم‌چون از معادله $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ با یک کره $z = x^2 + y^2$ هم‌پوشانی دارد.



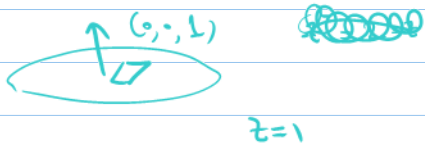
$$\oint_C F \cdot dr = \iint_{S_4} (\nabla \times F) \cdot \vec{n} ds$$



$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 3yx + z^2 & y^2 \end{vmatrix} = i(2y - 3y) - j(-x) + k(2x) = (-y, x, 2x) = \text{curl } F$$

$$S_4: x^2 + y^2 = \sqrt{2 - (x^2 + y^2)}$$

$$z = \sqrt{2 - z} \Rightarrow z = 1$$

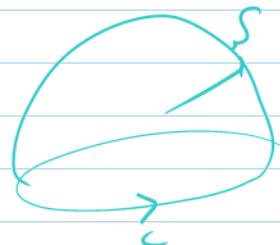


$$\iint_{S_4} (\text{curl } F \cdot \vec{n}) ds =$$

$$= \iint_{(x,y) \in D'} (2x) dA = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2r \cos \theta) r dr d\theta$$

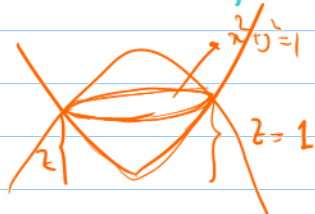
نکته: در S_3 از قضیه استرکتیو.

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_{S_3} \text{curl } F \cdot \vec{n} ds$$



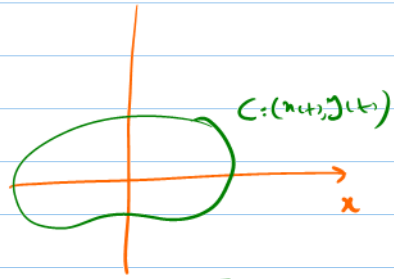
$$z = \sqrt{2 - (x^2 + y^2)}$$

$$z = x^2 + y^2$$

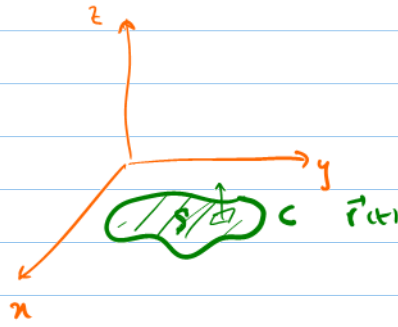


$$\sqrt{2 - (x^2 + y^2)} = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

تمرین مثال دبیہ قیصر کریں از قیصر استوکی نتیجہ مر شود:



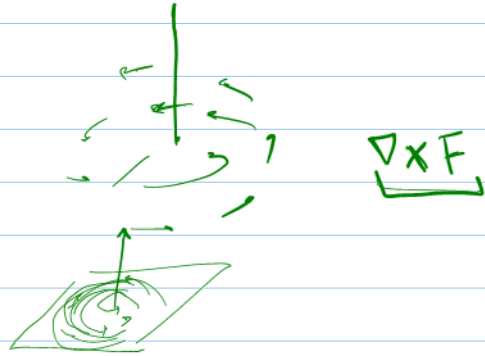
$$F = (P, Q)$$

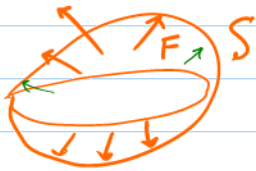


$$F = (P, Q, 0)$$

$$\nabla \times F = (Q_x - P_y) \vec{k}$$

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_P (Q_x - P_y) dA$$

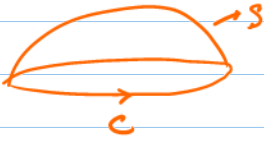




$$\oint_S F \cdot n ds = \iiint_E \nabla \cdot F dv$$

حجم منطقه E

دو فرمول قشنگ:

