

ریاضی عمومی ۲

محسن خانی

۲۸ اردیبهشت ۱۴۰۴

چکیده

جزوه‌ی پیش رو در طی تدریس درس ریاضی عمومی ۲ در نیمسال دوم تحصیلی ۹۶-۹۷ در دانشگاه صنعتی اصفهان حاصل شده است. اکثر مثالها، از کتاب حساب جیمز استوارت برگرفته شده‌اند. در نگارش جزوه، هر جلسه را سروقت به اتمام رساندن و به روی تارنما گذاشتن برایم بیش از رعایت زیبایی ادبی، و حتی بی‌خطائی اهمیت داشته است. بنابراین چه بسا جملاتی در جزوه یافت شوند که به بهترین ادبیات نوشته نشده‌اند و نیاز به ویرایش داشته باشند، و چه بسا اشتباهاتی تاییبی در آن موجود باشد. امیدوارم در سالهای پیش رو، با هر بار تدریس آن، بهبودش بخشم و مثالها و تمرینهای بهتر بر آن بیفزایم. به عنوان یک مدرس، حداقل استانداردی که برای خود در نظر گرفته‌ام این بوده است که آنچه را که تدریس می‌کنم به صورت مُدوّن در اختیار دانشجویانم بگذارم، که دانشجو سر کلاس فقط درس را گوش کند و به خود زحمت نوشتن ندهد و نگرانی عقب ماندن و پریشان نوشتن و دنبال جزوه دوییدن نداشته باشد. فهمیده‌ام که میان آنچه استاد پای تخته می‌نویسد و آنچه دانشجو در دفترش ثبت می‌کند گاهی زمین تا آسمان فرق است. همچنین دیده‌ام که کسانی هستند که نمی‌توانند به سرعت بنویسند و جزوه‌نویسی برایشان دشوار است. شاید اگر در زمان دانشجویی خودم استادی چنین زحمتی به خودش داده بود، او را ستایش می‌کردم. اما افسوس که همت گماشته شده بر این، گاهی نومید و دلسردم کرده است: آنگاه که دانشجویی پس از گذشت نیمی از ترم، از موجودیت تارنمای درس و جزوه‌ی آنلاین بی‌خبر است. نیز آنگاه که شسته‌ورفته بودن جزوه موجب این شود که دانشجو به خود زحمت کلاس آمدن و «استاد دیدن» ندهد و گمانش این باشد که همه‌ی حاصل دانشگاه رفتن، تحصیل کاغذپاره‌های جزوه‌ی این و آن است و آن «پیچشهای مو» را هیچگاه درنیابد.

با این همه، هر مدرس همیشه دل به عده‌ای معدود خوش می‌کند که کلاس او را دوست می‌دارند و با جدیت دنبال می‌کنند. امیدوارم که آن معدود، حداکثر بهره را از این جزوه برده باشند و کاستی‌هایش را بر من ببخشایند.

سرآخر، این جزوه را با نهایت احترام به خانم «دُرسا پیری» تقدیم می‌کنم که زحمت تایپش را با علاقه و پشتکار به عهده گرفتند. همچنین از خانم شیرجزی که بخش‌هایی از جزوه را تایپ کرده‌اند نهایت سپاس را دارم.

یادداشت جدید: در بهمن ۱۴۰۳ دوباره چشمم به این جزوه قدیمی افتاد. از شور و تب و تاب‌ی که در نوشتن آن به کار رفته بود، لذت بردم و تصمیم گرفتم چند جابه‌جایی کوچک در مطالب آن شکل دهم. جزوه پیش رو حاصل این تغییرات است. جزوه اولیه بر اساس شماره جلسات دسته‌بندی شده بود اما این جزوه، بر اساس نوع مطلب دسته‌بندی شده است و تفاوت، فقط در همین است. ضمناً جزوه توسط همسرم و نیز خانم شیرجزی، دانشجوی آن زمان، تایپ شده است و آنها مطالب تخته را نوشته‌اند. من نیز فرصت ساختار بهتر بخشیدن و تقویت جمله‌بندی‌ها را نداشته‌ام؛ انشالله در تدریس‌های بعدی این کار را انجام خواهم داد. در این بازنگری، فصلهای انتگرال دوگانه، و سه گانه متاسفانه از قلم افتاده‌اند و هنوز به همان شیوه قدیم جزوه قرار گرفته‌اند. امیدوارم این مشکل نیز بعداً برطرف شود.

فهرست مطالب

۵	۱ آشنایی با فضای سه بعدی و رسم معادلات درجه دوم
۵	۱.۱ ریاضی ۲ در مورد چیست؟
۸	۲.۱ رسم استوانه ها
۲۰	۳.۱ رسم رویه های درجه ی دوم
۲۱	۱.۳.۱ بیضی وار
۲۴	۲.۳.۱ سهمی وار بیضوی
۲۷	۳.۳.۱ یک انحراف کوتاه از بحث: رویه های حاصل از دوران
۲۹	۴.۳.۱ مخروطها
۳۱	۵.۳.۱ هذلولی وار یکپارچه
۳۳	۶.۳.۱ هذلولی وار دوپارچه
۳۶	۷.۳.۱ سهمی وار هذلولوی
۴۱	۴.۱ مثالها و تمرینها
۵۲	۲ توابع دو متغیره - حد و پیوستگی
۵۲	۱.۲ تابع دو متغیره یعنی چه؟
۵۷	۲.۲ منحنی های تراز
۶۷	۱.۲.۲ تمرین
۶۸	۳.۲ حد و پیوستگی
۸۶	۴.۲ پیوستگی
۹۰	۵.۲ توابع با بیش از دو متغیر
۹۴	۳ مشتقات جزئی
۹۴	۱.۳ مشتقات جزئی
۹۵	۲.۳ تعبیر هندسی مشتق جزئی
۹۸	۳.۳ توضیح کوتاه درباره منحنی های فضایی
۱۰۰	۴.۳ ادامه بحث مشتقات جزئی
۱۰۳	۵.۳ مشتقات جزئی مراتب بالاتر برای تابع $z = f(x, y)$

۱۰۴	تمرین ۱.۵.۳
۱۰۷	قضیه کِرو ۶.۳
۱۱۰	صفحه‌ی مماس ۷.۳

۴ دیفرانسیل پذیری ۱۱۴

۱۱۴	۱.۴ مقدمه
۱۱۵	۱.۱.۴ تعریف دقیق دیفرانسیل پذیری (برای توابع دو متغیره)
۱۱۸	۲.۴ شرطی کافی برای مشتق پذیری
۱۲۰	۳.۴ دیفرانسیل کلی یک تابع
۱۲۰	۴.۴ قاعده‌ی زنجیره‌ای
۱۲۳	۵.۴ مشتق‌گیری ضمنی
۱۲۴	۶.۴ یادآوری فرمولها
۱۲۵	۷.۴ حل چند تمرین

۵ مشتقات سوئی و ارتباط آنها با دیفرانسیل پذیری ۱۲۹

۱۳۴	۱.۵ بردار گرادیان
۱۳۷	۲.۵ مرور
۱۳۸	۳.۵ صحبتی بیشتر درباره منحنی‌های فضایی
۱۴۴	۴.۵ صفحات مماس بر رویه‌های تراز
۱۵۰	۵.۵ تمرین
۱۵۰	۶.۵ بسط تیلور توابع چندمتغیره
۱۵۲	۷.۵ چندجمله‌ای‌های تیلور
۱۵۴	۸.۵ تمرین

۶ اکسترمهای نسبی ۱۵۵

۱۵۵	۱.۰.۶ یافتن اکسترمهای توابع دو متغیره
۱۵۹	۲.۰.۶ نقاط بحرانی
۱۶۰	۳.۰.۶ محک مشتق دوم برای تعیین اکسترمها و نقاط زینی
۱۶۵	۱.۶ تمرین
۱۶۶	۲.۶ اکسترمهای مطلق
۱۶۷	۱.۲.۶ توپولوژی در R^2
۱۷۳	۳.۶ تمرین
۱۷۴	۴.۶ روش ضرایب لاگرانژ
۱۷۸	۵.۶ تمرین
۱۸۰	۶.۶ کار نکردن روش

۷ انتگرال دوگانه

۱۸۱

- ۱۰۰.۷ مرور مفهوم انتگرال در ریاضی عمومی یک ۱۸۱
- ۱۰.۷ جمع‌های ریمانی دوگانه ۱۸۲
- ۱۰۱.۷ انتگرال جزئی ۱۸۵
- ۲.۷ قضیه فوبینی ۱۸۷
- ۳.۷ انتگرالگیری در نواحی کلی ۱۸۹
- ۱۰۳.۷ ویژگی‌های انتگرال ۱۹۳
- ۴.۷ تمرین ۱۹۵
- ۱۰۴.۷ انتگرال دوگانه در مختصات قطبی ۱۹۷
- ۵.۷ جلسه‌ی سی و یکم، شنبه ۲۰۳
- ۱۰۵.۷ تغییر متغیر ۲۰۳
- ۲۰۵.۷ تغییر مختصات قطبی ۲۰۵
- ۳۰۵.۷ مثالها ۲۰۶
- ۶.۷ جلسه‌ی سی و دوم، انتگرالهای سه گانه ۲۰۷
- ۱۰۶.۷ انتگرال‌های سه گانه ۲۰۸
- ۲۰۶.۷ مختصات استوانه‌ای ۲۱۱
- ۷.۷ نیم جلسه‌ی سی و سوم، چهارشنبه، انتگرالگیری در مختصات کروی ۲۱۵
- ۱۰۷.۷ مختصات کروی ۲۱۷
- ۲۰۷.۷ ادامه‌ی مختصات کروی ۲۲۰
- ۳۰۷.۷ انتگرالگیری از میدان‌های برداری روی مسیرهای خطی ۲۲۲
- ۸.۷ جلسه‌ی سی و چهارم ۲۲۲
- ۱۰۸.۷ ادامه‌ی مختصات کروی ۲۲۲

۸ آنالیز برداری

۲۲۵

- ۱۰۰.۸ انتگرالگیری روی خط از توابع عددی ۲۲۵
- ۱۰.۸ شهود هندسی ۲۳۳
- ۲.۸ چند انتگرال دیگر وابسته به خم ۲۳۳
- ۳.۸ میدان‌های برداری ۲۳۵
- ۴.۸ انتگرالگیری روی خط (روی خم) از توابع برداری ۲۴۰
- ۵.۸ پایستگی انرژی ۲۴۷
- ۱۰۵.۸ قضیه‌ی گرین ۲۴۸
- ۶.۸ استفاده‌ی برعکس از قضیه‌ی گرین ۲۵۲

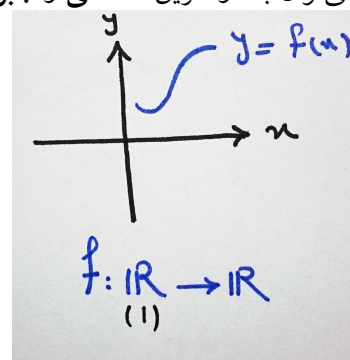
۲۵۵	۹	انتگرالهای روی رویه
۲۵۵	۱.۹	رویه های پارامتری
۲۵۶	۲.۹	انتگرال توابع عددی روی رویه ها
۲۵۸	۳.۹	المان سطح برای رویه های $z = f(x, y)$
۲۶۰	۴.۹	المان سطح برای رویه های ضمنی
۲۶۱	۵.۹	تمرین
۲۶۱	۶.۹	انتگرالگیری از توابع برداری روی رویه ها = محاسبه شار
۲۶۴	۷.۹	شار برای رویه های $z = f(x, y)$
۲۶۶	۸.۹	تمرین
۲۶۸	۱۰	قضایای استوکس و دیورژانس
۲۶۸	۱۰.۱۰	کِرل
۲۶۹	۲۰.۱۰	قضیه ی استوکس
۲۷۲	۱.۱۰	تمرین
۲۷۳	۲.۱۰	قضیه ی دیورژانس
۲۷۷	۳.۱۰	مرور درس
۲۸۰	۴.۱۰	تمرین

فصل ۱

آشنایی با فضای سه بعدی و رسم معادلات درجه دوم

۱.۱ ریاضی ۲ در مورد چیست؟

در درس ریاضی ۱ با حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع تک متغیره آشنا شدیم. یک تابع تک متغیره $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را می توان به دو طریق هندسی و جبری مطالعه کرد.



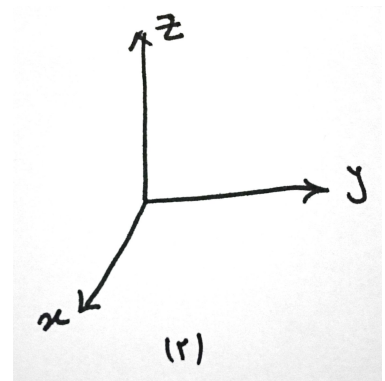
مطالعه هندسی این تابع یعنی رسم نمودار آن. مطالعه جبری تابع یعنی محاسبه مشتق آن، یافتن نقاط بحرانی و بررسی علامت مشتق. در ریاضی ۱ دیدیم که میان ویژگی های مشتق تابع و شکل هندسی آن رابطه وجود دارد. یعنی می توان شکل تابع را تنها با مطالعه جبری مشتقات آن حدس زد.

در درس ریاضی ۲ به حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع چندمتغیره می پردازیم. هدف ما از این درس گذار از فضای دو بُعدی $\mathbb{R}^2$ به فضاهای با ابعاد بالاتر است، مانند $\mathbb{R}^n$ برای $n > 2$. منظورمان از توابع چندمتغیره، توابعی است مانند

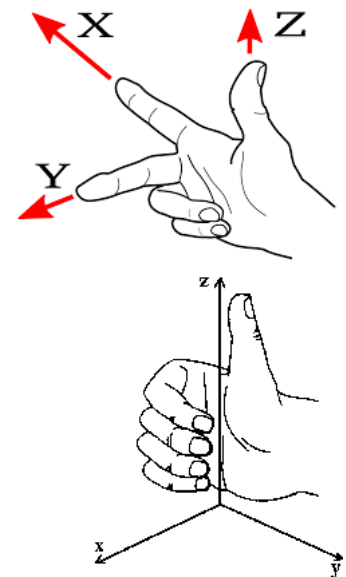
$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad n, m > 0$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_m)$$

از میان این توابع، به طور خاص به توابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ و $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ علاقه مند خواهیم بود؛ زیرا این توابع را می توان در فضای سه بعدی تجسم کرد. فضای سه بعدی برای مطالعه فیزیکی حرکت بسیاری از اجسام در فضا، مناسب است. فضای سه بُعدی $\mathbb{R}^3$ توسط سه محور x, y, z ساخته شده است.



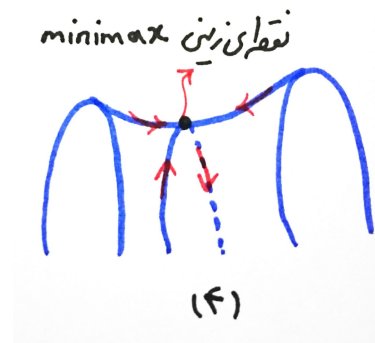
برای تعیین ترتیب این محورها از قاعده‌ی دست راست استفاده می‌کنیم:



در این درس، نخست با نحوه‌ی رسم برخی توابع در $\mathbf{R}^3$ آشنا خواهیم شد و سپس مفهوم مشتق‌پذیری را به توابع $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ تعمیم خواهیم داد.

