

نظریه‌ی مدل جبری

محسن خانی

۲۱ شهریور ۱۳۹۸

چکیده

جزوه‌ی پیش رو حاصل تدریس نظریه‌ی مدل در دانشگاه صنعتی اصفهان، در نیمسال دوم ۹۸-۹۷ است. در این دوره، نظریه‌ی مدل را با رویکردی جبری تدریس کرده‌ام و کوشیده‌ام تا پیش‌نیازهای جبری را نیز حتی‌الامکان بیان کنم. برای اثبات قضیه‌ی فشردگی، به جای روش معمول هنکینی، از فرافیلترها یاری گرفته‌ام و عموماً به جای دنبال کردن هیچ منبعی، از تجربیات شخصی خودم برای بیان مفاهیم مهمی مانند هم‌تایی و حذف سور استفاده کرده‌ام. زحمت تایپ این جزوه را حمزه‌ی محمدی کشیده است و من عمدتاً فرصت بازخوانی آن را نداشته‌ام. بدینوسیله از زحمت ایشان در تایپ این جزوه قدردانی می‌کنم.

۱ جلسه‌ی اول، فیلترها و فرافیلترها

شروع نظریه‌ی مدل

قضایای تمامیت و ناتمامیت گودل، عامل اصلی ایجاد گرایش نظریه‌ی مدل هستند. بنا به قضیه‌ی ناتمامیت گودل، هر تئوری‌ای قابل تولید با یک الگوریتم که برای حساب نوشته شود، ناکامل است؛ یعنی حقایقی درباره‌ی اعداد طبیعی هستند که در آن تئوری قابل اثبات نیستند.

از طرفی بنا به قضیه‌ی تمامیت گودل، هر جمله‌ای که در تمام ساختارها درست باشد قابل اثبات است. از آنجا که اثبات‌پذیری همواره بخشی متناهی از فرضها را مورد استفاده قرار می‌دهد، قضیه‌ی تمامیت منجر به ایجاد قضیه‌ی فشردگی می‌شود که بنا بر آن، یک مجموعه‌ی نامتناهی از گزاره‌ها زمانی دارای مدل است که هر زیرمجموعه‌ی متناهی از آن دارای مدل باشد.

در نظریه‌ی مدل، قضایای یادشده به زیبایی برای خلق و فهم ریاضیات مورد استفاده قرار می‌گیرند. در جبر و هندسه‌ی جبری، به خوبی می‌توان از امکانات نظریه‌ی مدل بهره جست، و در این دوره‌ی درسی، قرار است این امکانات تا حدودی بررسی شوند.

تعریف ۱. فرض کنید I یک مجموعه باشد. مجموعه‌ی $D \subseteq P(I)$ را یک فیلتر روی I می‌نامیم هرگاه D دارای ویژگی‌های زیر باشد:

$$1. I \in D, \emptyset \notin D$$

$$2. \text{اگر } A, B \in D \text{ آنگاه } A \cap B \in D$$

$$3. \text{اگر } A \in D \text{ و } A \subseteq B \subseteq I \text{ آنگاه } B \in D$$

تمرین ۱. قرار دهید $\mathbb{R} - X$ دارای اندازه‌ی لبگ برابر صفر است. $D = \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - X \text{ دارای اندازه لبگ برابر صفر است}\}$. نشان دهید که D یک فیلتر روی $\mathbb{R}$ است.

مثال ۲. فرض کنید I یک مجموعه‌ی دلخواه و نامتناهی باشد. $D = \{X \subseteq I \mid I - X \text{ متناهی است}\}$ آنگاه D یک فیلتر روی I است.

اثبات. اولاً $I - \emptyset = I$. پس $\emptyset \notin D$. ثانیاً $I - I = \emptyset$. پس $I \in D$. ثالثاً فرض کنید $A, B \in D$. بنابراین $I - A, I - B$ متناهی هستند. چون $I - (A \cap B) \subseteq (I - A) \cup (I - B)$. پس $I - (A \cap B)$ متناهی است. بنابراین $A \cap B \in D$. رابعاً فرض کنید $A \in D$ بنابراین $I - A$ متناهی است. حال اگر $A \subseteq B \subseteq I$ آنگاه $I - B \subseteq \underbrace{I - A}_{\text{متناهی}}$. پس $I - B$ متناهی است. بنابراین $B \in D$. $\square$

تعریف ۳. به فیلتری که در مثال قبل معرفی شد، فیلتر فرشه^۱ گفته می‌شود.

تمرین ۲. فرض کنید κ یک کاردینال نامتناهی باشد و $|I| > \kappa$ آنگاه $D = \{X \subseteq I \mid |I - X| < \kappa\}$ یک فیلتر روی I است.

^۱Frechet

مثال ۴. فرض کنید که I یک مجموعه باشد و $x \in I$. در این صورت $D = \{A \subseteq I \mid x \in A\}$ یک فیلتر روی I است.

تعریف ۵. به هر فیلتر مانند فیلتر مثال قبل یک فیلتر اصلی^۲ گفته می‌شود.

تعریف ۶. فیلتر U روی مجموعه‌ی I را یک فرافیلتر^۳ می‌نامیم هرگاه برای هر $X \subseteq I$ یا $X \in U$ یا $I - X \in U$.

مثال ۷. هر فیلتر اصلی یک فرافیلتر است. زیرا همواره $X \in A$ یا $X \in I - A$.

سوال ۸. اگر U فرافیلتر باشد آیا اگر $A, B \in U$ آنگاه $A \cup B \in U$ ؟ اگر $A \cup B \in U$ آیا $A \in U$ یا $I - A \in U$ ؟

لم ۹. فرض کنید D یک فیلتر روی I باشد. آنگاه یک فرافیلتر $D \subseteq U$ موجود است (به عنوان تمرین بررسی کنید که آیا فرافیلتر یاد شده یکتاست؟)

اثبات. فرض کنید D' یک فیلتر روی I است و $A = \{D' \mid D \subseteq D'\}$. چون $D \in A$ پس $A \neq \emptyset$. حال روی A ترتیب جزئی $D_1 \subseteq D_2 \iff D_1 \leq D_2$ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم $(A, \leq)$ در شرایط لم زرن صدق می‌کند. برای این منظور کافی است نشان دهیم که هر زنجیر $\{D_i\}_{i \in J}$ ($D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \dots$) از عناصر A دارای یک کران بالا در A است. ادعا می‌کنیم که $\bigcup D_i \in A$. فرض کنید $A, B \in \bigcup D_i$. چون $D_1 \subseteq D_2 \subseteq D_3 \subseteq \dots$ پس عضو $i \in J$ وجود دارد که $A, B \in D_i$. بنابراین $A \cap B \in D_i$ پس $A \cap B \in \bigcup D_i$. سایر ویژگی‌ها نیز به سادگی قابل تحقیق است. از آنجا که $(A, \leq)$ شرایط لم زرن را داراست نتیجه می‌گیریم که A دارای یک عنصر ماکزیمال، مثلاً به نام U ، است. نشان می‌دهیم که U یک فرافیلتر است. باید ثابت کنیم که برای هر $X \subseteq I$ یا $X \in U$ یا $I - X \in U$. فرض کنید که $X \notin U$. مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$E = \{Y \subseteq I \mid \underbrace{\exists A \in U \quad A - X \subseteq Y}_{\text{متمم تمام عناصر } U \text{ نسبت به } X}\}$$

واضح است که $I - X \in E$ (بررسی شود). ادعا می‌کنیم که E یک فیلتر شامل D است. فرض کنید $A, B \in E$. پس $A \cap B \in E$ چون $\exists Z_2 \in U \quad Z_2 - X \subseteq B$ و $\exists Z_1 \in U \quad Z_1 - X \subseteq A$ ، بنابراین $(Z_1 \cap Z_2) - X \subseteq A \cap B$. نشان می‌دهیم که $B \in E$. $A \subseteq B$ و $A \in E$ فرض کنید $A \in E$ و $A \subseteq B$. نشان می‌دهیم که $B \in E$.

$$\exists Z \in U \quad Z - X \subseteq A \Rightarrow Z - X \subseteq B$$

به سادگی بررسی می‌شود که $\emptyset \notin E$ و $I \in E$ و $U \subseteq E$ ($A \in U \implies A - A \subseteq A$). بنابراین E یک فیلتر روی I شامل U است. از آنجا که U ماکزیمال است نتیجه می‌گیریم $E = U$. پس $I - X \in U$. $\square$

۲ جلسه‌ی دوم، منطق مرتبه‌ی اول

تمرین ۳. فرافیلتر U غیر اصلی است اگر و تنها اگر شامل هیچ مجموعه‌ی متناهی‌ای نباشد.

تمرین ۴. هر فرافیلتر غیر اصلی شامل فیلتر فرشه است.

^۲Principal

^۳Ultrasilter

تمرین ۵. هر فرا فیلتر شامل فیلتر فرشه غیر اصلی است.

تعریف ۱۰. می‌گوییم مجموعه‌ی D دارای ویژگی اشتراک متناهی^۴ است هرگاه (برای هر $n \in \mathbb{N}$) برای هر $A_1, \dots, A_n \in D$ داشته باشیم: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$.

لم ۱۱. فرض کنید $D \subseteq P(I)$ دارای ویژگی اشتراک متناهی ناتهی باشد. آنگاه تعریف کنید

$$\langle D \rangle = \{X \subseteq I \mid \exists A_1, \dots, A_n \in D \quad A_1 \cap \dots \cap A_n \subseteq X\}$$

۱. نشان دهید که $\langle D \rangle$ یک فیلتر روی I است.

۲. نشان دهید که $\langle D \rangle$ کوچکترین فیلتر شامل D است یعنی $\langle D \rangle = \bigcap_{D \subseteq F} F$.

نتیجه ۱۲. اگر $D \subseteq P(I)$ دارای ویژگی اشتراک متناهی ناتهی باشد، آنگاه یک فرافیلتر $D \subseteq U$ موجود است.

منطق مرتبه‌ی اول

تعریف ۱۳. منظور از یک زبان مرتبه‌ی اول یک مجموعه‌ی به صورت $L = F \cup R \cup C$ است که F مجموعه‌ی نمادهای تابعی، R مجموعه‌ی نمادهای رابطه‌ای و C مجموعه‌ی نمادهای ثابت‌ها است.

قدم اول مطالعه‌ی هر سیستمی در ریاضیات انتخاب یک زبان مناسب است.

$$L_{\text{group}} = \{e, X\}$$

$$L_{\text{pure set}} = \emptyset$$

$$L_{\text{graph}} = \{R(x, y)\}$$

$$L_{\text{order}} = \{\leq\}$$

$$L_{\text{ordered group}} = L_{\text{group}} \cup \{\leq\}$$

$$L_{\text{ring}} = \{+, \cdot, \circ, 1\}$$

تعریف ۱۴. فرض کنید L یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. منظور از یک L -ترم یک کلمه است که در این زبان قابل نوشتن است. به طور دقیق مجموعه‌ی L -ترمها به صورت زیر تعریف می‌شود:

(آ). هر متغیر x و هر ثابت $c \in L$ یک L -ترم است.

(ب). اگر $t_1, \dots, t_n$ ترم باشند و $f(x_1, \dots, x_n) \in L$ آنگاه $f(t_1, \dots, t_n)$ یک ترم است.

مثال ۱۵. ترمها را در زبان L_{ring} مشخص کنید.

$$\circ, 1, x, y, z, \underbrace{1+1}_2, \underbrace{1+(1, 1))}_3, \underbrace{1+1+1}_3, \underbrace{1+1+1+1}_4, x \times x \times x \times x + x \times x, \dots$$

^۴Finite intersection property(FIP)

تمرین ۶. نشان دهید که هر ترم در زبان حلقه‌ها متناظر با یک چند جمله‌ای است.

تعریف ۱۶. فرض کنید L یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. منظور از L -ساختار $\mathfrak{M}$ عبارتی به صورت زیر است.

$$\mathfrak{M} = \langle \underset{\substack{\downarrow \\ \text{جهان ساختار } \mathfrak{M}}}{M}, (Z^{\mathfrak{M}})_{Z \in L} \rangle$$

که در آن $Z^{\mathfrak{M}}$ برای هر $z \in L$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

۱. اگر $z \in C$ یک نماد ثابت در زبان باشد آنگاه $z^{\mathfrak{M}} = c^{\mathfrak{M}}$ یک عنصر در M است که به آن تعبیر ثابت C در ساختار $\mathfrak{M}$ گفته می‌شود.

۲. اگر $z = f(x_1, \dots, x_n) \in L$ آنگاه $z^{\mathfrak{M}} : M^n \rightarrow M$ یک تابع به صورت $f^{\mathfrak{M}} : M^n \rightarrow M$ است.

۳. اگر $z = R(x_1, \dots, x_n)$ یک نماد رابطه‌ای باشد آنگاه $z^{\mathfrak{M}} \subseteq \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_n$ یک رابطه روی $\mathfrak{M}$ است.

مثال ۱۷. فرض کنید $L = L_{ring}$ ، آنگاه $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}, 0^{\mathfrak{N}}, 1^{\mathfrak{N}} \rangle$ یک L -ساختار است. $1^{\mathfrak{N}} = 1$ و $0^{\mathfrak{N}} = 0$.

$$\begin{aligned} +^{\mathfrak{N}} : \mathbb{N}^2 &\rightarrow \mathbb{N} & \cdot^{\mathfrak{N}} : \mathbb{N}^2 &\rightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\mapsto x + y & (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

مثال ۱۸. فرض کنید $R(x, y)$ یک نماد رابطه‌ای باشد و $L = \{R(x, y)\}$. چند L -ساختار مثال بزنید. فرض کنید $\mathfrak{M} = \langle M, R^{\mathfrak{M}} \rangle$ در این صورت $R^{\mathfrak{M}}(x, y) \iff$ و تعریف کنید x, y را بشناسد. $M = \{\text{افرادی که در کلاس هستند}\}$ یک L -ساختار است. فرض کنید $M = \{a, b, c, d\}$ و تعریف کنید: x و y مجاور هستند $R^{\mathfrak{M}}(x, y) \iff$.

تعریف ۱۹. فرض کنید L یک زبان مرتبه‌ی اول و $\mathfrak{M}$ یک L -ساختار باشد. یک نگاشت $\underbrace{(x_i)_{i \in w}}_{\text{همه‌ی متغیرها}} \mapsto (a_i)_{i \in w}$ $a_i \in M$ بگیرید. فرض کنید $t(x_1, \dots, x_n)$ یک L -ترم باشد. عنصر $t^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) \in M$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A). \text{ اگر ترم } t \text{ یک متغیر } x_1 \text{ باشد، آنگاه } t^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) = a_1$$

$$(B). \text{ اگر } t^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_m^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) \text{ تعریف شده باشند آنگاه}$$

$$\left(f(t_1, \dots, t_m)(a_1, \dots, a_n) \right)^{\mathfrak{M}} = f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n), \dots, t_m^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n))$$

تعریف ۲۰. فرض کنید L یک زبان مرتبه‌ی اول باشد، مجموعه‌ی L -فرمول‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود.

(A). اگر $t_1(x_1, \dots, x_n)$ و $t_2(x_1, \dots, x_n)$ دو ترم باشند، عبارت $t_1(x_1, \dots, x_n) = t_2(x_1, \dots, x_n)$ یک L -فرمول است.

(B). اگر R یک نماد رابطه‌ای باشد و $t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_m(x_1, \dots, x_n)$ ترم باشند آنگاه $R(t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_m(x_1, \dots, x_n))$ یک فرمول است.

(C). اگر φ_1 و φ_2 فرمول باشند، آنگاه $\neg \varphi_1, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_1 \vee \varphi_2$ فرمول هستند.

(د). اگر $\varphi(x)$ یک فرمول باشد آنگاه $\forall x \varphi(x)$ و $\exists x \varphi(x)$ نیز فرمول هستند.

مثال ۲۱. عبارت $\forall y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \exists x y_0 + y_1 x + y_2 x^2 + \dots + y_5 x^5 = 0$ یک فرمول در زبان حلقه‌ها است.

توجه ۲۲. برخی فرمول‌ها دارای متغیر آزاد هستند. برای مثال در زبان حلقه‌ها فرمول $2x + 3y = 0$ دارای دو متغیر آزاد است. فرمول $\exists x 2x + 3y = 0$ دارای یک متغیر آزاد و یک متغیر پای‌بند است. فرمول $\exists x \exists y 2x + 3y = 0$ دارای هیچ متغیر آزادی نیست. به فرمولی که هیچ متغیر آزاد نداشته باشد، جمله گفته می‌شود.

توجه ۲۳. فرض کنید $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ یک L -فرمول باشد و همچنین فرض کنید $\mathcal{M} = (M, \dots)$ یک L -ساختار باشد و $a_1, \dots, a_n \in M$ اگر در جهان $\mathcal{M}$ فرمول $\varphi(a_1, \dots, a_n)$ درست باشد می‌نویسیم $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$.

مثال ۲۴. فرض کنید $\varphi : \exists x x + 1 = 1 + 1 + 1$ و $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$. در این صورت $\mathcal{N} \models \varphi$. همچنین اگر $\mathcal{N} \models \varphi(1)$ ، آنگاه $\varphi(y) : \exists x x + y = 2$.

۳ جلسه‌ی سوم، فراضرب ساختارها

نظریه‌ی مدل، دانش مطالعه‌ی ساختارهای مرتبه‌ی اول ریاضی است.

مثال ۲۵. فرض کنید $L = \{+\}$. آنگاه $(\mathbb{Z}, +)$ که $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ همچنین $(\mathbb{N}, +)$ ، $(\mathbb{R}, +)$ و $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, +)$ جهان ساختار

که $((x, y), (x', y')) = (x + x', y + y')$ مثال‌هایی از L ساختارها هستند. فرض کنید $L = \{\cdot\}$. آنگاه $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, \cdot)$ L -ساختار است. فرض کنید $L = \{\leq\}$. آنگاه $(\mathbb{R}, \leq)$ ، $(\mathbb{Q}, \leq)$ و $(\mathbb{N}, \leq)$ مثال‌هایی از L -ساختارها هستند. فرض کنید $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$. آنگاه $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ یک L -ساختار است.

مثال ۲۶. ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ را در نظر بگیرید. $t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) \cdot x_3$ یک ترم است.

مثال ۲۷. فرض کنید $L = \{+, 0\}$. یک جمله مانند φ مثال بزنید که $(\mathbb{Z}, +, 0) \models \varphi$.

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \models \forall x \exists y x + y = 0$$

یک جمله مانند φ مثال بزنید که $(\mathbb{Z}, +, 0) \not\models \varphi$.

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \not\models \exists x \exists y_1, y_2 (y_1 \neq y_2 \wedge x + y_1 = 0 \wedge x + y_2 = 0)$$

فرمول‌های با پارامتر:

$$(\mathbb{Z}, +, 0) \not\models \exists x x + x = 1$$

↓
پارامتر

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq) \models \forall a, b, c \left(\exists x \quad ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow (b^2 - 4ac \geq 0 \vee a, b, c = 0) \right)$$

تعریف ۲۸. فرض کنید $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$ (I نامتناهی است) خانواده‌ای از L -ساختارها باشد. فرض کنید $U \subseteq P(I)$ یک فرفیلتر روی I باشد. (هدف: تعریف L -ساختار $M = \Pi \mathfrak{M}_i / U$) مجموعه‌ی $\Pi \mathfrak{M}_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in M_i\}$ را در نظر بگیرید.

$$\Pi \mathfrak{M}_i = \{f : I \rightarrow \bigcup M_i\}$$

$$f(i) \in M_i$$

روی $\Pi \mathfrak{M}_i$ رابطه‌ی $(a_i)_{i \in I} \sim (b_i)_{i \in I} \iff \{i \in I \mid \mathfrak{M}_i \models a_i = b_i\} \in U$ را تعریف کنید. به بیان دیگر $(a_i)_{i \in I} \sim (b_i)_{i \in I}$ هرگاه تقریباً همه جا a_i با b_i برابر باشد. به عنوان تمرین نشان دهید که $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $\Pi \mathfrak{M}_i$ است. حال جهان L -ساختار مورد نظر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\Pi \mathfrak{M}_i / \sim = \{[a_i]_{i \in I} \mid a_i \in M_i\}$$

$$[a_i]_{i \in I} = [b_i]_{i \in I} \iff \{i \in I \mid \mathfrak{M}_i \models a_i = b_i\} \in U$$

تعبیر علائم زبانی

(آ). فرض کنید $f(x_1, \dots, x_n)$ یک نماد تابعی در L باشد. تعریف می‌کنیم:

$$f^{\mathbb{M}} : \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{M}$$

$$f^{\mathbb{M}}([a_i^1]_{i \in I}, \dots, [a_i^n]_{i \in I}) = [f^{\mathfrak{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)]$$

نشان می‌دهیم که $f^{\mathbb{M}}$ یک تابع است. باید ثابت کنیم که اگر $[a_i] = [b_i]$ ، آنگاه

$$[f^{\mathfrak{M}_i}(a_i)] = f^{\mathbb{M}}([a_i]) = f^{\mathbb{M}}([b_i]) = [f^{\mathfrak{M}_i}(b_i)]$$

چون $[a_i] = [b_i]$ پس $\{i \in I \mid \mathfrak{M}_i \models a_i = b_i\} \in U$. قرار دهید $w = \{i \in I \mid \mathfrak{M}_i \models a_i = b_i\}$. قرار دهید $w' = \{i \in I \mid \mathfrak{M}_i \models f^{\mathfrak{M}_i}(a_i) = f^{\mathfrak{M}_i}(b_i)\}$. باید ثابت کنیم که $w' \in U$. توجه شود که اگر $\mathfrak{M}_i \models a_i = b_i$ ، آنگاه $\mathfrak{M}_i \models f^{\mathfrak{M}_i}(a_i) = f^{\mathfrak{M}_i}(b_i)$. پس $w \subseteq w'$ و چون U فیلتر است پس $w' \in U$.

تمرین ۷. ثابت کنید که $\{i \in I \mid \mathfrak{M}_i \models f^{\mathfrak{M}_i}(a_i) = b_i\} \in U \iff f^{\mathbb{M}}([a_i]) = [b_i]$.

(ب). فرض کنید $R(x_1, \dots, x_n) \in L$ یک نماد رابطه‌ای باشد.

$$R^{\mathbb{M}}([a_i^1], \dots, [a_i^n]) \iff \{i \in I \mid \mathfrak{M}_i \models R^{\mathfrak{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n)\} \in U$$

(ج). فرض کنید $c \in L$ نمادی برای یک ثابت باشد آنگاه $c^{\mathbb{M}} = [c^{\mathfrak{M}_i}]$.

بنابراین $\mathbb{M} = (\Pi \mathfrak{M}_i / U, f^{\mathbb{M}}, R^{\mathbb{M}}, c^{\mathbb{M}})$ که $f, R, c \in L$ یک L -ساختار است.

۴ جلسه‌ی چهارم، اثبات قضیه‌ی واش

تعریف ۲۹. فرض کنید $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای از L -ساختارها باشد. همچنین فرض کنید که $U \subseteq P(I)$ یک فرافیلتر روی I باشد. L -ساختار $\mathbb{M} : \Pi \mathfrak{M}_i / U$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbb{M} \text{ جهان} = \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in \mathbb{M}_i\} = \Pi \mathfrak{M}_i$$

رابطه‌ی تساوی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(a_i)_{i \in I} = (b_i)_{i \in I} \iff \{i \in I \mid \mathfrak{M}_i \models a_i = b_i\} \in U$$

تمامی توابع، ثوابت و روابط زبان L در ساختار $\Pi \mathfrak{M}_i / U$ قابل تعبیر هستند.

$$f^{\mathbb{M}}([a_i]_{i \in I}, \dots, [a_i]_{i \in I}^n) = [b_i] \iff \{i \mid \mathfrak{M}_i \models f^{\mathfrak{M}_i}(a_i^1, \dots, a_i^n) = b_i\} \in U$$

به همین ترتیب روابط را تعبیر کردیم.

$$\text{لم ۳۰. } \mathbb{M} = \Pi \mathfrak{M}_i / U \models t([a_i]) = [b_i] \iff \{i \mid \mathfrak{M}_i \models t(a_i) = b_i\} \in U$$

اثبات. اگر t یک ثابت c باشد، آنگاه $t^{\mathbb{M}}([a_i]) = c^{\mathbb{M}} = [c^{\mathfrak{M}_i}]_{i \in I} = [b_i] \iff \{i \mid c^{\mathfrak{M}_i} = b_i\} \in U$ بررسی متغیرها به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. فرض کنید که $s = f(t)$ و حکم برای t برقرار است یعنی

$$\mathbb{M} \models t([a_i]) = [b_i] \iff \{i \mid \mathfrak{M}_i \models t(a_i) = b_i\} \in U$$

در این صورت

$$s^{\mathbb{M}}([a_i]) = f^{\mathbb{M}}(t^{\mathbb{M}}([a_i])) = f^{\mathbb{M}}([t^{\mathfrak{M}_i}(a_i)]) = [b_i] \iff \{i \mid \mathfrak{M}_i \models f^{\mathfrak{M}_i}(t^{\mathfrak{M}_i}(a_i)) = b_i\} \in U$$

□

قضیه ۳۱ (واش). فرض کنید $(\mathfrak{M}_i)_{i \in I}$ کلاسی از L -ساختارها باشد و U یک فرافیلتر روی I باشد. فرض کنید $\Pi \mathfrak{M}_i / U \models \varphi([a_i^1], \dots, [a_i^n]) \iff \{i \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi(a_i^1, \dots, a_i^n)\} \in U$ فرمول باشد آنگاه $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ یک L -فرمول باشد آنگاه

اثبات. قضیه‌ی را با استقراء روی ساخت فرمولها ثابت می‌کنیم. از لم قبل نتیجه می‌شود که حکم برای ترمهای به صورت $t_1 = t_2$ برقرار است یعنی

$$t_1^{\mathbb{M}}([a_i]) = t_2^{\mathbb{M}}([a_i]) \iff [t_1^{\mathfrak{M}_i}(a_i)] = [t_2^{\mathfrak{M}_i}(a_i)] \iff \{i \mid t_1^{\mathfrak{M}_i}(a_i) = t_2^{\mathfrak{M}_i}(a_i)\} \in U$$

فرض کنید که حکم برای فرمولهای φ_1 و φ_2 درست باشد. طبق تعریف داریم:

$$\mathbb{M} \models \varphi_1([a_i]) \wedge \varphi_2([a_i]) \iff \mathbb{M} \models \varphi_1([a_i]) \text{ و } \mathbb{M} \models \varphi_2([a_i])$$

پس

$$\{i \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi_1 \wedge \varphi_2([a_i])\} = \{i \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi_1([a_i]) \wedge \varphi_2([a_i])\} = \underbrace{\{i \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi_1([a_i])\}}_{\in U} \cap \underbrace{\{i \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi_2([a_i])\}}_{\in U}$$

فرض کنید که حکم برای فرمول φ درست باشد.