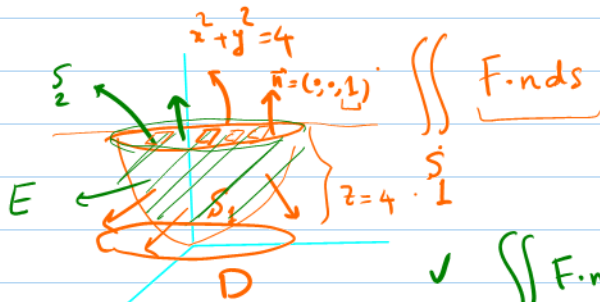


$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S (\nabla \times F) \cdot n ds$$

مثال فرض کنید S_1 قسمتی از سطح $z = x^2 + y^2$ باشد که زیر صفحه $z = 4$ واقع شده است و

مطابق جهت محاسبه

$$F = (x + y^2 z) i + (y - x^3) j + (z + x) k$$



$$\iint_S F \cdot n ds = \iint_D (-P x - Q y + R) dx dy$$

راه ساده

$$\nabla \cdot F = F_x + F_y + F_z$$

$$\iint_S F \cdot n ds = \iiint_E \text{div } F dv =$$

راه اصلی

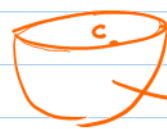
$$S = S_1 \cup S_2$$

$$\iiint_E 3 dv = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^4 r dz dr d\theta = \dots$$

$$\oint_S F \cdot n ds = \left(\iint_{S_1 \cup S_2} F \cdot n ds \right) - \iint_{S_2} F \cdot n ds$$

$$\iint_{S_2} F \cdot n ds = \iint_{(x,y) \in D} (4+x) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4+r \cos \theta) r dr d\theta = \dots$$

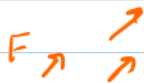
$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S (\nabla \times F) \cdot n ds$$



درست است

$$\vec{F} = (P, Q, R)$$

ادامه درس



$$C = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

یاد آوری

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds$$

انتگرال یک تابع برداری در یک مسیر

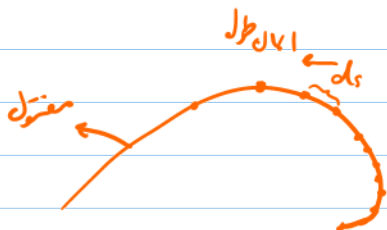
درس امروز: انتگرال یک تابع عددی در یک مسیر.

فرض کنید $f(x, y)$ یک تابع باشد و C یک مسیر باشد. اینجا محاسبه:

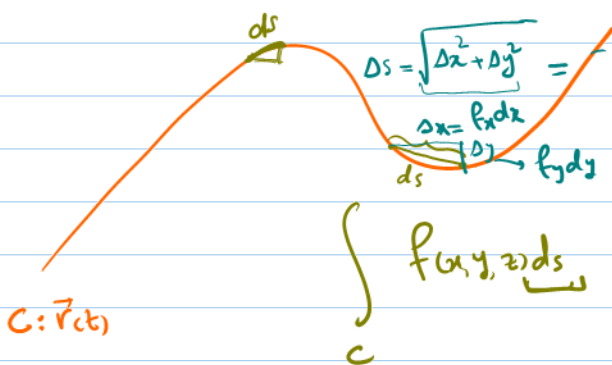
$$\int_C f(x, y) ds$$

فرض کنید $f(x, y, z)$ یک تابع باشد و C یک مسیر باشد. محاسبه:

$$\int_C f(x, y, z) ds$$



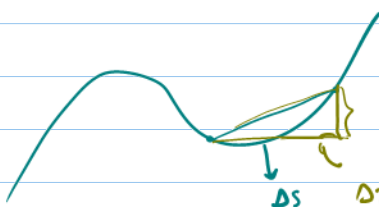
مثال از کاربرد فرض کنید $f(x, y)$ چگالی متوسط در نقطه (x, y) باشد. $\int_C f(x, y) ds$: جرم متوسط



$$f = f(x, y, z)$$

محاسبه:

$$ds = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$



$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$C: (x(t), y(t))$$

$$\Delta x = x'(t) dt$$

$$\Delta y = y'(t) dt$$

$F = (P, Q, R)$

دو نوع انتگرال میگیریم:

① انتگرال توابع بردار روی سطح:

$$\int_C F \cdot T \, ds = \int_C F \cdot \frac{r'(t)}{|r'(t)|} |r'(t)| \, dt = \int_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz$$

② انتگرال توابع عددی روی سطح:

$$\int_C f(x, y, z) \, ds = \int_t f(r(t)) |r'(t)| \, dt$$

$ds = |r'(t)| \, dt$

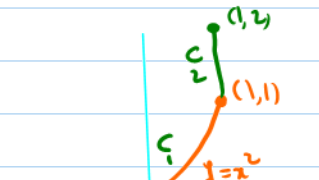


مثال

که در آن $C = C_1 \cup C_2$

C_1 قسمتی از محو از $y = x^2$ که در آن $(0,0)$ تا $(1,1)$ و C_2 خط راست از $(1,1)$ تا $(1,2)$

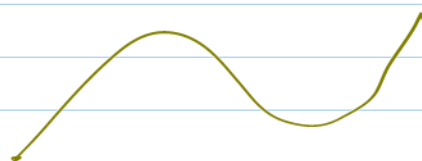
$C_1: (t, t^2) \quad 0 \leq t \leq 1$
 $C_2: (1, t) \quad 1 \leq t \leq 2$



$$\int_{C_1} 2x \, ds = \int_0^1 (2t) \sqrt{1+4t^2} \, dt = \int_a^b \sqrt{u} \, du = \dots$$

$$\int_{C_2} 2x \, ds = \int_1^2 2 \sqrt{0+1} \, dt = 2$$

$$\int_{C_1 \cup C_2} 2x \, ds = \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

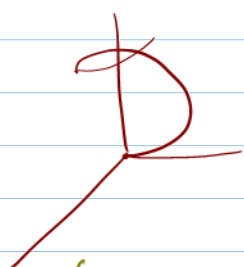


مرکز جرم $= (\bar{x}, \bar{y})$

مثال

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x \rho(x, y, z) \, ds$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y \rho(x, y, z) \, ds$$



$C: (\cos t, \sin t, t)$
 $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\int_C y \sin z \, ds = \int_0^{2\pi} (\sin t)(\sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \, dt$$

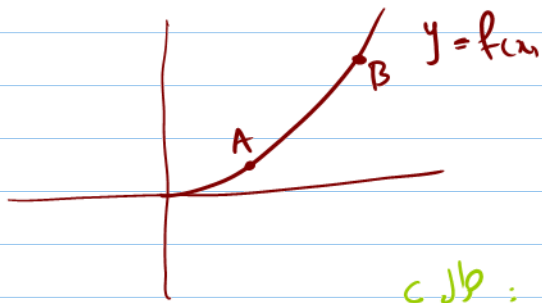
مثال

$$\int_C y \sin z \, ds$$

$$ds = |r'(t)| \, dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} (\sin^2 t) dt = \dots$$

$$\int \sin^2 = \int \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt$$



نوع طول منحنی $y = f(x)$ چگونه محاسبه می‌شود.

طول c : $\int_t ds = \int_t \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

$c: (x, f(x))$

$$ds = |r'(x)| dx = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

طول منحنی = $\int \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

نوع کاربرد از انتگرال نوع دوم در مساحت سطح!

$F = (P, Q, R)$

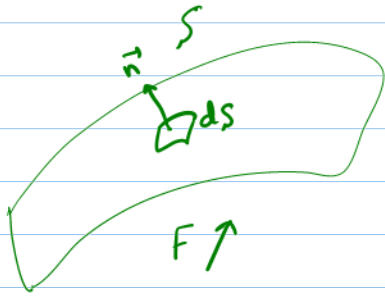
$$\int F \cdot T ds = \int F \cdot \frac{r'(t)}{|r'(t)|} \times |r'(t)| dt =$$