سوال ۱. فرض کنید $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ یک تابع باشد و $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ نقطه‌ای دلخواه باشد. پیشنهاد شما برای تعریف مشتق این تابع در نقطه‌ی یادشده چیست؟

در درس ریاضی ۱ دیدیم که توابع دیفرانسیل‌پذیر $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ، توابعی هستند که رفتار آنها در نزدیکی نقاط را می‌توان با استفاده از رفتار خطوط مماس تخمین زد. در ریاضی ۲ خواهیم دید که در واقع مطالعه‌ی مشتق یک تابع $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ یعنی تخمین زدن این توابع توسط صفحات مماس و مطالعه‌ی تغییرات صفحات مماس. در این درس نیز با استفاده از مطالعه‌ی مشتق، شکل هندسی یک تابع را تخمین خواهیم زد. در اینجا علاوه بر مینی‌موم و ماکزیمم، نقطه‌ی زینی هم خواهیم داشت:



رفع ابهام ۲. تجسم هندسی توابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت رویه‌ها است. یک رویه را می‌توانید به صورت یک پارچه تصور کنید که می‌تواند چین و چروک هم داشته باشد. اما توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ به صورت منحنی‌های مسطح هستند. منحنی‌های مسطح حالت خاصی از منحنی‌های فضائی هستند (و منحنی‌های فضائی توابعی مانند $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ هستند). یک منحنی فضائی را می‌توانید یک نخ تصور کنید که در فضا به شکلی درآمده است. در رسم منحنی‌های فضائی، فقط بُرد تابع را رسم می‌کنیم. در زیر، یک رویه و یک منحنی فضائی برای مثال رسم کرده‌ایم. شکل اول، توسط تابع زیر تولید شده است:

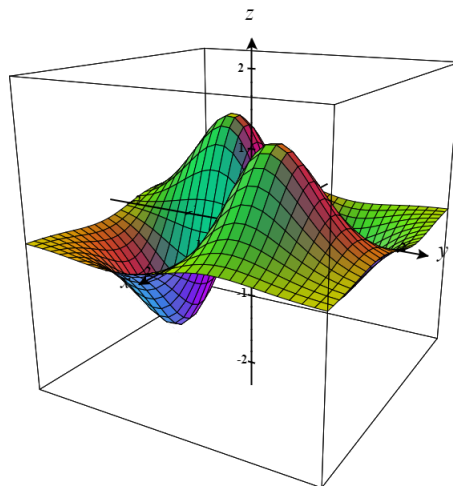
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

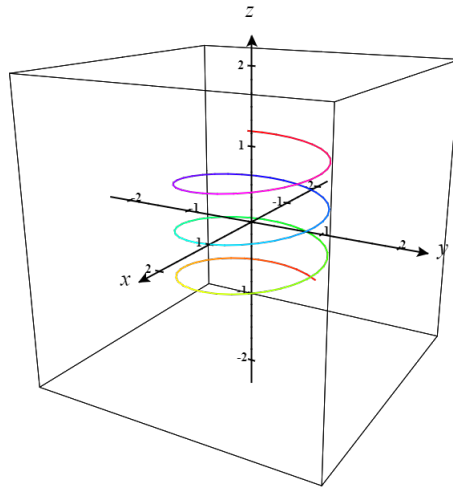
$$f(x, y) = \frac{xy}{e^{x^2+y^2}}$$

شکل دوم توسط تابع زیر تولید شده است:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(t) = (\cos(t), \sin(t), \sqrt{t})$$





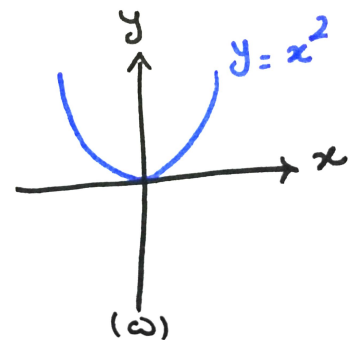
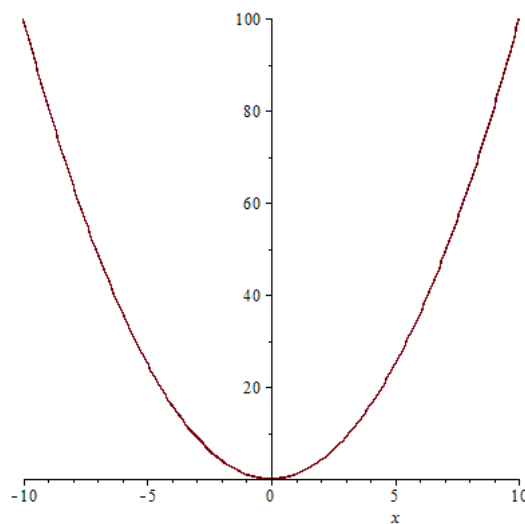
برای آشنائی بیشتر با فضای سه بعدی، نخست با نحوه‌ی رسم فضای هندسی برخی معادلات آشنا می‌شویم:

۲.۱ رسم استوانه‌ها

توجه کنید که در این بخش لزوماً به رسم تابع‌ها نخواهیم پرداخت. یعنی معادلاتی که آنها را رسم می‌کنیم، ممکن است لزوماً تابع نباشند.

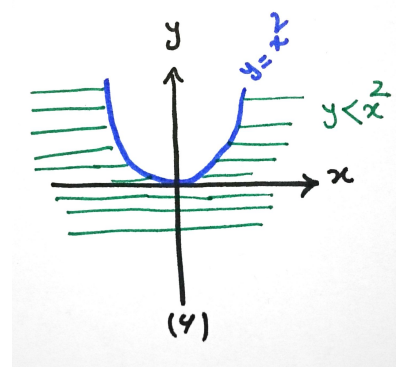
مثال ۳. در فضای دو بعدی $\mathbb{R}^2$ مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی $y = x^2$ را رسم کنید؛ یعنی مجموعه‌ی زیر را در $\mathbb{R}^2$ بکشید:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

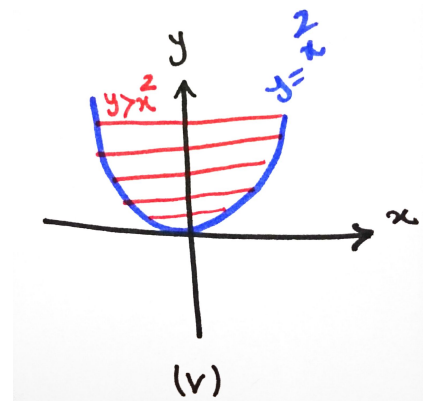


مثال ۴. در $\mathbb{R}^2$ مجموعه‌های زیر را رسم کنید:

$$\{(x, y) \mid y < x^2\}$$



$$\{(x, y) | y > x^2\}$$

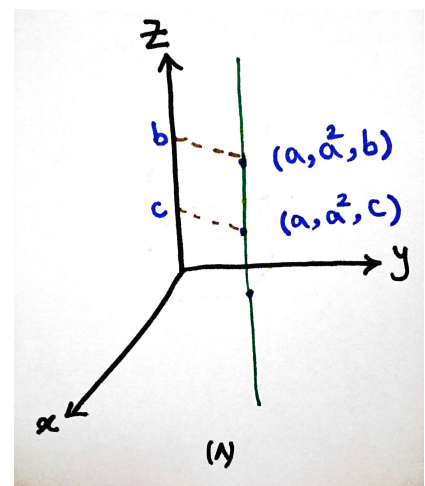


مثال ۵. مکان هندسی نقاط صادق در معادله $y = x^2$ را در فضای سه بُعدی رسم کنید.

پاسخ. می‌خواهیم مجموعه‌ی نقاط زیر را در $\mathbb{R}^3$ رسم کنیم:

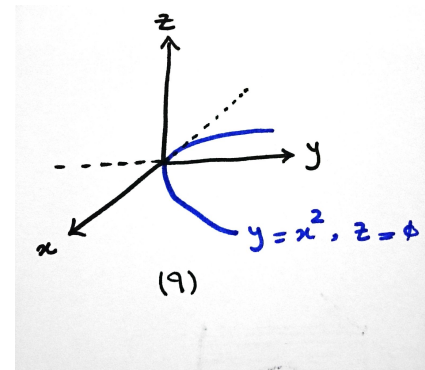
$$\{(x, y, z) | y = x^2\}$$

مشاهده ۶. اگر نقطه‌ی (a, a^2, b) روی شکل مورد نظر واقع باشد، آنگاه هر نقطه‌ی دیگر (a, a^2, c) نیز روی همان شکل خواهد بود. به بیان دیگر اگر نقطه‌ی p روی شکل مورد نظر ما واقع شود، آنگاه هر خطی که از p بگذرد و با محور z موازی باشد نیز روی شکل واقع است.



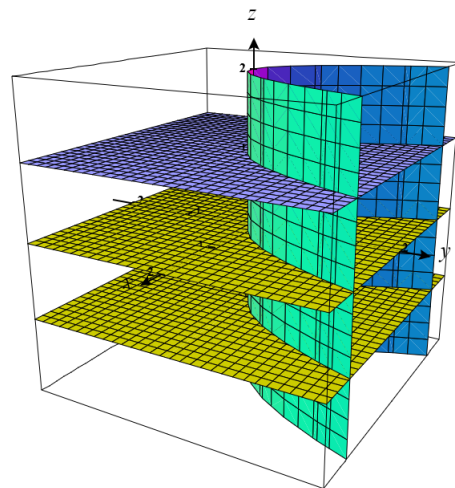
مشاهده ۷. تصویر شکل مورد نظر در صفحه‌ی xy به صورت زیر است:

$$\{(x, y, 0) | y = x^2\}$$

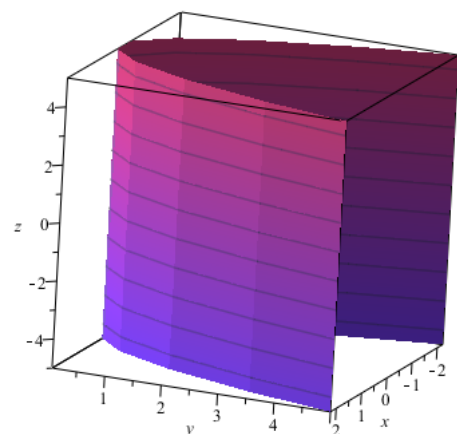


به بیان بهتر اشتراک شکل مورد نظر ما صفحه‌ی $z = 0$ به صورت بالاست.

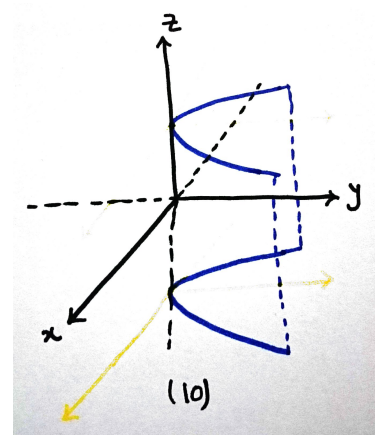
مشاهده ۸. اشتراک شکل مورد نظر ما با صفحات $z = 0, z = \pm 1$ به صورت زیر است:



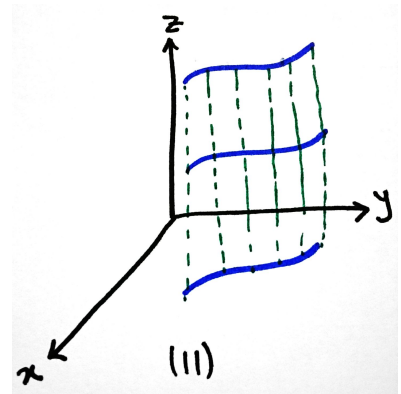
در واقع در هر ارتفاعی یک بار منحنی $y = x^2$ ایجاد شده است:



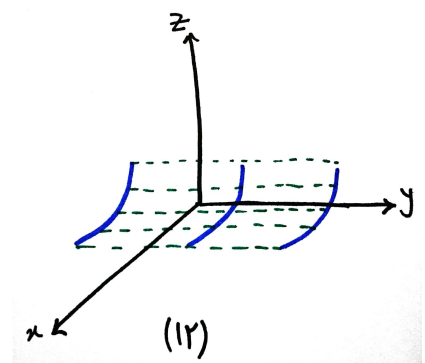
شکل بالا مثالی از یک استوانه است.



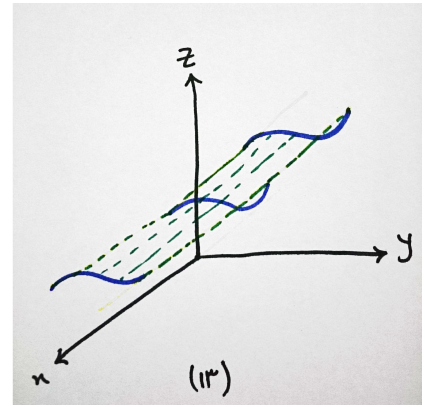
تعریف ۹. منظور از استوانه مجموعه‌ی همه‌ی خطوط موازی‌ای است که از یک منحنی دلخواه می‌گذرند.
معادله‌ی $f(x, y) = 0$ یک استوانه موازی محور z ها به دست می‌دهد.



به منحنی $f(x, y) = 0$ منحنی مولد استوانه گفته می‌شود. به طور مشابه معادله‌ی $f(x, z) = 0$ یک استوانه موازی محور y بدست می‌دهد.

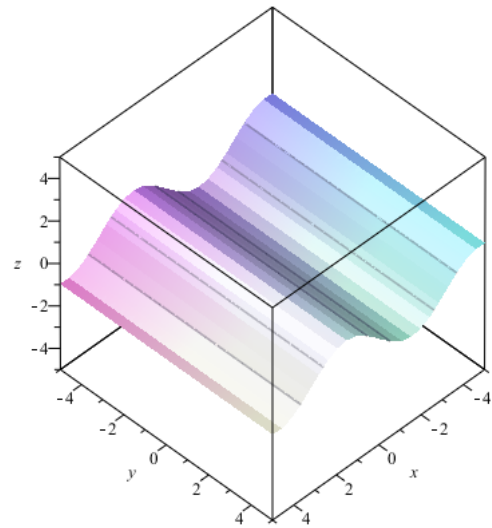


همچنین معادله‌ی $f(y, z) = 0$ یک استوانه موازی محور x بدست می‌دهد.



□

مثال ۱۰. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی $z = \sin x$ را رسم کنید.



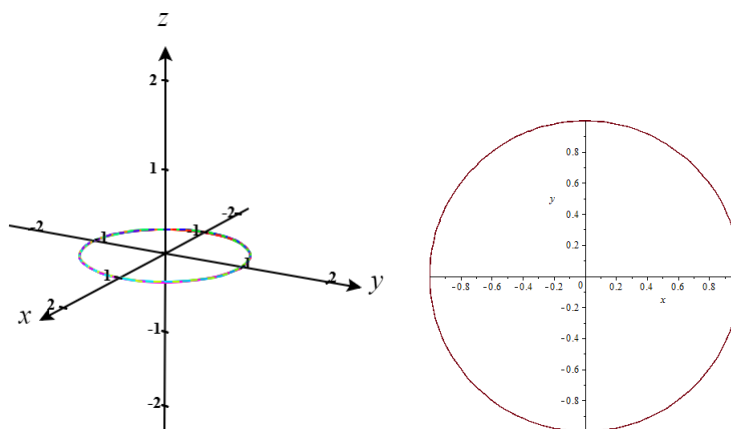
درباره‌ی استوانه‌ها، به عنوان مجموعه‌ای از خطوط موازی که از یک منحنی مشخص می‌گذرند، صحبت کردیم. بحث را با رسم چند استوانه پی می‌گیریم.

مثال ۱۱. استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ را رسم کنید.

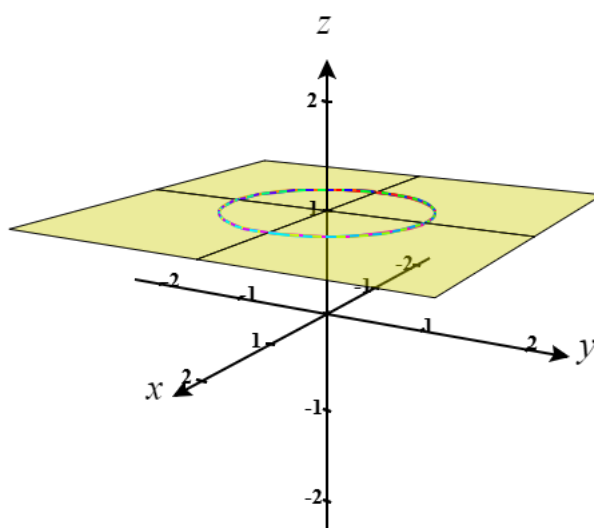
پاسخ. هدفمان رسم مجموعه‌ی نقاط زیر است.