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \models \neg\varphi([a_i]) &\iff \mathbb{M} \not\models \varphi([a_i]) \\ &\iff \{i | \mathbb{M}_i \models \varphi(a_i)\} \notin U \\ &\iff \{i | \mathbb{M}_i \not\models \varphi(a_i)\} \in U \\ &\iff \{i | \mathbb{M}_i \models \neg\varphi(a_i)\} \in U \end{aligned}$$

در نهایت نشان می دهیم که اگر حکم برای φ درست باشد، برای $\exists x \varphi(x)$ نیز درست است. توجه شود که $\mathbb{M} \models \exists x \varphi(x)$ هرگاه عنصر $[b_i]$ موجود باشد که $\mathbb{M} \models ([b_i])$. بنا به فرض استقراء $\mathbb{M} \models \varphi([b_i])$ هرگاه $\{i | \mathbb{M}_i \models \varphi(b_i)\} \in U$. پس $\Rightarrow \mathbb{M}_i \models \exists x \varphi(x)$.
 $\square$ بنا به تعریف فیلتر مجموعه‌ی سمت چپ در U است.

تعریف ۳۲. دو L -ساختار $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ را هم‌ارز مقدماتی^۵ می‌خوانیم و می‌نویسیم $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ هرگاه برای هر L -جمله‌ی φ بدون پارامتر داشته باشیم: $\mathfrak{M} \models \varphi \iff \mathfrak{N} \models \varphi$.

مثال ۳۳. فرض کنید L زبان حلقه‌ها و p ثابت است. نشان می‌دهیم $(\mathbb{R}, +, \cdot, \bar{0}, \bar{1}) \not\equiv (\mathbb{F}_p, +, \cdot, \bar{0}, \bar{1})$. فرض کنید $\varphi = \forall x \underbrace{x + x + \dots + x}_{P \text{ بار}} = \bar{0}$. در این صورت $\mathbb{F}_p \models \varphi$ اما $\mathbb{R} \not\models \varphi$.

مثال ۳۴. فرض کنید $L = \{<\}$. نشان می‌دهیم $(\mathbb{Q}, <) \not\equiv (\mathbb{Z}, <)$. فرض کنید $\varphi = \forall x, y \exists z x < z < y$. در این صورت $(\mathbb{Q}, <) \models \varphi$ و $(\mathbb{Z}, <) \not\models \varphi$.

۵ جلسه‌ی پنجم، معادل بودن مقدماتی

مثال ۳۵. در زبان $L = \{+, \circ\}$ نشان دهید که $\mathbb{Z} \not\equiv \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

مشاهده: در $\mathbb{Z}$ هر عددی یا زوج است یا فرد یعنی $\mathbb{Z} \models \forall x \left(\exists y (y + y = x \vee x = y + y) \right)$ $\left(\begin{smallmatrix} + \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$
 پارامتر، مشکل دارد.

آیا فرمول $\varphi(x)$ بدون پارامتر در زبان L پیدا می‌شود به طوری که $(\mathbb{Z}, +, \circ) \models x = \bar{1} \leftrightarrow \varphi(x)$ که $\{ \bar{1} \} = \{ x | \varphi(x) \}$ در $\mathbb{Z}$ مجموع دو عدد فرد، زوج می‌شود. قرار می‌دهیم

$$\varphi = \forall x, y (\exists k x = k + k \wedge \exists k y = k + k \rightarrow \exists k x + y = k + k).$$

پس $\mathbb{Z} \models \varphi$ اما $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \not\models \varphi$ ؛ چون $(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ و $(\bar{1} + \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1}) + (\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{2})$.

مثال ۳۶. در زبان $L = \{+, \cdot, \circ, \bar{1}\}$ نشان می‌دهیم که $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, \circ, \bar{1}) \not\equiv \mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \circ, \bar{1})$. فرض کنید $\varphi = \exists x x^2 + \bar{1} = \bar{0}$ و $\mathcal{C} \models \varphi$ در این صورت $\mathcal{R} \not\models \varphi$.

تمرین ۸. آیا $(\mathbb{Z}_2, +, \circ) \equiv (\mathbb{Z}_3, +, \circ)$ ؟

^۵Elementary equivalent

تعریف ۳۷. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک L -ساختار باشد. تئوری کامل $\mathfrak{M}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\text{Th}(\mathfrak{M}) = \{\varphi \mid \mathfrak{M} \models \varphi \text{ و } \varphi \text{ یک جمله است}\}$$

توجه ۳۸. برای هر L -جمله φ یا $\varphi \in \text{Th}(\mathfrak{M})$ یا $\neg\varphi \in \text{Th}(\mathfrak{M})$

توجه ۳۹. اگر $\mathfrak{N}$ و $\mathfrak{M}$ هم‌ارز مقدماتی باشند، هر جمله‌ای که در $\mathfrak{M}$ درست باشد در $\mathfrak{N}$ هم درست است. یعنی برای $\varphi \in \text{Th}(\mathfrak{M})$ داریم $\mathfrak{N} \models \varphi$ یعنی $\text{Th}(\mathfrak{M}) = \text{Th}(\mathfrak{N})$ این گونه هم می‌نویسیم $(\mathfrak{M} \models \text{Th}(\mathfrak{N})) \Rightarrow \mathfrak{N} \models \text{Th}(\mathfrak{M})$

قضیه ۴۰. فرض کنید $\mathbb{K} = \{\mathfrak{M}_i \mid i \in I\}$ کلاسی از L -ساختارها باشد، تعریف کنید $\text{Th}(\mathbb{K}) = \bigcap_{i \in I} \text{Th}(\mathfrak{M}_i)$ به بیان دیگر $\varphi \in \text{Th}(\mathbb{K}) \iff \forall i \in I \mathfrak{M}_i \models \varphi$. آنگاه $\mathfrak{M} \models \text{Th}(\mathbb{K})$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M}$ با فرضیه‌ی از ساختارهای موجود در $\mathbb{K}$ هم‌ارز مقدماتی باشد؛ به بیان دیگر $\mathfrak{M} \models \text{Th}(\mathbb{K})$ اگر و تنها اگر یک فرافیلتر U روی I وجود داشته باشد به طوری که

$$\prod \mathfrak{M}_i / U \equiv \mathfrak{M}$$

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{M} \models \text{Th}(\mathbb{K})$. هدف، پیدا کردن فرافیلتر U است به طوری که $\mathfrak{M} \equiv \prod \mathfrak{M}_i / U$ قرار دهید

$$T = \text{Th}(\mathfrak{M}) = \{\varphi \mid \mathfrak{M} \models \varphi\}.$$

برای هر $\varphi \in T$ قرار دهید $X_\varphi = \{i \in I \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi\}$. قرار دهید $U = \{X \subseteq I \mid \exists \varphi \ X_\varphi \subseteq X\}$. ادعا می‌کنیم U یک فیلتر روی I است.

اثبات ادعا. اولاً $I \in U$. باید ثابت کنیم که $\exists \varphi \in T \ I \supseteq X_\varphi$. کافی است $\varphi \in \text{Th}(\mathbb{K})$ در نظر گرفته شود. ثانیاً $\emptyset \notin U$. باید ثابت کنیم که تهی شامل هیچ X_φ نیست. یعنی باید نشان دهیم هیچ X_φ تهی نیست. فرض کنید $\varphi \in T$. فرض کنید که φ در تمام $\mathfrak{M}_i$ ها غلط باشد. پس در تمام $\mathfrak{M}_i$ ها نقیض φ درست است $(\forall i \in I \mathfrak{M}_i \models \neg\varphi)$ پس $\neg\varphi \in \text{Th}(\mathbb{K})$ پس $\varphi, \neg\varphi \in T$. ثالثاً فرض کنید $X, Y \subseteq U$ آنگاه $\exists \varphi \in T \ X_\varphi \subseteq X$ و $\exists \psi \in T \ X_\psi \subseteq Y$ پس $X_{\varphi \wedge \psi} \subseteq X \cap Y$ چون $X_{\varphi \wedge \psi} = \{i \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi \wedge \psi\} = X_\varphi \cap X_\psi$ رابعاً فرض کنید $X \in U$ و $X \subseteq Y$. پس $\exists \varphi \ X_\varphi \subseteq X$ در نتیجه $X_\varphi \subseteq Y$. بنابراین U یک فیلتر روی I است. $\square$

U را به یک فرافیلتر به نام U گسترش دهید. ادعا می‌کنیم $\prod \mathfrak{M}_i / U \equiv \mathfrak{M}$.

اثبات ادعا. فرض کنید φ جمله‌ای باشد به طوری که $\mathfrak{M} \models \varphi$. بنابراین $\varphi \in T$. پس $X_\varphi \in U$. بنابراین (بنا به قضیه‌ی واش) $\prod \mathfrak{M}_i / U \models \varphi$. $\square$

تا اینجا ثابت کردیم که اگر $\mathbb{K} = (\mathfrak{M}_i)$ خانواده‌ای از L -ساختارها باشد آنگاه اگر $\mathfrak{M} \models \text{Th}(\mathbb{K})$ آنگاه $\mathfrak{M}$ هم‌ارز مقدماتی با یک فضا ضرب ساختارهای موجود در $\mathbb{K}$ است. حال به اثبات قسمت عکس قضیه می‌پردازیم. فرض کنید $\prod \mathfrak{M}_i / U \equiv \mathfrak{M}$. ادعا می‌کنیم که $\mathfrak{M} \models \text{Th}(\mathbb{K})$. $\forall \varphi \in \text{Th}(\mathbb{K})$ اگر $\varphi \in \text{Th}(\mathbb{K})$ آنگاه $\{i \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi\} = I \in U$ پس بنا به قضیه‌ی واش $\prod \mathfrak{M}_i / U \models \varphi$ پس $\mathfrak{M} \models \varphi$. $\square$

تعریف ۴۱. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. به هر مجموعه از $\mathcal{L}$ -جمله‌ها یک تئوری گفته می‌شود.

مثال ۴۲. فرض کنید $\mathcal{L} = \{+, \circ, 1\}$. آنگاه $T = \{\forall x \exists y x + y = 1, \neg(\forall x \exists y x + y = 1)\}$ یک تئوری است.

مثال ۴۳. فرض کنید $\mathcal{L} = \{\cdot, e\}$. تئوری گروه‌های آبدی به صورت زیر است.

$$T_{\text{group}} = \{\varphi x, y, z \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \forall x, y \ x \cdot y = y \cdot x, \forall x \exists y x \cdot y = e, \forall x \ x \cdot e = x\}$$

مثال ۴۴. فرض کنید $\mathcal{L} = \{<\}$. تئوری زیر را تئوری مجموعه‌های مرتب جزئی می‌نامند.

$$T = \{\forall x \neg(x < x), \forall x, y, z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)\}$$

مثال ۴۵. فرض کنید $\mathcal{L} = \{R(x)\}$. تئوری گراف‌های غیر جهت‌دار به صورت زیر است.

$$T = \{\forall x \neg R(x, x), \forall x, y \ R(x, y) \rightarrow R(y, x)\}$$

تعریف ۴۶. گروه $(G, +, \circ)$ را تاب‌دار می‌گوییم هرگاه برای هر عنصر $g \in G$ یک $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد که

$$\underbrace{g + g + \dots + g}_n = \circ$$

تمرین ۹. تئوری گروه‌های آبدی تاب‌دار را بنویسید.

۶ جلسه‌ی ششم، کلاس‌های مقدماتی

یادآوری ۴۷. اگر $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. منظور از یک $\mathcal{L}$ -تئوری مجموعه‌ای از $\mathcal{L}$ -جملات است.

سوال ۴۸. تئوری گروه‌های آبدی دارای تاب را بنویسید.

تلاش برای نوشتن یک تئوری برای گروه‌های تاب‌دار:

$$\cup \{\exists x \ x = \circ, \exists x \ x + x = \circ, \dots\}$$

توجه ۴۹. در فرمول‌های مرتبه‌ی اول سورهای $\forall x$ و $\exists x$ به معنی وجود داشتن و برای هر عنصری در جهان است.

تعریف ۵۰. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. کلاس $\mathbb{K}$ از $\mathcal{L}$ -ساختارها را مقدماتی^۶ می‌نامیم هرگاه یک $\mathcal{L}$ -تئوری T وجود داشته باشد به طوری که $\mathbb{K} = \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \models T\}$.

مثال ۵۱. کلاس گروه‌های آبدی را بنویسید.

مثال ۵۲. کلاس مجموعه‌های نامتناهی در زبان تهی به صورت زیر است.

$$T = \{\exists x_1, x_2 \ x_1 \neq x_2, \exists x_1, x_2, x_3 \ x_1 \neq x_2 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_3, \dots\}$$

توجه شود اگر $\mathfrak{M} \models T$ آنگاه برای هر $n, n \in \mathbb{N}$ عنصر متمایز در $\mathfrak{M}$ وجود دارد.

^۶Elementary

مثال ۵۳. تئوری گروه‌های آبلی بدون تاب را بنویسید.

$$\cup \{ \forall x (x \neq 0 \rightarrow x + x \neq 0), \forall x (x \neq 0 \rightarrow x + x + x \neq 0), \dots \}$$

$$\{ \forall x \underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ بار}} \neq 0 \}_{n \in \mathbb{N}}$$

مثال ۵۴. آیا کلاس مجموعه‌های متناهی، مقدماتی است؟

یادآوری ۵۵. فرض کنید $\mathbb{K} = \{\mathfrak{M}_i\}_{i \in I}$ کلاسی از $\mathcal{L}$ -ساختارها باشد. قرار دهید $T = \{\varphi \mid \forall \mathfrak{M} \in \mathbb{K} \mathfrak{M} \models \varphi\}$ ، آن‌گاه $\mathfrak{M} \models T$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M} \equiv \prod_U \mathfrak{M}_i$.

نتیجه ۵۶. کلاس $\mathbb{K}$ از $\mathcal{L}$ -ساختارها مقدماتی است. اگر و تنها تحت فراضرب‌ها و تحت معادل بودن مقدماتی بسته باشد.

اثبات. فرض کنید $\mathbb{K}$ یک کلاس مقدماتی به صورت $\mathbb{K} = \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \models T\}$ باشد. فرض کنید $\mathfrak{M} \in \mathbb{K}$. اگر $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ آن‌گاه $\mathfrak{N} \models T$ پس $\mathfrak{N} \in \mathbb{K}$. حال فرض کنید $\prod \mathfrak{M}_i / U$ فراضربی از ساختارهای موجود در $\mathbb{K}$ باشد. نشان می‌دهیم $\prod \mathfrak{M}_i / U \models T$. برای هر $\varphi \in T$ ادعا می‌کنیم که $\prod \mathfrak{M}_i / U \models \varphi$ ؛ برای هر $\varphi \in T$ داریم $\{i \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi\} = I \in U$ پس $(\text{بنا به واش}) \prod \mathfrak{M}_i / U \models \varphi$ ، بنابراین $\prod \mathfrak{M}_i / U \models T$.

برای اثبات عکس حکم فرض کنید کلاس $\mathbb{K}$ تحت معادل بودن مقدماتی و فراضرب‌ها بسته است. هدف پیدا کردن تئوری T است به طوری که $\mathbb{K} = \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \models T\}$. قرار دهید $T = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \mathbb{K}} \text{Th}(\mathfrak{M})$. ادعا می‌کنیم $\mathbb{K} = \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \models T\}$ ؛ اولاً اگر $\mathfrak{M} \in \mathbb{K}$ آن‌گاه $\mathfrak{M} \models T$ ، ثانیاً اگر $\mathfrak{M} \models T$ آن‌گاه بنا به قضیه قبل $\mathfrak{M} \equiv \prod \mathfrak{M}_i / U \in \mathbb{K}$ داریم. $\prod \mathfrak{M}_i / U \in \mathbb{K}$ (چون کلاس تحت فراضرب بسته است). پس $\mathfrak{M} \in \mathbb{K}$ چون تحت معادل بودن مقدماتی بسته است. $\square$

قضیه ۵۷. فرض کنید $\mathbb{K}$ کلاسی از $\mathcal{L}$ -ساختارهای متناهی باشد به طوری که برای هر عدد طبیعی n تعداد متناهی ساختار از اندازه n در کلاس $\mathbb{K}$ موجود باشد، آن‌گاه $\mathfrak{M}$ یک مدل نامتناهی برای $\text{Th}(\mathbb{K})$ است اگر و تنها اگر $\mathfrak{M}$ مدلی از تئوری زیر باشد:

$$T = \{\varphi \mid |\{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \models \neg \varphi\}|_{\text{متناهی}} \leq \infty\}$$

به بیان دیگر کلاس مدل‌های نامتناهی $\text{Th}(\mathbb{K})$ خود یک کلاس مقدماتی است.

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک مدل نامتناهی برای $\text{Th}(\mathbb{K})$ باشد. بنا به قضیه ۴۰ فرافیلتر U وجود دارد به طوری که

$$\mathfrak{M} \equiv \prod \mathfrak{M}_i / U.$$

نشان می‌دهیم $\mathfrak{M} \models T$. فرض کنید $\varphi \in T$. ادعا: $\mathfrak{M} \models \varphi$. برای اثبات ادعا کافی است نشان دهیم که

$$\{i \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi\} \in U.$$

در واقع باید نشان دهیم که فرافیلتر U شامل فرشه است. یادآوری شود که هر فرافیلتر غیر اصلی شامل فرشه است. فرافیلتر اصلی است هرگاه $a \in I$ وجود داشته باشد به طوری که $U = \{X \subseteq I \mid a \in X\}$. U غیر اصلی است اگر و تنها اگر

شامل هیچ مجموعه‌ی متناهی نباشد (تمرین). بنابراین باید نشان دهیم که فیلتر U اصلی نیست. اگر فیلتر U اصلی باشد آنگاه $\exists i \in I \{i\} \in U$. فرض کنید $|\mathcal{M}_i| = n$ و قرار دهید:

دقیقاً n عنصر وجود دارد $\varphi :=$

$$:= \exists x_1, \dots, x_n \bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i, j \in \{1, \dots, n\}}} x_i \neq x_j \wedge \bigvee_{i \in \{1, \dots, n\}} y = x_i$$

در این صورت $\{j \mid \mathcal{M}_j \models \varphi\} \supseteq \{i\} \in U$ پس $\{j \mid \mathcal{M}_j \models \varphi\} \in U$. در نتیجه جمله‌ی φ در $\mathcal{M}$ درست است و این نامتناهی بودن $\mathcal{M}$ را نقض می‌کند. برای اثبات عکس قرار دهید $\{\varphi\}$ تقریباً در همه‌ی مدل‌ها درست است $T = \{\varphi \mid \varphi \text{ تقریباً در همه مدل‌ها درست است}\}$. فرض کنید $\mathcal{M} \models \text{Th}(\mathbb{K})$ که نشان می‌دهیم $\mathcal{M} \models T$. بنابراین $\{i \mid \mathcal{M}_i \models \varphi\} = I$. پس $\mathcal{M} \models \varphi$ چون φ تنها در تعداد متناهی مدل غلط است. همچنین $\mathcal{M}$ نامتناهی است چون اگر قرار دهید $\varphi_n: \exists x_1, \dots, x_n \bigwedge_{i, j \in \{1, \dots, n\}} x_i \neq x_j$ آنگاه تمام φ_n ها در $\mathcal{M}$ درست هستند زیرا هر φ_n تنها در تعداد متناهی مدل غلط است. $\square$

۷ جلسه‌ی هفتم، فراضرب میدان‌های متناهی و قضیه‌ی فشرده‌گی

تمرین ۱۰. در زبان $\mathcal{L} = \{E\}$ تئوری یک رابطه‌ی هم‌ارزی را بنویسید که دارای نامتناهی کلاس نامتناهی باشد. بررسی کنید که این تئوری دارای چند مدل با اندازه $\aleph_0, \aleph_1$ و $\aleph_2$ است.

مثال ۵۸. تئوری میدان‌ها: $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1\}$

اصول میدان‌ها:

$$\begin{aligned} & \bullet \text{ مربوط به جمع } \left\{ \begin{array}{l} \forall x, y, z \ x + (y + z) = (x + y) + z \\ \forall x \ \exists y \ x + y = 0 \\ \forall x, y \ x + y = y + x \\ \forall x \ x + 0 = x \end{array} \right. \\ & \bullet \text{ مربوط به ضرب } \left\{ \begin{array}{l} \forall x, y, z \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \\ \forall x \neq 0 \ \exists y \ x \cdot y = 1 \\ \forall x, y \ x \cdot y = y \cdot x \\ \forall x \ x \cdot 1 = x \end{array} \right. \\ & \bullet \ 1 \neq 0 \\ & \bullet \ \forall x, y, z \ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \end{aligned}$$

بنابراین کلاس میدان‌ها یک کلاس مقدماتی است.

سوال ۵۹. آیا کلاس میدان‌های متناهی نیز مقدماتی است؟

جبر میدان‌های متناهی

اگر F یک میدان متناهی باشد آنگاه مشخصه‌ی F متناهی است $(\exists n \ \forall x \in F \ \underbrace{x + \dots + x}_n = 0)$.

همچنین مشخصه‌ی یک میدان همواره یک عدد اول است. (اثبات کنید) پس اگر F یک میدان متناهی باشد آن‌گاه مشخصه‌ی F یک عدد اول p است. فرض کنید F یک میدان متناهی باشد. نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow F$$

$$n_{>0} \mapsto \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ بار}}$$

در این صورت $\ker(f) = p\mathbb{Z}$. پس $F \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p$. بنابراین هر میدان متناهی از مشخصه‌ی p شامل $\mathbb{Z}_p$ است. تا اینجا گفتیم که $\mathbb{Z}_p \subseteq F$. پس F را می‌توان به عنوان یک فضای برداری روی $\mathbb{Z}_p$ در نظر گرفت (یعنی $ax + by$ که $a, b \in \mathbb{Z}_p$ و $x, y \in F$). از آنجا که F یک میدان متناهی است. بُعد F به عنوان یک فضای برداری روی $\mathbb{Z}_p$ متناهی است. فرض کنید $\{x_1, \dots, x_n\}$ مولدهای F روی $\mathbb{Z}_p$ باشند. پس هر عنصری در F به صورت مجموعی به صورت زیر است:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \quad a_i \in \mathbb{Z}_p$$

بنابراین (به عنوان فضای برداری) $F \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p$. بنابراین اگر F یک میدان متناهی باشد و مشخصه‌ی F برابر با p باشد آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $|F| = p^n$ (هر میدان متناهی دارای p^n عضو است).

سوال ۶۰. آیا برای هر p اول و هر n ، یک میدان متناهی p^n عضوی موجود است؟

میدان $\mathbb{Z}_p$ و چندجمله‌ای $f(x) = x^{p^n} - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ را در نظر بگیرید. این چندجمله‌ای در بستار جبری $\mathbb{Z}_p$ تمام ریشه‌های خود را دارد. توجه کنید که ریشه‌های این چندجمله‌ای، p^n تا متمایز هستند. زیرا $f'(x) = p^n x^{p^n-1} - 1 \neq 0$. قرار دهید {مجموعه‌ی ریشه‌های چندجمله‌ای f } $R = \{f\}$ به عنوان تمرین نشان دهید که R یک میدان است. باید ثابت کنید که $(x+y)^p = x^p + y^p$ و $\forall x, y \in R (x \cdot y^{-1})^{p^n} = x \cdot y^{-1}$ ابتدا نشان دهید که $(x+y)^p = x^p + y^p$ و به استقرا ثابت کنید $(x+y)^{p^n} = x^{p^n} + y^{p^n}$. بنابراین $\mathbb{Z}_p \subseteq R$ یک میدان است که دارای p^n عضو است. (میدان شکافنده‌ی چندجمله‌ای $x^{p^n} - x$ روی $\mathbb{Z}_p[x]$ در واقع برای هر p^n تنها یک میدان با اندازه‌ی p^n موجود است. میدان متناهی p^n عضوی را با $\mathbb{F}_{p^n}$ نشان می‌دهیم.

سوال ۶۱. آیا کلاس میدان‌های متناهی، مقدماتی است؟ آیا این کلاس تحت فضا ضرب‌ها بسته است؟

سوال ۶۲. فرض کنید که U یک فرافیلتر غیر اصلی روی p^n ها باشد و $\prod \mathbb{F}_{p^n}/U = \mathfrak{M}$ آیا $\mathfrak{M}$ متناهی است.

قرار دهید $\varphi_n: \exists x_1, \dots, x_n \bigwedge_{i,j \in \{1, \dots, n\}} x_i \neq x_j$ در اینصورت برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $\mathfrak{M} \models \varphi_n$. چون $\{F \mid F \models \varphi_n\}$ متناهی است و فیلتر U غیر اصلی است. توجه شود که $\mathfrak{M}$ دارای ویژگی‌های زیر است.

۱. اگر جمله‌ی φ در تمام میدان‌های متناهی درست باشد، $\mathfrak{M} \models \varphi$.

۲. $\mathfrak{M}$ میدان است.

۳. $\mathfrak{M}$ نامتناهی است.

در جبر مفهومی به نام میدان‌های شبه متناهی وجود دارد. میدان‌های شبه متناهی هم‌ارز مقدماتی فضا ضرب‌هایی از میدان‌های متناهی است.

قضیه ۶۳ (فشردگی). فرض کنید T یک مجموعه از جملات مرتبه‌ی اول (در زبان $\mathcal{L}$) باشد. فرض کنید برای هر $\Delta \subseteq T$ متناهی یک مدل $\mathfrak{M}_\Delta \models \Delta$ وجود داشته باشد آنگاه یک $\mathcal{L}$ -ساختار $\mathfrak{M}$ موجود است به طوری که $\mathfrak{M} \models T$.

اثبات. قرار دهید $I = \{\Delta \mid \Delta \subseteq T\}$ متناهی. برای هر $\varphi \in T$ قرار دهید $X_\varphi = \{\Delta \in I \mid \varphi \in \Delta\}$. همچنین قرار دهید $D = \{X \subseteq I \mid \exists \varphi X_\varphi \subseteq X\}$. توجه شود که D روی I لزوماً فیلتر نیست. ادعا می‌کنیم D دارای ویژگی اشتراک متناهی است. یعنی برای هر $X_1, \dots, X_n \in D$ داریم $X_1 \cap \dots \cap X_n \neq \emptyset$.

$$(X_1, X_2 \in D \Rightarrow X_1 \supseteq X_\varphi, X_2 \supseteq X_\psi \Rightarrow X_1 \cap X_2 \neq \emptyset \quad (\{\varphi, \psi\} \subseteq X_1 \cap X_2))$$

پس یک فرافیلتر $U \supseteq D$ وجود دارد. نشان می‌دهیم که $\mathfrak{M} = \prod \mathfrak{M}_\Delta / U \models T$. فرض کنید $\varphi \in T$. ادعا می‌کنیم $\mathfrak{M} \models \varphi$. بنا به واث در صورتی $\mathfrak{M} \models \varphi$ که $\{\Delta \mid \mathfrak{M}_\Delta \models \varphi\} \in U$ داریم $\{\Delta \mid \varphi \in \Delta\} \subseteq \{\Delta \mid \mathfrak{M}_\Delta \models \varphi\} \in U$. $\square$

۸ جلسه‌ی هشتم، چند کاربرد از قضیه‌ی فشردگی

نتیجه ۶۴. فرض کنید T یک تئوری باشد که دارای مدل‌های متناهی به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد. آنگاه برای هر کاردینال نامتناهی κ ، T دارای مدلی با اندازه‌ی حداقل κ است.