انتگرال نوع دوم در مساحت

$$\int_t F \cdot dr = \int p dx + Q dy + R dz$$

$f(x, y, z)$ مساحت $\int f(x, y, z) ds = \int_t f(\vec{r}(t)) |r'(t)| dt$

درس چهارم - انتگرال تاج عکس روش



نتیجه از F

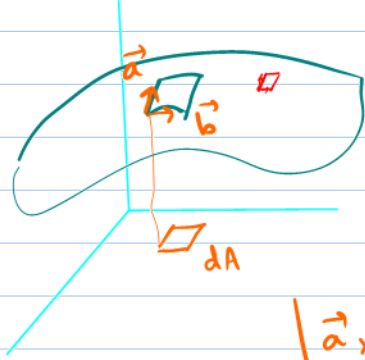
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_S \frac{\vec{F} \cdot (\vec{r}_x, \vec{r}_y, 1)}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + 1}} \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + 1} \, dA$$

انتگرال تاج بر مدار روش:

یاد آوری

$$ds = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + 1} \, dA$$

$z = f(x, y)$



$$\vec{a} = (\Delta x, 0, f_x \Delta x)$$

$$\vec{b} = (0, \Delta y, f_y \Delta y)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ds$$

نتیجه از $|\vec{a} \times \vec{b}|$

$$\iint_{(x,y)} (-p r_x - q r_y + R) \, dxdy$$



روش دوم - انتگرال تاج عکس روش

$$\iint_S f(x, y, z) \, ds = \iint_{(x,y)} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} \, dxdy$$

$S: z = g(x, y)$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$\iint_S f \, ds$$

① تاج بر مدار

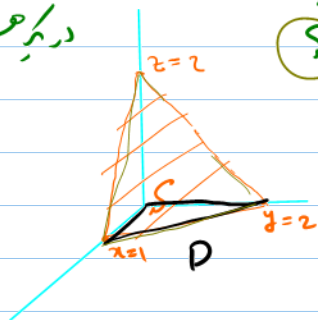
② تاج عکس

پس دو نوع انتگرال داریم.

$2x+y+z=2$ S قسم از صفحه
در یکرستم اول مختصات است

$\iint_S (xy - 2z) d\sigma$
(5)

مثال



$S: z = 2 - 2x - y$

$d\sigma = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} dx dy$

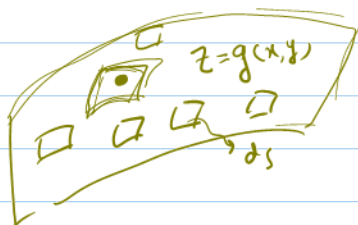
$= \sqrt{4 + 1 + 1} dx dy$

$\iint_S (xy - 2z) d\sigma =$
تغییر از سطح

$\iint_{(x,y) \in D} (xy - 2(2 - 2x - y)) \sqrt{6} dx dy = \sqrt{6} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (xy - 4 + 4x + 2y) dy dx$

$P(x,y)$

$(x,y,z) \in S$



$\iint_S d\sigma$

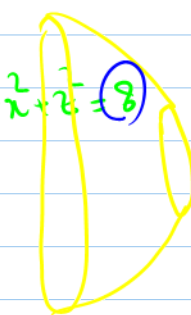
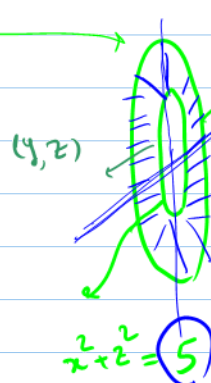
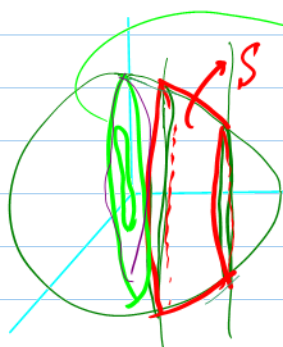
محاسبه

یا دایره

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ S قسم از کره
بین مختصات $y=2$ و $y=1$

$\iint_S (y^2 + xz) d\sigma$

مثال



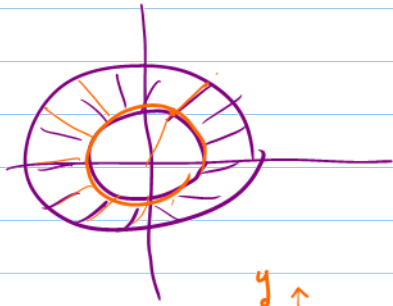
$S: y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$