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$$

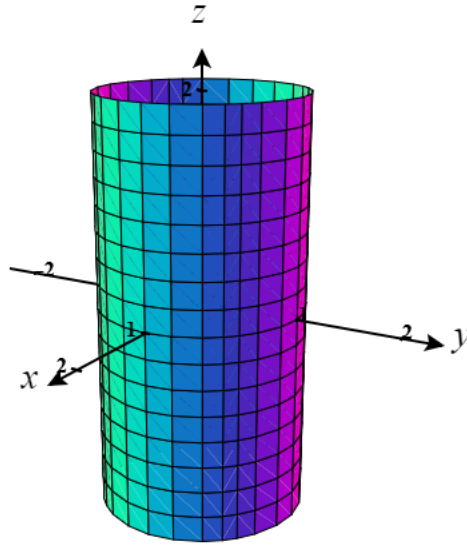
تصویر شکل مورد نظر روی صفحه‌ی $z = 0$ به صورت زیر است.



به طور مشابه در هر صفحه‌ی $z = k$ نیز یک دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 = 1$ ایجاد می‌شود:



بنابراین شکل مورد نظر ما یک استوانه به صورت زیر است:

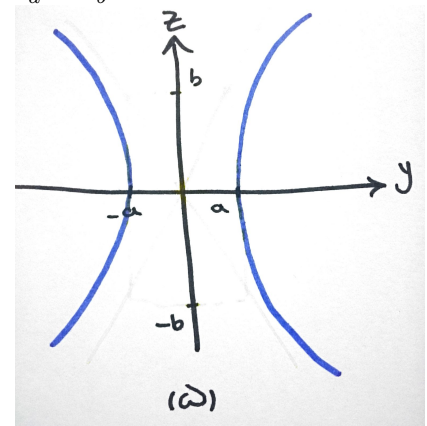


□

مثال ۱۲. استوانه‌ی $y^2 - z^2 = 1$ را رسم کنید.

پاسخ. توجه کنید که از آنجا که x در معادله‌ی بالا ظاهر نشده است، شکل مورد نظر استوانه‌ای خواهد بود موازی محور x . پیش از آن که مثال بالا را پاسخ دهیم، نیازمند یادآوری چند مطلب از دوره‌ی دبیرستان هستیم:

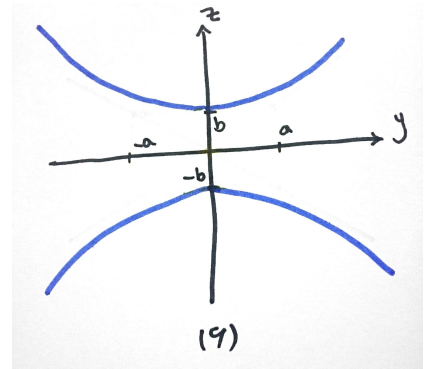
یادآوری ۱۳. معادله‌ی $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ در صفحه‌ی yz یک هذلولی به دست می‌دهد.



به طور مشابه، مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی

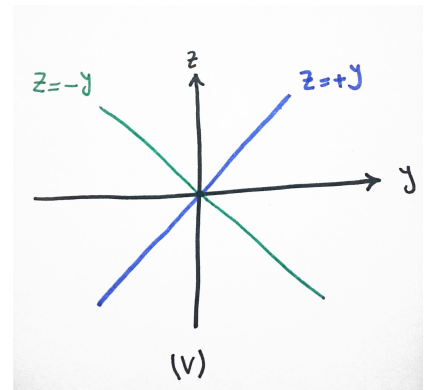
$$\frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

به صورت زیر است:

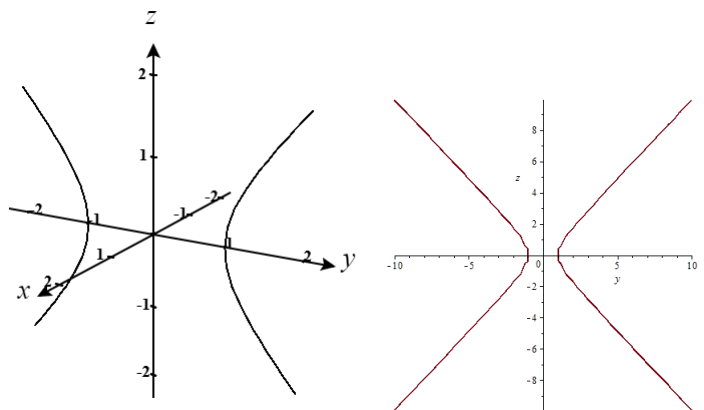


سوال ۱۴ (سوال یکی از دانشجویان). نقاط صادق در معادله $y^2 - z^2 = 0$ چه شکلی تشکیل می دهند؟ پاسخ:

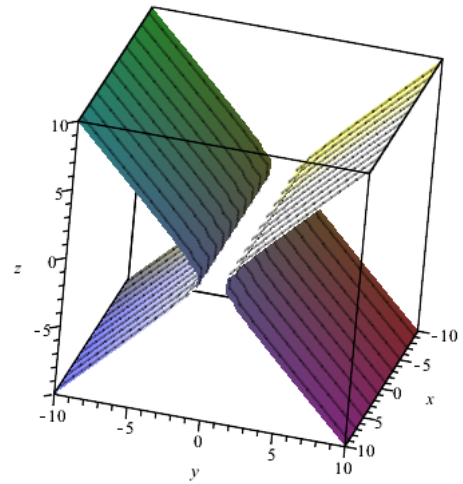
$$y^2 - z^2 = 0 \Rightarrow (y - z)(y + z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ y = -z \end{cases}$$



حال به حل مثال بالا می پردازیم. در صفحه $x = 0$ شکل زیر ایجاد می شود که از معادله $y^2 - z^2 = 1$ ، $x = 0$ به دست آمده است.



در هر صفحه $x = k$ نیز همان شکل بالا ایجاد می شود و از این رو معادله ذکر شده در مثال، منجر به استوانه ی زیر می شود:



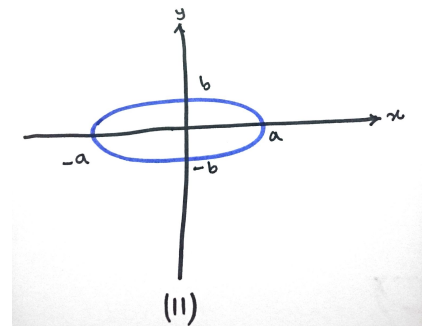
□

مثال ۱۵. استوانه‌ی $x^2 + 4z^2 = 4$ را رسم کنید.

پاسخ. نخست روش رسم یک بیضی را یادآوری می‌کنیم.

یادآوری ۱۶. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را در فضای دو بعدی رسم کنید:

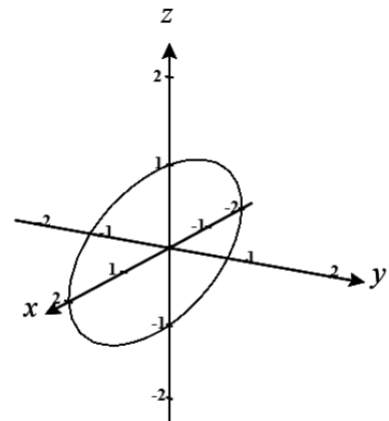
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



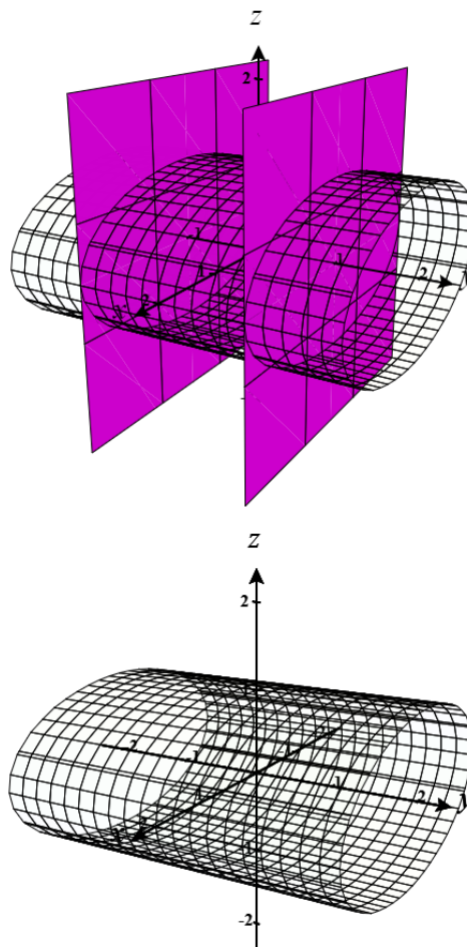
حال برای پاسخ به مثال ۱۵ نخست طرفین معادله را بر ۴ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{x^2}{4} + z^2 = 1$$

در صفحه‌ی $y = 0$ شکل ایجاد شده به صورت زیر است:



مشابه مثالهای قبلی، استوانه‌ی مورد نظر ما به صورت زیر خواهد بود.



□

توجه ۱۷. تا کنون با نحوه‌ی رسم استوانه‌ها آشنا شده‌ایم. رسم رویه‌های سه بُعدی در حالت کلی آسان نیست. در زیر چند رویه را برای نمونه رسم کرده‌ایم که آنها را در کلاس درس، با استفاده از نرم‌افزار میپل خواهیم کشید.

۱. معادله‌ی $z = xy^2 - x^3$ که به «زین میمون» معروف است.

۲. معادله‌ی $z = xy^3 - yx^3$ که به «زین سگ» معروف است.

۳. معادله‌ی $z = x^2 - y^2$ که به «زین اسب» معروف است.

۴. معادله‌ی $x^3 + y^3 + z^3 + 1 = (x + y + z + 1)^3$

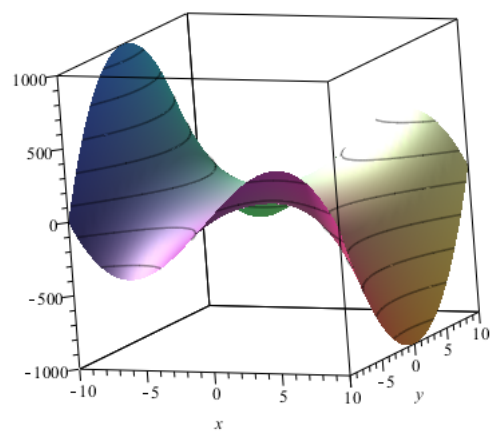
۵. معادله‌ی $z = \sin(xy)$

۶. معادله‌ی $z = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$

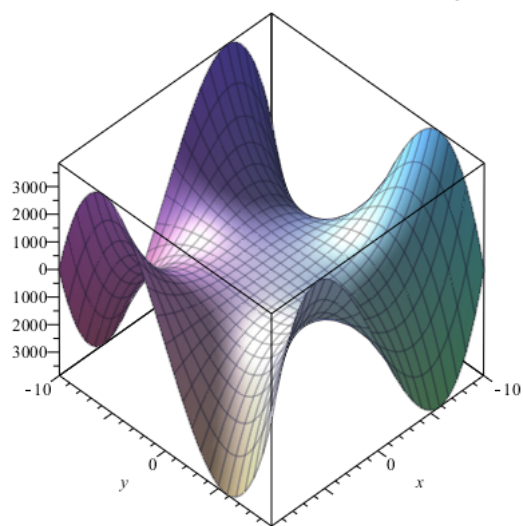
۷. معادله‌ی $z = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$

۸. معادله‌ی $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ، از قضا خواهیم دید که رسم این معادله چندان دشوار نیست (دوران).

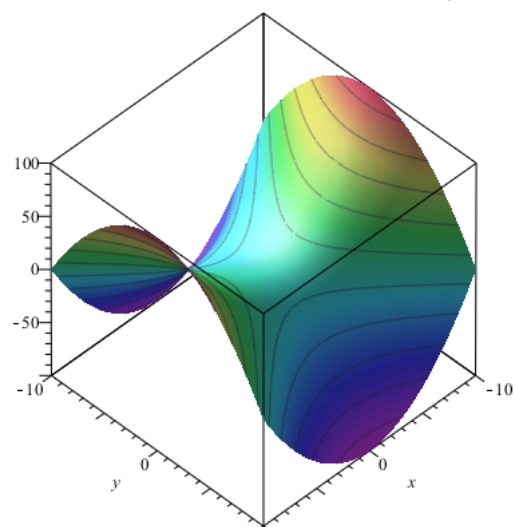
معادله‌ی ۱:



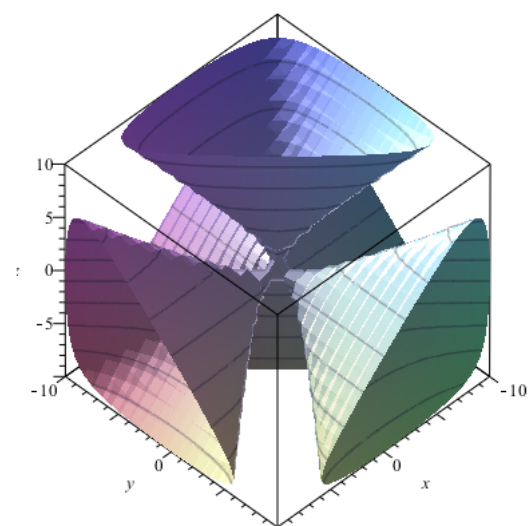
معادله‌ی ۲:



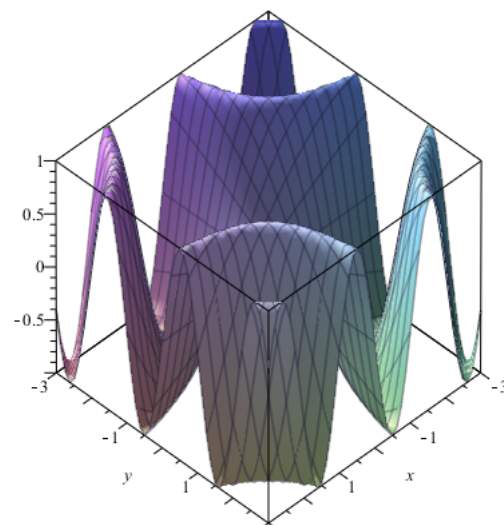
معادله‌ی ۳:



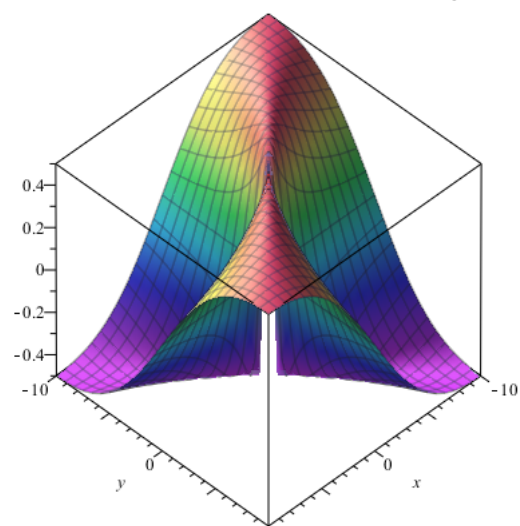
معادله‌ی ۴:



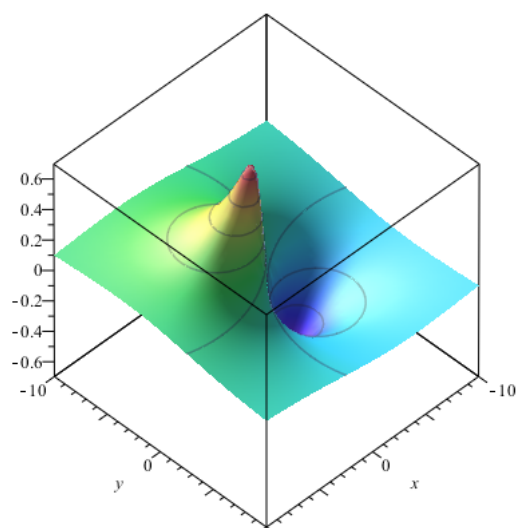
معادله‌ی ۵



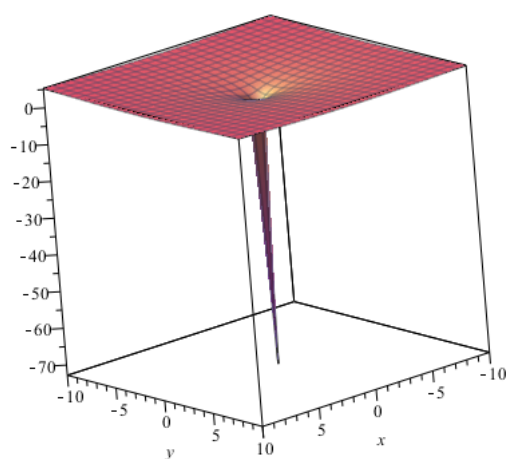
معادله‌ی ۶



معادله‌ی ۷:



معادله‌ی ۸:



در بخش آینده خواهیم کوشید تا مکان هندسی برخی معادلات ضمنی درجه‌ی دوم را رسم کنیم. توجه کنید که از کلمه‌ی ضمنی برای این استفاده کرده‌ایم که در معادلات زیر مقدار z را بر حسب دو متغیر x, y به طور مستقیم نداریم. در واقع آنچه رسم می‌کنیم لزوماً یک تابع نیست.