اثبات. زبان $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_\lambda \mid \lambda < \kappa\}$ را در نظر بگیرید. $\mathcal{L}'$ -تئوری T' را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$T' = T \cup \{c_\lambda \neq c_{\lambda'} \mid \lambda, \lambda' < \kappa\}$$

توجه کنید که اگر تئوری T' دارای مدل باشد، یعنی مثلاً $\mathfrak{M}' \models T'$ ، آنگاه اولاً $\mathfrak{M}' \models T$. ثانیاً برای هر $\lambda, \lambda' < \kappa$ ، $c_\lambda \neq c_{\lambda'}$. بنابراین $|\mathfrak{M}'|$ حداقل κ است. بنابراین نشان می‌دهیم T' دارای مدل است. بنا به فشردگی کافی است نشان دهیم که هر بخش متناهی از T' دارای مدل است. فرض کنید Δ یک زیرمجموعه‌ی متناهی دلخواه از T' باشد. هدف پیدا کردن یک مدل برای Δ است. توجه کنید که Δ شامل یک زیرمجموعه‌ی متناهی از T و یک تعداد متناهی جمله به صورت $c_\lambda \neq c_{\lambda'}$ است، فرض کنید Δ'' مجموعه‌ی این تعداد متناهی جمله باشد. ادعا می‌کنیم که $\Delta'' \cup T$ دارای مدل است. فرض کنید Δ'' وجود n عنصر متمایز $(c_i)_{i=1, \dots, n}$ را بیان کند. فرض کنید $\mathcal{L}$ -ساختار $\mathfrak{M}$ یک مدل از T با اندازه بیشتر از n باشد. از آنجا که $\mathfrak{M}$ دارای حداقل n عنصر (m_i) است. برای تبدیل $\mathfrak{M}$ به یک $\mathcal{L}'$ -ساختار کافی است تعبیر کنیم $c_i^{\mathfrak{M}} = m_i$. حال $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}'$ -ساختار است و $\mathfrak{M} \models \Delta'' \cup T$. $\square$

قضیه ۶۵ (لونهایم-اسکولم افزایشی). فرض کنید $\mathcal{L}$ -شمارا تئوری T دارای یک مدل نامتناهی باشد. آنگاه برای هر $\kappa \geq |\mathcal{L}|$ ، T دارای یک مدل از سایز دقیقاً κ است.

توجه ۶۶. در اثبات‌های فشردگی سایز مدل به دست آمده دقیقاً برابر با سایز زبان است (با استفاده از مفهوم فیلتر منظم می‌توان سایز مدل را به صورت افزایشی کنترل کرد).

قضیه ۶۷ (لونهایم-اسکولم افزایشی دقیق). فرض کنید برای $\mathcal{L}$ -شمارا تئوری T ، $\mathfrak{M} \models T$ و $|\mathfrak{M}| = \kappa \geq |\mathcal{L}|$. آنگاه برای هر $\kappa' > \kappa$ یک مدل $\mathfrak{M}' \models T$ ($|\mathfrak{M}'| = \kappa'$) وجود دارد به طوری که برای هر $\mathcal{L}$ -فرمول $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ داشته باشیم: $\forall m_1, \dots, m_n \in \mathfrak{M} \quad \mathfrak{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_n) \iff \mathfrak{M}' \models \varphi(m_1, \dots, m_n)$.

قضیه ۶۸ (لونهایم-اسکولم کاهشی). فرض کنید $\mathcal{M} \models T$ و $|\mathcal{M}| = \kappa > |\mathcal{L}|$ و فرض کنید $\kappa' < \kappa$. $|\mathcal{L}| \leq \kappa'$. آنگاه $\mathcal{M}' \models T$ موجود است به طوری که $|\mathcal{M}'| = \kappa'$ و برای هر $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}'$ و هر فرمول φ داریم:

$$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathcal{M}' \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

تمرین ۱۱. نشان دهید کلاس مجموعه‌های متناهی مقدماتی نیست. آیا کلاس گراف‌های هم‌بند مقدماتی است؟

تعریف ۶۹. تئوری T دارای اصل‌بندی متناهی است هرگاه تئوری متناهی T' موجود باشد به طوری که برای هر $\mathcal{L}$ - ساختار $\mathcal{M}$ داشته باشیم: $\mathcal{M} \models T' \iff \mathcal{M} \models T$.

قضیه ۷۰. تئوری T دارای اصل‌بندی متناهی است اگر و تنها اگر $\mathbb{K}$ (کلاس مدل‌های T) و $\mathbb{K}^c$ هر دو مقدماتی باشند.

اثبات. فرض کنید $\mathbb{K}$ و $\mathbb{K}^c$ هر دو مقدماتی باشند. یعنی فرض کنید $\mathbb{K} = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models T\}$ و $\mathbb{K}^c = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models T'\}$ توجه کنید که $T \cup T'$ دارای هیچ مدلی نیست. بنابراین یک زیرمجموعه‌ی متناهی $\Delta \cup \Delta' \subseteq T \cup T'$ موجود است که دارای مدل نیست. ثابت کنید $\{\mathcal{M} \mid \forall \varphi \in \Delta' \mathcal{M} \models \neg \varphi\}$ و $\{\mathcal{M} \mid \forall \varphi \in \Delta \mathcal{M} \models \varphi\}$. (بقیه اثبات به عهده‌ی خواننده). $\square$

مثال ۷۱. آیا کلاس مجموعه‌های نامتناهی دارای اصل‌بندی متناهی است؟ خیر، زیرا مکمل آن دارای اصل‌بندی نیست.

قضیه ۷۲. یک ساختار $\mathcal{M}'$ موجود است به طوری که $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ و $\mathcal{M}'$ دارای اعداد طبیعی ناستاندارد است.

$$\exists x \in \mathcal{M}' \forall n \in \mathbb{N} x > n$$

اثبات. قرار دهید $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ و $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ و $T' = \text{Th}(\mathcal{M}) \cup \{c > 1, c > 1 + 1, c > 1 + 1 + 1, \dots\}$. نشان دهید که هر بخش متناهی از T' دارای مدل است. پس T' دارای مدل است. $\square$

به طور مشابه مدل‌های ناستانداردی برای $\mathcal{R} = \text{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, \circ, 1)$ وجود دارند.

فراخوان

فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ساختار مرتبه‌ی اول، U یک فرافیلتر روی اعداد طبیعی باشد و برای هر $i \in \mathbb{N}$ ، $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}$ ، آنگاه $\prod \mathcal{M}_i / U$ یک فراخوان از $\mathcal{M}$ می‌نامیم. نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$d : \mathcal{M} \rightarrow \prod \mathcal{M}_i / U$$

$$m \mapsto [m_i]_{i \in \mathbb{N}} \quad \forall i \in \mathbb{N} \ m_i = m$$

نگاشت d یک نگاشت مقدماتی است. یعنی برای هر فرمول φ و هر $m \in \mathcal{M}$ داریم

$$\mathcal{M} \models \varphi(m) \iff \prod \mathcal{M}_i / U \models \varphi(d(m))$$

به عنوان تمرین نشان دهید که نگاشت d پوشاست اگر و تنها اگر $\mathcal{M}$ متناهی باشد.

مدل ناستاندارد حساب: فرض کنید $\mathcal{N}_i = \mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, \circ, 1)$. پس $\prod \mathcal{N}_i / U \models \text{Th}(\mathcal{N})$.

فرض کنید $x = [0, 1, 2, \dots] \in \prod \mathcal{N}_i / U$ در این صورت $\{i \mid x_i > 1\} \in U$ $\iff (x_i) = x > [1]$
 متعم متناهی

۹ جلسه‌ی نهم، تئوری‌های مرتبه‌ی اول

یک $\mathcal{L}$ -تئوری مرتبه‌ی اول مجموعه‌ای از جملات مرتبه‌ی اول در زبان $\mathcal{L}$ است.

لم ۷۳. کلاس $\mathbb{K}$ از $\mathcal{L}$ -ساختارها دارای یک اصل‌بندی متناهی است (یعنی یک تئوری متناهی T موجود است به طوری‌که $\mathbb{K} = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models T\}$) اگر و تنها $\mathbb{K}$ و $\mathbb{K}^c$ کلاس‌هایی مقدماتی باشند.

اثبات. فرض کنید $\mathbb{K}$ و $\mathbb{K}^c$ کلاس‌هایی مقدماتی باشند. بنابراین تئوری‌های T و T' موجودند به طوری‌که

$$\mathbb{K} = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models T\} \quad \text{و} \quad \mathbb{K}^c = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models T'\}.$$

تئوری $T \cup T'$ را در نظر بگیرید. این تئوری دارای مدل نیست. بنابراین مجموعه‌های متناهی $\Delta \subseteq T$ و $\Delta' \subseteq T'$ موجودند به طوری‌که $\Delta \cup \Delta'$ دارای مدل نیست. فرض کنید $\Delta = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ و $\Delta' = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ قرار دهید $\mathbb{A} = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models \{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi_1 \vee \dots \vee \neg\psi_n\}\}$. نشان می‌دهیم $\mathbb{K} = \mathbb{A}$. اگر $\mathcal{M} \in \mathbb{K}$ ، آنگاه $\mathcal{M} \models T$ پس $\mathcal{M} \models \varphi_i$ و $\mathcal{M} \models \neg\psi_1 \vee \dots \vee \neg\psi_n$ (زیرا در غیر این صورت $\mathcal{M} \models \Delta \cup \Delta'$). حال اگر $\mathcal{M} \in \mathbb{A}$ ، آنگاه $\mathcal{M} \models \Delta$. اگر $\mathcal{M} \notin \mathbb{K}$ آنگاه $\mathcal{M} \in \mathbb{K}^c$ بنابراین $\mathcal{M} \models T'$ پس $\mathcal{M} \models \psi_i$. $\square$

توجه ۷۴. تئوری میدان‌های با مشخصه صفر دارای اصل‌بندی است.

$$T = \text{تئوری میدان‌ها} \cup \{1 + 1 \neq 0, 1 + 1 + 1 \neq 0, \dots\}$$

سوال ۷۵. آیا می‌توان یک تئوری متناهی T' نوشت به طوری‌که T' دقیقاً کلاس میدان‌های با مشخصه صفر را بدهد؟

این کار امکان‌پذیر نیست. اگر کلاس میدان‌های با مشخصه صفر دارای اصل‌بندی متناهی باشد، آنگاه متمم این کلاس نیز دارای اصل‌بندی خواهد بود. بنابراین کلاس میدان‌های با مشخصه صفر دارای اصل‌بندی است. اگر کلاس میدان‌های با مشخصه صفر دارای اصل‌بندی T باشد، آنگاه تئوری زیر سازگار است.

$$T_1 = T \cup \{1 + 1 \neq 0, 1 + 1 + 1 \neq 0, \dots\}$$

هر بخش متناهی از T_1 سازگار است. پس T_1 سازگار است. اگر $\mathcal{M} \models T_1$ ، آنگاه مشخصه $\mathcal{M}$ صفر است.

تعریف ۷۶. دو تئوری T و T' را معادل می‌نامیم و می‌نویسیم $T \equiv T'$ هرگاه کلاس مدل‌های T دقیقاً همان کلاس مدل‌های T' باشد.

تعریف ۷۷. فرض کنید φ یک $\mathcal{L}$ -جمله و T یک $\mathcal{L}$ -تئوری باشد. می‌نویسیم $T \models \varphi$ هرگاه برای هر $\mathcal{L}$ -ساختار $\mathcal{M}$ اگر $\mathcal{M} \models T$ آنگاه $\mathcal{M} \models \varphi$.

لم ۷۸. $T \models \varphi$ اگر و تنها اگر $T \cup \{\neg\varphi\}$ دارای مدل نباشد.

لم ۷۹. $T \models \varphi$ اگر و تنها اگر یک مجموعه‌ی متناهی $\Delta \subseteq T$ موجود باشد به طوری‌که $\Delta \models \varphi$.

اثبات. اگر $T \models \varphi$ آنگاه $T \cup \{\neg\varphi\}$ مدل ندارد. آنگاه $\Delta \subseteq T$ موجود است به طوری‌که $\Delta \models \varphi$ (واضح است). $\square$ از طرف دیگر اگر $\Delta \subseteq T$ به طوری‌که $\Delta \models \varphi$ (واضح است) $T \models \varphi$.

توجه ۸۰. اگر $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساختار باشد و φ یک $\mathcal{L}$ -جمله باشد آنگاه $\mathcal{M} \models \varphi$ یا $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.

سوال ۸۱. فرض کنید T یک تئوری باشد و φ یک $\mathcal{L}$ -جمله باشد. آیا لزوماً $T \models \varphi$ یا $T \models \neg\varphi$ ؟

خیر زیرا ممکن است که هم $T \cup \{\varphi\}$ و هم $T \cup \{\neg\varphi\}$ هر دو دارای مدل باشند.

توجه ۸۲. فرض کنید T یک $\mathcal{L}$ -تئوری باشد و $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ آنگاه T را می‌توان $\mathcal{L}'$ -تئوری نیز دانست.

لم ۸۳. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه‌ی اول باشد و $c \notin \mathcal{L}$. آنگاه اگر $T \models \varphi(c)$ ، آنگاه $T \models \forall x \varphi(x)$.

اثبات. فرض کنید $T \models \varphi(c)$ و $T \models \varphi(c)$ (برای $\mathcal{L}$ -ساختار $\mathcal{M}$). ادعا می‌کنیم $\mathcal{M} \models \forall x \varphi(x)$. برای این منظور فرض کنید $m \in \mathcal{M}$ دلخواه باشد. باید نشان دهیم که $\mathcal{M} \models \varphi(m)$. $\mathcal{M} \models \varphi(m)$ را به عنوان یک $\mathcal{L} \cup \{c\}$ -ساختار در نظر بگیرید که $c^{\mathcal{M}} = m$. حال $\mathcal{M}$ یک مدل برای تئوری T در زبان $\mathcal{L} \cup \{c\}$ است. از این‌که $T \models \varphi(c)$ نتیجه می‌شود که $\mathcal{M} \models \varphi(c^{\mathcal{M}})$. پس $\mathcal{M} \models \varphi(m)$. $\square$

تعریف ۸۴. فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو $\mathcal{L}$ -ساختار باشند. می‌گوییم $\mathcal{M}$ یک زیرساختار از $\mathcal{N}$ است و می‌نویسیم $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ هرگاه

$$1. \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \text{ زیرمجموعه}$$

$$2. \text{ برای هر ثابت } c \in \mathcal{L}, c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}.$$

$$3. \text{ برای هر تابع } f \in \mathcal{L} \text{ اگر } m_1, \dots, m_k \in \mathcal{M}, \text{ آنگاه } f^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_k) = f^{\mathcal{N}}(m_1, \dots, m_k).$$

$$4. \text{ برای هر رابطه‌ی } R \in \mathcal{L} \text{ و } m_1, \dots, m_k \in \mathcal{M}, R^{\mathcal{M}}(m_1, \dots, m_k) \Leftrightarrow R^{\mathcal{N}}(m_1, \dots, m_k).$$

تمرین ۱۲. فرض کنید $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. نشان دهید که برای هر فرمول بدون سور $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ و هر $m_1, \dots, m_k \in \mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_k) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(m_1, \dots, m_k)$$

مثال ۸۵. شرط بدون سور بودن تمرین قبل الزامی است. برای مثال $(\mathbb{Z}, <) \subseteq (\mathbb{Q}, <)$ ، $\mathbb{Q} \models \exists x x > 1 \wedge x < 2$ اما $\mathbb{Z} \not\models \exists x x > 1 \wedge x < 2$.

تعریف ۸۶. تئوری T را دارای اصل‌بندی عمومی می‌نامیم. هرگاه یک تئوری T' موجود باشد به طوری که همه‌ی جملات موجود در T' به صورت $\forall x_1, \dots, x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ باشند و $T \equiv T'$.

۱۰ جلسه‌ی دهم، اصل‌بندی عمومی

گوییم تئوری T دارای اصل‌بندی عمومی است، هرگاه یک تئوری T' موجود باشد که همه‌ی جملات به‌کار رفته در T' فقط با سور عمومی نوشته شده باشند و $T' \equiv T$ (یعنی برای هر $\mathcal{L}$ -ساختار $\mathcal{M}$ ، $\mathcal{M} \models T' \Leftrightarrow \mathcal{M} \models T$).

– اصل‌بندی یک کلاس $\mathbb{K}$ از $\mathcal{L}$ -ساختارها یعنی پیدا کردن یک تئوری T به طوری که $\mathbb{K} = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models T\}$.

توجه ۸۷. اگر $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساختار باشد، آنگاه $\mathcal{M}$ مدلی برای تئوری $\{\varphi \mid \text{جمله است } \varphi, \mathcal{M} \models \varphi\}$ است. $\text{Th}(\mathcal{M})$ است.

مثال ۸۸. تئوری ترتیب‌های خطی چگال که با ${}^v\text{DLO}$ نشان داده می‌شود، در زبان $\mathcal{L} = \{<\}$ دارای اصل‌بندی زیر است.

$$\forall x \quad \neg(x < x)$$

$$\forall x, y \quad x < y \vee y < x \vee x = y$$

$$\forall x, y, z \quad x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$$

$$\forall x, y \quad x < y \rightarrow \exists z \quad x < z < y$$

توجه شود که $(\mathbb{Z}, <) \models \text{DLO}$ اما $(\mathbb{Z}, <) \not\models {}^v\text{DLO}$

قضیه ۸۹. تئوری T دارای اصل‌بندی عمومی است، یعنی دارای یک اصل‌بندی با جملات به صورت $\forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$ است اگر و تنها اگر کلاس مدل‌های این تئوری، تحت زیرساختارها بسته باشد؛ یعنی هرگاه $\mathfrak{N} \models T$ و $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ زیرساختار $\mathfrak{M} \models T$ آن‌گاه $\mathfrak{M} \models T$.

اثبات. فرض کنید T دارای یک اصل‌بندی عمومی باشد، $\mathfrak{N} \models T$ و $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. نشان می‌دهیم که $\mathfrak{M} \models T$. فرض کنید $\forall \bar{x} \varphi(\bar{x}) \in T$ که $\varphi(\bar{x})$ یک فرمول بدون سور است. چون $\mathfrak{N} \models \forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$ پس برای هر $\bar{n} \in \mathfrak{N}$ ، $\mathfrak{N} \models \varphi(\bar{n})$. حال فرض کنید $\bar{m} \in \mathfrak{M}$. داریم $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{m})$ و φ بدون سور است پس $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$. توجه شود که اگر $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ ، آن‌گاه برای هر فرمول بدون سور $\varphi(\bar{x})$ و هر $\bar{m} \in \mathfrak{M}$ داریم: $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{m})$. برای اثبات جهت دیگر فرض کنید که کلاس مدل‌های تئوری T تحت زیرساختارها بسته باشد. نشان می‌دهیم که یک تئوری $T \equiv T'$ موجود است به طوری که تمام جملات T' تنها با سور عمومی نوشته شده‌اند. قرار دهید:

$$T' = \{T \models \varphi \text{ به صورت عمومی که } \varphi \text{ تمام جملات } \varphi \text{ به صورت عمومی که } \varphi\}$$

فرض کنید $\mathfrak{M} \models T'$ ادعا می‌کنیم که $\mathfrak{M} \models T$. مجموعه $\text{Diag}(\mathfrak{M}) \cup T$ را در زبان $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}} = \mathcal{L} \cup \{c_m \mid c \in \mathfrak{M}\}$ در نظر بگیرید. ادعای اول: $\text{Diag}(\mathfrak{M}) \cup T$ یک تئوری دارای مدل است. ادعای دوم: از ادعای اول حکم قضیه نتیجه می‌شود.

اثبات ادعای دوم. اگر $\mathfrak{N} \models \text{Diag}(\mathfrak{M}) \cup T$ آن‌گاه $\mathfrak{N} \models T$ و $\mathfrak{N} \models \text{Diag}(\mathfrak{M})$. (توجه شود که اگر $\mathfrak{N} \models \text{Diag}(\mathfrak{M})$ ، آن‌گاه تابع $f: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ را می‌توان طوری تعریف کرد که $f(m) = c_m^{\mathfrak{N}}$. بنابراین $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \models T$ پس بنا به این‌که کلاس مدل‌های T تحت زیرساختاری‌گیری بسته است نتیجه می‌گیریم که $\mathfrak{M} \models T$. □

اثبات ادعای اول. $\text{Diag}(\mathfrak{M}) \cup T$ یک تئوری در زبان $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$ است. بنا به قضیه‌ی فشردگی برای اثبات این‌که تئوری فوق دارای مدل است کافی است اثبات کنیم که هر بخش متناهی از آن دارای مدل است. فرض کنید $\Delta \subseteq \text{Diag}(\mathfrak{M}) \cup T$ متناهی دارای مدل نباشد. بنابراین جمله‌ی $\varphi(\bar{m}) \in \text{Diag}(\mathfrak{M}) \cup T$ یافت می‌شود به طوری که $\{\varphi(\bar{m})\} \cup T$ دارای مدل نیست. یعنی اگر $\mathfrak{M} \models \neg \varphi(\bar{m})$ آن‌گاه $\mathfrak{M} \models \neg \varphi(\bar{m})$. پس $\mathfrak{M} \models \neg \varphi(\bar{m})$. بنابراین در زبان $\mathcal{L}$ ، $T \models \forall x \neg \varphi(\bar{x})$. یعنی $T \models \forall x \neg \varphi(\bar{x})$ و این غیر ممکن نتیجه‌ی عمومی از تئوری T است. یعنی $\forall x \neg \varphi(\bar{x}) \in T'$. از طرفی $\mathfrak{M} \models T'$ پس $\mathfrak{M} \models \forall x \neg \varphi(\bar{x})$ و این غیر ممکن است زیرا $\varphi(\bar{m}) \in \text{Diag}(\mathfrak{M})$. □

□

^vDense linear order

مثال ۹۰. چون $(\mathbb{R}, +, \cdot, \circ, 1) \subseteq (\mathbb{C}, +, \cdot, \circ, 1) \models \text{Th}(\mathbb{C}, +, \cdot, \circ, 1)$ و $\mathbb{C} \models \exists x \quad x^2 + 1 = 0$ و $\mathbb{R} \not\models \exists x \quad x^2 + 1 = 0$ بنابراین برای $\text{Th}(\mathbb{C})$ یک اصل‌بندی عمومی وجود ندارد.

تمرین ۱۳. فرض کنید $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in I}$ یک زنجیر از $\mathcal{L}$ -ساختارها باشد و $i < j \Rightarrow \mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}_j$. در این صورت $\bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ را می‌توان تبدیل به یک $\mathcal{L}$ -ساختار کرد به طوری که $\mathcal{M}_i \subseteq \bigcup \mathcal{M}_i$.

تعریف ۹۱. فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو $\mathcal{L}$ -ساختار باشند به طوری که $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. می‌گوییم $\mathcal{M}$ یک زیرساختار مقدماتی از $\mathcal{N}$ است و می‌نویسیم $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ هرگاه برای هر $\mathcal{L}$ -فرمول $\varphi(\bar{x})$ و هر چندتایی $\bar{a} \in \mathcal{M}$ داشته باشیم:

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$$

مثال ۹۲. نشان می‌دهیم که $(\mathbb{Z}, <) \not\models (\mathbb{Q}, <)$. توجه شود که $(\mathbb{Z}, <) \subseteq (\mathbb{Q}, <)$ اما $\mathbb{Q} \models \exists x \quad 2 < x < 3$ و $\mathbb{Z} \not\models \exists x \quad 2 < x < 3$.

تمرین ۱۴. فرض کنید $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ یک زنجیر مقدماتی از $\mathcal{L}$ -ساختارها باشد $(i < j \Rightarrow \mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}_j)$. آنگاه $\mathcal{M}_i \prec \bigcup \mathcal{M}_i$.

۱۱ جلسه‌ی یازدهم، اصل‌پذیری به صورت وجودی و عمومی

قضیه ۹۳. تئوری T دارای یک اصل‌بندی معادل به صورت $\forall \exists$ است اگر و تنها اگر کلاس مدل‌های T تحت اجتماع زنجیرها بسته باشد، یعنی اگر $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ زنجیری از مدل‌های T باشد آنگاه $\bigcup \mathcal{M}_i \models T$.

اثبات. فرض کنید تئوری T دارای اصل‌بندی $\forall \exists$ باشد و $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ زنجیری از مدل‌های T باشد. فرض کنید ψ فرمولی به صورت $\forall \bar{x} \exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ باشد که $T \models \psi$. نشان می‌دهیم $\bigcup \mathcal{M}_i \models \psi$. باید نشان دهیم

$$\forall \bar{x} \in \bigcup \mathcal{M}_i \exists \bar{y} \in \bigcup \mathcal{M}_i \bigcup \mathcal{M}_i \models \varphi(\bar{x}, \bar{y})$$

فرض کنید $\bar{a} \in \bigcup \mathcal{M}_i$ پس می‌توان فرض کرد $\bar{a} \in \mathcal{M}_j$. چون $\mathcal{M}_j \models T$ ، پس $\mathcal{M}_j \models \exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ در نتیجه

$$\mathcal{M}_j \models \underbrace{\varphi(\bar{a}, \bar{b})}_{\text{بدون سور}} \Rightarrow \bigcup \mathcal{M}_i \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$$

$$\bigcup \mathcal{M}_i \models \exists \bar{y} \varphi(\bar{a}, \bar{y}) \Rightarrow \bigcup \mathcal{M}_i \models \forall \bar{x} \exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$$

حال فرض کنید که کلاس مدل‌های تئوری T تحت اجتماع زنجیرها بسته باشد.

هدف: پیدا کردن یک تئوری T' که جملات به کار رفته در آن به صورت $\forall \exists$ باشند و مدل‌های T' و مدل‌های T یکسان باشند. قرار دهید $\{\varphi \text{ جمله‌ای به صورت } \forall \exists \text{ است} \mid T \models \varphi\}$. $T' = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$. نشان می‌دهیم اگر $\mathcal{M} \models T'$ ، آنگاه $\mathcal{M} \models T$. ادعای اول: یک مدل $\mathcal{M} \models T$ موجود است به طوری که هر جمله‌ی $\forall \exists$ که در $\mathcal{M}$ درست باشد در $\mathcal{M}$ نیز درست است.