$\iint_S \left[(9 - x^2 - z^2) + xz \right] \sqrt{\frac{x^2}{9 - x^2 - z^2} + 1} dx dz$
 $g_x = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - z^2}}$

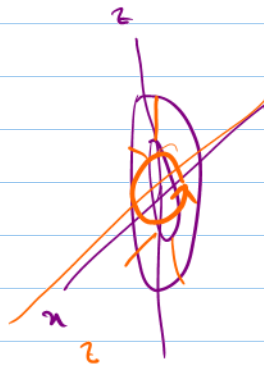
$= \iint_{(x,z)} \left[(9 - x^2 - z^2) + xz \right] \sqrt{\frac{x^2}{9 - x^2 - z^2} + 1} dx dz$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} (9-r^2) + (r \cos \theta \cdot r \sin \theta) \sqrt{\frac{r^2}{9-r^2} + 1} \, r \, dr \, d\theta = \dots$$

$x = r \cos \theta$
 $z = r \sin \theta$

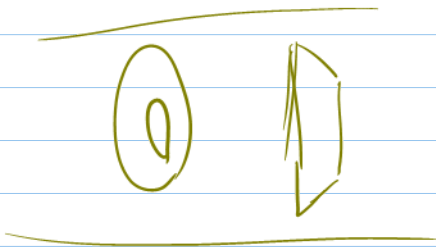
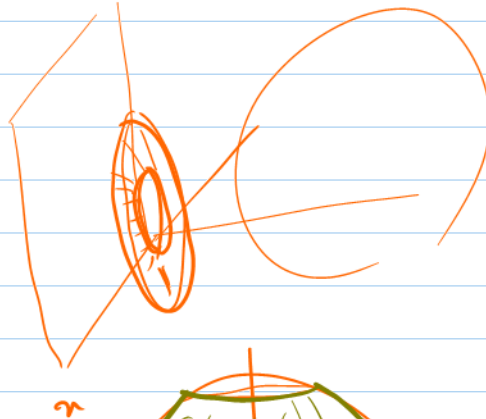
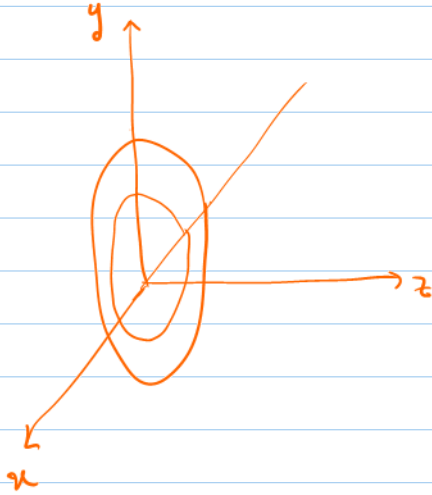


$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}}$$



$$x = r \cos \theta$$

$$z = r \sin \theta$$



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

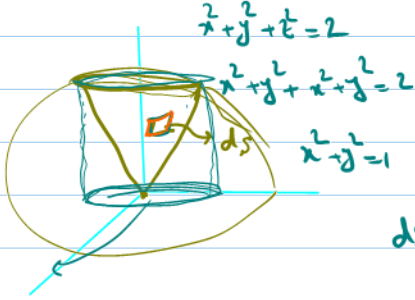
$$S: z = f(x, y)$$

$$ds = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$

$$\iint \underline{F} \cdot \underline{n} \, ds = \iint (-pf_x - qf_y + R) \, dx \, dy$$

$$\iint g(x, y, z) \, ds = \iint g(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \, dx \, dy$$

مثال: مساحت قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را بیابید که درون کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ واقع شده است.



$$مساحت = \iint ds$$

$$ds = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} \, dx \, dy = \sqrt{2} \, dx \, dy$$