۳.۱ رسم رویه‌های درجه‌ی دوم

منظور از یک رویه‌ی درجه‌ی دوم، رویه‌ای است که با معادله‌ای به صورت زیر ایجاد می‌شود:

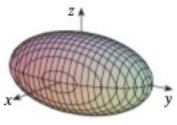
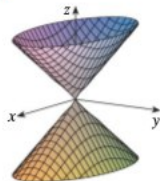
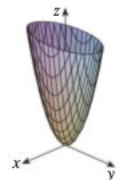
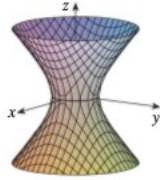
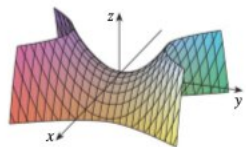
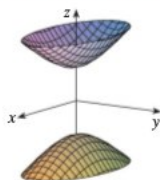
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

توجه ۱۸. جای حروف بزرگ انگلیسی در بالا عدد قرار می‌گیرد.

توجه ۱۹. عبارتی شامل xyz در بالا نداریم (و به همین علت، معادله را درجه‌ی دوم نامیده‌ایم).

توجه ۲۰. با استفاده از تبدیل‌های خطی دوران و انتقال می‌توان ضرایب xz ، yz و xy را از بین برد.

توجه ۲۱. شکلی که از معادله‌ی بالا حاصل می‌شود به یکی از صورت‌های زیر است:

Surface	Equation	Surface	Equation
Ellipsoid 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ All traces are ellipses. If $a = b = c$, the ellipsoid is a sphere.	Cone 	$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces in the planes $x = k$ and $y = k$ are hyperbolas if $k \neq 0$ but are pairs of lines if $k = 0$.
Elliptic Paraboloid 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are parabolas. The variable raised to the first power indicates the axis of the paraboloid.	Hyperboloid of One Sheet 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Horizontal traces are ellipses. Vertical traces are hyperbolas. The axis of symmetry corresponds to the variable whose coefficient is negative.
Hyperbolic Paraboloid 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ Horizontal traces are hyperbolas. Vertical traces are parabolas. The case where $c < 0$ is illustrated.	Hyperboloid of Two Sheets 	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Horizontal traces in $z = k$ are ellipses if $k > c$ or $k < -c$. Vertical traces are hyperbolas. The two minus signs indicate two sheets.

در زیر معادلات بالا را یکی یکی تحلیل می‌کنیم.

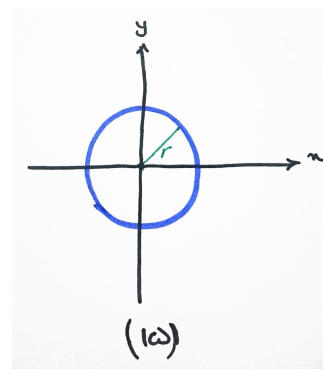
۱.۳.۱ بیضی‌وار

یادآوری ۲۲. منظور از یک دایره در صفحه‌ی xy مجموعه‌ی نقاطی است که فاصله‌ی آنها تا مبدأ با هم برابر است.

$$\{(x, y) | \sqrt{x^2 + y^2} = r\}$$

پس معادله‌ی یک دایره در صفحه‌ی xy به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



منظور از کره مجموعه نقاطی است مانند $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ که فاصله‌ی آنها تا مبدأ با هم برابر است. (ثابت کنید که) فاصله‌ی نقطه‌ی (x, y, z) تا مبدأ برابر است با

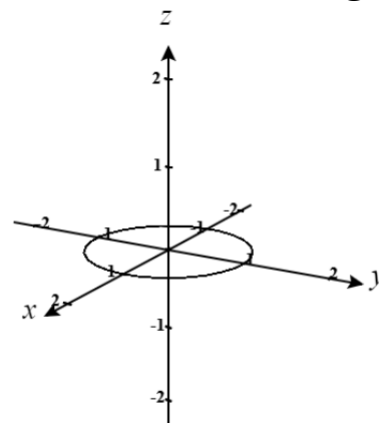
$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

پس معادله‌ی کلی یک کره به مرکز مبدأ مختصات به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

مثال ۲۳. رویه‌ی حاصل از معادله‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را رسم کنید.

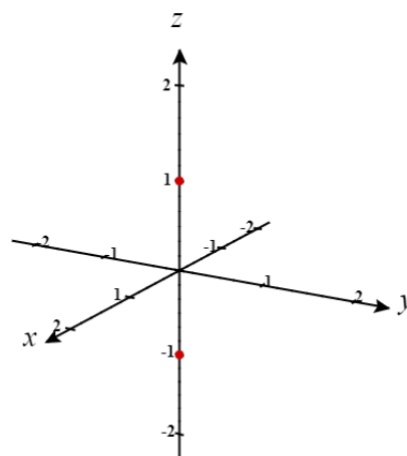
پاسخ. در صفحه‌ی $z = 0$ شکل یک دایره با معادله‌ی $x^2 + y^2 = 1$ ایجاد می‌شود.



معادله‌ی دایره‌ی بالا عبارت است از $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

در صفحه‌های $z = \pm 1$ تنها یک نقطه ایجاد می‌شود:

$$z = \pm 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

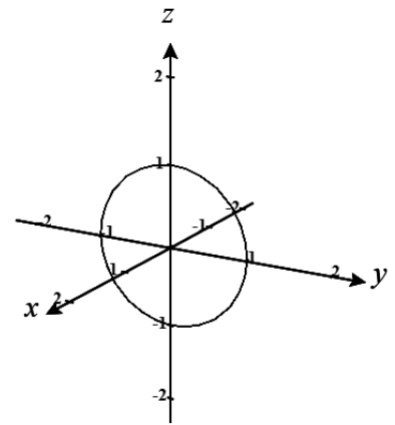


در صفحه‌های $z = k > 1$ هیچ شکلی ایجاد نمی‌شود.

$$z = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = -3 \Rightarrow \text{هیچ نقطه‌ای نداریم.}$$

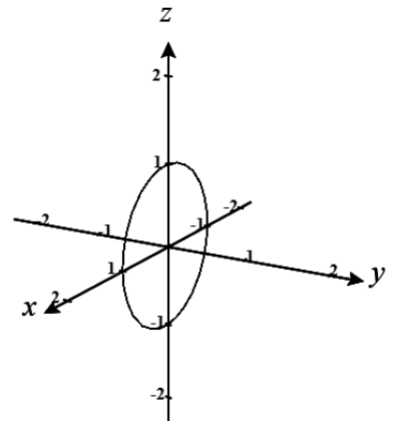
در صفحه‌ی $x = 0$ نیز یک دایره ایجاد می‌شود:

$$x = 0 \Rightarrow y^2 + z^2 = 1$$

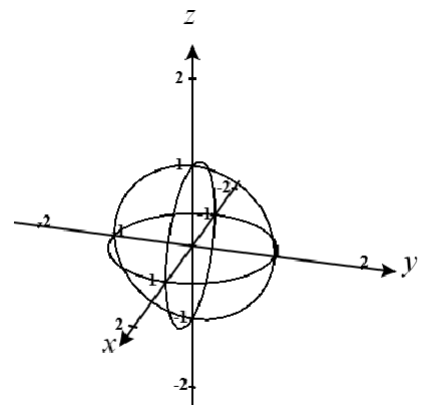
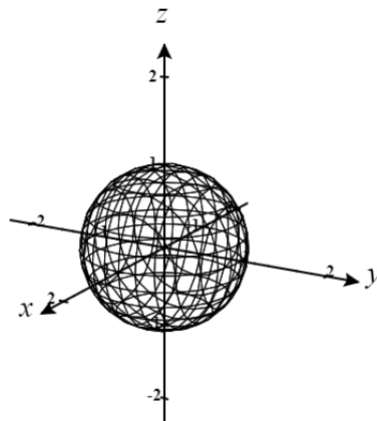


به همین ترتیب در صفحه‌ی $y = 0$ نیز دایره‌ی زیر ایجاد می‌شود.

$$y = 0 \Rightarrow x^2 + z^2 = 1$$



شکل کلی نیز به صورت زیر خواهد بود:



مثال ۲۴. شکل صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

□

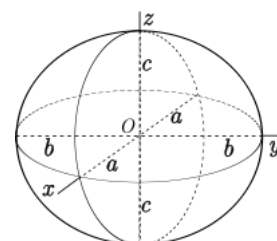
پاسخ.

$$z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$z = c \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



شکل بالا بیضی وار نامیده می شود.^۱

توجه ۲۵. اگر $a = b = c$ شکل حاصل یک کره خواهد بود.

۲.۳.۱ سهمی وار بیضوی

مثال ۲۶. شکل حاصل از معادله $z = x^2 + y^2$ را رسم کنید.

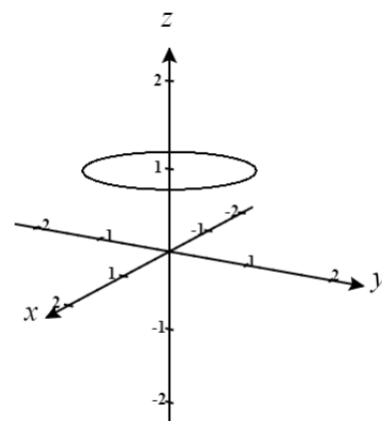
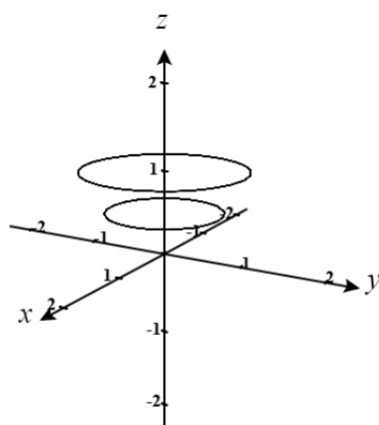
پاسخ.

$$z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = 0.$$

شکلی ایجاد نمی شود. $z < 0 \Rightarrow$

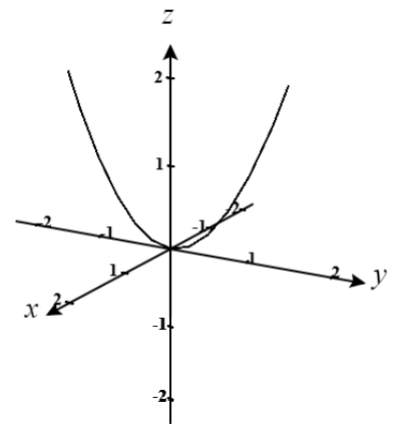
$$z = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$z = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{دایره}$$

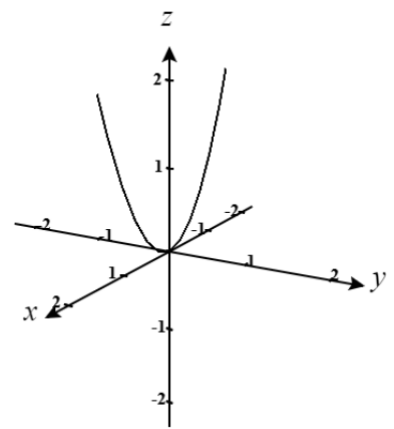


$$x = 0 \Rightarrow z = y^2$$

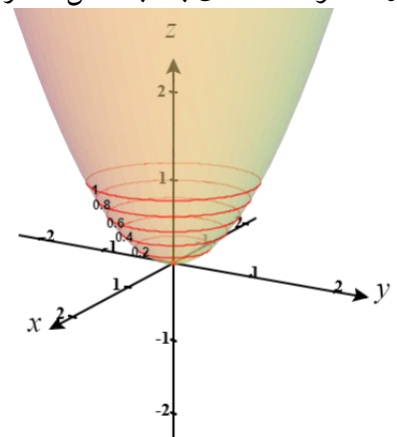
¹ellipsoid

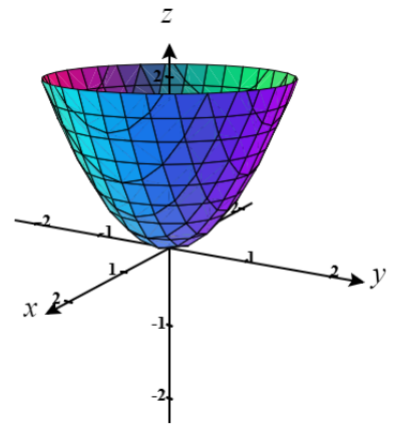


$$y = 0 \Rightarrow z = x^2$$



و مجموعاً معادله‌ی بالا به شکل منجر می‌شود.





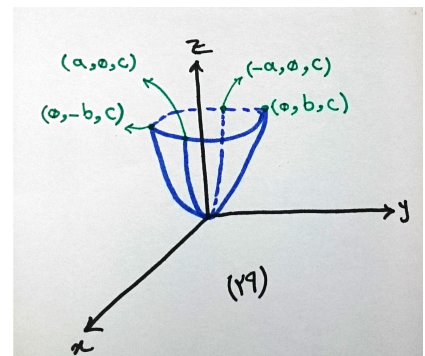
□

توجه ۲۷. در رسم اشکال از شما انتظار داریم که محل تلاقی شکل با محورها را دقیق مشخص کنید و مختصات آن را بنویسید.

مثال ۲۸. مکان هندسی نقاط صادق در معادله $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ را رسم کنید. (فرض کرده‌ایم که $a, b, c > 0$) پاسخ.

$$z = 0 \Rightarrow (x, y) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow z = \frac{c}{b^2} y^2$$



□

شکل بالا را به دو صورت می‌توان مجسم کرد. به صورت بیضی‌هائی که بزرگتر و بزرگتر می‌شوند و توسط سهمی به هم وصل شده‌اند؛ یا توسط سهمی‌هائی که دارند بالاتر و بالاتر می‌روند و شکل ظرف را ایجاد می‌کنند. توجه کنید که در بالا تنها مقطعی از شکل را کشیده‌ایم، با این فرض که شکل تا بی‌نهایت به همین صورت ادامه می‌یابد.