اثبات ادعای اول. تئوری $\{\varphi \text{ به صورت } \forall \exists \text{ است} \mid \mathcal{M} \models \varphi\}$ را در نظر بگیرید. کافی است نشان دهیم که T_1 دارای مدل است. اگر T_1 دارای مدل نباشد، آنگاه $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ پیدا می‌شوند به طوری که $T \models \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$. فرض کنید که تعداد φ_i ها یکی باشد، یعنی فرض کنید φ موجود باشد به طوری که $T \models \neg \varphi$. از آنجا که φ به صورت $\exists \forall$ است پس $\neg \varphi$ به صورت $\forall \exists$ است. بنابراین $\neg \varphi \in T'$ پس $\mathcal{M} \models \neg \varphi$. $\square$

ادعای دوم: یک مدل $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}' (\equiv \mathfrak{N}) \models T$ پیدا می‌شود.

اثبات ادعای دوم. کافی است نشان دهیم که تئوری $T_2 = \text{Diag}(\mathfrak{M}) \cup \text{Th}(\mathfrak{N})$ سازگار است (در زبان $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$). به برهان خلف فرض کنید که T_2 دارای مدل نباشد. بنابراین جمله‌ی $\varphi(\bar{m}) \in \text{Diag}(\mathfrak{M})$ موجود است به طوری که

$$\text{Th}(\mathfrak{N}) \stackrel{\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}}{\models} \neg \varphi(\bar{m})$$

پس $\text{Th}(\mathfrak{N}) \models \forall x \neg \varphi(\bar{x})$ پس $\mathfrak{N} \models \forall x \neg \varphi(\bar{x})$ (یادآوری: در $\mathfrak{N}$ تمام جملات $\exists \forall$ درست در $\mathfrak{M}$ درست هستند) از این نتیجه می‌شود که $\mathfrak{M} \models \forall x \neg \varphi(\bar{x})$ (در غیر این صورت $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(\bar{x})$ بنابراین $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(\bar{x})$ و این با فرض $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m})$ تناقض دارد. $\square$

ادعای سوم: توسیعی مقدماتی مانند $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{M}'$ وجود دارد که $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}'$.

اثبات ادعای سوم. کافی است نشان دهیم که $T_3 = \text{Diag}(\mathfrak{N}) \cup \text{Diag}_{\text{el}}(\mathfrak{M})$ در زبان $\mathcal{L}_{\mathfrak{N} \cup \mathfrak{M}}$ دارای مدل است. اگر T_3 مدل نداشته باشد. آنگاه $\varphi(\bar{n}) \in \text{Diag}(\mathfrak{N})$ و $\psi(\bar{m}) \in \text{Diag}_{\text{el}}(\mathfrak{M})$ موجودند که $\psi(\bar{m}) \stackrel{\mathcal{L}_{\mathfrak{N} \cup \mathfrak{M}}}{\models} \neg \varphi(\bar{n})$ پس $\psi(\bar{m}) \stackrel{\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}}{\models} \forall x \neg \varphi(\bar{x})$ در نتیجه

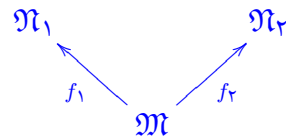
$$\mathfrak{M} \models \psi(\bar{m}) \Rightarrow \mathfrak{M} \models \forall x \neg \varphi(\bar{x}) \Rightarrow \mathfrak{N} \models \forall x \neg \varphi(\bar{x}) \Rightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{n})$$

$\square$

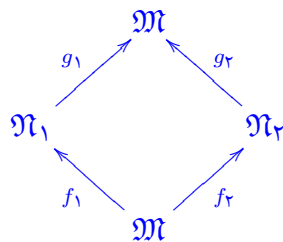
با ادامه‌ی روند فوق زنجیری به صورت $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \dots$ خواهیم داشت که $\mathfrak{M} \models T'$ ، $\mathfrak{N}_i \models T$ و $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{M}_1 \preceq \mathfrak{M}_2 \preceq \dots$. از طرفی $\bigcup \mathfrak{N}_i = \bigcup \mathfrak{M}_i \models T$ پس $\mathfrak{M} \preceq \bigcup \mathfrak{M}_i$. $\square$

تعریف ۹۴. فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو $\mathcal{L}$ -ساختار هستند. نگاشت $f: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ را یک نشان دادن مقدماتی می‌نامیم هرگاه برای هر $\bar{m} \in \mathfrak{M}$ و هر فرمول φ داشته باشیم: $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(f(\bar{m}))$.

قضیه ۹۵. دیاگرام زیر را در نظر بگیرید که f_i ها مقدماتی هستند.



آنگاه یک ساختار $\mathfrak{N}$ به همراه نشان دادن‌های مقدماتی g_1 و g_2 موجود هستند به طوری که $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$



طرح اثبات. باید نشان دهیم که $\text{Diag}_{\text{el}}(\mathfrak{N}_1) \cup \text{Diag}_{\text{el}}(\mathfrak{N}_2)$ سازگار است. به برهان خلف فرض کنید $\varphi(\bar{n}_1) \in \text{Diag}_{\text{el}}(\mathfrak{N}_1)$ با $\psi(\bar{n}_2) \in \text{Diag}_{\text{el}}(\mathfrak{N}_2)$ ناسازگار باشند یعنی $\varphi(\bar{n}_1) \stackrel{\mathcal{L}_{\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2}}{\models} \neg \psi(\bar{n}_2)$. چون f_i ها مقدماتی هستند به تناقض می‌رسیم. $\square$

یادآوری ۹۶. $\text{Diag}(\mathfrak{M}) = \{\varphi(m_1, \dots, m_k) \mid m_i \in \mathfrak{M}, \mathfrak{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_k)\}$

لم ۹۷. ۱. $\exists f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N} \iff \mathfrak{N} \stackrel{\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}}{\models} \text{Diag}(\mathfrak{M})$ که حافظ فرمولهای بدون سور است.

۲. $\exists f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N} \iff \mathfrak{N} \stackrel{\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}}{\models} \text{Diag}_{\text{el}}(\mathfrak{M})$ که نشانندن مقدماتی است.

تمرین ۱۵. (۱) نشان دهید اگر $\varphi(\bar{n}_1) \stackrel{\mathcal{L}_{\mathfrak{N}_1}}{\models} \forall \bar{x} \neg \psi(\bar{x})$ آن‌گاه $\exists x \varphi(x) \stackrel{\mathcal{L}}{\models} \forall \bar{x} \neg \psi(\bar{x})$

(۲) نشان دهید اگر $\varphi(c) \stackrel{\mathcal{L}_c}{\models} \psi$ آن‌گاه $\exists x \varphi(x) \stackrel{\mathcal{L}}{\models} \psi$

یادآوری ۹۸. ۱. $T \cup \{\neg \varphi\} \iff T \not\models \varphi$ مدل داشته باشد.

۲. $T \not\models \varphi \nRightarrow T \models \neg \varphi$

۳. این امکان وجود دارد که $T \not\models \varphi$ و $T \not\models \neg \varphi$ یعنی $T \cup \{\varphi\}$ و $T \cup \{\neg \varphi\}$ سازگار باشد. حتی این امکان وجود دارد که $T \models \varphi$ و $T \models \neg \varphi$ (یعنی $T = \{\varphi, \neg \varphi\}$).

تعریف ۹۹. $\mathcal{L}$ -تئوری T را کامل می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathcal{L}$ -جمله φ ، اگر $T \not\models \varphi$ آن‌گاه $T \models \neg \varphi$.

لم ۱۰۰. تئوری T کامل است اگر و تنها اگر هر دو مدل $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ هم‌ارز مقدماتی باشند ($\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$).

لم ۱۰۱. اگر T کامل باشد و $\mathfrak{N} \models T$ آن‌گاه $\mathfrak{N} \models \{\varphi \mid \mathfrak{N} \models \varphi\}$ $T \equiv \text{Th}(\mathfrak{N})$

اثبات هر دو لم به عنوان تمرین.

۱۲ جلسه‌ی دوازدهم، تئوری‌های کامل و سامانه‌های رفت و برگشتی

$\mathcal{L}$ -تئوری T را کامل می‌نامیم هرگاه یکی از شرایط معادل زیر صدق کند.

۱. برای هر $\mathcal{L}$ -جمله φ یا $T \models \varphi$ یا $T \models \neg \varphi$ و حتماً یکی از این دو.

۲. هر دو مدل $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ هم‌ارز مقدماتی باشند.

۳. برای یک (یا هر) $\mathfrak{M} \models T$ ، $T \equiv \text{Th}(\mathfrak{M})$.

تعریف ۱۰۲. دو $\mathcal{L}$ -ساختار $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ را ایزومرف می‌نامیم هرگاه یک نگاشت یک‌به‌یک و پوشای $F : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ موجود باشد به طوری که

• برای هر ثابت $c \in \mathcal{L}$ ، $c^{\mathfrak{M}} \xrightarrow{F} c^{\mathfrak{N}}$.

• برای هر تابع $f \in \mathcal{L}$ و هر $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{M}$ $f^{\mathfrak{M}}(a_1, \dots, a_n) \xrightarrow{F} f^{\mathfrak{N}}(F(a_1), \dots, F(a_n))$.

• برای هر رابطه‌ی $R \in \mathcal{L}$ و هر $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{M}$ $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{M}} \xrightarrow{F} (F(a_1), \dots, F(a_n)) \in R^{\mathfrak{N}}$.

تمرین ۱۶. فرض کنید $F : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ یک ایزومرفیسم باشد. نشان دهید که برای هر فرمول $\varphi(\bar{x})$ و هر $\bar{a} \in \mathfrak{M}$ داریم

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(F(\bar{a}))$$

(به طور خاص اگر $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ ایزومرف باشند آنگاه $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$).

تمرین ۱۷. اگر $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو $\mathcal{L}$ -ساختار متناهی باشند. آنگاه $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ اگر و تنها اگر $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ (آیا شرط متناهی بودن زبان لازم است؟).

تعریف ۱۰۳. فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو $\mathcal{L}$ -ساختار باشند. فرض کنید یک سامانه‌ی رفت و برگشتیِ ناتهی از ایزومرفیسم‌های میان زیرساختارهایی از $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ وجود داشته باشد. آنگاه $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.

تعریف ۱۰۴. فرض کنید $\Gamma = \{f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \mid \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{N}\}$ یک مجموعه از ایزومرفیسم‌ها میان برخی زیرساختارهای $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ باشد. Γ را یک سامانه‌ی رفت و برگشتی^۱ از ایزومرفیسم‌ها می‌نامیم هرگاه

$$1. \Gamma \neq \emptyset.$$

۲. برای هر $t \in \mathfrak{M}$ و هر $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \in \Gamma$ یک ایزومرفیسم $g \in \Gamma$ موجود باشد به طوری که $f \subseteq g$ و $g \restriction_{\mathfrak{A}} = f$ و $t \in \text{Dom}(g)$ (رفت).

۳. برای هر $t \in \mathfrak{N}$ و هر $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \in \Gamma$ یک ایزومرفیسم $g \in \Gamma$ موجود باشد به طوری که $f \subseteq g$ و $g \restriction_{\mathfrak{A}} = f$ و $t \in \text{Im}(g)$ (برگشت).

قضیه ۱۰۵. DLO یک تئوری کامل است.

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models \text{DLO}$. نشان می‌دهیم $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$. کافی است نشان دهیم سامانه‌ی ایزومرفیسم‌های میان زیرساختارهای متناهی $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ رفت و برگشتی است. فرض کنید $t \in \mathfrak{M}$ و $f \in \Gamma$ فرض کنید

$$f : a_1 < \dots < a_n \rightarrow b_1 < \dots < b_n$$

و $a_1 < \dots < a_n < t$. در این صورت t' وجود دارد که $t' < b_1 < \dots < b_n$. قرار می‌دهیم $g = f \cup \{(t, t')\}$. تکمیل اثبات به عهده‌ی خواننده.

□

قضیه ۱۰۶. هر دو مدل شمارای DLO با هم ایزومرف هستند.

^۱back and forth

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{N} = (n_i)_{i \in \omega}$ و $\mathfrak{M} = (m_i)_{i \in \omega}$ دو مدل برای DLO باشند. $f_0 : a_0 \rightarrow b_0$ یک ایزومرفیسم جزئی است. ایزومرفیسم‌های $f_1 \subseteq f_2 \subseteq \dots$ را طوری می‌سازیم که $n_i \in \text{Img}(f_i)$ و $m_i \in \text{Dom}(f_i)$ و متناهی باشند. در این صورت $F = \bigcup f_i : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ یک به یک، پوشا و ایزومرفیسم است. فرض کنید f_i ساخته شده باشد. هدف ساختن f_{i+1} است به طوری که $m_{i+1} \in \text{Dom}(f_{i+1})$ و $n_{i+1} \in \text{Img}(f_{i+1})$ اگر $m_{i+1} \notin \text{Dom}(f_i)$ آن‌گاه مطابق اثبات قبل

$$\exists t \in \mathfrak{N} \quad (m_{i+1}, t) \in f_{i+1} \supseteq f_i$$

فرض کنید بین $\mathfrak{N}$ و $\mathfrak{M}$ یک سامانه‌ی رفت و برگشتی Γ وجود داشته باشد. نشان می‌دهیم برای هر فرمول $\varphi(\bar{x})$ و هر $\bar{m} \in \mathfrak{M}$ یک عنصر $\bar{n} \in \mathfrak{N}$ موجود است به طوری که $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{m}) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{n})$. اثبات این حکم با استقرا روی ساخت فرمول‌ها است. فرض کنید $\mathfrak{M} \models t_1(\bar{m}) = t_2(\bar{m})$ فرض کنید $f \in \Gamma$ را به دامنه‌ی f اضافه کنید. تابع $g : A \rightarrow B \in \Gamma$ وجود دارد به طوری که $m \in A$ پس $g(m) \in B$ چون $\mathfrak{M} \models t_1(g(m)) = t_2(g(m))$ حال فرض کنید حکم برای فرمول $\varphi(x)$ درست باشد، نشان می‌دهیم حکم برای فرمول $\exists x \varphi(x)$ درست است.

$$\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x) \Rightarrow \exists m \in \mathfrak{M} \mathfrak{M} \models \varphi(m)$$

بنا به فرض استقرا $n \in \mathfrak{N}$ موجود است به طوری که $\mathfrak{N} \models \varphi(n)$ یعنی $\mathfrak{N} \models \exists x \varphi(x)$. تکمیل اثبات به عنوان تمرین به عهده خواننده. $\square$

قضیه ۱۰۷. فرض کنید هر دو مدل T از اندازه‌ی κ با هم ایزومرف باشند و T مدل متناهی نداشته باشد. آن‌گاه T کامل است.

۱۳ جلسه‌ی سیزدهم، تئوری میدان‌های بسته‌ی جبری

تئوری T در زبان $\mathcal{L}$ را کامل می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathcal{L}$ -جمله‌ی φ داشته باشیم $T \models \varphi$ یا $T \models \neg \varphi$.

تعریف ۱۰۸. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساختار باشد و $A \subseteq \mathfrak{M}$ آن‌گاه $\mathcal{L}$ -ساختار تولید شده توسط A به صورت زیر است:

$$\langle A \rangle = \{t(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in A \text{ و } t \text{ یک } \mathcal{L}\text{-ترم است}\}$$

تمرین ۱۸. نشان دهید که ساختار تولید شده توسط A یعنی $\langle A \rangle$ برابر است با $\bigcap_{A \subseteq \mathfrak{M}} \mathfrak{M}$ $\mathcal{L}$ -ساختار.

تعریف ۱۰۹. فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو $\mathcal{L}$ -ساختار باشند و $A \subseteq \mathfrak{M}$ و $B \subseteq \mathfrak{N}$ زیرمجموعه‌ها. تابع $f : A \rightarrow B$ را یک ایزومرفیسم جزئی می‌نامیم هرگاه

$$۱. \text{ برای هر تابع } F(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L} \text{ و } a_1, \dots, a_n, b \in A \text{ داشته باشیم:}$$

$$\mathfrak{M} \models F(a_1, \dots, a_n) = b \iff \mathfrak{N} \models F(f(a_1), \dots, f(a_n)) = f(b)$$

$$۲. c^{\mathfrak{M}} \in B \text{ و } c^{\mathfrak{M}} \in A \implies f(c^{\mathfrak{M}}) = c^{\mathfrak{N}}$$

$$\mathfrak{M} \models R(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{N} \models R(f(a_1), \dots, f(a_n)) \quad ۳$$

تمرین ۱۹. فرض کنید $A \subseteq \mathfrak{M}, B \subseteq \mathfrak{N}$ و $f: A \rightarrow B$ یک ایزومرفیسم جزئی باشد. آنگاه f را می‌توان به طور یکتا به ایزومرفیسمی میان $\langle A \rangle$ و $\langle B \rangle$ گسترش داد.

قضیه ۱۱۰. فرض کنید که $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو $\mathcal{L}$ -ساختار باشند. اگر یک سامانه‌ی رفت و برگشتی از ایزومرفیسم‌های جزئی میان $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ وجود داشته باشد آنگاه $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.

نتیجه ۱۱۱. اگر بین هر دو مدل $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ یک سامانه‌ی رفت و برگشتی پیدا شود، آنگاه T کامل است.

توجه ۱۱۲. اگر تئوری T مدل متناهی نداشته باشد و κ -جازم^۹ باشد (در یک کاردینال)، آنگاه T کامل است.

تئوری میدان‌های بسته‌ی جبری

قضیه ۱۱۳. تمام ریشه‌های هر چندجمله‌ای در $\mathbb{C}[x]$ در $\mathbb{C}$ قرار دارند.

پروژه: اثبات قضیه اساسی را با استفاده از گالوا تئوری ثابت کنید
تئوری میدان‌های بسته‌ی جبری ACF^1 به صورت زیر است

$$\text{ACF} = \bigcup_{\text{میدان‌ها}} T$$

شمای اصول برای بسته‌ی جبری بودن:

$$\varphi_n : \forall a_1, \dots, a_n \exists x \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

توجه ۱۱۴. ACF سازگار است، یعنی مدل دارد. در واقع $\text{ACF} \models (\mathbb{C}, +, -, \cdot, \circ, 1)$.

توجه ۱۱۵. با ACF_p تئوری میدان‌های بسته‌ی جبری با مشخصه‌ی p را نشان می‌دهیم ($p \in \text{Prime} \cup \{0\}$).

سوال ۱۱۶. آیا ACF یک تئوری $\aleph_0$ -جازم است؟ (راهنمایی: خیر، $\mathbb{Q}^{\text{alg}}$ و $(\mathbb{Q}(\pi))^{\text{alg}}$)

۱۴ جلسه‌ی چهاردهم، ادامه‌ی میدان‌های بسته‌ی جبری

لم ۱۱۷. فرض کنید κ یک کاردینال ناشمارا باشد، آنگاه هر دو مدل از ACF با اندازه κ با هم ایزومرف هستند (بنابراین برای هر کاردینال ناشمارای κ ، تئوری ACF κ -جازم است).

اثبات. فرض کنید κ یک کاردینال ناشمارا باشد. فرض کنید $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models \text{ACF}$ و $|\mathfrak{M}| = |\mathfrak{N}| = \kappa$. فرض کنید $\mathfrak{M} = (m_\lambda)_{\lambda < \kappa}$ و $\mathfrak{N} = (n_\lambda)_{\lambda < \kappa}$. ایزومرفیسمی مانند $f: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ می‌سازیم. روش: κ تا ایزومرفیسم جزئی $(f_\lambda)_{\lambda < \kappa}$ می‌سازیم (به صورت زنجیر) به طوری که

^۹ κ -categorical

^{۱۰} algebraically closed field

۱. هر f_λ یک ایزومرفیسم جزئی باشد.

۲. $|\text{Dom}(f_\lambda)|, |\text{Rang}(f_\lambda)| < \kappa$.

۳. $n_\lambda \in \text{Rang}(f_{\lambda+1})$ و $m_\lambda \in \text{Dom}(f_{\lambda+1})$.

در نهایت قرار خواهیم داد $f = \bigcup_{\lambda < \kappa} f_\lambda$. دنباله $(f_\lambda)_{\lambda < \kappa}$ را به صورت زیر می‌سازیم.

قدم اول استقرا: $f_\circ : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ (توجه شود که $\mathbb{Q} \subseteq \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$)

قدم تالی: فرض کنید f_λ با شرط‌های داده شده ساخته شده باشد.

هدف: ساختن $f_{\lambda+1}$.

یادآوری‌های مربوطه: فرض کنید $M_1 \subseteq M_2$ یک توسیع میدانی باشد و فرض کنید $a \in M_2$ عنصری جبری روی M_1 باشد. یعنی a ریشه‌ی یک چندجمله‌ای با ضرایب در M_1 است. برای a یک چندجمله‌ای می‌نیمال روی M_1 وجود دارد که آن را با $f(x)$ نشان می‌دهیم. آنگاه در $M_1[X]$ ایده‌آل $\langle f(x) \rangle$ یک ایده‌آل ماکزیمال است. بنابراین $\frac{M_1[X]}{\langle f(x) \rangle}$ یک میدان است.

$$M_1 \hookrightarrow M_1[X]$$

سوال: میدان تولید شده توسط M_1 و a چگونه است؟

یادآوری اول: اگر M یک حلقه باشد و I یک ایده‌آل ماکزیمال باشد آنگاه $\frac{M}{I} = \{a + I \mid a \in M\}$ یک میدان است.

اگر $f : M \rightarrow N$ یک همریختی حلقه‌ای باشد، آنگاه $\frac{M}{\text{Ker}(f)} \cong \text{Im}(f)$. اگر F یک میدان باشد آنگاه هر ایده‌آل اول در $F[X]$ یک ایده‌آل ماکزیمال است.

$$\frac{M[x]}{\langle f(x) \rangle} = \{g(x) + \langle f(x) \rangle \mid g(x) \in M[x]\}$$

$$g_1(x) + \langle f(x) \rangle = g_2(x) + \langle f(x) \rangle \Leftrightarrow f \mid g_1 - g_2$$

خلاصه: اگر $M_1 \subseteq M_2$ یک توسیع میدانی باشد، $a \in M_2$ روی M_1 جبری باشد و $f(x)$ چندجمله‌ای می‌نیمال a روی M_1 باشد. آنگاه

$$\frac{M_1[x]}{\langle f(x) \rangle} \cong M_1(a) \quad (M_2 \text{ در } M_1 \text{ و } a \text{ توسط } M_1 \text{ و } a \text{ در } M_2)$$

یادآوری دوم: فرض کنید $M_1 \subseteq M_2$ یک توسیع میدانی باشد. فرض کنید $a \in M_2 \setminus M_1$ روی M_1 متعالی است (یعنی a ریشه‌ی هیچ چندجمله‌ای با ضرایب در M_1 نیست). آنگاه

$$M_1(a) \cong M_1(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \in M_1[x] \right\}$$

ادامه‌ی اثبات: فرض کنید که f_λ ساخته شده است. هدف ساختن $f_{\lambda+1}$ است به گونه‌ای که $m_\lambda \in \text{Dom}(f_{\lambda+1})$ ، $n_\lambda \in \text{Rang}(f_{\lambda+1})$ و $f_{\lambda+1} : \mathfrak{M}_{\lambda+1} \rightarrow \mathfrak{N}_{\lambda+1}$. اگر λ حدی باشد قرار می‌دهیم $f_\lambda = \bigcup_{\gamma < \lambda} f_\gamma$. اگر λ تالی باشد مثلاً $\lambda = \gamma + 1$ و f_γ ساخته شده باشد. m_γ را به دامنه و n_γ را به برد اضافه می‌کنیم.

$$x \longrightarrow \mathfrak{M}_1 \xleftarrow{f} \mathfrak{N}_1 \longleftarrow y$$

حالت اول: اگر x روی $\mathfrak{M}_1$ متعالی باشد.

$$\left\{ \frac{f(X)}{g(X)} \mid f, g \in \mathfrak{M}_1[X] \right\} = \mathfrak{M}_1(X) \cong \underbrace{\mathfrak{M}_1(x)}_{\text{میدان تولید شده توسط } x \text{ و } \mathfrak{M}_1 \text{ در } \mathfrak{M}}$$

از آنجا که اندازه‌ی $\mathfrak{M}_1$ اکیداً کمتر از اندازه $\mathfrak{M}$ است، عنصر $y \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1$ پیدا می‌شود که روی $\mathfrak{M}_1$ متعالی است. آنگاه

$$\mathfrak{M}_1(X) \cong M_1(x) \cong \mathfrak{M}_1(y) \cong \mathfrak{M}_1(X)$$

حالت دوم: اگر x روی $\mathfrak{M}_1$ جبری باشد آنگاه x ریشه‌ی یک چندجمله‌ای $f(X) \in \mathfrak{M}_1[X]$ است.
 $\downarrow$
 حداقل درجه

$$\mathfrak{M}_1(x) \cong \frac{\mathfrak{M}_1[X]}{\langle f(X) \rangle}$$

$f(x)$ روی $\mathfrak{M}_1$ نیز تحویل‌ناپذیر است. حال اگر y ریشه‌ای برای $f(x)$ در $\mathfrak{M}$ باشد داریم:

$$\frac{\mathfrak{M}_1[X]}{\langle f(X) \rangle} \cong \mathfrak{M}_1(x) \cong \mathfrak{M}_1(y) \cong \frac{\mathfrak{M}_1[X]}{\langle f(X) \rangle}$$

□

قضیه ۱۱۸. ACF یک تئوری کامل است.

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models \text{ACF}$. نشان می‌دهیم $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$.

حالت اول: فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ هر دو شمارا باشند. بنا به لونهایم اسکولم توسیع‌های مقدماتی $\mathfrak{M}' \succ \mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}' \succ \mathfrak{N}$ وجود دارند که $|\mathfrak{M}'| = 2^{\aleph_0}$ و $|\mathfrak{N}'| = 2^{\aleph_0}$. پس $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}' \cong \mathfrak{N}' \equiv \mathfrak{N}$.

حالت دوم: فرض کنید $\mathfrak{M}$ شمارا و $\mathfrak{N}$ ناشمارا باشند بنا به اونهایم اسکولم توسیع مقدماتی $\mathfrak{M}' \succ \mathfrak{M}$ وجود دارد به طوری‌که $|\mathfrak{M}'| = |\mathfrak{N}|$. پس $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}' \equiv \mathfrak{N}$.

□

خلاصه: ثابت کردیم که ACF یک تئوری سازگار کامل است و $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, \circ, 1) \models \text{ACF}$.

بنابراین اگر φ یک جمله در زبان $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, \circ, 1\}$ باشد، آنگاه $\mathbb{C} \models \varphi$ اگر و تنها اگر در یک (همه) میدان بسته‌ی جبری درست باشد.

$$\text{Th}(\mathbb{C}, +, -, \cdot, \circ, 1) \equiv \text{ACF}.$$

$$\mathbb{C} \models \text{ACF} \models \varphi \in \text{Th}(\mathbb{C})$$

بنابراین ACF یک اصل‌بندی کامل برای اعداد مختلط است.