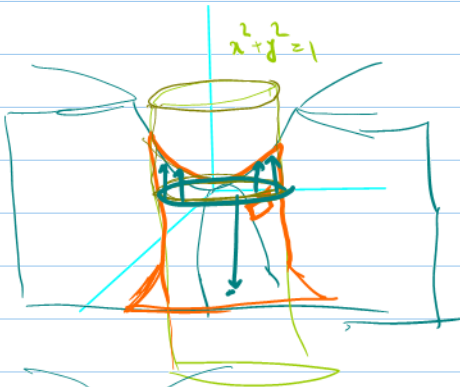
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2} \, r \, dr \, d\theta = \sqrt{2} \frac{1}{2} \times 2\pi = \sqrt{2} \pi$$

$$z = f(x, y)$$

مثال: مساحت قسمتی از سطح $z = y^2 - x^2$ را بیابید که درون استوانه $x^2 + y^2 = 1$ واقع شده است.



$$ds = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \, dx \, dy = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dx \, dy$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} \, r \, dr \, d\theta$$

آفرین بچه درک

صفحه بعدی

تغییر در انتگرال دوگانه

حالت خاص

$x = g(t)$
 $\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt$
 $dx = g'(t) dt$
 $g(c) = a$
 $g(d) = b$

$$\iint f(x, y) dx dy = \iint f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$x = r \cos \theta$$

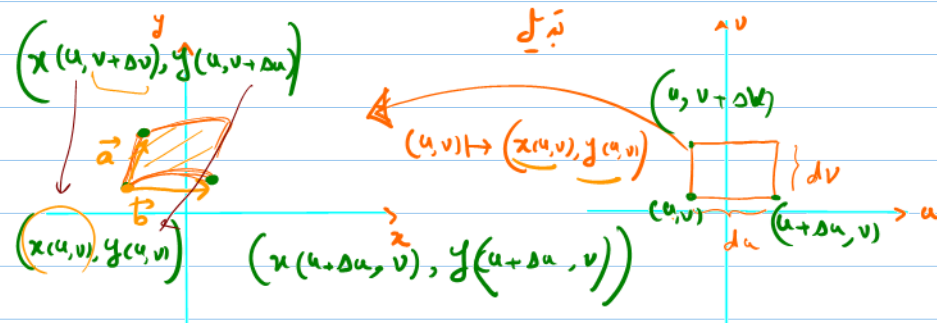
$$y = r \sin \theta$$

$$r dr d\theta$$

$$dx dy = r dr d\theta$$

$\iint f(x, y) dx dy$ فرض کنید
 $x = x(u, v)$
 $y = y(u, v)$

$\iint f(x, y) dx dy = \iint f(x(u, v), y(u, v)) \boxed{?} du dv$ جایگزین کنیم.



$$\vec{a} = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \Delta v, \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v, 0 \right) \quad \vec{b} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \Delta u, \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u, 0 \right)$$

$$x(u, v + \Delta v) - x(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v$$

$$y(u, v + \Delta v) - y(u, v) = \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v$$

$$= \text{ح} : \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| du dv = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| du dv$$

$$\iint f(x,y) dx dy = \iint f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

$$x = x(u,v)$$

$$y = y(u,v)$$

نقطه

$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

نقطه

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$x \mapsto x(u,v)$$

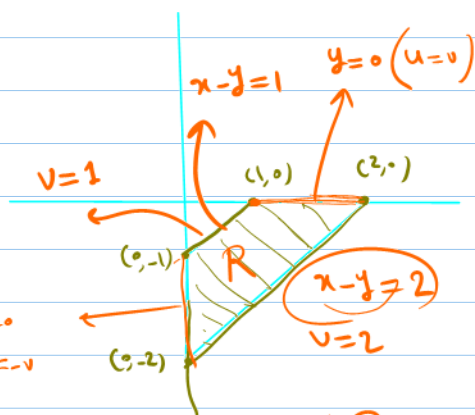
$$y \mapsto y(u,v)$$

$$dx dy \rightarrow \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

$$R = \{(1,0), (2,0), (0,-2), (0,-1)\}$$

دائرة با مرکز

$$\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}} dx dy$$



$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$

$$\int_0^2 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} \left| \frac{1}{2} \right| du dv$$