توجه ۲۹. هر مایعی در هر نوع ظرفی، در اثر دوران حول مرکز به شکل یک سهمی‌وار بیضوی درمی‌آید. در تلسکوپها، برای صرفه‌جویی در هزینه‌ها، با دوران جیوه، عدسی مورد نظر خود را تولید می‌کنند. برای دیدن تلسکوپهای اینچنینی و مایعهای تحت دوران، به پیوندهای زیر مراجعه کنید (هر چند متأسفانه یوتیوب فیلتر است!)

<https://www.youtube.com/watch?v=Zip9ft1PgV0>

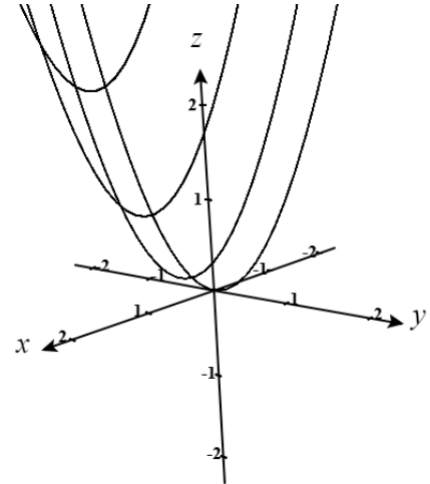
<https://www.youtube.com/watch?v=oY4zeQA1hD0>

<https://www.youtube.com/watch?v=Q5Cr9P-Q88Y>

https://en.wikipedia.org/wiki/Liquid_mirror_telescope

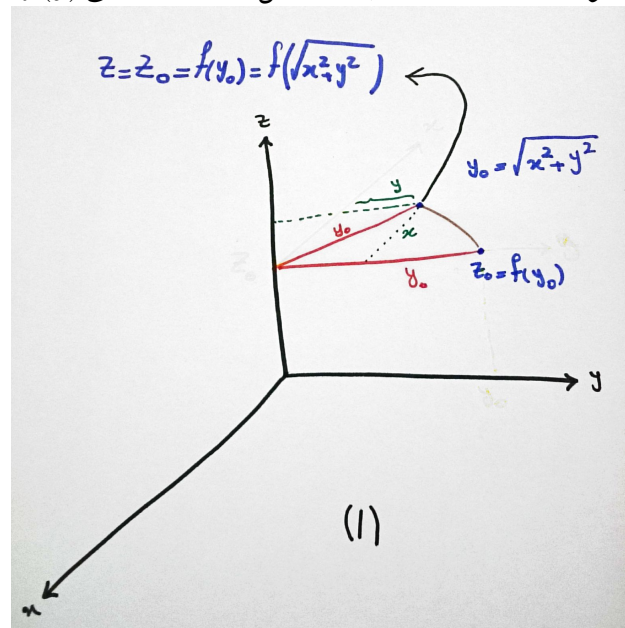
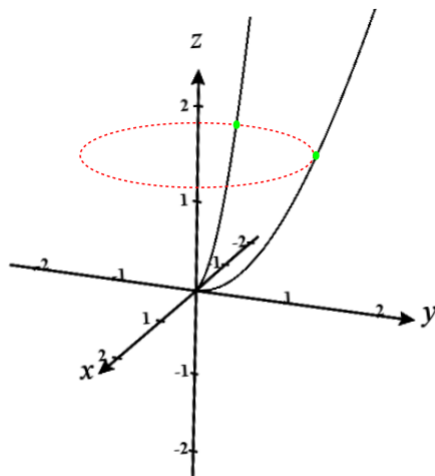
۳.۳.۱ یک انحراف کوتاه از بحث: رویه‌های حاصل از دوران

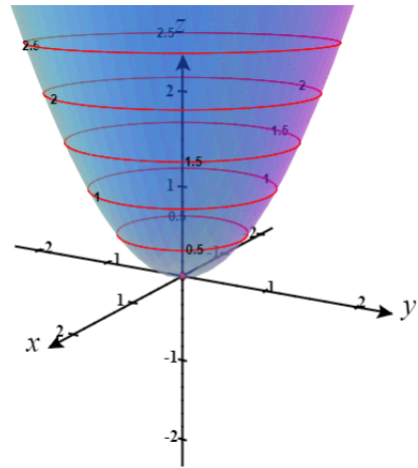
در پایان جلسه‌ی قبل گفتیم که رویه‌ی به معادله‌ی $z = x^2 + y^2$ را می‌توان مجموعه‌ی دوایری تصور کرد که شعاعشان با پیش رفتن در سوی محور z بیشتر و بیشتر می‌شود. این رویه را می‌توان همچنین مجموعه‌ی سهمی‌هائی نیز تصور کرد که هر چه بالاتر می‌روند باریکتر می‌شوند:



در زیر روش دیگری نیز برای نگاه کردن به رویه‌ی مورد نظر آورده‌ایم.

سوال ۳۰. معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی $z = f(y)$ حول محور z را بنویسید.





با توجه به اشکال بالا (و توضیحاتی که در کلاس درس داده‌ایم) معادله‌ی رویه‌ی مورد نظر عبارت است از $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

به طور کلی معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی به معادله‌ی ضمنی $f(z, y) = 0$ حول محور z عبارت است از

$$f(z, \sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

مثال ۳۱. رویه‌ی $z = x^2 + y^2$ از دوران منحنی $z = y^2$ (یا $z = x^2$) حول محور z ایجاد می‌شود؛ زیرا می‌توان نوشت:

$$z = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

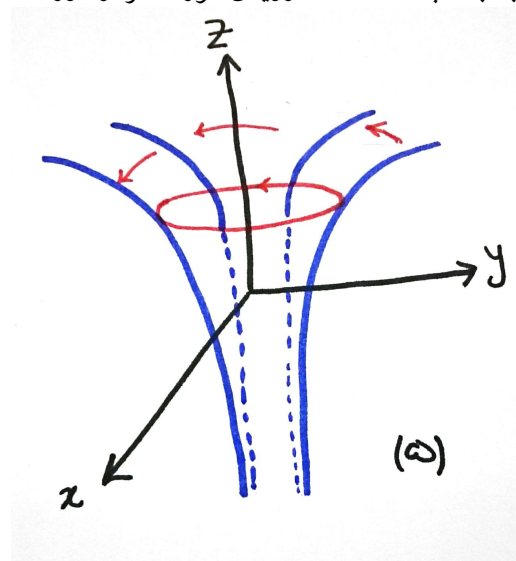
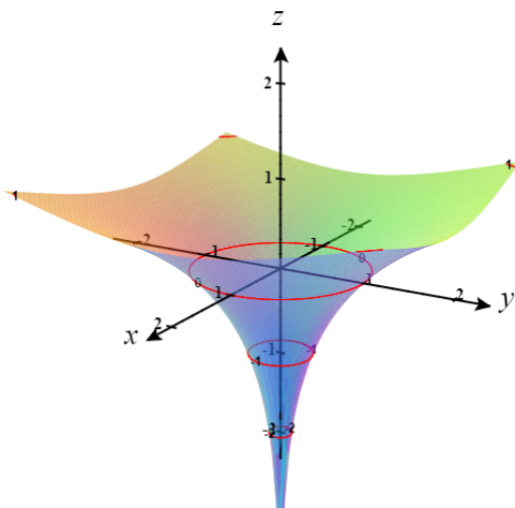
مثال ۳۲. رویه‌های زیر را رسم کنید.

$$1. \quad z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$$

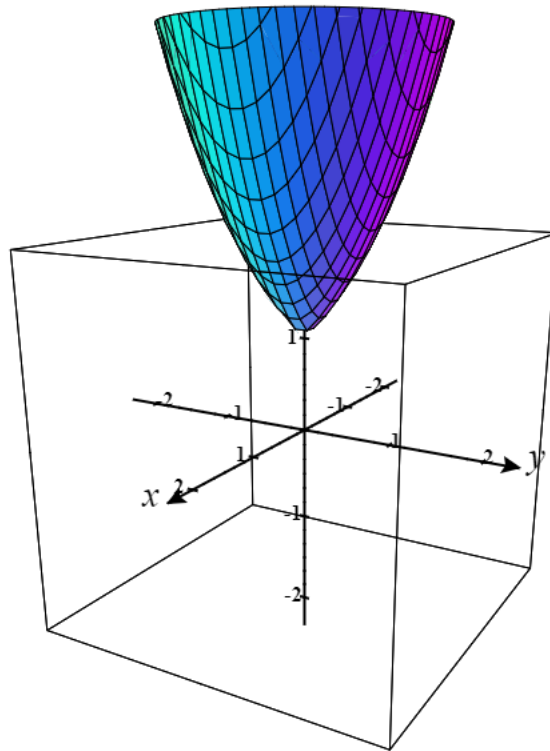
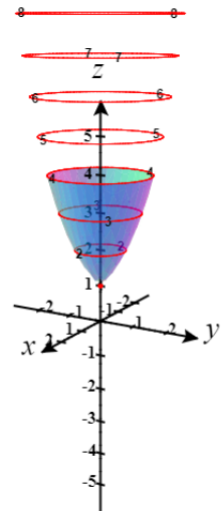
قرار دهید:

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

بنا به آنچه گفته شد، رویه‌ی مورد نظر از دوران منحنی $z = \ln(y)$ حول محور z ایجاد می‌شود.



۲. $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ ؛ این رویه نیز از دوران منحنی $z = e^y$ (برای $y > 0$) حول محور z ایجاد می‌شود.



توجه ۳۳. از دوران منحنی $f(t_1, t_2) = 0$ حول محور t_1 به رویه‌ی $f(t_1, \pm\sqrt{t_2^2 + t_3^2}) = 0$ می‌رسیم؛ در این عبارت، برای $i \neq j$ داریم $t_i \neq t_j \in \{x, y, z\}$. این جمله را تفسیر کنید!

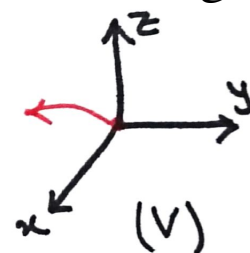
۴.۳.۱ مخروطها

مثال ۳۴. رویه به معادله‌ی زیر را رسم کنید.

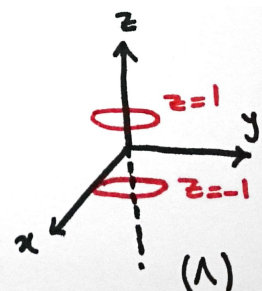
$$z^2 = x^2 + y^2$$

پاسخ. روش اول.

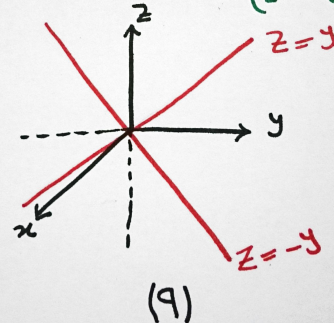
$$Z=0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$



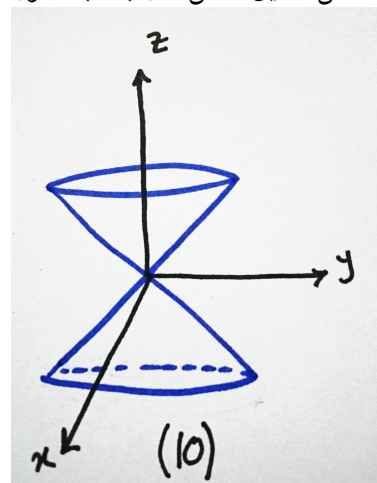
$$Z=\pm 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$



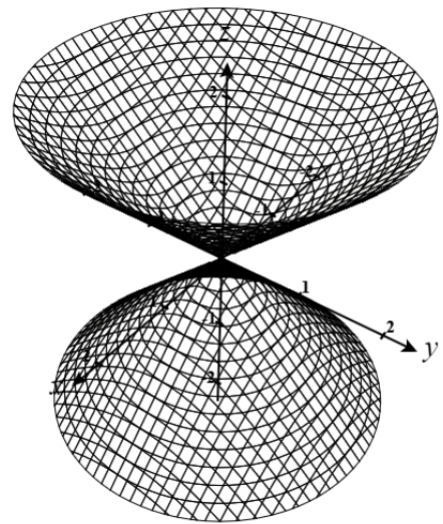
$$x=0 \Rightarrow z^2 = y^2 \Rightarrow \begin{cases} z=y \\ z=-y \end{cases}$$



حاصل تلفیق شکل‌های بالا به صورت زیر است:



رویه‌ی مورد نظر را با نرم‌افزارهای رایانه‌ای به صورت زیر کشیده‌ایم:



روش دوم. معادله‌ی مورد نظر را می‌توان به صورت زیر نوشت: $z^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$ بنابراین شکل مورد نظر از دوران منحنی $z^2 = y^2$ حول محور z ایجاد می‌شود؛ به بیان دیگر از دوران دو منحنی $z = \pm y$ حول محور z ایجاد می‌شود. $\square$

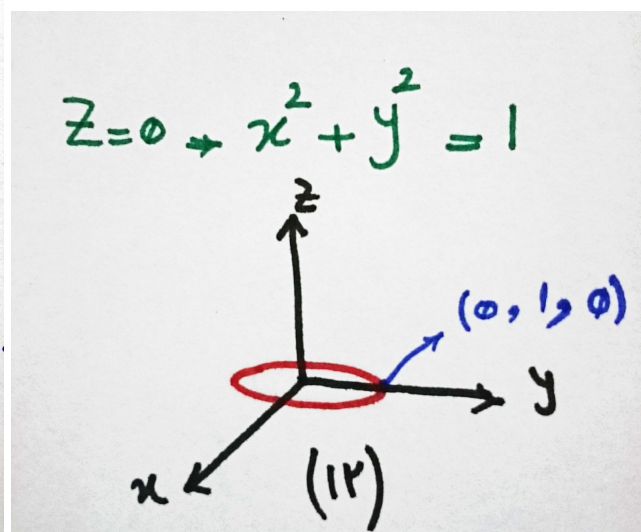
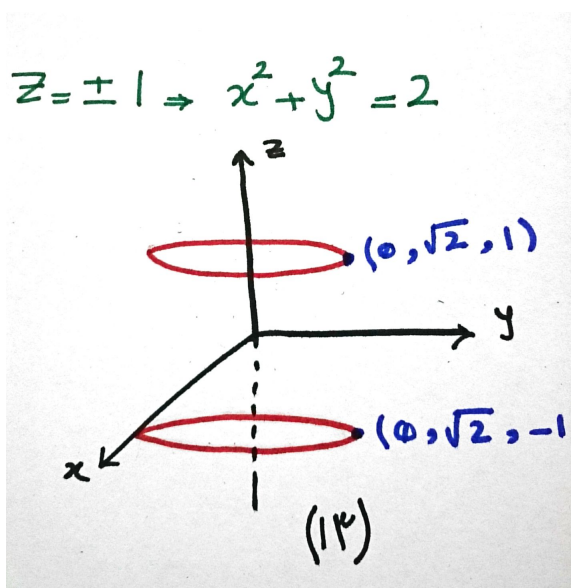
معادله‌ی کلی یک مخروط به صورت زیر است:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

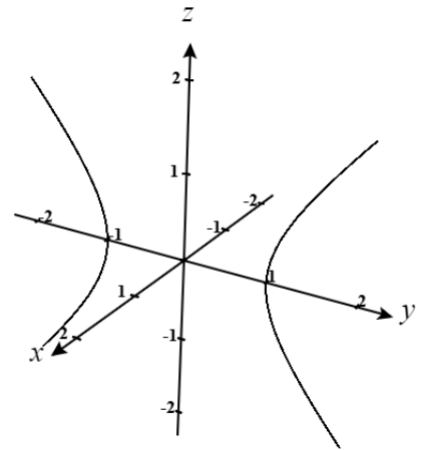
۵.۳.۱ هذلولی‌وار یکپارچه

مثال ۳۵. رویه‌ی به معادله $z^2 + 1 = x^2 + y^2$ را رسم کنید.