توجه ۱۱۹. با اثباتی کاملاً مشابه می‌توان نشان داد که ACF_p یک تئوری کامل است.

توجه ۱۲۰. بنا به لونهایم اسکولم میدان‌های بسته‌ی جبری با هر اندازه‌ی دلخواه نامتناهی وجود دارد.

تعریف ۱۲۱. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک میدان بسته‌ی جبری باشد. اگر $A \subseteq \mathfrak{M}$ ، آنگاه A^{alg} ، بستار جبری A بنا به تعریف، کوچکترین میدان بسته‌ی جبری شامل A است.

نتیجه ۱۲۲. $\mathbb{Q}^{\text{alg}}$ شماراست.

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathfrak{M}' \preceq \mathfrak{M}$$

$\downarrow$
شمارا و بسته جبری

$\downarrow$
میدان بسته جبری

برای پیدا کردن یک میدان بسته جبری شامل $\mathbb{Q}$ به صورت زیر عمل کنید. فرض کنید $f(X)$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر باشد. $\mathbb{Q}$ را به صورت $\mathbb{Q} \subseteq \frac{\mathbb{Q}[X]}{\langle f(X) \rangle}$ گسترش دهید. مشابهاً با ادامه‌ی این کار به یک میدان $\mathbb{Q}_1$ می‌رسیم که در آن تمام چندجمله‌های با ضرایب در $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{Q}_1$ ریشه دارند. فرض کنید $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_1 \subseteq \mathbb{Q}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{Q}_n \subseteq \dots$ ساخته شده باشد. نشان دهید $\bigcup \mathbb{Q}_n$ بسته جبری است.

نتیجه ۱۲۳. اگر M یک میدان باشد، آنگاه $|M^{\text{alg}}| = |M| + \aleph_0$.

قضیه ۱۲۴. فرض کنید φ یک جمله در زبان حلقه‌ها باشد. آن‌گا موارد زیر با هم معادلند.

۱. $\mathbb{C} \models \varphi$

۲. φ در یک میدان بسته جبری با مشخصه صفر درست است.

۳. φ در تمام میدان‌های بسته جبری با مشخصه صفر درست است.

۴. φ از جایی به بعد در میدان‌های بسته جبری با مشخصه p درست است. یعنی $\exists n \in \mathbb{N} \forall p > n \text{ ACF}_p \models \varphi$.

۵. φ از جایی به بعد در بستر جبری $\mathbb{F}_p$ درست است. یعنی $\exists n \in \mathbb{N} \forall p > n \mathbb{F}_p^{\text{alg}} \models \varphi$.

روش اثبات. توجه کنید که برای هر جمله‌ی φ داریم

$$\text{ACF}_0 \models \varphi \iff \text{ACF}_0 \cup \{\varphi\} \text{ سازگار است}$$

(به طور کلی: اگر T کامل باشد و $T \cup \{\varphi\}$ سازگار باشد آنگاه $T \models \varphi$) فرض کنید که جمله‌ی φ در $\mathbb{C}$ درست باشد بنابراین $\text{ACF}_0 \cup \varphi$ سازگار است. به برهان خلف فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ عدد $p > n$ وجود داشته باشد به طوری که $\mathbb{F}_p^{\text{alg}} \models \neg \varphi$. آنگاه ادعا می‌کنیم $\text{ACF}_0 \cup \{\neg \varphi\}$ سازگار است زیرا هر بخش متناهی از آن سازگار است (و از فشردگی حکم نتیجه می‌شود). بنابراین $\text{ACF}_0 \cup \{\neg \varphi\}$ سازگار است. $\square$

۱۵ جلسه‌ی پانزدهم، ادامه‌ی تئوری‌های کامل و قضیه‌ی ناتمامیت اول گودل

نتیجه ۱۲۵ (از کامل بودن ACF_p). فرمول φ در زبان حلقه‌ها در ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, -)$ درست است اگر و تنها اگر از جایی به بعد در $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$ درست باشد.

مثال ۱۲۶. هر نگاشت چندجمله‌ای $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ $F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ اگر یک‌به‌یک باشد، پوشاست.

اثبات. توجه کنید اگر $f : K^n \rightarrow K^n$ $f(K)$ متناهی باشد یک به یک باشد، آنگاه f پوشاست. فرض کنید F یک نگاشت چندجمله‌ای از $\mathbb{C}^n$ به $\mathbb{C}^n$ باشد که یک‌به‌یک است. فرض کنید که حداکثر درجه‌ی چندجمله‌های به کار رفته در F برابر با d باشد. «فرمول» زیر را در نظر بگیرید:

$\varphi :=$ «هر چندجمله‌ای $F(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ با حداکثر درجه‌ی d اگر یک‌به‌یک باشد پوشاست.»
برای مثال فرمول «هر چندجمله‌ای $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ با درجه‌ی ۲ اگر یک‌به‌یک باشد پوشاست» به صوت زیر است

$$\forall a_0, a_1, a_2 ((\forall x, y \ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 \rightarrow x = y) \rightarrow \forall t \exists t' \ a_0 + a_1 t' + a_2 t'^2 = t)$$

کافی است نشان دهیم که جمله‌ی φ در میدان‌های بسته‌ی جبری با مشخصه‌ی p از جایی به بعد درست است. یعنی کافی است نشان دهیم که جمله‌ی φ از جایی به بعد در $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$ درست است.

مشاهده ۱۲۷. $\mathbb{F}_p^{\text{alg}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}$. هر چندجمله‌ای در $\mathbb{F}_{p^n}$ ریشه‌اش در یک میدان متناهی شامل $\mathbb{F}_{p^n}$ قرار می‌گیرد. بنابراین ریشه‌اش در یک $\mathbb{F}_{p^m}$ قرار می‌گیرد.

به برهان خلف فرض کنیم چندجمله‌ای F یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست.

$$F: \mathbb{F}_p^{\text{alg}} \rightarrow \mathbb{F}_p^{\text{alg}}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

فرض کنیم $\bar{a}$ تمام ضرایب موجود باشد و فرض کنید $\bar{b}$ نقطه‌ای باشد که پوشیده نشده است. بنابراین تابع زیر یک‌به‌یک است

$$F \upharpoonright \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \rightarrow \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$$

که $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ میدان تولید شده توسط $\bar{a}$ و $\bar{b}$ است که متناهی است. قرار دهید $K = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ پس $F: K^n \rightarrow K^n$ و K متناهی است. پس F باید پوشا باشد (تناقض با اینکه $\bar{b}$ را نمی‌پوشاند). $\square$

تصمیم‌پذیری

تعریف ۱۲۸. تئوری T را تصمیم‌پذیر^{۱۱} گوئیم هرگاه مجموعه‌ی $\{\varphi \mid T \models \varphi\}$ بازگشتی باشد به بیان دیگر الگوریتمی وجود داشته باشد که تعیین کند که برای یک $\mathcal{L}$ -جمله‌ی φ آیا $T \models \varphi$ یا $T \not\models \varphi$.

مثال ۱۲۹. ACF_0 یک تئوری تصمیم‌پذیر است. ($\mathcal{L} = \{+, \cdot, \circ, 1, -\}$)

۱. تئوری ACF_0 را می‌توان با الگوریتم تولید کرد.

۲. ACF_0 کامل است یعنی برای هر جمله‌ی φ یا $\text{ACF}_0 \models \varphi$ یا $\text{ACF}_0 \models \neg \varphi$.

$$\underbrace{T \vdash \varphi}_{\text{اثباتی برای } \varphi \text{ از } T \text{ وجود داشته باشد}} \iff \underbrace{T \models \varphi}_{\text{در هر مدل } T, \varphi \text{ درست باشد}} \quad ۳.$$

مشاهده ۱۳۰. هر تئوری کامل که با الگوریتم تولید شود تصمیم‌پذیر است.

سوال ۱۳۱. آیا برای اعداد طبیعی، یعنی برای ساختار $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ می‌توان یک تئوری کامل الگوریتمی نوشت؟

سوال ۱۳۲. آیا $\text{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot)$ تصمیم‌پذیر است؟

^{۱۱}decidable

تعریف ۱۳۳. مجموعه‌ی $A \subseteq \mathbb{N}$ را r.e. (به طور مؤثر شمارا) می‌نامیم هرگاه الگوریتمی وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in \mathbb{N}$ اگر $x \in A$ آن‌گاه الگوریتم بایستد. مجموعه‌ی A را بازگشتی می‌نامیم هرگاه الگوریتمی وجود داشته باشد که تعیین کند آیا $x \in A$ یا $x \notin A$.

پروژه: نشان دهید که یک فرمول در زبان $\mathcal{L} = \{+, \cdot, \circ, 1\}$ وجود دارد که عبارت زیر را بیان می‌کند.

$T(e, s, t)$: ماشین تورینگ e ام با ورودی s پس از t مرحله می‌ایستد.

قضیه ۱۳۴ (مسأله‌ی توقف). ^{۱۲} هیچ الگوریتمی وجود ندارد که تعیین کند آیا هر الگوریتم e ام با ورودی x می‌ایستد یا خیر.

اثبات. فرض کنیم چنین الگوریتمی وجود داشته باشد. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$g(x) = \begin{cases} \text{yes} & \text{اگر الگوریتم } x \text{ ام با ورودی } x \text{ متوقف می‌شود} \\ \text{loop} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

سوال: $g(x)$ خود یک الگوریتم است. آیا الگوریتم g با ورودی e متوقف می‌شود

□

قضیه ۱۳۵ (ناتمامیت اول گودل). $\text{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, \circ, 1)$ تصمیم‌پذیر نیست.

اثبات. فرمول $T(e, s, t)$ وجود دارد که بیان‌گر این است الگوریتم e ام با ورودی s پس از t مرحله می‌ایستد. پس فرمول زیر را در نظر بگیرید.

$$\underbrace{\exists y \quad T(e, s, y)}_{\text{الگوریتم } e \text{ ام با ورودی } s \text{ می‌ایستد}}$$

تمام جملات زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi_{e,s} : \exists y \quad T(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{e \text{ بار}}, \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{s \text{ بار}}, y)$$

اگر T تصمیم‌پذیر باشد الگوریتمی وجود دارد که تصمیم می‌گیرد که تک‌تک جملات $\varphi_{e,s}$ درست هستند یا خیر و این مسأله‌ی توقف را نقض می‌کند.

□

قضیه ۱۳۶ (ناتمامیت دوم گودل). قضیه‌ای درست در مورد اعداد طبیعی وجود دارد که از اصول پئانو نتیجه نمی‌شود.

اصول پئانو: $\mathcal{L} = \{+, \cdot, S, \circ\}$

$$\forall x \quad S(x) \neq \circ,$$

$$\forall x \quad x \neq \circ \rightarrow \exists y \quad x = S(y),$$

$$x + \circ = x,$$

$$x + S(y) = S(x + y),$$

$$x \cdot \circ = \circ,$$

$$x \cdot S(y) = x \cdot y + x,$$

$$\text{شمای استقرا} \quad (\varphi(\circ) \wedge \forall x \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x)) \rightarrow \forall x \varphi(x))$$

^{۱۲}Halting problem

پروژه: (پاریس-هرینگتون) قضیه‌ای ملموس در مورد اعداد طبیعی که از اصول پئانو نتیجه نمی‌شود.

۱۶ جلسه‌ی شانزدهم، تایپ‌ها

تمرین ۲۰. یک تئوری کامل دارای مدل نامتناهی برای گراف‌ها در زبان $\mathcal{L} = \{R\}$ بنویسید. (گراف‌های تصادفی)

تمرین ۲۱. یک تئوری کامل برای روابط هم‌ارزی در زبان $\mathcal{L} = \{E\}$ بنویسید. (دارای مدل نامتناهی)

تمرین ۲۲. یک تئوری کامل برای دو رابطه‌ی هم‌ارزی $\{E_1, E_2\}$ بنویسید (دارای مدل نامتناهی).

تعریف ۱۳۷. فرض کنید $\Sigma(\bar{x})$ مجموعه‌ای از فرمول‌های مرتبه‌ی اول با متغیرهای مشترک $\bar{x}$ باشد.

$$\Sigma(\bar{x}) = \{\varphi_1(\bar{x}), \varphi_2(\bar{x})\}$$

می‌گوییم $\Sigma(\bar{x})$ با T سازگار است $(\Sigma(\bar{x}) \cup T)$ سازگار است) هرگاه برای هر تعداد متناهی فرمول $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_n(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$ تئوری $\{ \varphi_1(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \varphi_n(\bar{x}) \mid T \cup \exists \bar{x} \}$ سازگار باشد. (بیان دیگر: می‌گوییم $\Sigma(\bar{x}) \cup T$ سازگار است هرگاه در زبان $\mathcal{L}_c = \mathcal{L} \cup \{c_1, \dots, c_n\}$ تئوری $\Sigma(\bar{c}) \cup T$ سازگار باشد).

تعریف ۱۳۸. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساختار باشد و $A \subseteq \mathfrak{M}$. فرض کنید $\pi(\bar{x}, A)$ مجموعه‌ای از فرمول‌ها با متغیر مشترک $\bar{x}$ و با پارامتر در A باشد.

مثال ۱۳۹. $A = \mathbb{N}$ و $\mathfrak{M} = (\mathbb{Q}, <)$.

$$\pi(x, A) = \{x > 1, x > 2, x > 3, \dots\}$$

مثال ۱۴۰. $A = \mathbb{Q}$ و $\mathfrak{M} = (\mathbb{R}, <)$.

$$\pi(x, A) = \{r_2 > x > r_1 \mid r_2 > \sqrt{2} > r_1, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$$

می‌گوییم $\pi(\bar{x}, A)$ یک تایپ جزئی در $\mathfrak{M}$ است هرگاه $\text{Th}(\mathfrak{M}) \cup \pi(\bar{x}, A)$ سازگار باشد، به بیان دیگر هرگاه برای هر تعداد متناهی فرمول $\varphi_1(\bar{x}, \bar{a}), \dots, \varphi_n(\bar{x}, \bar{a})$ تئوری $\text{Th}(\mathfrak{M}) \cup \exists \bar{x} (\varphi_1(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \dots \wedge \varphi_n(\bar{x}, \bar{a}))$ سازگار باشد. (به بیان دیگر برای هر تعداد متناهی فرمول $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_n(\bar{x}) \in \pi(\bar{x}, A)$ عنصر $\bar{m} \in \mathfrak{M}$ موجود باشد به طوری‌که $(\mathfrak{M} \models \varphi_1(\bar{m}) \wedge \dots \wedge \varphi_n(\bar{m}))$)

تعریف ۱۴۱. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساختار باشد و $A \subseteq \mathfrak{M}$. فرض کنید $p(\bar{x})$ مجموعه‌ای از فرمول‌ها با پارامتر در A باشد. می‌نویسیم $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ و می‌گوییم $p(\bar{x})$ یک تایپ کامل (یک تایپ) در $\mathfrak{M}$ روی A است هرگاه $p(\bar{x})$ یک تایپ جزئی روی A در $\mathfrak{M}$ باشد و برای هر $\mathcal{L}_A$ -فرمول $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ یا $\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p(\bar{x})$ یا $\neg \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p(\bar{x})$

مثال ۱۴۲. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساختار، $A \subseteq \mathfrak{M}$ و $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{M} \setminus A$

$$\text{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A) := \{\varphi(\bar{x}, \bar{b}) \mid \bar{b} \in A, \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})\}$$

$$\text{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}/\emptyset) = \text{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) := \{\varphi(\bar{x}) \mid \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a})\}$$

مثال ۱۴۳. فرض کنید $\mathbb{M} = \mathbb{Q}$. $\{r_1 < x < r_2 \mid r_1 < \sqrt{2} < r_2\}$ یک تایپ جزئی روی $\mathbb{M} = \mathbb{Q}$ با پارامتر در $\mathbb{Q}$ است.

لم ۱۴۴. فرض کنید $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ یک تایپ کامل باشد. آنگاه یک توسیع مقدماتی $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$ و یک عنصر $\bar{a} \in \mathfrak{N}$ موجودند به طوری که $p(\bar{x}) = \text{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{a}/A)$.

اثبات. توجه کنید که $\text{Diag}_{\text{el}}(\mathfrak{M}) \cup p(\bar{x})$ سازگار است (بررسی به عهده خواننده). ثابت $\bar{c} = c_1, \dots, c_n \notin \mathcal{L}$ را به زبان $\mathcal{L}$ اضافه کنید و دقت کنید که تئوری $\text{Diag}_{\text{el}}(\mathfrak{M}) \cup p(\bar{c})$ در زبان $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}} \cup \{c\}$ سازگار است. فرض کنید

$$(\mathfrak{N}, \bar{c}) \models \text{Diag}_{\text{el}}(\mathfrak{M}) \cup p(\bar{c})$$

پس $\bar{c}^{\mathfrak{N}} = \bar{a}$ یعنی $p(\bar{x}) = \text{tp}(\bar{a}/A)$ □

توجه ۱۴۵. مفهوم تایپ، یک مفهوم مقدماتی است. یعنی اگر $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$ و $A \subseteq \mathfrak{M}$ و $\bar{a} \in \mathfrak{M}$ ، آنگاه $\text{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A) = \text{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{a}/A)$. $(\mathfrak{N} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})) \iff \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$

مثال ۱۴۶. $\text{Th}(\mathbb{N}) \cup \{x > 1, x > 2, \dots\}$ سازگار است.

$$\exists \mathfrak{M} \succ \mathbb{N} \quad \exists t \in \mathfrak{M} \quad t > n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

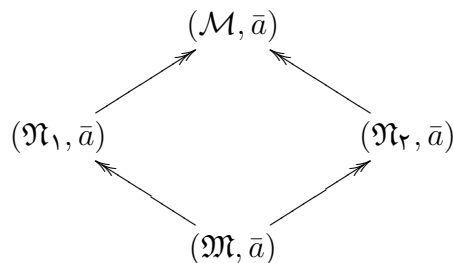
توجه ۱۴۷. فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو $\mathcal{L}$ -ساختار باشند و $\bar{a} \in \mathfrak{M}$ و $\bar{b} \in \mathfrak{N}$. آنگاه

$$\{\varphi(\bar{x}) \mid \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a})\} = \text{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \text{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{b}) = \{\varphi(\bar{x}) \mid \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{b})\}$$

هرگاه دو $\mathcal{L} \cup \{\bar{c}\}$ -ساختار $(\mathfrak{M}, \bar{a})$ و $(\mathfrak{N}, \bar{b})$ با هم، هم‌ارز مقدماتی باشند $(\mathfrak{M}, \bar{a}) \stackrel{\mathcal{L} \cup \{\bar{c}\}}{\equiv} (\mathfrak{N}, \bar{b})$ ، $\bar{c}^{\mathfrak{M}} = \bar{a}$ و $\bar{c}^{\mathfrak{N}} = \bar{b}$.

توجه ۱۴۸. اگر T یک تئوری کامل باشد آنگاه می‌نویسیم $p(\bar{x}) \in S_n(T)$ هرگاه برای هر (یک) مدل $\mathfrak{M} \models T$ عبارت $p(\bar{x}) \cup \text{Th}(\mathfrak{M})$ سازگار باشد. به بیان دیگر هرگاه $p(\bar{x}) \cup T$ سازگار باشد.

لم ۱۴۹. دیاگرام زیر را در نظر بگیرید.



فرض کنید $\mathfrak{N}_1$ و $\mathfrak{N}_2$ دو توسیع مقدماتی از $\mathfrak{M}$ باشند و $\text{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \text{tp}^{\mathfrak{N}_1}(\bar{b}_1) = \text{tp}^{\mathfrak{N}_2}(\bar{b}_2)$ و $\bar{d} \in \mathcal{M}$ موجود است به طوری که $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{d}) = \text{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \text{tp}^{\mathfrak{N}_1}(\bar{b}_1) = \text{tp}^{\mathfrak{N}_2}(\bar{b}_2)$.

مشاهده ۱۵۰. فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو $\mathcal{L}$ -ساختار باشند و $a \in \mathfrak{M}$ و $b \in \mathfrak{N}$. فرض کنید یک سامانه‌ی رفت و برگشتی از ایومرفیسم‌های جزئی میان $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ وجود داشته باشد که $\bar{a} \xrightarrow{f} \bar{b}$ در آن واقع شود. آنگاه $\text{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \text{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{b})$.

اثبات. با توجه به فرض‌های گفته شده، بین دو ساختار $(\mathfrak{M}, \bar{a})$ و $(\mathfrak{N}, \bar{b})$ در زبان $\mathcal{L} \cup \{c\}$ یک سامانه‌ی رفت و برگشتی وجود دارد پس $(\mathfrak{M}, \bar{a}) \stackrel{\mathcal{L} \cup \{c\}}{\equiv} (\mathfrak{N}, \bar{b})$ پس $\text{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}) = \text{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{b})$. $\square$

تمرین ۲۳. فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو $\mathcal{L}$ -ساختار باشند و $\bar{a} \in \mathfrak{M}$ و $\bar{b} \in \mathfrak{N}$. آنگاه نشان دهید که $\langle \bar{a} \rangle^{\mathfrak{M}} \cong \langle \bar{b} \rangle^{\mathfrak{N}}$ اگر و تنها اگر برای هر $\mathcal{L}$ -فرمول بدون سور $\varphi(\bar{x})$ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{b})$ (در این صورت می‌گوییم $f: \bar{a} \rightarrow \bar{b}$ یک ایزومرفیسم جزئی است).

نتیجه ۱۵۱. فرض کنید $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ دو $\mathcal{L}$ -ساختار باشند و $\bar{a} \in \mathfrak{M}$ و $\bar{b} \in \mathfrak{N}$. فرض کنید برای هر فرمول بدون سور $\varphi(\bar{x})$ بدانیم که $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{b})$ هم‌چنین فرض کنید که یک سامانه‌ی رفت و برگشتی از ایزومرف‌ها موجود باشد که شامل $\langle \bar{a} \rangle^{\mathfrak{M}} \rightarrow \langle \bar{b} \rangle^{\mathfrak{N}}$ باشد. $f: \bar{a} \rightarrow \bar{b}$ باشد. آنگاه برای هر فرمول دلخواه $\varphi(\bar{x})$ داریم $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{b})$.

۱۷ جلسه‌ی هفدهم، تایپ‌ها

فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساختار باشد و $A \subseteq \mathfrak{M}$ زیر مجموعه می‌گوییم $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathfrak{M}}(A)$ یک تایپ کامل در $\mathfrak{M}$ روی A است هرگاه

۱. $p(\bar{x})$ یک مجموعه‌ی (شاید) نامتناهی از فرمول‌های به صورت $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ است که در آن $\bar{a} \in A$ (تغییر می‌کند) ولی متغیرها یکسان هستند.

$$p(\bar{x}) = \{\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \mid \bar{a} \in A\}$$

برای مثال $p(x) = \{x > 1, x > 2, x > 3, \dots\}$ یک تایپ در $S_1^{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ است.

۲. برای هر تعداد متناهی فرمول $p(\bar{x})$ $\varphi_1(\bar{x}, \bar{a}_1), \dots, \varphi_n(\bar{x}, \bar{a}_n) \in p(\bar{x})$ یک عنصر $\bar{b} \in \mathfrak{M}$ وجود دارد به طوری که

$$\mathfrak{M} \models \varphi_1(\bar{b}, \bar{a}_1) \wedge \dots \wedge \varphi_n(\bar{b}, \bar{a}_n) \in p(\bar{x})$$

۳. برای هر فرمول $\varphi(x, \bar{a})$ با پارامتر در A یا $\varphi(x, \bar{a}) \in p(\bar{x})$ یا $\neg \varphi(x, \bar{a}) \in p(\bar{x})$

مثال ۱۵۲. ساختار $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$\pi(\bar{x}) = \{x > 1, x > 1 + 1, x > 1 + 1 + 1, \dots\}$$

– مجموعه‌ی پارامترها: $\emptyset$.

– هر تعداد متناهی از فرمول‌های $x > n$ در $\mathbb{N}$ برآورده می‌شوند.

– ولی همه‌ی این فرمول‌ها به صورت همزمان در $\mathbb{N}$ برآورده نمی‌شوند.

تعریف ۱۵۳. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساختار باشد، $A \subseteq \mathfrak{M}$ و $\bar{b} \in \mathfrak{M}$.

$$\text{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b}/A) = \{\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \mid \bar{a} \in A, \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{b}, \bar{a})\}$$

توجه: $\text{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{b}/A)$ تمامی ویژگی‌های مرتبه اول $\bar{b}$ و یک تایپ کامل است.

یادآوری ۱۵۴. اگر $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساختار باشد و $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ آنگاه یک ساختار $\mathcal{N}$ $\prec_{\text{توسیع مقدماتی}} \mathcal{M}$ موجود است که در آن عنصری مانند $\bar{b}$ موجود است به طوری که $p(\bar{x}) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}/A)$ می‌گوییم $\bar{b}$ تایپ p را برآورده می‌کند.

مثال ۱۵۵. نشان دهید که یک توسیع مقدماتی از $(\mathbb{N}, +, \cdot, \circ, 1, <)$ وجود دارد که در آن عنصری نا استاندارد پیدا می‌شود (یعنی عنصری که از تمام اعداد طبیعی بزرگتر است).

پاسخ: مجموعه $\Sigma(x) = \{x > 1, x > 1 + 1, x > 1 + 1 + 1, \dots\}$ در $\mathbb{N}$ متناهیماً ارضا پذیر است. پس در یک توسیع مقدماتی $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ عنصری مانند a موجود است که تمامی فرمول‌های موجود در Σ را برآورده می‌کند.

مثال ۱۵۶. ساختار $(\mathbb{R}, <)$ را در نظر بگیرید.

$$\text{tp}(\sqrt{2}/\mathbb{Q}) = \{\varphi(x, a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}, \mathbb{R} \models \varphi(\sqrt{2}, a_1, \dots, a_n)\}$$

$$\text{tp}(\sqrt{2}/\mathbb{Q}) \supseteq \{x > 1, x < 2, \dots\}$$

توجه ۱۵۷. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساختار است، $a \in \mathcal{M}$ و $A \subseteq \mathcal{M}$. در این صورت

$$\text{tp}^{\mathcal{M}}(a/A) = \{\varphi(x) \mid \mathcal{M} \models \varphi(a)\}.$$

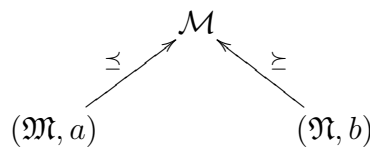
بنابراین اگر $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ آنگاه $\text{tp}^{\mathcal{M}}(a) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(a)$ در حالت کلی داریم:

$$(\mathcal{M} \prec \mathcal{N}) \quad p(x_1, \dots, x_n) = \text{tp}^{\mathcal{N}}\left(\frac{a_1, \dots, a_n}{A}\right) \iff p(x_1, \dots, x_n) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$$

تعریف ۱۵۸. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساختار باشد، $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}$ و $c_1, \dots, c_n \notin \mathcal{L}$. منظور از $\mathcal{L} \cup \{c\}$ ساختار $(\mathcal{M}, a_1, \dots, a_n)$ است که با تعبیر $c_i^{\mathcal{M}} = a_i$ بدست می‌آید.