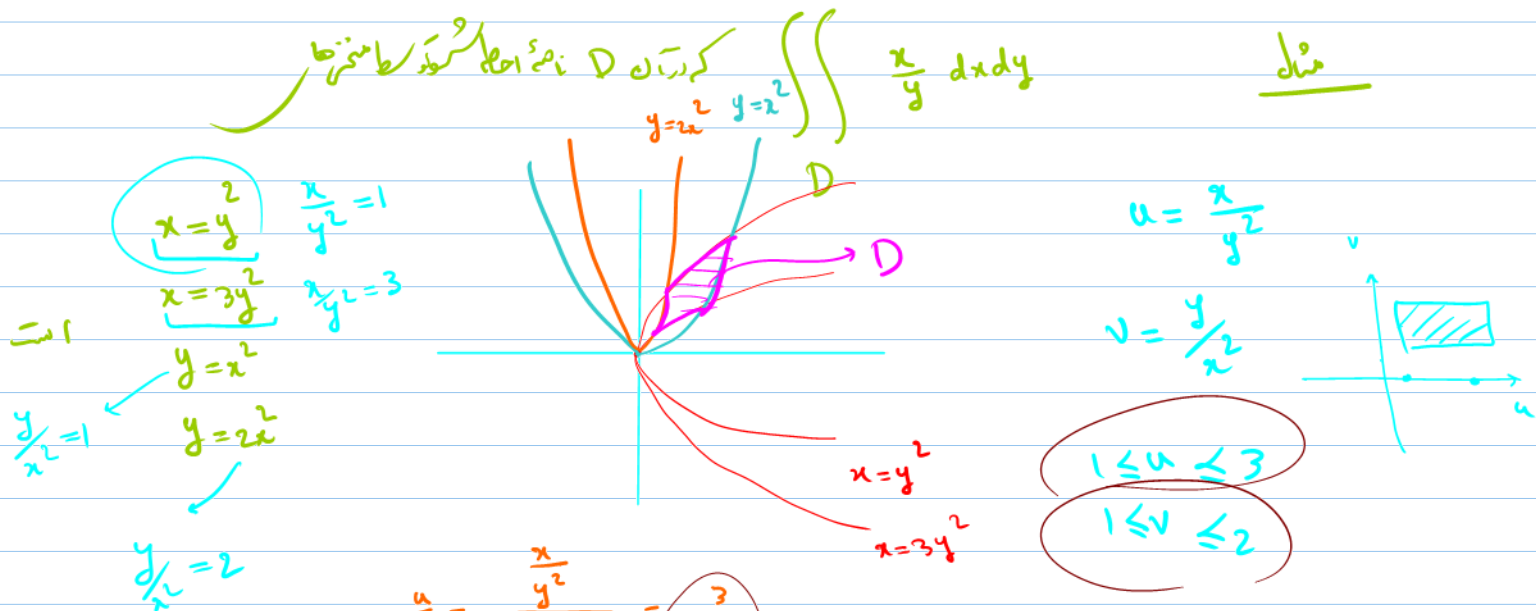
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

$$\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du dv$$

$$\int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} \frac{du}{v} = \int_{-v}^v \left(\frac{1}{v}\right) e^{\frac{u}{v}} du = v e^{\frac{u}{v}} \Big|_{-v}^v = v \left(e^{\frac{v}{v}} - e^{-\frac{v}{v}} \right)$$

$$\int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 e^{\frac{1}{2}x} = v (e^1 - e^{-1})$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \int_v^v e^{\frac{u}{v}} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 v (e - \frac{1}{e}) = \frac{1}{2} (2 - \frac{1}{2}) (e - \frac{1}{e})$$



$$u = \frac{x}{y^2} \Rightarrow x = uy^2 = uv^2 x^4 \Rightarrow 1 = uvx^3 \Rightarrow x = \frac{1}{uv} \Rightarrow x = u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}}$$

$$v = \frac{y}{x^2} \Rightarrow y = vx^2 = v u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{4}{3}} = v^{-\frac{2}{3}} u^{\frac{2}{3}}$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} u^{-\frac{4}{3}} v^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{5}{3}} \\ -\frac{2}{3} u^{-\frac{5}{3}} v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{4}{3}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} uv - \frac{4}{9} uv = -\frac{1}{3} uv \neq 0$$

$$y = u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}}$$

$$\iint \left(\frac{x}{y} \right) dx dy = \int_1^2 \int_1^3 \left(\frac{-3}{u} \times \frac{3}{v} \right) \frac{1}{3} u^{-2} v^{-2} du dv = \dots$$

$$\iint f(x,y) dx dy \quad dx dy \rightarrow \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