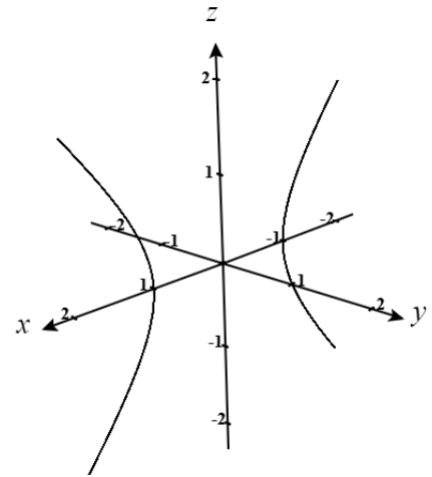
پاسخ.



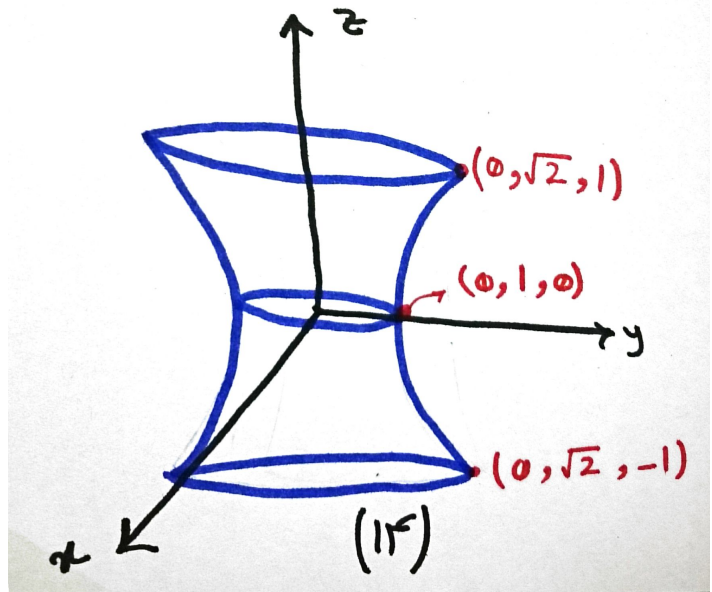
$$x = 0 \Rightarrow y^2 - z^2 = 1$$



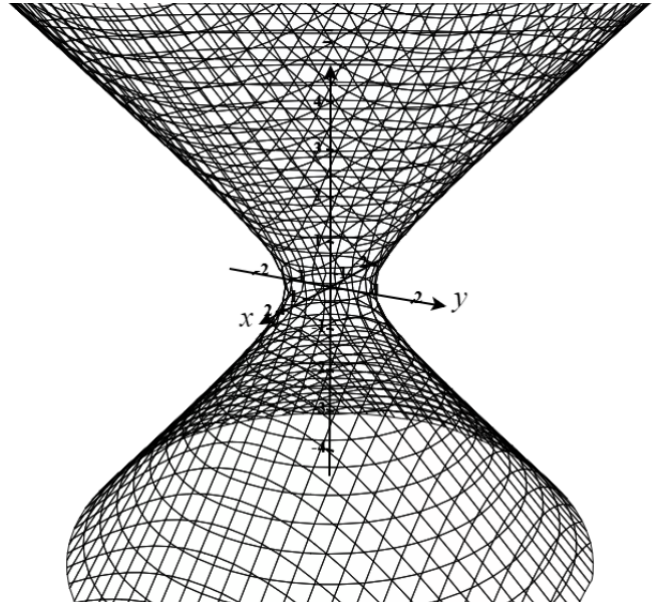
$$y = 0 \Rightarrow x^2 - z^2 = 1$$



نتیجه‌ی تلفیق چهار شکل بالا به صورت زیر است:



شکل نرم‌افزاری رویه نیز به صورت زیر است:



□

تمرین ۱. شکل بالا را با استفاده از دوران رسم کنید.

پاسخ.

$$z^2 + 1 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$$

پس رویه‌ی مورد نظر از دوران منحنی به معادله‌ی $z^2 + 1 = y^2$ (یا $z^2 + 1 = x^2$) حاصل می‌شود؛ به بیان دیگر از دوران

□

یک هذلولی. به شکل حاصل هذلولوی یکپارچه^۲ می‌گویند.

معادله‌ی کلی هذلولوی یکپارچه به صورت زیر است:

$$\frac{z^2}{c^2} + 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

توجه ۳۶. (سوال یکی از دانشجویان) برای رسم معادله‌ی $z^2 + 2 = x^2 + y^2$ طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، تا به معادله‌ی

استاندارد بالا برسیم.

$$\frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} + 1 = \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}$$

۶.۳.۱ هذلولی‌وار دوپارچه

مثال ۳۷. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1$$

پاسخ.

^۲Hyperboloid of one sheet

توجه ۳۸. شکل را با فرض

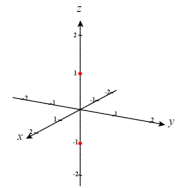
$$a = b = c = 1$$

رسم می‌کنیم؛ به بیان دیگر معادله‌ی زیر را رسم می‌کنیم.

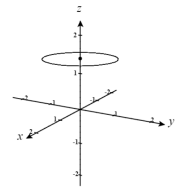
$$x^2 + y^2 = z^2 - 1$$

در فاصله‌ی $z \in (-1, 1)$ هیچ شکلی ایجاد نمی‌شود.

در $z = \pm 1$ تنها نقطه‌ی $(x, y) = (0, 0)$ را داریم.

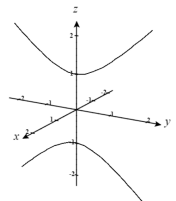


برای $z = k > 1$ معادله‌ی یک دایره را داریم:



برای $z = k < -1$ نیز دایره داریم. در صفحه‌ی $x = 0$ داریم:

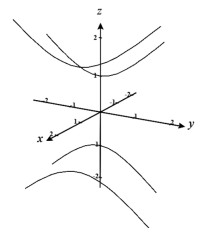
$$z^2 - y^2 = 1$$



در صفحه‌ی $x = 1$:

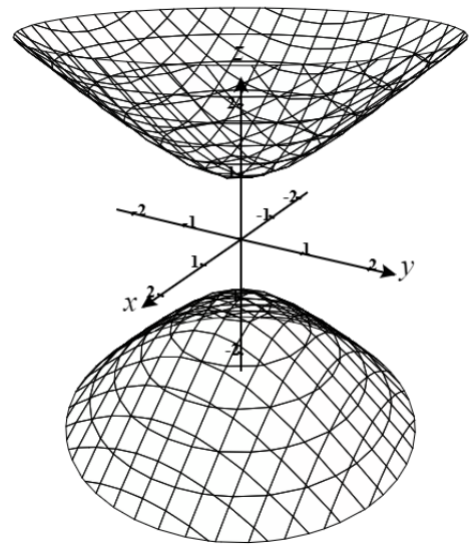
$$x = 1 \Rightarrow z^2 - y^2 = 2 \Rightarrow \frac{z^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

در زیر تصاویر ایجاد شده در صفحات $x = 1, x = \frac{1}{2}$ را رسم کرده‌ایم:

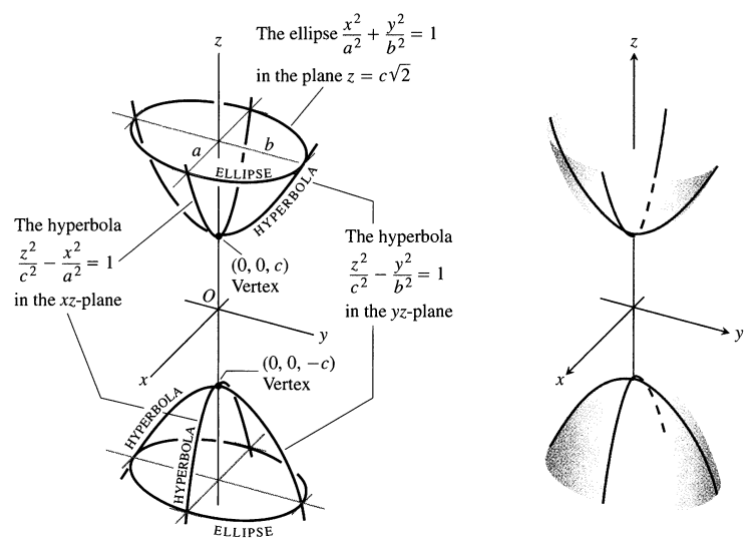


تحلیل شکل بالا برای مقادیر مختلف y را به عهده‌ی شما می‌گذاریم.

شکل کلی به صورت زیر است:



در زیر شکل را برای مقادیر دلخواه a, b, c کشیده‌ایم:



به شکل بدست آمده یک هذلولوی وار دو پارچه^۳ گفته می‌شود. این شکل با حرکت هذلولی‌های موازی صفحه‌ی zx و حرکت هذلولی‌های موازی محور zy ایجاد شده است.

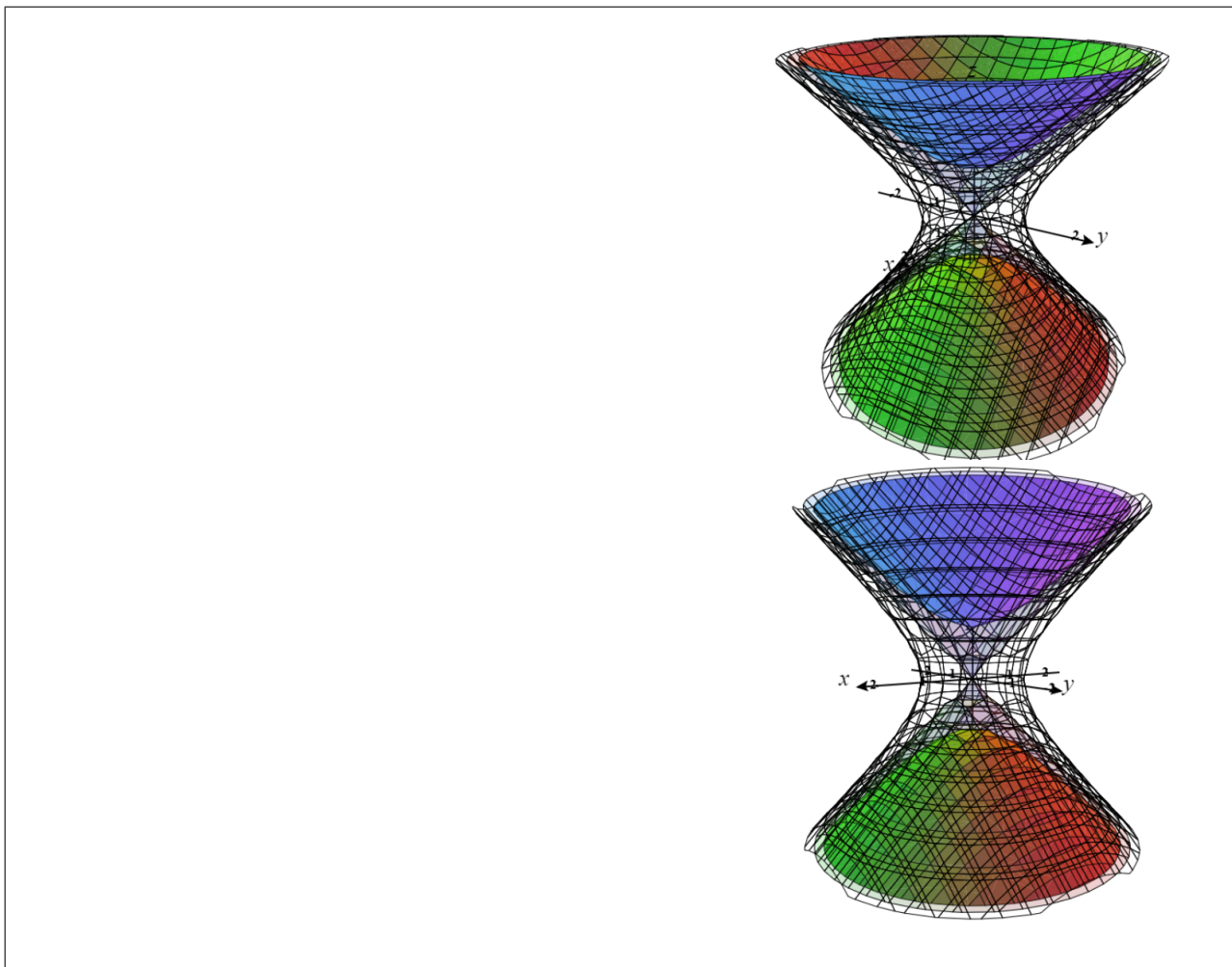
□

جمع‌بندی ۱. رسم سه معادله‌ی

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 + 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 - 1 \end{cases}$$

در یک دستگاه مختصات به صورت همزمان به صورت زیر است:

³hyperboloid of two sheets



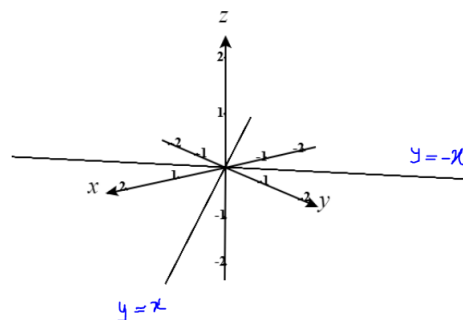
۷.۳.۱ سهمی وار هذلولوی

مثال ۳۹. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$z = y^2 - x^2$$

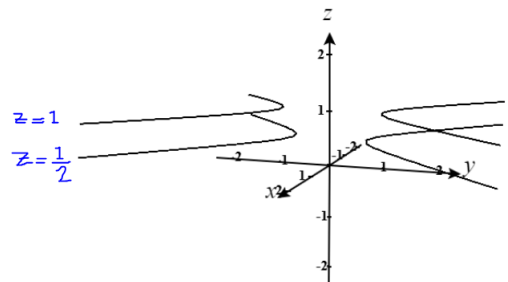
پاسخ.

$$z = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (y - x)(y + x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$



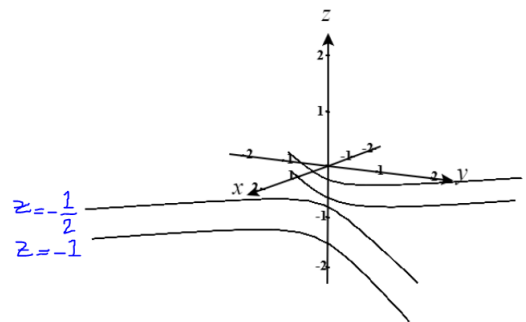
$$z = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$$

$$z = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1$$

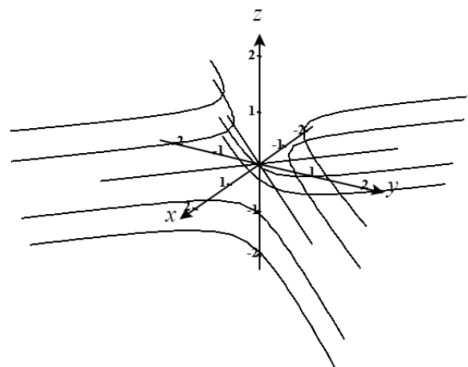


$$z = -1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$$

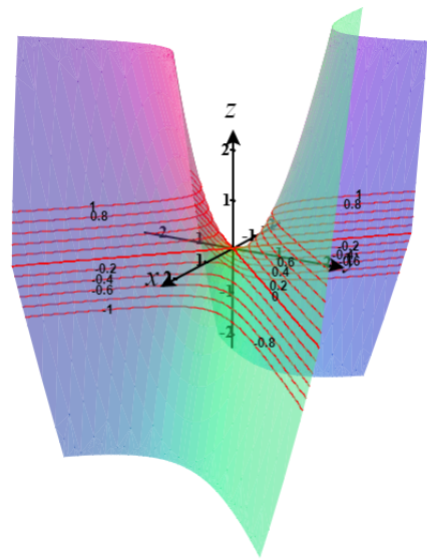
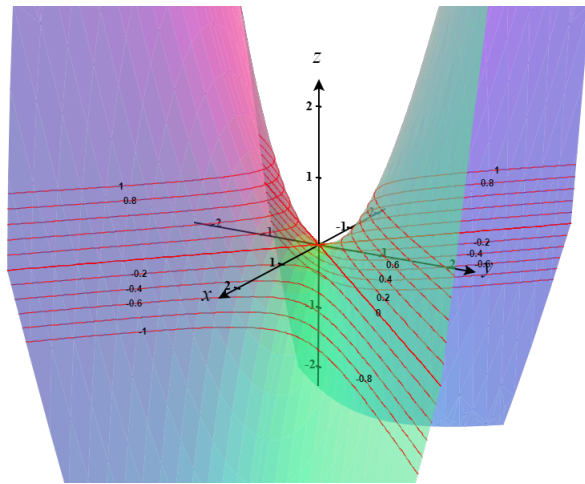
$$z = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$$