لم ۱۵۹. فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو $\mathcal{L}$ -ساختار باشند و $a \in \mathcal{M}$ و $b \in \mathcal{N}$. آنگاه $\text{tp}^{\mathcal{M}}(a) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(b)$ هرگاه دو $\mathcal{L} \cup \{c\}$ -ساختار $(\mathcal{M}, a)$ و $(\mathcal{N}, b)$ هم‌ارز مقدماتی باشند.

نتیجه ۱۶۰. اگر $\text{tp}^{\mathcal{M}}(a) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(b)$ ، آنگاه ساختار



و $c \in \mathcal{M}$ موجود است به طوری که $\text{tp}^{\mathcal{M}}(a) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(b) = \text{tp}^{\mathcal{M}}(c)$

لم ۱۶۱. فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو $\mathcal{L}$ -ساختار باشند و همچنین $a \in \mathcal{M}$ و $b \in \mathcal{N}$. فرض کنید یک سامانه‌ی رفت و برگشتی از ایزومورفیسم‌های میان زیرساختارهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ موجود باشد که نگاشت $\langle a \rangle^{\mathcal{M}} \rightarrow \langle b \rangle^{\mathcal{N}} : f_*$ جزو آن باشد. آنگاه $\text{tp}^{\mathcal{M}}(a) \equiv \text{tp}^{\mathcal{N}}(b)$.

۱۸ جلسه‌ی هجدهم، مدل همگن

نکته ۱۶۲. فرض کنید $p(x) \in S^{\mathfrak{M}}(A)$ یک تایپ کامل در $\mathfrak{M}$ باشد. آنگاه یک $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$ که در آن بی‌نهایت عنصر a پیدا می‌شوند به طوری که $\text{tp}^{\mathfrak{N}}(a/A) = p(x)$.

قضیه ۱۶۳. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساختار باشد و $a, b \in \mathfrak{M}$. آنگاه $a \equiv b$ یعنی $\text{tp}^{\mathfrak{M}}(a) = \text{tp}^{\mathfrak{M}}(b)$ اگر و تنها اگر یک گسترش مقدماتی $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$ به همراه یک اتومرفیسم $\sigma : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$ موجود باشند به طوری که $\sigma(a) = b$.

اثبات. فرض کنید ساختار $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$ و اتومرفیسم $\sigma : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$ وجود داشته باشند به طوری که $\sigma(a) = b$. در این صورت برای هر فرمول $\varphi(x)$ داریم: $\mathfrak{N} \models \varphi(a) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(\sigma(a)) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(b)$. حال برای اثبات قسمت دیگر فرض کنید $\mathfrak{M} = (m_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ شمارشی برای $\mathfrak{M}$ باشد. هدف ساختن نگاشت‌های جزئی مقدماتی $f_\alpha : \mathfrak{N}_\alpha \rightarrow \mathfrak{N}_\alpha$ برای $\alpha < \lambda$ است به گونه‌ای که اگر $\alpha_1 < \alpha_2$ آنگاه $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}_{\alpha_1}, f_{\alpha_1} \subseteq f_{\alpha_2}$ و $m_\alpha \in \text{Dom}(f_{\alpha+1})$ و $m_\alpha \in \text{Rang}(f_{\alpha+1})$. ابتدا توجه کنید که نگاشت $f_\alpha : a \rightarrow b$ یک نگاشت مقدماتی جزئی است یعنی برای هر فرمول $\varphi(x)$ (چون $\text{tp}^{\mathfrak{M}}(a) = \text{tp}^{\mathfrak{M}}(b)$) داریم: $\mathfrak{M} \models \varphi(a) \iff \mathfrak{M} \models \varphi(f_\alpha(a)) \iff \mathfrak{M} \models \varphi(b)$. در مراحل حدی اجتماع نگاشت‌های قبلی را بگیرید. فرض کنید $f_\alpha : \mathfrak{N}_\alpha \rightarrow \mathfrak{N}_\alpha$ ساخته شده است و یک نگاشت جزئی مقدماتی است. برای ساختن $f_{\alpha+1}$ به گونه‌ی زیر عمل کنید. برای مثال برای ساختن f_1 از روی f_0 به صورت زیر عمل کنید. فرض کنید m_0 عنصری از $\mathfrak{M}$ باشد. m_0 را به دامنه اضافه می‌کنیم. هدف پیدا کردن یک عنصر t است به طوری که $\text{tp}(m_0/a) = \text{tp}(t/b)$ به بیان دیگر می‌خواهیم عنصر t را به گونه‌ای پیدا کنیم که برای هر فرمول مانند φ داشته باشیم $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, a) \leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(t, b)$. مجموعه‌ی زیر از فرمول‌ها را در نظر بگیرید:

$$p(x) : \{ \varphi(x, b) \mid \mathfrak{M} \models \varphi(m_0, a) \}$$

هر تعداد متناهی از فرمول‌ها در مجموعه‌ی بالا در $\mathfrak{M}$ برآورده می‌شوند. برای مثال نشان می‌دهیم که

$$\mathfrak{M} \models \exists x \quad \varphi_1(x, b) \wedge \varphi_2(x, b) \wedge \varphi_3(x, b)$$

چون $\mathfrak{M} \models \exists x \quad \varphi_1(x, a) \wedge \varphi_2(x, a) \wedge \varphi_3(x, a)$ و $a \equiv b$ بنابراین $\mathfrak{M} \models \exists x \quad \varphi_1(x, b) \wedge \varphi_2(x, b) \wedge \varphi_3(x, b)$. بنابراین $p(x)$ یک تایپ روی $\mathfrak{M}$ است. بنابراین مدل $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{M}$ که در آن یک عنصر t وجود دارد به طوری که t تایپ $p(x)$ را برآورده می‌کند. توجه شود که $m_0 a \equiv tb$ یعنی برای هر فرمول φ داریم: $\mathfrak{M} \models \varphi(m_0, a) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(t, b)$. به طور مشابه می‌توان m_0 را به برد اضافه کرد. فرض کنید با ادامه‌ی روند فوق تمامی $f_\alpha : \mathfrak{N}_\alpha \rightarrow \mathfrak{N}_\alpha$ ها به گونه‌ای که ذکر شد ساخته شده باشند، قرار دهید $f := \bigcup_{\alpha < \lambda} f_\alpha$ یعنی $f : \bigcup \mathfrak{N}_\alpha = \mathcal{N}_1 \rightarrow \bigcup \mathfrak{N}_\alpha = \mathcal{N}_1$. نگاشت $f : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_1$ نگاشت جزئی مقدماتی است. توجه کنید که برای هر $m_\alpha \in \mathfrak{M}$ داریم $m_\alpha \in \text{Dom}(f)$ و $m_\alpha \in \text{Rang}(f)$. مشابه همین روند را برای $\mathcal{N}_1$ انجام دهید. بنابراین گسترش مقدماتی $\mathcal{N}_2 \preceq \mathcal{N}_1$ و نگاشت جزئی مقدماتی $f_2 : \mathcal{N}_2 \rightarrow \mathcal{N}_2$ وجود دارند. با ادامه‌ی این روند $(\mathcal{N}_k)_{k \in \omega}$ را بسازید به طوری که $\mathcal{N}_1 \preceq \mathcal{N}_2 \preceq \mathcal{N}_3 \preceq \dots$. بنابراین $\bigcup f_n : \bigcup \mathcal{N}_n \rightarrow \bigcup \mathcal{N}_n$ یک به یک و پوشا است. ثابت کردیم که اگر $a \equiv b$ آنگاه گسترش مقدماتی $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{M}$ و نگاشت مقدماتی $\sigma : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$ وجود دارد به طوری که $\sigma(a) = b$. $\square$

توجه ۱۶۴. گسترش مقدماتی $\mathfrak{N}$ که در قضیه‌ی قبل ساخته شد دارای این ویژگی است که اگر $a, b \in \mathfrak{N}$ و $a \equiv b$ و $c \in \mathfrak{N}$ آنگاه $d \in \mathfrak{N}$ وجود دارد به طوری که $ac \equiv bd$.

تعمیم قضیه: اگر $a, b \in \mathcal{M}$ و $A \subseteq \mathcal{M}$ و $\text{tp}(a/A) = \text{tp}(b/A)$ آن‌گاه یک گسترش مقدماتی مانند $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ به همراه یک اتومرفیسم $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$: σ موجود است به طوری که σ ، A را نقطه‌وار حفظ کند و $\sigma(a) = b$.
 σ ، A را نقطه‌وار حفظ می‌کند یعنی $\sigma(t) = t$ $\forall t \in A$. σ ، A را مجموعه‌وار حفظ می‌کند یعنی $\sigma(A) = A$ به بیان دیگر $t \in A \rightarrow \sigma(t) \in A$.

مدل‌های اشباع (آکنده)^{۱۳}

فرض کنید T یک تئوری کامل در یک زبان شمارا باشد و فرض کنید $\mathcal{M} \models T$. می‌گوییم $\mathcal{M}$ یک مدل κ -اشباع است هرگاه برای هر مجموعه پارامتر $A \subseteq \mathcal{M}$ به طوری که $|A| < \kappa$ و هر تایپ $P(x) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ عنصری مانند $u \in \mathcal{M}$ پیدا شود به طوری که $u \models P(x)$ یعنی برای هر $\varphi \in P(x)$ داشته باشیم $\mathcal{M} \models \varphi(u)$. مدل $\mathcal{M} \models T$ را اشباع می‌نامیم هرگاه $|\mathcal{M}|$ -اشباع باشد. مدل $\mathcal{M}$ را $\aleph_0$ -اشباع می‌نامیم هرگاه هر تایپی روی یک مجموعه‌ی متناهی A در $\mathcal{M}$ برآورده شود.

۱۹ جلسه‌ی نوزدهم، وجود مدل‌های اشباع

تمرین ۲۴. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک مدل اشباع باشد و $a, b \in \mathcal{M}$. نشان دهید که $\text{tp}(a/A) = \text{tp}(b/A)$ که $|A| < |\mathcal{M}|$ اگر و تنها اگر یک اتومرفیسم $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$: σ موجود باشد به طوری که $\sigma(a) = b$ و σ اعضای A را نقطه‌وار حفظ کند.

تمرین ۲۵. فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ دو مدل اشباع هم‌اندازه باشند. نشان دهید که اگر $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ آن‌گاه $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

تمرین ۲۶. اگر T یک تئوری κ -جازم باشد (یعنی هر دو مدل T از اندازه‌ی κ با هم ایزومرف باشند). آن‌گاه تنها (در حد یکریختی) مدل T از سایز κ ، اشباع است.

تمرین ۲۷. فرض کنید $\mathcal{M} \models T$. نشان دهید که یک مدل κ -اشباع $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$ موجود است.

وجود مدل‌های اشباع

لم ۱۶۵. مدل κ -اشباع است اگر و تنها اگر هر تایپ $p \in S_1^{\mathcal{M}}(A)$ با $|A| < \kappa$ در $\mathcal{M}$ برآورده شود.

ایده‌ی اثبات. فرض کنید تایپ‌های n متغیره در $\mathcal{M}$ برآورده شوند. نشان می‌دهیم که اگر $p \in S_{n+1}^{\mathcal{M}}(A)$ که $|A| < \kappa$ ، آن‌گاه عناصر $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathcal{M}$ موجودند به طوری که $(a_1, \dots, a_{n+1}) \models p(\bar{x}) = p(x_1, \dots, x_{n+1})$. قرار دهید $q(x_1, \dots, x_n) = p|_{x_1, \dots, x_n}$ یعنی q مجموعه‌ی تمام فرمول‌های موجود در p با n متغیر است. بنابر فرض استقرا عناصر $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}$ موجودند به طوری که $a_1, \dots, a_n \models q(x_1, \dots, x_n)$ یعنی $a_1, \dots, a_n \models q(\frac{a_1, \dots, a_n}{A})$. $q(x_1, \dots, x_n) = \text{tp}(\frac{a_1, \dots, a_n}{A})$ مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$p'(x) = \{\varphi(a_1, \dots, a_n, x) \mid \varphi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in p\}$$

تعداد پارامترهای p' برابر است با $|A \cup \{a_1, \dots, a_n\}| = |A|$. ادعا می‌کنیم $p'(x)$ یک تایپ است. اگر این ادعا ثابت شود آن‌گاه حکم اثبات شده است. زیرا بنابر فرض استقرا عنصر $a_{n+1} \models p'$ و در این صورت

$$a_1, \dots, a_{n+1} \models p.$$

^{۱۳}Saturated

حال به اثبات ادعا می‌پردازیم؛ فرض کنید $\varphi_1(a_1, \dots, a_n, x), \varphi_2(a_1, \dots, a_n, x) \in p'(x)$ نشان می‌دهیم که

$$\mathfrak{M} \models \exists x \varphi_1(a_1, \dots, a_n, x) \wedge \varphi_2(a_1, \dots, a_n, x).$$

توجه شود $p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ در یک مدل بالاتر توسط عناصر $b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$ برآورده می‌شود. داریم:

$$b_1, \dots, b_n \equiv a_1, \dots, a_n$$

بنا به n -متغیره اشباع بودن $\mathfrak{M}$ ، عنصری مانند x وجود دارد به طوری که $\text{tp}(\frac{b_{n+1}}{b_1, \dots, b_n}) = \text{tp}(\frac{x}{a_1, \dots, a_n})$ یعنی $b_1, \dots, b_{n+1} \equiv a_1, \dots, a_n, x$ پس $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi_1(b_1, \dots, b_n, x) \wedge \varphi_2(b_1, \dots, b_n, x)$ در نتیجه

$$\mathfrak{M} \models \exists x \varphi_1(b_1, \dots, b_n, x) \wedge \varphi_2(b_1, \dots, b_n, x).$$

بنابراین $p'(x)$ سازگار است. $\square$

تعریف ۱۶۶. فرض کنید T یک تئوری کامل باشد. می‌گوییم $p(x_1, \dots, x_n) \in S_n(T)$ هرگاه $p(x_1, \dots, x_n) \in S_n^{\mathfrak{M}}(\emptyset)$ برای یک (همه‌ی) $\mathfrak{M} \models T$ ($S_n(T)$ مجموعه‌ی تایپ‌های بدون پارامتر است)

توجه ۱۶۷. فرض کنید T یک تئوری کامل در زبان شمارای $\mathcal{L}$ است و $\mathfrak{M} \models T$. اگر $|A| = \kappa$ ، آنگاه $|S_n^{\mathfrak{M}}(A)| \leq 2^\kappa$. (تعداد کل فرمول‌ها با پارامتر در A ، κ است.)

فرضیه پیوستار: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. (منظور از $\aleph_1$ اولین سائز بعد از $\aleph_0$ است.)

تمرین ۲۸. نشان دهید که تئوری T ، $\aleph_0$ -جازم است اگر و تنها اگر $|S_n(T)|$ متناهی باشد.

لم ۱۶۸. اگر $|S_n(T)| > \aleph_0$ ، آنگاه $|S_n(T)| = 2^{\aleph_0}$.

اثبات. تعداد تایپ‌ها ناشمارا و تعداد فرمول‌ها شمارا است. پس یک فرمول $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ هست که در ناشمارا تایپ قرار دارد. چون اگر هر فرمول در شمارا تایپ باشد از آنجا که تعداد فرمول‌ها شمارا است تعداد تایپ‌ها شمارا می‌شود. قرار دهید $[\varphi(x_1, \dots, x_n)] = \{p(x_1, \dots, x_n) \in S_n(T) \mid \varphi(x_1, \dots, x_n) \in p\}$ ادعا می‌کنیم فرمول ψ وجود دارد به طوری که $[\varphi \wedge \psi]$ و $[\varphi \wedge \neg\psi]$ هر دو ناشمارا هستند. به برهان خلف فرض کنید که چنین نباشد. یعنی برای هر فرمول ψ یا $[\varphi \wedge \psi]$ یا $[\varphi \wedge \neg\psi]$ شمارا باشند. مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$q(x_1, \dots, x_n) = \{ \psi \mid [\varphi \wedge \psi] > \aleph_0 \}$$

$\downarrow$
با n متغیر

بنا به فرض خلف برای هر فرمول ψ اگر $\psi \notin q$ ، آنگاه $\neg\psi \in q$ و به علاوه برای هر ψ یا $\psi \in q$ یا $\neg\psi \in q$ ؛ زیرا

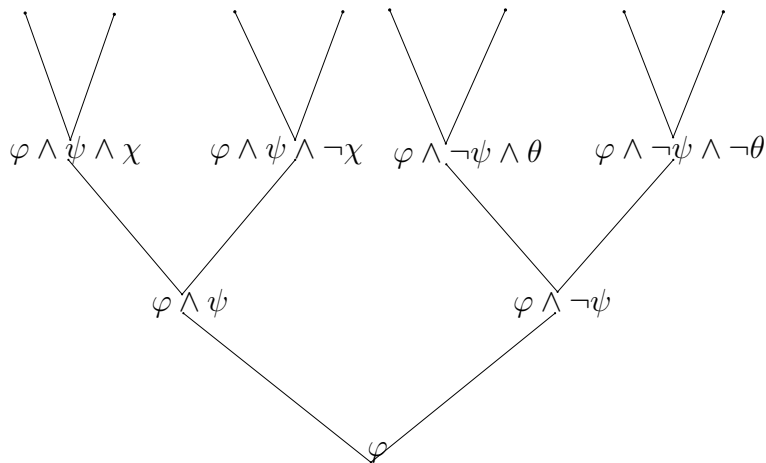
$$[\varphi] = [\varphi \wedge \psi] \cup [\varphi \wedge \neg\psi].$$

اگر یکی از دو مجموعه‌ی بالا شمارا باشد دیگری ناشماراست. حال نشان می‌دهیم که $q(x_1, \dots, x_n)$ یک تایپ کامل است. فرض کنید $\psi_1, \dots, \psi_n \in q$. اگر $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \notin q$ ، آنگاه $\neg\psi_1 \vee \dots \vee \neg\psi_n \in q$ در نتیجه $[\varphi \wedge (\neg\psi_1 \vee \dots \vee \neg\psi_n)]$ ناشماراست پس $[\varphi \wedge \neg\psi_1] \cup \dots \cup [\varphi \wedge \neg\psi_n]$ ناشماراست. این تناقض است با اینکه تک تک آن‌ها شمارا هستند. پس $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \in q$. بنابراین اگر برای هر فرمول ψ ، $[\varphi \wedge \psi]$ یا $[\varphi \wedge \neg\psi]$ شمارا باشد آنگاه $q = \{\psi \mid [\varphi \wedge \psi] \text{ ناشمارا باشد}\}$ یک تایپ کامل است. از طرفی $[\varphi] = \bigcup_{\psi} [\varphi \wedge \psi] = \bigcup_{\psi} [\varphi \wedge \neg\psi] \cup \{q\}$ پس $[\varphi]$ شمارا است و این تناقض است. تا اینجا ثابت کردیم که

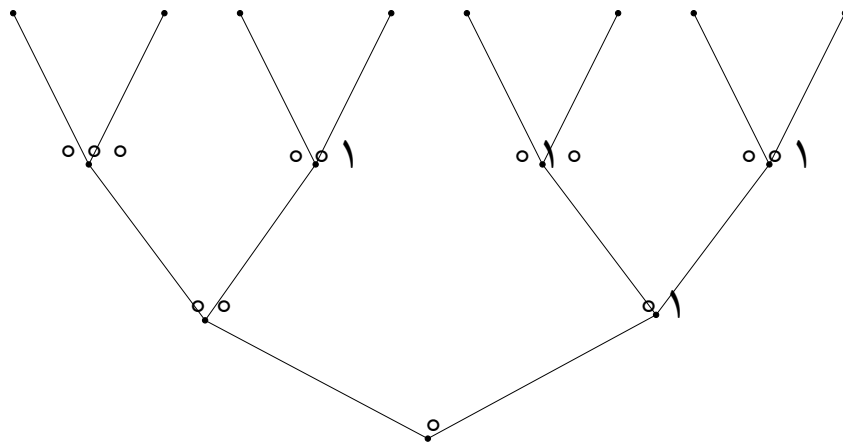
(۱) فرمول φ وجود دارد به طوری که $[\varphi]$ ناشماراست.

(۲) اگر $[\varphi]$ نا شمارا باشد حتماً یک فرمول ψ وجود دارد به طوری که هر دوی $[\varphi \wedge \psi]$ و $[\varphi \wedge \neg\psi]$ نا شمارا هستند.

بنابراین با ادامه‌ی روند فوق درختی از فرمول‌ها به صورت زیر خواهیم داشت.



سوال ۱۶۹. تعداد مسیرها در این درخت چقدر است؟

☐

از آنجا که مسیرهای متفاوتی با هم ناسازگارند، ۲^{۸۰} تایپ داریم.

نتیجه ۱۷۰. اگر $|S_n(T)| > \aleph$ ، آنگاه T دارای مدل شمارای اشباع نیست.

۲۰ جلسه‌ی بیستم، پایان مدل‌های اشباع

قضیه ۱۷۱. اگر T یک تئوری کامل باشد. آنگاه T دارای یک مدل اشباع شماراست ($\mathfrak{M} \models T$ ، $|M| = \aleph_0$ و $\aleph_0$ -اشباع)

$$(n \in \mathbb{N} \text{ برای هر}) \quad |S_n(T)| \leq \aleph_0. \iff$$

اثبات. ($\Leftarrow$) قبلاً ثابت شده است. زیرا ثابت کردیم که اگر $|S_n(T)| > N$ ، آنگاه $|S_n(T)| = 2^{N_0}$. بنابراین اگر قرار

باشد در $\mathcal{M}$ تمامی این تایپ‌ها برآورده شوند، باید $|\mathcal{M}| \geq 2^N$.

($\Rightarrow$) فرض کنید برای هر n ، $|S_n(T)| \leq \aleph_0$. فرض کنید $\{P_i(\bar{x})\}_{i \in \omega}$ شمارشی از تمام تایپ‌های موجود در تمام $S_n(T)$ ‌ها باشد. فرض کنید $\mathcal{M} \models T$ شمارا باشد. یک مدل شمارای $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1 \prec \dots$ وجود دارد به طوری که P_0 در $\mathcal{M}_1$ برآورده شود. فرض کنید $\mathcal{M}_n$ ساخته شده باشد و $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}_{n+1} \models T$ طوری بگیرید که تایپ P_n در $\mathcal{M}_{n+1}$ برآورده شود و $\mathcal{M}_{n+1}$ شمارا باشد. با ادامه‌ی این روند زنجیری مقدماتی از مدل‌ها به صورت $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2 \prec \dots$ خواهیم داشت. قرار دهید $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in \omega} \mathcal{M}_i$. اولاً $\mathcal{M}$ شماراست (زیرا اجتماعی از مدل‌های شماراست). ثانیاً تمامی تایپ‌های بدون پارامتر در $\mathcal{M}$ برآورده می‌شوند. قبلاً ثابت کردیم که یک مدل شمارای $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ موجود است که $\mathcal{N}$ همگن است. ادعا می‌کنیم $\mathcal{N}$ یک مدل $\aleph_0$ -اشباع است. فرض کنید $P(x) \in S^{\mathcal{N}}(\bar{a})$. نشان می‌دهیم که $P(x)$ در $\mathcal{N}$ برآورده می‌شود. فرض کنید $P(x) = \{\varphi_1(x, \bar{a}), \dots\}$. تایپ $q(x, \bar{y}) = \{\varphi(x, \bar{y}) \mid \varphi(x, \bar{a}) \in P(x)\}$ را در نظر بگیرید. q یک تایپ بدون پارامتر در $S_n(T)$ است. به عنوان تمرین نشان دهید که q سازگار است. از آنجا که در $\mathcal{M}$ تمامی تایپ‌های موجود در $S_n(T)$ برآورده می‌شود عنصر $b_0 \bar{b}_1 \in \mathcal{M}$ به طوری که $q(x, \bar{y}) \in \text{tp}(b_0 \bar{b}_1)$ (که $(b_0 \bar{b}_1 \models q(x, \bar{y}))$) توجه کنید که $\bar{b}_1 \equiv \bar{a}$. پس عنصر $d \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $b_0 \bar{b}_1 \equiv d\bar{a}$. بنابراین $P = \text{tp}(d/\bar{a})$. $\square$

نظریه‌ی مجموعه‌ها

مجموعه‌ها توسط رابطه‌ی $\in$ خوش‌ترتیب هستند.

$$1, 2, \dots, n, n+1, \dots, \omega_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, \omega_0 + 1, \omega_0 + 2, \dots, \omega_0 + \omega_0, \omega_0 + \omega_0 + 1, \dots, \omega_1, \dots, \omega_2, \dots$$

هر کدام از $\{1, 2, \dots\}$ و ω_k ‌ها یک کاردینال است.

تعریف ۱۷۲. فرض کنید λ یک اوردینال باشد. می‌گوییم $\text{cof}(\lambda) = \kappa$ هرگاه κ کوچکترین کاردینال باشد به طوری که یک تابع $f: \kappa \rightarrow \lambda$ موجود است که f در λ بی‌پایان است؛ یعنی $\forall \beta \in \lambda \exists \alpha \in \kappa f(\alpha) > \beta$.

مثال ۱۷۳. $\text{cof}(\omega)$ را بدست آورید. (اگر $n < \omega$ ، آن‌گاه n یک عدد طبیعی است و n نمی‌تواند با ω هم‌پایان شود).

مثال ۱۷۴. $\text{cof}(\omega_\omega)$ را بدست آورید. (تابع $f: \omega \rightarrow \aleph_\omega$ که $f(n) \rightarrow \aleph_n$ را در نظر بگیرید).

توجه ۱۷۵. $\aleph_0$ یک کاردینال حدی است به طوری که $\text{cof}(\aleph_0) = \aleph_0$.

تعریف ۱۷۶. کاردینال α را تالی می‌نامیم هرگاه $\alpha = \kappa^+$. $\alpha = \kappa^+$ اولین کاردینال پس از κ است).

سوال ۱۷۷. آیا غیر از $\aleph_0$ کاردینال حدی دیگری مانند κ پیدا می‌شود به طوری که $\text{cof}(\kappa) = \kappa$ ؟

لم ۱۷۸. فرض کنید $\kappa \geq \aleph_1$. آن‌گاه $\text{cof}(\kappa^+) = \kappa^+$.