$x = x(u,v)$
 $y = y(u,v)$

$$\iint f(x,y) dx dy = \dots$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

آرین

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| = ? \quad (r)$$

$y = 2x$
 $y = x$
 $y = \frac{2}{x}$
 $y = \frac{1}{x}$
 $xy = 2$
 $xy = 1$

مثال: سطح کعبه بین منظره
اول نقاط را بیابید.

$$\iint dx dy \quad dx dy \rightarrow \left| \frac{\partial}{\partial} \right| du dv$$

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ \frac{1}{2} \leq v \leq 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{u}{y} = \frac{u}{\frac{x}{v}} = \frac{uv}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{x}{v} = \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = \dots$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_1^2 \left(\text{diagonal lines} \right) du dv$$

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y$$

$$w = f(x, y, z)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z$$

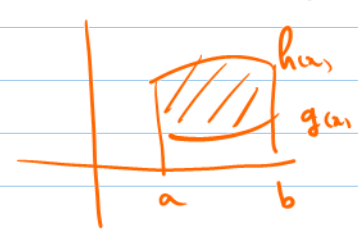
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

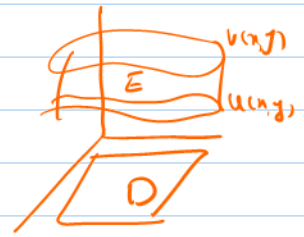
$$\lim_{(x_0, y_0) \rightarrow (c, r)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - f_x \Delta x - f_y \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0 \quad \text{منتهی}$$

$$\iint f(x, y) dx dy$$

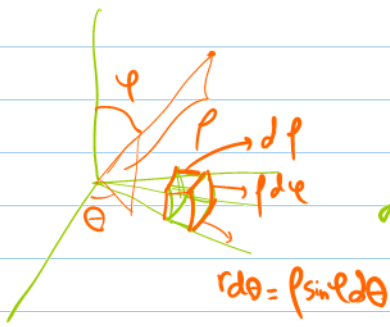
$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz$$



$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

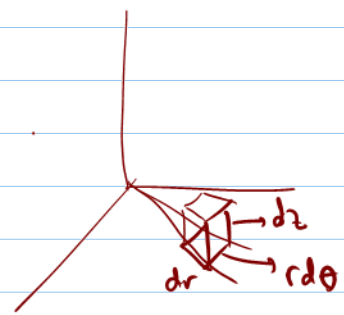


$$\iiint_E = \iint_D \int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz dA$$



$$\iiint f(x, y, z) dy dz = \iiint f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \iiint f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho dz d\rho d\theta$$

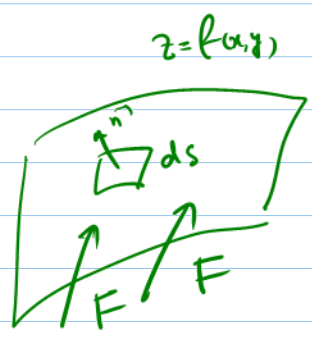


$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C p dx + Q dy + R dz$$

$$ds = |\mathbf{r}'(t)| dt$$

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$



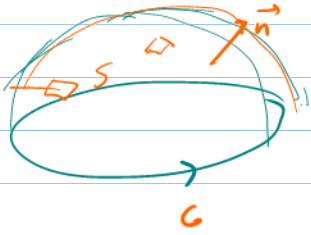
$$ds = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint (P f_x - Q f_y + R) dx dy$$

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint f(x, y, f(x, y)) \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy$$



$$\oint_C F \cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy \quad (\text{گرن})$$



$$\oint_C F \cdot dr = \iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n} ds \quad (\text{اسٹوکس})$$



$$\iint_S F \cdot \vec{n} ds = \iiint_E (\nabla \cdot F) dv \quad (\text{دیورٹانس})$$

$$\iint f(x, y) dx dy = \iint f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (\text{تغییر متغیر})$$