تلفیق سه شکل بالا به صورت زیر است:



شکل کلی به صورت زیر است:

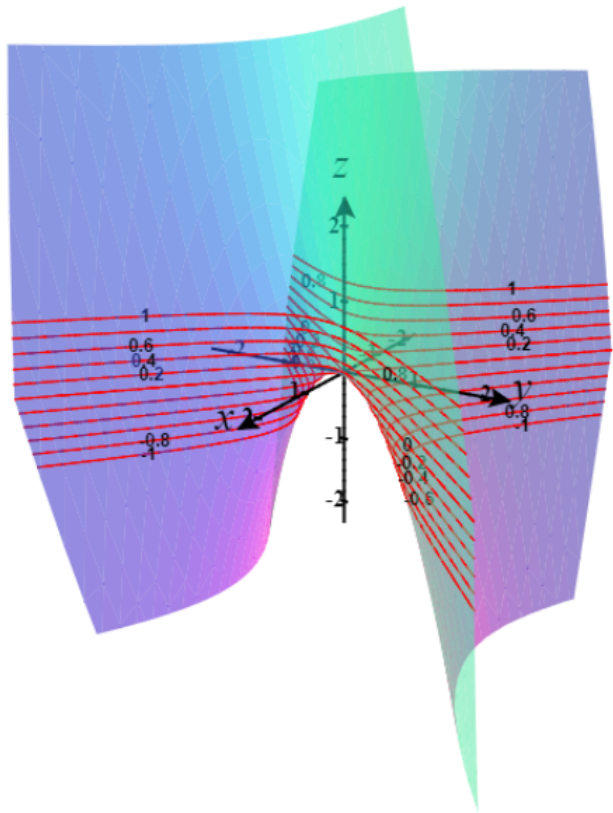


به شکل حاصل سهمی وار هذلولوی^۴ گفته می شود. این نکته جالب توجه است که در شکل بالا، به ازای مقادیر $z = k > 0$ یک سری هذلولی موازی صفحه xy داریم که به سمت محور y باز می شوند. این هذلولی ها با کم شدن مقدار k تغییر می کنند تا این که در $z = k = 0$ دو خط متقاطع داریم. پس از آن در $z = k < 0$ هذلولی هایی موازی صفحه xy داریم که به سمت محور x باز می شوند.

□

توجه ۴۰. نمودار معادله $z = x^2 - y^2$ به شکل زیر است:

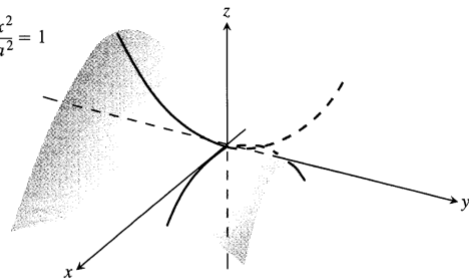
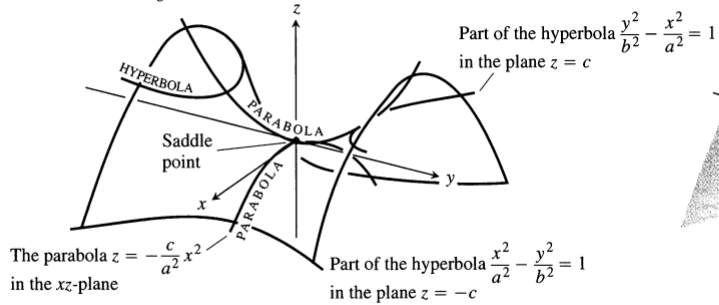
⁴hyperbolic paraboloid



معادله‌ی کلی سهمی وار هذلولوی به شکل زیر است:

$$\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \quad c > 0$$

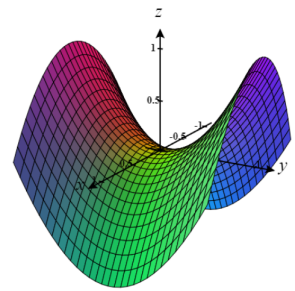
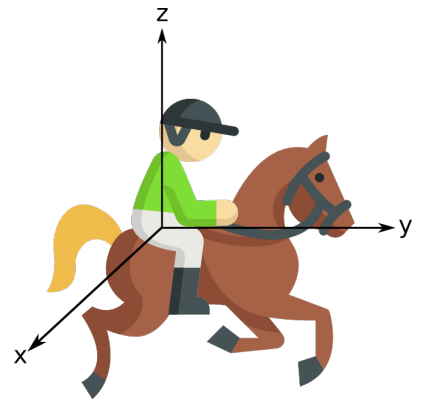
The parabola $z = \frac{c}{b^2}y^2$ in the yz -plane



پیش از ادامه‌ی دادن بحث توابع، دو نکته را درباره‌ی مباحث گذشته ذکر می‌کنیم.

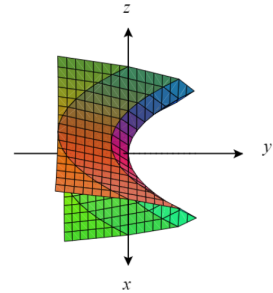
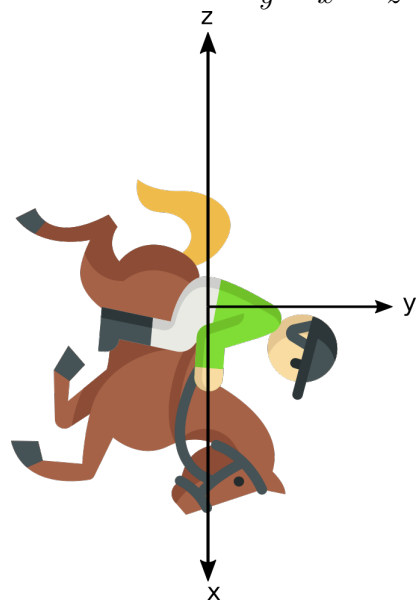
توجه ۴۱. برای رسم معادله‌ی $z = y^2 - x^2$ به نکته‌های زیر توجه کنید که

- سر سوارکار در راستای محور z باشد،
- جهت حرکت اسب در راستای محور y باشد.

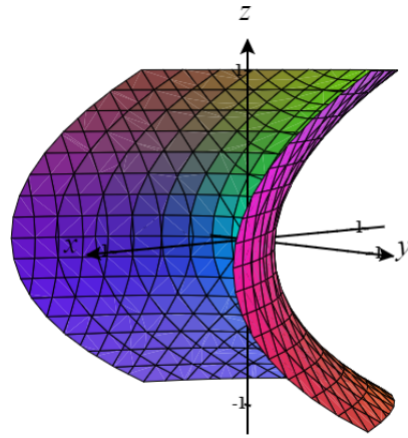


مثال ۴۲. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی زیر را رسم کنید:

$$۱. \quad y = x^2 - z^2$$



$$۲. \quad x = y^2 - z^2$$



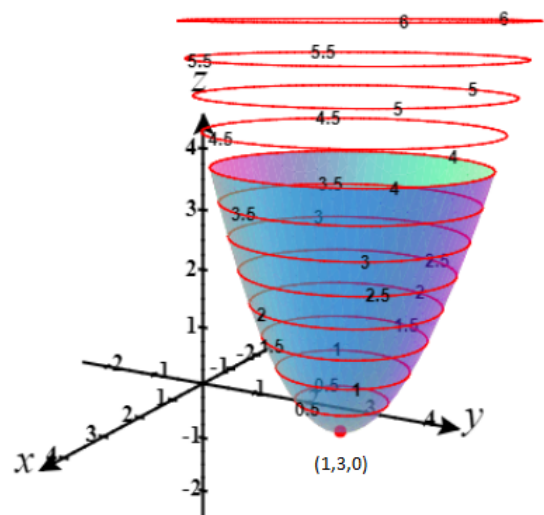
برای حل تمرین درباره‌ی این بخش درس، به صفحه‌ی ۸۸۰ (بخش ۱۲-۶) کتاب استوارت مراجعه کنید. پیش از این که از این بخش خارج شویم چند تمرین با هم حل می‌کنیم و چند تمرین حل نشده نیز برای شما باقی می‌گذاریم.

۴.۱ مثالها و تمرینها

مثال ۴۳. معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x - 6y - z + 10 = 0$ را به شکل استاندارد در آورده رویه را رسم کنید.

پاسخ.

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = z$$



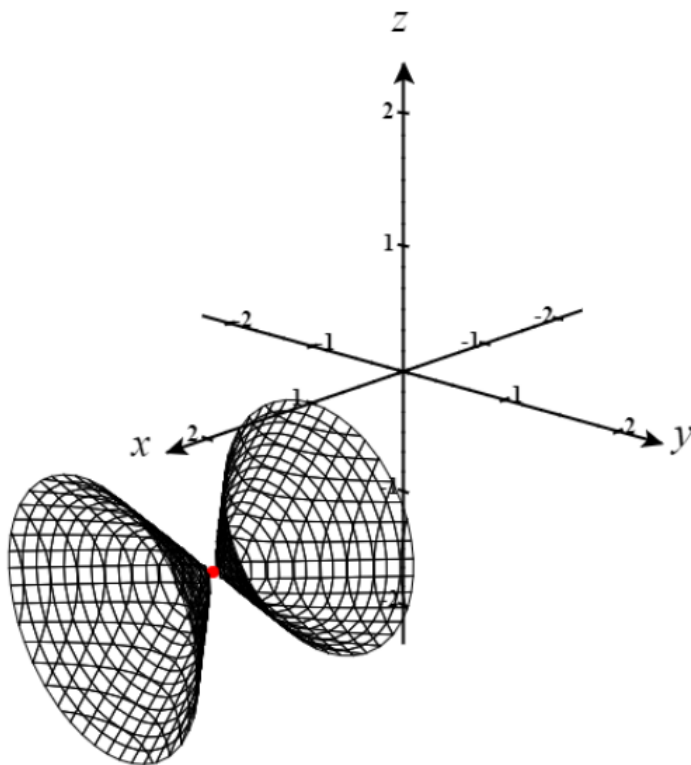
برای رسم رویه‌ی بالا، کافی است رویه‌ی $z = x^2 + y^2$ را در راستای بردار $(1, 3, 0)$ انتقال دهیم. شکل حاصل یک سهمی‌وار است.

مثال ۴۴. معادله‌ی $x^2 - y^2 - z^2 - 4x - 2z + 3 = 0$ را به شکل استاندارد در آورده رویه را رسم کنید و نام رویه را ذکر کنید.

پاسخ.

$$(x-2)^2 - 4 + 3 = y^2 + (z+1)^2 - 1 \Rightarrow (x-2)^2 = y^2 + (z+1)^2$$

معادله‌ی بالا، معادله‌ی یک مخروط موازی محور x هاست. برای رسم آن، مخروط $x^2 = y^2 + z^2$ را در راستای بردار $(2, 0, -1)$ انتقال می‌دهیم.



□

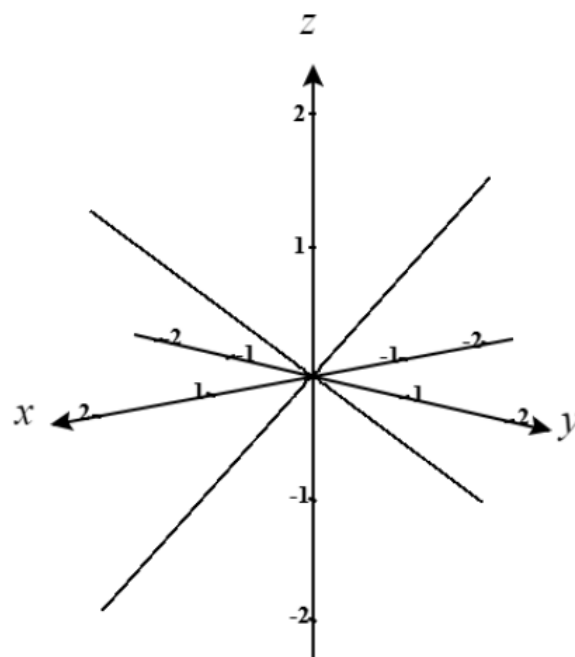
مثال ۴۵. مکان هندسی نقاط صادق در معادله‌ی $x^2 + 2y - 2z^2 = 0$ را رسم کنید و نام رویه را بنویسید.

پاسخ.

$$x^2 - 2z^2 = -2y \Rightarrow y = z^2 - \frac{x^2}{2}$$

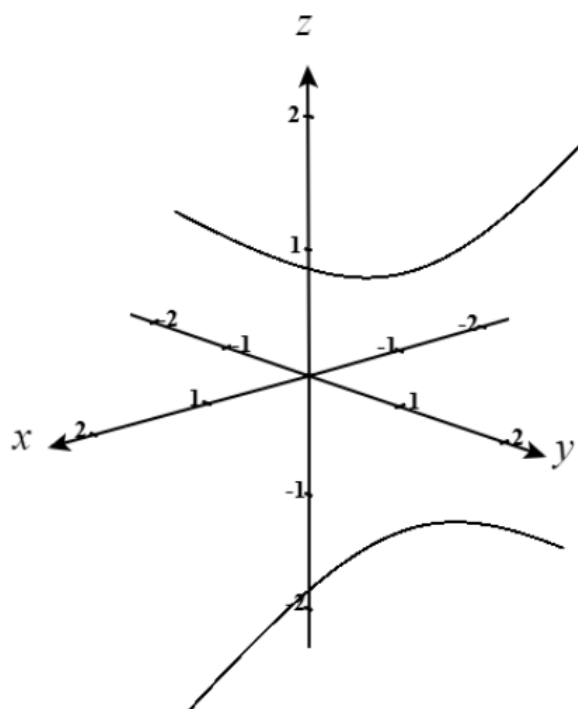
معادله‌ی بالا، معادله‌ی یک سهمی‌وار هذلولوی است. برای رسم راحت‌تر به نکات زیر توجه می‌کنیم: در صفحه‌ی $y = 0$ داریم:

$$2z^2 = x^2 \Rightarrow z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

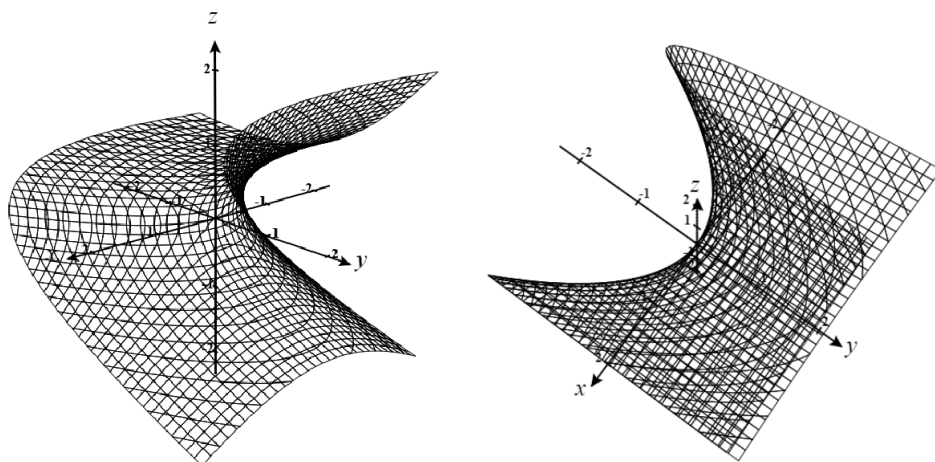


و در صفحه‌ی $y = 1$ یک هذلولوی داریم:

$$z^2 - \frac{x^2}{2} = 1$$



شکل کلی نیز به صورت زیر است:



□

مثال ۴۶. معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی $y = \sqrt{x}$ حول محور x را بنویسید، نوع رویه را مشخص کنید و آن را رسم کنید.