اثبات. باید نشان دهیم که $\text{cof}(\kappa^+) \neq \kappa$. فرض کنید $f: \kappa \rightarrow \kappa^+$ یک تابع باشد. آن‌گاه $f[\kappa] = \{f(\alpha) \mid \alpha \in \kappa\}$ کران‌دار است. در واقع $\bigcup_{\alpha \in \kappa} f(\alpha) \in \kappa^+$. $\square$

قضیه ۱۷۹. فرض کنید $\mathcal{M} \models T$. آن‌گاه برای هر کاردینال $\kappa > \aleph_0$ یک مدل $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ پیدا می‌شود به طوری که $|\mathcal{N}| \leq |\mathcal{M}|^\kappa$ و $\mathcal{N}$ یک مدل κ^+ -اشباع باشد.

اثبات. برای این که $\mathfrak{M}^+$ -اشباع باشد باید تمامی تایپ های $P \in S^{\mathfrak{M}}(A)$ که در آن $|A| \leq \kappa$ در $\mathfrak{M}$ برآورده شوند. قرار دهید $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$. تعداد تمام زیرمجموعه های κ عضوی $\mathfrak{M}$ حداکثر برابر است با $|\mathfrak{M}|^\kappa$. تعداد تمامی ۱-تایپ های روی تمامی زیرمجموعه های κ عضوی $\mathfrak{M}$ حداکثر $|\mathfrak{M}|^\kappa$ است. بنابراین فرض کنید $\{P_\lambda\}_{\lambda < |\mathfrak{M}|^\kappa}$ شمارشی از تمامی این تایپ ها باشد. زنجیر مقدماتی $(\mathfrak{M}_\alpha)_{\alpha < |\mathfrak{M}|^\kappa}$ را به گونه ای بسازید که در $\bigcup_{|\mathfrak{M}_\alpha| = |\mathfrak{M}|} \mathfrak{M}_\alpha$ تمام تایپ های متعلق به $\{P_\lambda\}_{\lambda < |\mathfrak{M}|^\kappa}$ برآورده شوند. بنابراین $|\bigcup \mathfrak{M}_\alpha| \leq |\mathfrak{M}|^\kappa$. قرار دهید $\mathfrak{M}_0 = \bigcup \mathfrak{M}_\alpha$. روند فوق را ادامه دهید و زنجیر $(\mathfrak{M}_\alpha)_{\alpha \in \kappa^+}$ را بسازید. ادعا می کنیم که $\mathfrak{M}_\alpha^+ \cup_{\alpha \in \kappa^+} \mathfrak{M}_\alpha$ -اشباع است بنابراین $|\bigcup_{\alpha \in \kappa^+} \mathfrak{M}_\alpha| \leq |\mathfrak{M}|^\kappa$. فرض کنید $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \kappa^+} \mathfrak{M}_\alpha$ و $|A| \leq \kappa$. از آنجا که $\text{cof}(\kappa^+) > \kappa$ ، یک مدل $\mathfrak{M}_\alpha$ پیدا می شود به طوری که $A \subseteq \mathfrak{M}_\alpha$. حال هر تایپ روی A در $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ برآورده می شود. $\square$

نتیجه ۱۸۰. اگر $\kappa^+ = 2^\kappa$ آنگاه یک مدل اشباع از سائز κ^+ موجود است.

نتیجه ۱۸۱. اگر فرضه ی پیوستار درست باشد همواره مدل های اشباع از سائز κ^+ موجود است (برای هر κ).

قضیه ۱۸۲. فرض کنید T کامل باشد. آنگاه T دارای یک مدل از سائز کلاسی دارد که κ -اشباع برای هر کاردینال κ است.

اثبات. پروژه $\square$

تعریف ۱۸۳. به مدلی که در قضیه قبل ساخته می شود، مدل هیولا (سترگ)^{۱۴} گفته می شود.

تمرین ۲۹. فرض کنید $T \models \mathfrak{M}$ و برای هر $i \in \omega$ $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}$. فرض کنید U فرا فیلتر فرشه روی $\mathfrak{M}$ باشد. نشان دهید $\prod \mathfrak{M}_i / U$ یک مدل $\aleph_1$ -اشباع است.

۲۱ جلسه ی بیست و یکم، مجموعه های تعریف پذیر

تعریف ۱۸۴. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساختار باشد و $A \subseteq \mathfrak{M}$. می گویم مجموعه ی $X \subseteq \mathfrak{M}^n$ یک مجموعه ی A -تعریف پذیر است هرگاه فرمول $\varphi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$ موجود باشد که در آن $a_i \in A$ و

$$X = \{(b_1, \dots, b_n) \in \mathfrak{M}^n \mid \mathfrak{M} \models \varphi(b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_m)\}$$

می گویم $X, \emptyset$ -تعریف پذیر است هرگاه $\{(b_1, \dots, b_n) \mid \mathfrak{M} \models \varphi(b_1, \dots, b_n)\} = \{\bar{b} \mid \varphi(\bar{b})\}$.

مثال ۱۸۵. در ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ مجموعه زیر $\{a_1, a_2, a_3\}$ -تعریف پذیر است (فرض کنید $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$)

$$X = \{b \in \mathbb{R} \mid a_1 + a_2 b + a_3 b^2\}$$

و مجموعه ی $\emptyset, X = \{b \in \mathbb{R} \mid b^2 - 1 \neq 0\}$ -تعریف پذیر است.

مثال ۱۸۶. در ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ مجموعه ی $X = \{(a, b) \mid a \leq b\}$ تعریف پذیر است. همچنین در این ساختار رابطه ی ترتیب $\emptyset$ -قابل تعریف است. یعنی مجموعه ی $X = \{(a, b) \mid a \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^2$ یک مجموعه ی قابل تعریف است.

$$X = \{(x, y) \mid \mathbb{R} \models \exists z \ x + z^2 = y\}$$

^{۱۴}Monster

مثال ۱۸۷. در ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, \circ, 1)$ مجموعه‌ی $X = \{i, -i\}$ قابل تعریف است.

$$X = \{x \mid \mathbb{C} \models x^2 + 1 = 0\}$$

مثال ۱۸۸. فرض کنید $f, g \in \mathbb{R}[x]$ ، آنگاه $\{x \mid \mathbb{R} \models f(x) < g(x)\}$ و $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ در ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ قابل تعریف هستند.

سوال ۱۸۹. آیا در $(\mathbb{R}, +, \cdot, \circ, 1)$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی قابل تعریف است؟

مثال ۱۹۰. در ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, \circ, 1)$ ، مجموعه‌ی $\{(x_1, \dots, x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0, f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\}$ قابل تعریف است.

سوال ۱۹۱. آیا در ساختار $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \circ, 1)$ ، مجموعه‌ی $X = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ تعریف پذیر است؟
لاگرانژ: عدد $x \in \mathbb{Z}$ مثبت است اگر و تنها اگر حاصل جمع چهار مربع کامل باشد.

$$A = \{x \mid x \geq 0\} = \{x \mid \exists a_1, a_2, a_3, a_4 \ x = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2\}$$

$$X = \{(x, y) \mid y - x \in A\} = \{(x, y) \mid \exists a \in A \ y = x + a\}$$

مثال ۱۹۲. ساختار $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ را در نظر بگیرید. فرمول $\varphi(x)$ موجود است به طوری که $\mathcal{N} \models \varphi(e, s, t)$ پس زیرمجموعه‌های محاسبه پذیر $\mathcal{N}$ تعریف پذیر هستند.

سوال ۱۹۳. آیا $\mathbb{R}$ در ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, \circ, 1)$ قابل تعریف است؟

مشاهده ۱۹۴. فرض کنید $X \subseteq \mathfrak{M}^n$ یک مجموعه‌ی A -تعریف پذیر باشد، آنگاه هر اتومرفیسم $\sigma : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ که A را نقطه وار حفظ کند $(\forall a \in A \ \sigma(a) = a)$ ، X را مجموعه وار حفظ می کند $(\sigma(X) = \{\sigma(x) \mid x \in X\} = X)$.
اثبات.

$$\begin{aligned} x \in X &\iff \mathfrak{M} \models \varphi(x, \bar{a}) \\ &\iff \mathfrak{M} \models \varphi(\sigma(x), \sigma(\bar{a})) \\ &\iff \mathfrak{M} \models \varphi(\sigma(x), \bar{a}) \\ &\iff \sigma(x) \in X \end{aligned}$$

□

سوال ۱۹۵. آیا $\{i\}$ یک مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ -تعریف پذیر است؟ خیر. زیرا $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $a + bi \rightarrow a - bi$ یک اتومرفیسم است و این اتومرفیسم $\mathbb{R}$ را نقطه وار حفظ می کند اما $\sigma(i) = -i$.

سوال ۱۹۶. آیا $\mathbb{R}$ در ساختار $(\mathbb{C}, +, \cdot, \circ, 1)$ قابل تعریف است؟

فرض کنید $\mathbb{R}$ توسط فرمول $\varphi(x, \bar{a})$ با تعداد متناهی پارامتر تعریف پذیر باشد. فرض کنید $A = \{\bar{a}\} \subseteq \mathbb{C}$ مجموعه‌ی پارامترها باشد و فرض کنید $r, s \in \mathbb{C}$ روی A مستقل جبری باشند و همچنین $r \in \mathbb{R}$ و $s \notin \mathbb{R}$. اتومرفیسمی مانند $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ وجود دارد که برای هر $a \in A$ ، $\sigma(a) = a$ و $\sigma(r) = s$. بنابراین $\sigma(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$ و در نتیجه $\mathbb{R}$ قابل تعریف نیست.

مثال ۱۹۷. فرض کنید F یک میدان باشد و $F[x]$ حلقه‌ی چندجمله‌های آن باشد. آیا F در $F[x]$ قابل تعریف است؟

$$F = \{x \in F[x] \mid \exists y \in F[x] \ x \cdot y = 1\}$$

پروژه: نشان دهید $\mathbb{C}$ در $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, \circ, 1)$ قابل تعریف است.

۲۲ جلسه‌ی بیست و دوم، حذف سور

مثال ۱۹۸. در ساختار $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \circ, 1)$ مجموعه‌ی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ ، قابل تعریف است. (رابینسون)

$$\mathbb{Z} = \{x \mid \mathbb{Q} \models \varphi(x)\}$$

قضیه ۱۹۹. فرض کنید $\mathcal{M}$ (۱) یک ساختار اشباع باشد. (۲) $A \subseteq \mathcal{M}$ و $|A| < |\mathcal{M}|$. (۳) X یک زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر از $\mathcal{M}^n$ باشد. (۴) هر اتمرفیسم $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ که مجموعه‌ی A را نقطه‌وار حفظ کند، مجموعه‌ی X را مجموعه‌وار حفظ کند. آنگاه X یک مجموعه‌ی A -تعریف‌پذیر است.

اثبات. ابتدا توجه کنید که وقتی X تعریف شده باشد، عبارت « $x \in X$ » یک فرمول است. بنابر فرضیات قضیه برای هر $a, b \in \mathcal{M}$ می‌دانیم که $a \in X \leftrightarrow b \in X \Rightarrow \text{tp}(\bar{a}/A) = \text{tp}(\bar{b}/A)$ ، به بیان دیگر اگر $x, y \in \mathcal{M}$ آنگاه

$$\bigwedge_{\varphi \text{ یک } \mathcal{L}_A\text{-فرمول}} \varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y) \rightarrow (x \in X \leftrightarrow y \in X)$$

$$\text{Th}(\mathcal{M}) \cup \{\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y) \mid \varphi \text{ یک } \mathcal{L}_A\text{-فرمول}\} \vdash (x \in X \leftrightarrow y \in X)$$

بنا به فشردگی فرمول $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ پیدا می‌شوند به طوری که

$$\mathcal{M} \models (\varphi_1(x) \leftrightarrow \varphi_1(y)) \wedge \dots \wedge (\varphi_n(x) \leftrightarrow \varphi_n(y)) \rightarrow (x \in X \leftrightarrow y \in X)$$

(به عنوان تمرین بررسی کنید شرط اشباع بودن $\mathcal{M}$ کجای اثبات استفاده شده است). فرض کنید $x \in Y_1 \leftrightarrow \varphi_1(x)$ پس

$$\mathcal{M} \models (x \in Y_1 \leftrightarrow y \in Y_1) \wedge \dots \wedge (x \in Y_n \leftrightarrow y \in Y_n) \rightarrow (x \in X \leftrightarrow y \in X)$$

تمام حالات ممکن برای وقوع یک x در Y_i ها را در نظر بگیرید. برای مثال $(x \in Y_1) \wedge (x \notin Y_2) \wedge \dots \wedge (x \in Y_n)$. از بین حالات یاد شده آنهایی را انتخاب کنید که با $x \in X$ در تناقض نباشند و فرض کنید ψ_i فصل آن‌ها باشد. ثابت می‌شود که $\bigvee \psi_i(x) \leftrightarrow x \in X$. (اثبات این ادعا به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود). $\square$

لم ۲۰۰. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک مدل اشباع باشد، $A \subseteq \mathcal{M}$ و $|A| < |\mathcal{M}|$. فرض کنید هر $x \in \mathcal{M}$ که به طور همزمان در فرمول‌های $\Sigma(x)$ صدق کند در فرمول $\varphi(x)$ صدق کند:

$$\mathcal{M} \models \Sigma(x) \rightarrow \varphi(x).$$

نشان دهید که در این صورت تعداد متناهی فرمول $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Sigma$ موجودند به طوری که

$$\mathcal{M} \models \forall x (\varphi_1(x) \wedge \dots \wedge \varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)).$$

چند مشاهده و توجه ساده:

– اگر $X \subseteq \mathfrak{M}^n$ تعریف‌پذیر باشد، آنگاه X^c تعریف‌پذیر است.

$$X = \{x \in \mathfrak{M} \mid \varphi(x)\}$$

$$X^c = \{x \in \mathfrak{M} \mid \neg\varphi(x)\}$$

– اگر $X \subseteq \mathfrak{M}^n \times \mathfrak{M}^m$ قابل تعریف باشد، آنگاه $\Pi_{\mathfrak{M}^n}(X)$ (تصویر X روی $\mathfrak{M}^n$) قابل تعریف است.

$$X = \{(\bar{x}, \bar{y}) \mid \varphi(\bar{x}, \bar{y})\}$$

$$\Pi_{\mathfrak{M}^n}(X) = \{\bar{x} \mid \exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})\}$$

– اگر X و Y قابل تعریف باشند، آنگاه $X \cap Y$ و $X \cup Y$ نیز قابل تعریف هستند.

– فرض کنید $T \models \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ و فرض کنید $\varphi(x)$ یک $\mathcal{L}$ -فرمول باشد. آنگاه

$$\{x \in \mathfrak{M} \mid \varphi(x)\} \subseteq \{x \in \mathfrak{N} \mid \varphi(x)\}.$$

– اگر $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$ و $\{x \in \mathfrak{M} \mid \varphi(x)\}$ متناهی باشد آنگاه $\{x \in \mathfrak{N} \mid \varphi(x)\} = \{x \in \mathfrak{M} \mid \varphi(x)\}$.

– اگر $\mathbb{R}$ یک توسعه ناستاندارد از $\mathbb{R}$ باشد. بازه‌ی $(\circ, 1)$ در $\mathbb{R}$ با بازه‌ی $(\circ, 1)$ در $\tilde{\mathbb{R}}$ برابر نیست.

ویژگی‌های جبری تئوری‌ها در نظریه‌ی مدل

یادآوری ۲۰۱.

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \circ, 1) \models \exists x \quad ax^2 + bx + c = \circ \leftrightarrow b^2 + 4ac > \circ$$

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \circ, 1) \models \forall a, b, c \left(\exists x \quad ax^2 + bx + c = \circ \leftrightarrow b^2 + 4ac > \circ \right)$$

تعریف ۲۰۲. می‌گوییم تئوری T در زبان $\mathcal{L}$ سورها را حذف می‌کند، یا حذف سور دارد، هرگاه برای هر فرمول $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ در زبان $\mathcal{L}$ یک فرمول بدون سور $\psi(x_1, \dots, x_n)$ در زبان $\mathcal{L}$ موجود باشد به طوری که $T \models \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$. به بیان دیگر اگر $T \models \mathfrak{M}$ آنگاه هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر از هر $\mathfrak{M}^n$ توسط یک فرمول بدون سور تعریف شود.

مشاهده ۲۰۳. فرض کنید T حذف سور داشته باشد و $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ و $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ ، آنگاه $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$.

فرض کنید $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ ، فرمول دلخواه $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ را در نظر بگیرید. یک فرمول بدون سور ψ وجود دارد به طوری که $T \models \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$ پس

$$\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{M} \models \psi(a_1, \dots, a_n)$$

$$\iff \mathfrak{N} \models \psi(a_1, \dots, a_n)$$

$$\iff \mathfrak{N} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

تمرین ۳۰. نشان دهید که تئوری T دارای اصل بندی $\forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$ است $\iff$ برای هر $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ اگر $\mathfrak{M} \models T$ آن گاه $\mathfrak{N} \models T$ زیرساختار.

قضیه ۲۰۴. تئوری T سورها را حذف می کند اگر و تنها اگر برای هر مدل $\mathfrak{M} \models T$ و هر دو عنصر $a, b \in \mathfrak{M}$ اگر

$$\text{qftp}^{\mathfrak{M}}(a) = \text{qftp}^{\mathfrak{M}}(b)$$

آن گاه $\text{tp}^{\mathfrak{M}}(a) = \text{tp}^{\mathfrak{M}}(b)$. (منظور از $\text{qftp}^{\mathfrak{M}}(a)$ تایپ بدون سور $\{\psi \mid \mathfrak{M} \models \psi(\bar{a})\}$ بدون سور $\{\psi \mid \mathfrak{M} \models \psi(\bar{a})\}$ است)

اثبات. فرض کنید $\varphi(x)$ یک فرمول دلخواه باشد.

$$T \cup \{\psi(x) \leftrightarrow \psi(y) \mid \psi \text{ بدون سور باشد}\} \models (\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y))$$

بنابراین $T \cup \Sigma \cup \{\neg(\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y))\}$ ناسازگار است. پس بخش متناهی از Σ موجود است (به نام Δ) به طوری که

$$T \models \Delta \rightarrow \varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)$$

فرض کنید $\Delta = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ پس

$$T \models (\psi_1(x) \leftrightarrow \psi_1(y)) \wedge \dots \wedge (\psi_n(x) \leftrightarrow \psi_n(y)) \rightarrow \varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)$$

□ مشابه اثبات قبل ترکیبی از ψ_i ها معادل با φ است و این ترکیب یک فرمول بدون سور است.

توجه ۲۰۵. فرض کنید $a, b \in \mathfrak{M}$ آن گاه $\text{qftp}^{\mathfrak{M}}(a) = \text{qftp}^{\mathfrak{M}}(b)$ از لحاظ جبری یعنی $\langle a \rangle^{\mathfrak{M}} \cong \langle b \rangle^{\mathfrak{M}}$ (به بیان دیگر ساختار تولید شده توسط a در $\mathfrak{M}$ با ساختار تولید شده توسط b در $\mathfrak{M}$ ایزومورف است)

□ اثبات. به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

بنابراین بنا به قضیه قبل اگر تئوری T ویژگی زیر را داشته باشد سورها را حذف می کند.

برای هر مدل $\mathfrak{M} \models T$ و هر دو عنصر $a, b \in \mathfrak{M}$ ، اگر ساختار تولید شده توسط a با ساختار تولید شده توسط b ایزومورف باشد آن گاه a و b هم تایپ باشند.

قضیه ۲۰۶. اگر تئوری T ویژگی زیر را داشته باشد سورها را حذف می کند:

برای هر $a, b \in \mathfrak{M} \models T$ اگر $\langle a \rangle^{\mathfrak{M}} \cong^f \langle b \rangle^{\mathfrak{M}}$ آن گاه یک سامانه ی رفت و برگشتی Γ از ایزومرفیسم های میان زیرساختاری $\mathfrak{M}$ موجود باشد به طوری که $f \in \Gamma$.

□ اثبات. در واقع اگر شرط فوق برقرار باشد از برابری $\text{qftp}^{\mathfrak{M}}(a)$ با $\text{qftp}^{\mathfrak{M}}(b)$ ، برابری $\text{tp}^{\mathfrak{M}}(a)$ با $\text{tp}^{\mathfrak{M}}(b)$ نتیجه می شود.

توجه ۲۰۷. فرض کنید T دارای مدل اشباع باشد. T حذف سور دارد اگر و تنها اگر در مدل اشباع $\mathfrak{M} \models T$ اگر $\langle a \rangle \cong \langle b \rangle$ آن گاه یک اتومرفیسم $\sigma : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ پیدا شود به طوری که $\sigma(a) = b$.

۲۳ جلسه‌ی بیست و سوم، ادامه‌ی حذف سور

تمرین ۳۱. اگر $\mathfrak{M}$ یک مدل κ -اشباع باشد، آنگاه هر زیر مجموعه‌ی تعریف‌پذیر $X \subseteq \mathfrak{M}$ یا متناهی است یا دارای حداقل κ عنصر است.

حل تمرین. ابتدا توجه شود که $\mathfrak{M}$ یک مدل κ -اشباع است یعنی اگر $p(x)$ یک مجموعه از فرمول‌ها به صورت $(x, \bar{a})$ باشد که $|A| < \kappa$ ، $\bar{a} \in A \subseteq \mathfrak{M}$ و هر تعداد متناهی از آن‌ها در $\mathfrak{M}$ برآورده شود، آنگاه $\text{tp}^{\mathfrak{M}}(\frac{a}{A}) = p(x)$ $\exists a \in \mathfrak{M}$. حال فرض کنید $X \subseteq \mathfrak{M}$ یک مجموعه تعریف‌پذیر به صورت $X = \{x \in \mathfrak{M} \mid \mathfrak{M} \models \varphi(x)\}$ باشد که نامتناهی است و $|X| < \kappa$. فرض کنید $X = (a_i)_{\substack{i \in \lambda \\ \lambda < \kappa}}$ حال مجموعه‌ی زیر از فرمول‌ها را در نظر بگیرید.

$$p(x) = \{\varphi(x)\} \cup \{x \neq a_i\}_{i \in \lambda}$$

مجموعه‌ی فرمول‌های $p(x)$ متناهی در $\mathfrak{M}$ برآورده می‌شود. بنابراین $p(x)$ در $\mathfrak{M}$ توسط عضوی مانند a برآورده می‌شود. $a \in X$ و $a \notin X$ و این تناقض است. $\square$

ادامه‌ی حذف سور

نکته ۲۰۸. $\langle a \rangle^{\mathfrak{M}} \cong \langle b \rangle^{\mathfrak{M}} \iff \text{qftp}^{\mathfrak{M}}(a) = \text{qftp}^{\mathfrak{M}}(b)$

توجه ۲۰۹. فرض کنید $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}$ و $\langle a \rangle^{\mathfrak{M}} \cong \langle b \rangle^{\mathfrak{M}}$. هم‌چنین فرض کنید که برای هر $c \in \mathfrak{M}$ به‌طوری‌که $c \notin \langle \bar{a} \rangle$ بتوان یک عنصر $d \in \mathfrak{M}$ پیدا کرد به‌طوری‌که $\langle \bar{a}, c \rangle \cong \langle \bar{b}, d \rangle$ ، آنگاه T دارای حذف سور است. (چرا؟)

به بیان دیگر می‌خواهیم از $\text{qftp}(a) = \text{qftp}(b)$ و $a \stackrel{\text{qftp}}{\equiv} b$ و برای هر c دلخواه عنصر d پیدا شود به‌طوری‌که $(ac \stackrel{\text{qftp}}{\equiv} bd) \text{ qftp}(c/a) = \text{qftp}(d/b)$.

تضعیف شرایط

برای هر $c \in \mathfrak{M}$ و هر تعداد متناهی فرمول $\varphi_1(x, a), \dots, \varphi_n(x, a) \in \text{qftp}(c/a)$ یک عنصر $d \in \mathfrak{M}$ پیدا شود که $\mathfrak{M} \models \bigwedge \varphi_i(d, b)$ به بیان دیگر هر دستگاه معادلات $\begin{cases} \psi_1(x, b) \\ \vdots \\ \psi_n(x, b) \end{cases}$ ، به شرط این که دستگاه $\begin{cases} \psi_1(x, a) \\ \vdots \\ \psi_n(x, a) \end{cases}$ جواب داشته باشد، جواب داشته باشد.

نتیجه ۲۱۰. تئوری T سورها را حذف می‌کند هرگاه برای هر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ ، هر $A \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ و هر فرمول بدون سور $\varphi(x, \bar{a})$ با پارامتر $\bar{a} \in A$ داشته باشیم: $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi(x, \bar{a}) \iff \mathfrak{N} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$



تمرین ۳۲. تئوری گراف‌های تصادفی حذف سور دارد.

۲۴ جلسه‌ی بیست و چهارم، حذف سور در میدان‌های بسته‌ی جبری

تمرین ۳۳. فرض کنید T یک تئوری باشد. نشان دهید که فرمول $\varphi(\bar{x})$ نسبت به تئوری دارای معادل بدون سور است اگر و تنها اگر برای هر دو مدل $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ و هر زیرساختار $A \subseteq \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ و هر چندتایی $\bar{a} \in A$ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{a})$$

راهنمایی: فرض کنید فرمول $\varphi(\bar{x})$ نسبت به T با فرمول بدون سور $\psi(\bar{x})$ معادل باشد یعنی $T \models \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

$$\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{M} \models \psi(\bar{a}) \iff A \models \psi(\bar{a}) \iff \mathfrak{N} \models \psi(\bar{a}) \iff \mathfrak{N} \models \varphi(\bar{a})$$

برای اثبات قسمت دیگر نشان دهید که با فرض داده شده برای هر $a, b \in M, \mathfrak{M} \models T$ اگر $\text{qftp}^{\mathfrak{M}}(a) = \text{qftp}^{\mathfrak{M}}(b)$ آنگاه $\mathfrak{M} \models \varphi(a) \iff \mathfrak{M} \models \varphi(b)$. $\square$

قضیه ۲۱۱ (تمرین). تئوری T دارای حذف سور است اگر و تنها اگر «زیرساختارکامل» باشد. (یعنی اگر $A \subseteq \mathfrak{M} \models T$ زیرساختار $\text{Diag}(A) \cup T$ در زبان $\mathcal{L}_A$ یک تئوری کامل باشد)

تمرین ۳۴. نشان دهید که فرمول $\varphi(x, y) : \exists z \ x + z^2 = y$ در تئوری کامل $(\mathbb{R}, +, \cdot, \circ, 1)$ دارای معادل بدون سور نیست. راهنمایی: $\mathfrak{M} \models \text{th}(\mathbb{R}, +, \cdot, \circ, 1)$ و $a, b \in A$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M} \models a < b & & \mathfrak{M} \models a > b \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & A & \end{array}$$

تمرین ۳۵. نشان دهید که در تئوری کامل $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ فرمول زیر دارای معادل بدون سور نیست.

$$\begin{array}{c} \varphi(x) : \exists y \ y + y = x \\ \downarrow \\ x \text{ زوج است} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a \text{ زوج} & & a \text{ فرد} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & a & \end{array}$$

تمرین ۳۶. اگر $X \subseteq \mathbb{R}^n$ در ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, \circ, 1, <)$ قابل تعریف باشد آنگاه

۱. $\bar{X}$ (بستار توپولوژیک X) نیز قابل تعریف است.

۲. مجموعه‌ی نقاط مرزی X قابل تعریف است.

قضیه ۲۱۲. تئوری ACF سورها را حذف می‌کند.

برای مثال $\mathbb{C} \models \exists x \ x^2 + 1 = 0 \leftrightarrow \underbrace{x = x}_{\text{بدون سور}}$

اثبات. فرض کنید $\mathfrak{M}_0 = \langle a \rangle \cong \langle b \rangle = \mathfrak{N}_0$ و $b \in N, a \in M, \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models \text{ACF}$. هدف پیدا کردن $d \in N \setminus N_0$ به طوری که $\langle \mathfrak{M}_0, c \rangle \cong \langle \mathfrak{N}_0, d \rangle$. توجه شود که بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم $\mathfrak{M}_0$ و $\mathfrak{N}_0$ میدان هستند. اگر c روی $\mathfrak{M}_0$ جبری باشد. آنگاه c ریشه‌ی یک چندجمله‌ای با ضرایب در $\mathfrak{M}_0$ است. فرض کنید $f(x) \in \mathfrak{M}_0[x]$ چندجمله‌ای می‌نیمال c باشد. در این صورت $\langle \mathfrak{M}_0, c \rangle \cong \frac{\mathfrak{M}_0[x]}{\langle f(x) \rangle}$. از طرفی از آن‌جا که $\mathfrak{N}$ بسته‌ی جبری است تصویر چندجمله‌ای f در $\mathfrak{N}$ نیز دارای ریشه‌ای مانند d است. پس

$$\langle \mathfrak{N}_0, d \rangle \cong \frac{\mathfrak{N}_0[x]}{\langle f(x) \rangle} \cong \frac{\mathfrak{M}_0[x]}{\langle f(x) \rangle} \cong \langle \mathfrak{M}_0, c \rangle.$$

حال فرض کنید c روی $\mathfrak{M}_0$ متعالی باشد. در این صورت $\langle \mathfrak{M}_0, c \rangle = \mathfrak{M}_0(X) \cong \frac{\mathfrak{M}_0[x]}{\langle f(x) \rangle}$ کافی است عنصر d به‌گونه‌ای پیدا شود که هر تعداد متناهی معادله‌ای که c که در آن صدق کند d هم در آن صدق کند. از آن‌جا که تعداد ریشه‌های هر چندجمله‌ای در یک میدان بسته‌ی جبری متناهی است، d پیدا می‌شود. $\square$

تمرین ۳۷. اگر $\mathfrak{M}$ یک میدان باشد و $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ آن‌گاه نشان دهید که $\mathfrak{N}$ یک حوزه‌ی صحیح است.

$$(a, b \in \mathfrak{N}, a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0)$$

تمرین ۳۸. فرض کنید T تئوری میدان‌ها باشد. نشان دهید $T_{\forall}$ دقیقاً تئوری حوزه‌های صحیح است.

تمرین ۳۹. $\mathfrak{M} \models T_{\forall}$ اگر و تنها اگر $\exists \mathfrak{N} \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \models T$ زیرساختار

نتیجه ۲۱۳. ACF_0 (و مشابه ACF_p) سورها را حذف می‌کند.

هندسه‌ی جبری مقدماتی و نظریه مدل

فرض کنید K یک حلقه‌ی یکدار باشد (عناصر لزوماً وارون ضربی ندارند مثال $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$) زیرمجموعه‌ی $I \subseteq K$ را یک ایده‌آل می‌نامیم هرگاه $\forall i_1, i_2 \in I \quad r_1 i_1 + r_2 i_2 \in I \quad \forall r_1, r_2 \in K$. معادلاً

$$1. \quad 0 \in I \text{ و } \forall x, y \in I \quad x + y \in I \text{ یعنی } (I, +) \text{ یک زیرگروه از } (K, +) \text{ باشد.}$$

$$2. \quad \forall r \in K \quad \forall x \in I \quad r \cdot x \in I.$$

اگر K یک میدان باشد، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های با ضرایب در K به‌صورت زیر است

$$K[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \mid a_i \in K, n \in \mathbb{N}\}$$

به‌طور مشابه $K[x_1, \dots, x_n]$ به‌صورت $K[x_1][x_2, \dots]$ تعریف می‌شوند.

فرض کنید $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ تعریف کنید $V(S) = \{\bar{a} \in K^n \mid \forall f \in S (f(\bar{a}) = 0)\}$. به هر زیرمجموعه به‌صورت $X = V(S)$ یک مجموعه‌ی بسته‌ی زاریسکی^{۱۵} گفته می‌شود.

مثال ۲۱۴. $\{(x, y) \in K^2 \mid y = x^2\}$ بسته‌ی زاریسکی است.

فرض کنید $A \subseteq K^n$ یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. تعریف کنید $I(A) = \{f(\bar{x}) \in K[\bar{x}] \mid \forall \bar{a} \in A \quad f(\bar{a}) = 0\}$

تمرین ۴۰. نشان دهید که $I(A)$ یک ایده‌آل است.

^{۱۵}Zariski closed

۲۵ جلسه‌ی بیست و پنجم، مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی و حلقه‌های نوتری

مشاهده ۲۱۵. برای هر مجموعه‌ی X ، $I(X)$ یک ایده‌آلِ رادیکال در $K[\bar{x}]$ است. (یعنی اگر $f^n(x) \in I(X)$ آن‌گاه $f(x) \in I(X)$).

لم ۲۱۶. اگر X بسته‌ی زاریسکی باشد، آن‌گاه $V(I(X)) = X$.

اثبات. اگر X بسته‌ی زاریسکی باشد، آن‌گاه $X = V(S)$ که $S \subseteq K[\bar{x}]$. توجه شود که همواره $V(I(X)) \supseteq X$. فرض کنید $u \notin X$ ، یعنی $u \notin V(S)$. آن‌گاه چندجمله‌ای $f \in S$ موجود است به طوری که $f(u) \neq 0$. یعنی چندجمله‌ای $f \in I(X)$ موجود است به طوری که $f(u) \neq 0$. پس $u \notin V(I(X))$. $\square$

لم ۲۱۷. اگر X و Y بسته‌ی زاریسکی باشند، آن‌گاه $X \cup Y$ بسته‌ی زاریسکی است.

اثبات. فرض کنید $X = V(I(X))$ و $Y = V(I(Y))$. نشان می‌دهیم $X \cup Y = V(I(X) \cap I(Y))$. ابتدا توجه شود که $I(X) \cap I(Y) \subseteq I(X)$. بنابراین $V(I(X) \cap I(Y)) \supseteq V(I(X)) = X$. به طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $V(I(X) \cap I(Y)) \supseteq V(I(Y)) = Y$. پس $V(I(X) \cap I(Y)) \supseteq X \cup Y$. حال فرض کنید $u \notin X \cup Y = V(I(X) \cap I(Y))$. پس $f \in I(X)$ و $g \in I(Y)$ موجود هستند به طوری که $f(u) \neq 0$ و $g(u) \neq 0$. از طرفی $f \cdot g \in I(X) \cap I(Y)$ ، یعنی $f \cdot g(u) = 0$. $\square$

لم ۲۱۸. اگر X و Y بسته‌ی زاریسکی باشند، آن‌گاه $X \cap Y$ نیز بسته‌ی زاریسکی است.

اثبات. فرض کنید $X = V(I(X))$ و $Y = V(I(Y))$. نشان می‌دهیم $X \cap Y = V(I(X) + I(Y))$ ، که

$$I(X) + I(Y) = \{f + g \mid f \in I(X), g \in I(Y)\}.$$

ابتدا ملاحظه شود که $I(X) \subseteq I(X) + I(Y)$ پس $V(I(X) + I(Y)) \supseteq V(I(X)) = X$. به طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت که $V(I(X) + I(Y)) \supseteq V(I(Y)) = Y$. حال فرض کنید $u \notin V(I(X) + I(Y))$. آن‌گاه $f \in I(X)$ و $g \in I(Y)$ موجودند به طوری که $(f + g)(u) \neq 0$. اگر $u \in V(I(X)) \cap V(I(Y))$ ، آن‌گاه $f(u) = 0$ و $g(u) = 0$ پس $(f + g)(u) = 0$. $\square$

تعریف ۲۱۹. حلقه‌ی R را نوتری^{۱۶} می‌نامیم هرگاه هیچ زنجیر نامتناهی $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ از ایده‌آل‌ها موجود نباشد.

مشاهده ۲۲۰. اگر K میدان باشد، آن‌گاه K نوتری است.

تمرین ۴۱. R نوتری است $\iff$ هر ایده‌آل در R متناهی^{۱۶} تولید شده باشد.

قضیه ۲۲۱. اگر R یک حلقه‌ی نوتری باشد، آن‌گاه $R[x]$ نیز نوتری است. (پس $R[x_1, \dots, x_n]$ نوتری است)

اثبات. فرض کنید ایده‌آل I در $R[x]$ متناهی^{۱۶} تولید شده نباشد. فرض کنید $f_0 \in I$ دارای حداقل درجه باشد.

$$\deg f_0 = n_0.$$

$$f_0 = a_0 x^{n_0} + \dots$$

^{۱۶}Noetherian

از آنجا که I متناهیاً تولید شده نیست $\langle f_\circ \rangle \neq I$. فرض کنید $f_1 \in I - \langle f_\circ \rangle$ دارای حداقل درجه باشد.

$$\deg f_1 = n_1$$

$$f_1 = a_1 x^{n_1} + \dots$$

به همین ترتیب $\langle f_\circ, f_1 \rangle \neq I$. پس فرض کنید $f_2 \in I - \langle f_\circ, f_1 \rangle$ دارای حداقل درجه باشد.

$$\deg f_i = n_i$$

$$f_i = a_i x^{n_i}$$

از طرفی در حلقه‌ی R زنجیر زیر را داریم.

$$\langle a_\circ \rangle \subseteq \langle a_\circ, a_1 \rangle \subseteq \langle a_\circ, a_1, a_2 \rangle \subseteq \dots$$

از آنجا که R نوتری است زنجیر بالا ایستا است. فرض کنید زنجیر بالا پس از k مرحله بایستد. $a_{k+1} = r_\circ a_\circ + \dots + r_k a_k$ از آنجا که

$$f_\circ = a_\circ x^{n_\circ} + \dots$$

$$f_1 = a_1 x^{n_1} + \dots$$

$$f_2 = a_2 x^{n_2} + \dots$$

$$\vdots$$

$$f_k = a_k x^{n_k} + \dots$$

$$f_{k+1} = a_{k+1} x^{n_{k+1}} + \dots$$

چندجمله‌ای زیر را در نظر بگیرید.

$$h(x) = \underbrace{r_\circ f_\circ x^{n_{k+1}-n_\circ} + r_1 f_1 x^{n_{k+1}-n_1} + \dots + r_k f_k x^{n_{k+1}-n_k}}_{(*)} - f_{k+1}$$

توجه شود که $\deg h(x) < n_{k+1} = \deg f_{k+1}$ و f_{k+1} چندجمله‌ای با حداقل درجه در $I - \langle f_\circ, \dots, f_k \rangle$ است. از طرفی

$\square$ $h \in I - \langle f_\circ, \dots, f_k \rangle$ زیرا اگر $h \in \langle f_\circ, \dots, f_k \rangle$ آن‌گاه $h - (*) = f_{k+1} \in \langle f_\circ, \dots, f_k \rangle$.

نتیجه ۲۲۲. اگر R میدان باشد هر ایده‌آل در $R[x]$ تنها توسط یک عنصر تولید شود.

۲۶ جلسه‌ی بیست و ششم، مجموعه‌های ساخته‌شدنی و اثبات قضیه‌ی شوالی

یادآوری ۲۲۳. اگر R یک حلقه‌ی نوتری باشد، آن‌گاه $R[x]$ نوتری است و با استقرا ثابت می‌شود که $R[x_1, \dots, x_n]$ نیز نوتری است.

نتیجه ۲۲۴. اگر K یک میدان باشد، آنگاه $K[x_1, \dots, x_n]$ یک حلقه‌ی نوتری است.

مشاهده ۲۲۵. هیچ زنجیر نزولی $X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \dots$ از مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی وجود ندارد. زیرا در غیر این صورت یک زنجیر غیر ایستای $I(X_1) \subseteq I(X_2) \subseteq \dots$ تولید می‌شود و این نوتری بودن $K[x_1, \dots, x_n]$ را نقض می‌کند.

لم ۲۲۶. اشتراک هر تعداد مجموعه‌ی بسته‌ی زاریسکی بسته‌ی زاریسکی است.

اثبات. فرض کنید $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ بسته‌های زاریسکی باشند زنجیر زیر را در نظر بگیرید.

$$X_1 \supseteq X_1 \cap X_2 \supseteq X_1 \cap X_2 \cap X_3 \supseteq \dots$$

پس هر اشتراک نامتناهی از مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی با یک اشتراک متناهی از آن‌ها برابر می‌شود. $\square$

مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی، مجموعه‌های بسته‌ی یک توپولوژی روی K^n هستند.

۱. $\emptyset$ و K^n بسته‌ی زاریسکی هستند.

۲. اجتماع تعدادی متناهی از مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی، بسته‌ی زاریسکی است.

۳. اشتراک هر تعداد مجموعه‌ی بسته‌ی زاریسکی بسته‌ی زاریسکی است.

توجه ۲۲۷. فرض کنید $X = V(I(X))$ بسته‌ی زاریسکی باشد. از آنجا که $I(X)$ یک ایده‌آل در $K[x_1, \dots, x_n]$ است، این ایده‌آل متناهیاً تولید شده است: $I(X) = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$. بنابراین $X = V(f_1, \dots, f_n)$.

مشاهده ۲۲۸. فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری باشد. فرض کنید $X \subseteq K^n$ توسط یک فرمول بدون سور (احیاناً با پارامتر) تعریف شده باشد. آنگاه X ترکیب بولی متناهی از مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی است.

تعریف ۲۲۹. مجموعه‌ی $X \subseteq K^n$ را ساخته‌شدنی^{۱۷} می‌نامیم هرگاه ترکیب بولی از مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی باشد.

مشاهده ۲۳۰. فرض کنید $X \subseteq K^n$ یک مجموعه‌ی تعریف‌پذیر با پارامتر باشد. آنگاه X با یک فرمول بدون سور تعریف می‌شود، پس ساخته‌شدنی است.

نتیجه ۲۳۱. اگر $X \subseteq K^n \times K^m$ یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی باشد، آنگاه تصویر X روی K^n ساخته‌شدنی است.

اثبات. اگر $X \subseteq K^n \times K^m$ ساخته‌شدنی باشد، آنگاه X توسط یک فرمول $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ در K^{n+m} تعریف شده است:

$$X = \{(\bar{x}, \bar{y}) \mid K \models \varphi(\bar{x}, \bar{y})\}$$

تصویر X روی K^n توسط فرمول $\Pi_{K^n}(X) = \{\bar{x} \mid \exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y})\}$ تعریف می‌شود. پس $\Pi_{K^n}(X)$ یک مجموعه‌ی تعریف‌پذیر است پس بدون سور تعریف می‌شود در نتیجه ساخته‌شدنی است. $\square$

قضیه ۲۳۲ (شوالی).^{۱۸} اگر $X \subseteq K^n$ ساخته‌شدنی باشد و $f: K^n \rightarrow K^m$ یک نگاشت چندجمله‌ای باشد آنگاه $f(X)$ ساخته‌شدنی است.

^{۱۷}Constructible

^{۱۸}Chevalley

تعریف ۲۳۳. ایده‌آل I را تحویل‌ناپذیر نامیم هرگاه ایده‌آل‌های $I \neq I_1$ و $I \neq I_2$ پیدا نشوند به طوری که $I = I_1 \cap I_2$

لم ۲۳۴. اگر R یک حلقه‌ی نوتری باشد و I یک ایده‌آل از R باشد آن‌گاه $I = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n$ به طوری که I_i ها تحویل‌ناپذیر هستند.

اثبات. فرض کنید I تحویل‌پذیر باشد آن‌گاه $I = I_1 \cap I_2$. فرض کنید $I_1 = I_2 \cap I_3$ آن‌گاه $I = I_2 \cap I_3 \cap I_4$. اگر روند فوق ادامه یابد به یک زنجیر صعودی از ایده‌آل‌ها می‌رسیم. $\square$

یادآوری ۲۳۵. الف) ایده‌آل $I \subseteq R$ اول است $\iff \forall a, b \in R (a \cdot b \in I \rightarrow a \in I \vee b \in I) \iff \frac{R}{I}$ یک حوزه‌ی صحیح باشد.

ب) ایده‌آل I اولیه است هرگاه اگر برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم $a \cdot b \in I$ و $a \notin I$ ، آن‌گاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $b^n \in I$. به بیان دیگر $b \in \sqrt{I}$ $\Rightarrow a \cdot b \in I \wedge a \notin I$ $\Rightarrow b \in \sqrt{I}$.

لم ۲۳۶. اگر R نوتری باشد. هر ایده‌آل تحویل‌ناپذیر، اولیه است.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر ایده‌آل $(\circ)$ تحویل‌ناپذیر باشد، آن‌گاه $(\circ)$ اولیه است. فرض کنید $ab = \circ$ و $a \neq \circ$. نشان می‌دهیم $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $b^n = \circ$. قرار دهید $\text{Ann}(b) = \{x \mid xb = \circ\}$. توجه کنید که

$$\text{Ann}(b) \subseteq \text{Ann}(b^2) \subseteq \text{Ann}(b^3) \subseteq \dots$$

توجه شود $\text{Ann}(t)$ یک ایده‌آل است (اثبات به عهده‌ی خواننده). از آن‌جا که R نوتری است زنجیر بالا متوقف می‌شود؛ یعنی $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $\text{Ann}(b^{n+1}) = \text{Ann}(b^n)$. به بیان دیگر $(\circ) = \text{Ann}(b^{n+1}) = \text{Ann}(b^n) \iff xb^n = \circ \iff (xb^{n+1} = \circ)$. در این صورت $(\circ) = (a) \cap (b^n)$.

$$\begin{aligned} x \in (a) \cap (b^n) &\Rightarrow x = ya = tb^n \\ &\Rightarrow xb = yab = tb^{n+1} = \circ \\ &\Rightarrow tb^n = \circ \Rightarrow x = \circ. \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید I یک ایده‌آل تحویل‌ناپذیر دلخواه باشد. حلقه‌ی $\frac{R}{I}$ را در نظر بگیرید. در حلقه‌ی $\frac{R}{I}$ ایده‌آل صفر اگر تحویل‌ناپذیر باشد اولیه است. اگر اولیه نباشد، آن‌گاه ایده‌آل صفر در $\frac{R}{I}$ اولیه نیست. $\square$

تمرین ۴۲. اگر R نوتری باشد، $\frac{R}{I}$ نیز نوتری است.

نتیجه ۲۳۷. اگر R نوتری باشد، آن‌گاه هر ایده‌آل I دارای یک تجزیه‌ی اولیه است.

قضیه ۲۳۸. فرض کنید I یک ایده‌آل رادیکال در حلقه‌ی نوتری R باشد. آن‌گاه I دارای یک تجزیه‌ی اول یکتا به صورت $I = p_1 \cap \dots \cap p_n$ است. (یکتا به این معنی است اگر $I = q_1 \cap \dots \cap q_m$ آن‌گاه $n = m$ و $\{q_1, \dots, q_n\} = \{p_1, \dots, p_n\}$)

اثبات. اولاً I دارای تجزیه‌ی اولیه‌ی $I = I_1 \cap \dots \cap I_n$. ثانیاً اگر J یک ایده‌آل اولیه باشد آنگاه $\sqrt{J}$ اول است.

$$ab \in \sqrt{J}, a \notin \sqrt{J} \Rightarrow a^n b^n \in J, a^n \notin J \Rightarrow b^n \in J \Rightarrow b \in \sqrt{J}$$

ثالثاً $I = \sqrt{I} = \sqrt{I_1} \cap \dots \cap \sqrt{I_n}$. اکنون به اثبات یکتایی می‌پردازیم؛ فرض کنید $I = p_1 \cap \dots \cap p_n = q_1 \cap \dots \cap q_m$. کافی است ثابت کنیم هر p_i شامل حداقل یکی از q_i هاست. فرض کنید p_1 شامل هیچ‌کدام از q_i ها نباشد.

$$x_1 \in q_1 - p_1$$

$$x_2 \in q_2 - p_1$$

$$\vdots$$

$$x_m \in q_m - p_1$$

$$x_1 x_2 \dots x_m \in \bigcap q_i$$

بنابراین $x_1 \dots x_m \in p_1$. پس حداقل یکی از x_i ها در p_1 هستند. $\square$

۲۷ جلسه‌ی بیست و هفتم، اثبات قضیه‌ی ریشه‌ها

توجه ۲۳۹. اگر تئوری T سورها را حذف کند، آنگاه T مدل‌کامل^{۱۹} است. یعنی اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ و $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ (زیرساختار)، $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ یک فرمول دلخواه باشد و $a_1, \dots, a_n \in M$. آنگاه

$$\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(a_1, \dots, a_n).$$

به بیان دیگر اگر T سورها را حذف کند. آنگاه اگر $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \models T$ و $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ ، آنگاه $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$ (زیرساختار مقدماتی).

اثبات. فرض کنید $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ یک فرمول دلخواه باشد. فرمول بدون سور $\psi(x_1, \dots, x_n)$ موجود است به‌طوری‌که

$$T \models \forall x_1, \dots, x_n \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)$$

بنابراین فرض کنید $a_1, \dots, a_n \in M$ آنگاه $\mathfrak{N} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow \psi(a_1, \dots, a_n)$ چون $\psi(x_1, \dots, x_n)$ یک

فرمول بدون سور است داریم: $\mathfrak{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$. $\square$

مروری بر مفاهیم جبری مورد نیاز برای اثبات قضیه ریشه‌ها.

فرض کنید R یک حلقه باشد و I یک ایده‌آل از R . حلقه‌ی $\frac{R}{I}$ به‌صورت $\frac{R}{I} = \{r + I \mid r \in R\}$ تعریف می‌شود. اگر I یک ایده‌آل اول باشد، $\frac{R}{I}$ یک حوزه‌ی صحیح است.

$$(a + I)(b + I) = 0 \iff ab + I = 0$$

$$\iff ab \in I \iff_{\text{اول } I} (a \in I) \vee (b \in I)$$

$$\iff (a + I = 0) \vee (b + I = 0)$$

^{۱۹}Model-complete

توجه ۲۴۰. فرض کنید $f(x) \in R[x]$ یک چندجمله‌ای باشد، آنگاه $f(a+I) = f(a) + I$ اگر D یک حوزه صحیح باشد، میدان کسره‌های D به صورت $F = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in D\}$ است. F کوچکترین میدان شامل D است.

یادآوری ۲۴۱. فرض کنید K یک میدان بسته جبری، I و J دو ایده‌آل در $K[x_1, \dots, x_n]$ باشند به طوری که $I \subseteq J$. آنگاه $V(I) \supseteq V(J)$.

لم ۲۴۲. اگر I و J دو ایده‌آل رادیکال باشند به طوری که $I \subsetneq J$ ، آنگاه $V(I) \supsetneq V(J)$.

اثبات. از آنجا که $K[x_1, \dots, x_n]$ یک حلقه‌ی نوتری است، $I = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$ از طرفی بنا به قضیه‌ی تجزیه‌ی اول $I = p_1 \cap \dots \cap p_k$ که p_i ها ایده‌آل‌هایی اول هستند. فرض کنید $g \in J - I$. نشان می‌دهیم که عناصر $a_1, \dots, a_n$ موجودند که برای $1 \leq i \leq m$ ، $h_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ و $g(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ یعنی $g \in V(I) - V(J)$. از آنجا که $g \in J - I$ ، فرض کنید که $g \in J - p_1$. دامنه‌ی صحیح $\frac{K[x_1, \dots, x_n]}{p_1}$ را در نظر بگیرید. چون $h_i(x_1 + p_1, x_2 + p_1, \dots, x_n + p_1) = h_i(x_1, \dots, x_n) + p_1$

$$h_i(x_1, \dots, x_n) + p_1 = 0 \iff h_i(x_1, \dots, x_n) \in p_1.$$

و همچنین $h_i \in I \subseteq p_1$ ، پس $h_i(x_1 + p_1, x_2 + p_1, \dots, x_n + p_1) = 0$. از طرفی چون $g(x_1, \dots, x_n) \notin p_1$ ، پس $g(x_1 + p_1, \dots, x_n + p_1) \neq 0$. بنابراین $\frac{K[x_1, \dots, x_n]}{p_1} \models \bigwedge_{i=1}^m h_i(x_1 + p_1, \dots, x_n + p_1) = 0$.

$$\frac{K[x_1, \dots, x_n]}{p_1} \models \exists u_1, \dots, u_n g(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^m h_i(u_1, \dots, u_n) = 0.$$

حال فرض کنید F_1 بستار جبری میدان کسره‌های $\frac{K[x_1, \dots, x_n]}{p_1}$ باشد. در این صورت

$$K \subseteq \frac{K[x_1, \dots, x_n]}{p_1} \subseteq \text{میدان کسرها} \subseteq F_1.$$

پس $K, F_1 \models \text{ACF}$ و $K \subseteq F_1$. بنابراین

$$F_1 \models \exists u_1, \dots, u_n g(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^m h_i(u_1, \dots, u_n) = 0.$$

در نتیجه $K \models \exists u_1, \dots, u_n g(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^m h_i(u_1, \dots, u_n) = 0$. □

نتیجه ۲۴۳. اگر I و J دو ایده‌آل رادیکال باشند که $I \neq J$ ، آنگاه $V(I) \neq V(J)$.

اثبات. فرض کنید $I \neq J$ ، آنگاه $I \cap J \neq I$ و در نتیجه $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J) \neq V(I)$. پس $V(I) \neq V(J)$. □

نتیجه ۲۴۴. اگر I و J دو ایده‌آل رادیکال باشند، آنگاه $I = J \iff V(I) = V(J)$.

نتیجه ۲۴۵. اگر I یک ایده‌آل رادیکال باشد، آنگاه $I(V(I)) = I$.

اثبات. فرض کنید $I(V(I)) = J \neq I$ ، پس $V(J) = V(I(V(I))) \neq V(I)$. از طرفی اگر X بسته‌ی زاریسکی باشد، آنگاه $V(I(X)) = X$. بنابراین $V(I(V(I))) = V(I)$. □