پاسخ. اگر داشته باشیم:

$$f(x, y) = y - \sqrt{x} = 0$$

آنگاه از دوران $f(x, y)$ حول محور x معادله‌ی زیر بدست می‌آید:

$$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = \pm\sqrt{y^2 + z^2} - \sqrt{x} = 0$$

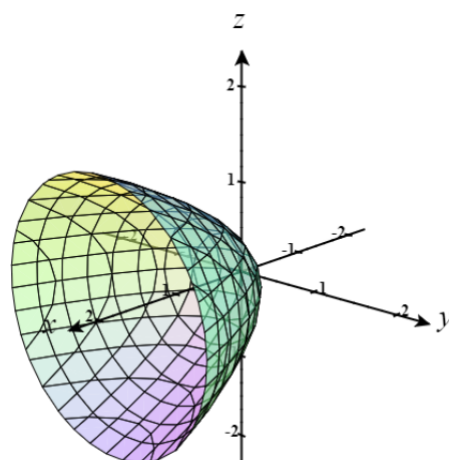
با توجه به معادله‌ی اولیه به دلیل آنکه $y > 0$ است، مقادیر مثبت $\sqrt{y^2 + z^2}$ مدنظر ماست. در نتیجه داریم:

$$\sqrt{x} = \sqrt{y^2 + z^2}$$

اگر دو طرف معادله را به توان ۲ برسانیم داریم:

$$x = y^2 + z^2$$

شکل حاصل سهمی وار است.



□

تمرین ۲. رویه‌های زیر را رسم کنید و نام آنها را ذکر کنید. نقاط تقاطع شکل با محورها را معین کنید.

$$1. \quad y^2 = x^2 + \frac{1}{9}z^2$$

$$2. \quad x^2 - y^2 - z^2 - 4x - 2z + 3 = 0$$

$$3. \quad x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2z = 0$$

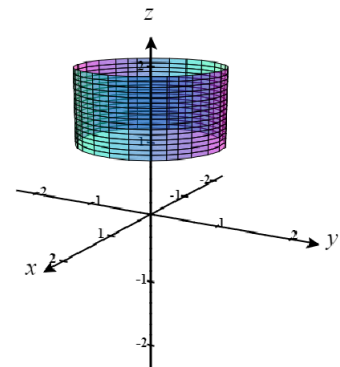
$$4. \quad 4x^2 - y + 2z^2 = 0$$

$$5. \quad y^2 = x^2 + 4z^2 + 4$$

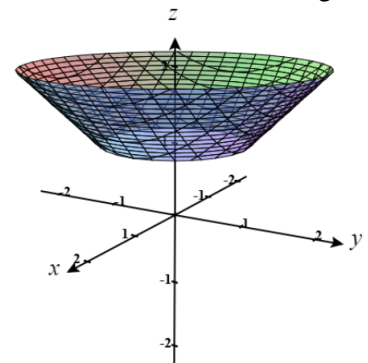
مثال ۴۷. معادله‌ی حاصل از دوران منحنی $y = \sqrt{x}$ حول محور x را بیابید.

مثال ۴۸. ناحیه‌ی محاط شده بین رویه‌های $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $x^2 + y^2 = 1$ را برای $1 \leq z \leq 2$ را رسم کنید.

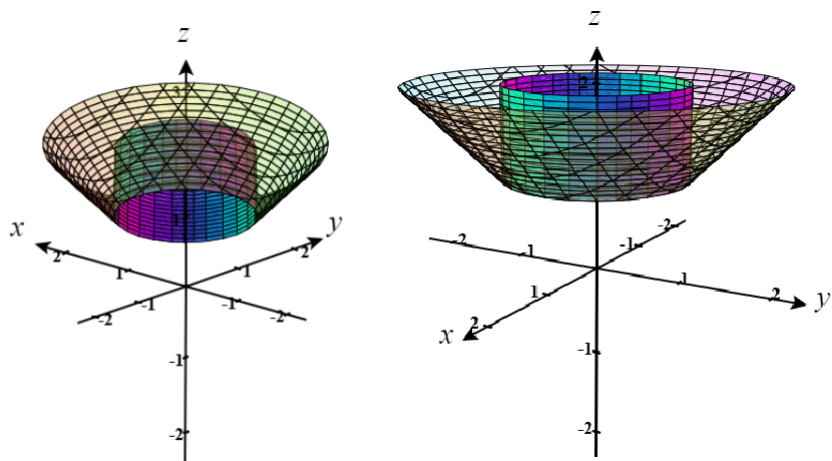
پاسخ. شکل معادله‌ی $x^2 + y^2 = 1$ در $1 \leq z \leq 2$ به صورت زیر است:



شکل معادله‌ی $z^2 = x^2 + y^2$ در $1 \leq z \leq 2$ به صورت زیر است:



شکل حاصل از تلفیق این دو شکل به صورت زیر است:



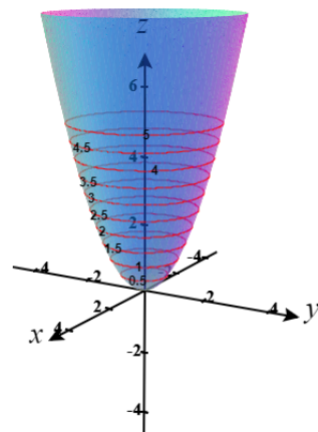
□

هاشور زدن ناحیه‌ی مورد نظر، به عهده‌ی شما!

تمرین ۳. یک معادله‌ی دلخواه از درجه‌ی دوم بنویسید و رویه‌ای را که آن معادله‌ی مشخص می‌کند رسم کنید.

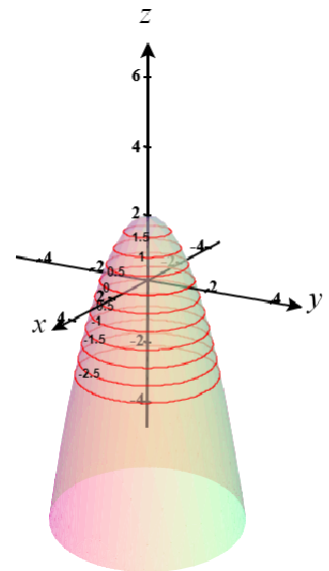
مثال ۴۹. ناحیه‌ی محاط شده توسط سهمی‌وارهای $z = x^2 + y^2$ و $z = 2 - x^2 - y^2$ را رسم کنید.

پاسخ. معادله‌ی $z = x^2 + y^2$ به شکل زیر است:

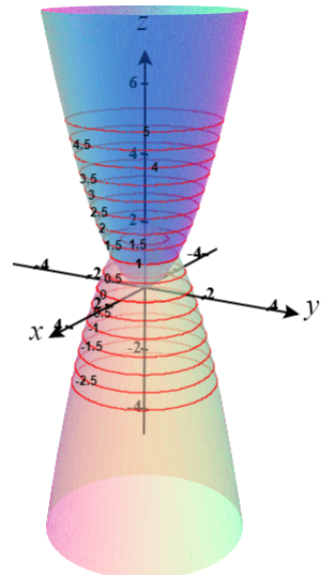


و معادله‌ی $z = 2 - x^2 - y^2$ نیز به شکل زیر است:

$$x^2 + y^2 = 2 - z$$



دو شکل روی یک دستگاه مختصات به صورت زیر قرار می‌گیرند:



□

تعیین ناحیه‌ی اشتراک، به عهده‌ی شما!

سوال ۵۰ (سوال دانشجویان). معادله‌ی $z = y + x^2$ را چگونه رسم کنیم؟ این معادله جزو معادله‌هایی که دسته‌بندی کرده‌ایم نیست.

معادله‌ی بالا به ظاهر جزو معادله‌های دسته‌بندی شده نیست، اما در حقیقت معادله‌ی یک استوانه است که دوران یافته است. پیش از آنکه این سوال را پاسخ گوئیم، بیائید یک مشاهده درباره‌ی معادله‌ی $z = x^2 + y^2$ داشته باشیم (که از آن مشاهده برای رسم معادله‌ی $z = y + x^2$ استفاده خواهیم کرد).

مشاهده ۵۱.

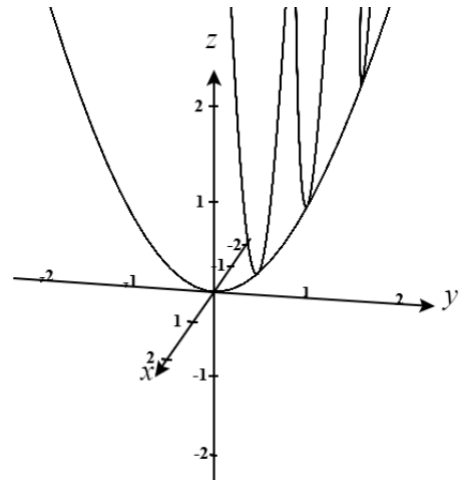
$$z = x^2 + y^2$$

تصاویر ایجاد شده روی صفحات $y = k$ در نظر بگیرید:

$$y = \frac{1}{4} \Rightarrow z = x^2 + \frac{1}{4}$$

$$y = 1 \Rightarrow z = x^2 + 1$$

$$y = \frac{3}{2} \Rightarrow z = x^2 + \frac{9}{4}$$



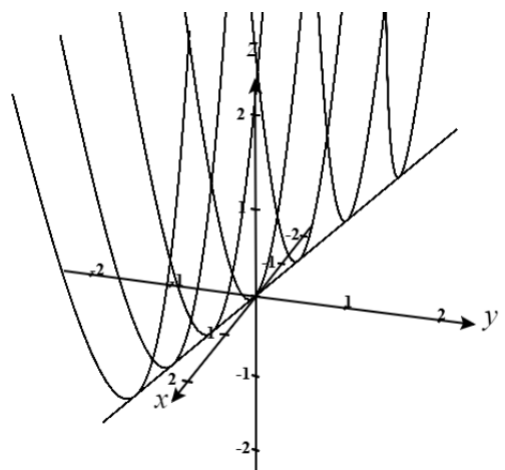
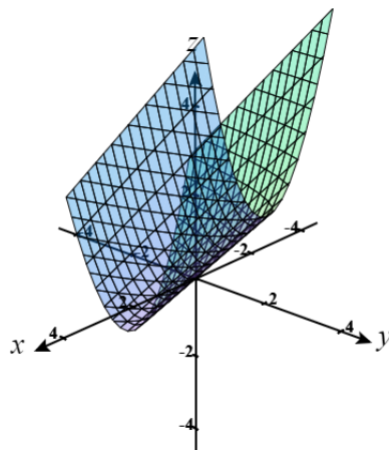
در واقع اگر همزمان تصاویر ایجاد شده روی همه‌ی صفحات $y = k$ را رسم کنیم به شکل مورد نظر می‌رسیم. روی صفحه‌ی $y = k$ منحنی $z = k^2 + x^2$ ایجاد می‌شود. برای رسم این منحنی، کافی است روی صفحه‌ی $y = k$ به اندازه‌ی k^2 با شروع از نقطه‌ی $(0, k)$ به سمت محور z بالا برویم و از آنجا، منحنی $z = x^2$ را رسم کنیم (یعنی پائین‌ترین نقطه‌ی سهمی، نقطه‌ی $z = k^2$ باشد). برای به اندازه‌ی k^2 بالا رفتن روی صفحه‌ی $y = k$ کافی است نقطه‌ی اشتراک این صفحه را با منحنی $z = x^2$ (در صفحه‌ی zx) در نظر بگیریم.

حال سوال مورد نظر را پاسخ می‌گوئیم:

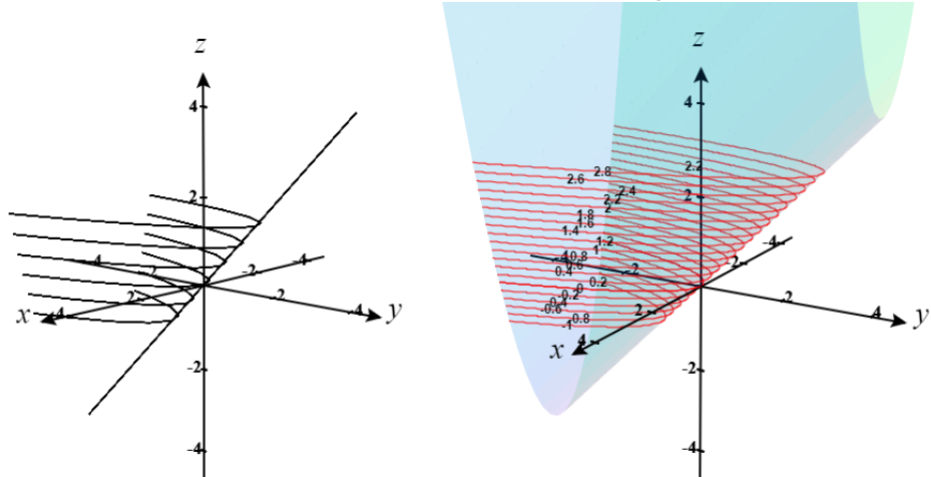
مثال ۵۲. رویه‌ی $z = y + x^2$ را رسم کنید.

این شکل (با توضیحی مشابه بالا) از کشیدن سهمی‌های $z = x^2$ روی خط $z = y$ ایجاد می‌شود. پس یک استوانه‌ی موازی خط $x = 0, z = y$ است.

پاسخ.



به طور مشابه، مکان هندسی نقاط صادق در معادله $z = x + y^2$ به صورت زیر است:



□

تمرین ۴. معادله‌ی شکل حاصل از دورانِ منحنی $z = 2y$ حول محور z را بنویسید.

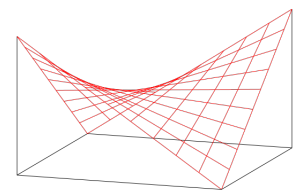
تمرین ۵. مکان هندسی نقاطی را بیابید که فاصله‌ی آنها از صفحه‌ی $x = 1$ برابر است با فاصله‌ی آنها از نقطه‌ی $(-1, 0, 0)$. نام رویه‌ی مورد نظر را ذکر کنید.

تمرین ۶. معادله‌ی رویه‌ای را بیابید که از تمام نقاطی تشکیل شده است که فاصله‌ی آنها تا محور x دو برابر فاصله‌شان تا صفحه‌ی yz است. نام رویه‌ی مورد نظر را ذکر کنید.

تمرین ۷. فرض کنید که نقطه‌ی (a, b, c) روی رویه‌ی $z = y^2 - x^2$ واقع باشد. نشان دهید که دو خط زیر (که از نقطه‌ی یادشده می‌گذرند) روی این رویه واقعند:

$$(a, b, c) + t(1, 1, 2(b-a)) \quad (a, b, c) + t(1, -1, -2(b+a))$$

در واقع رویه‌ی مورد نظر را می‌توان با خطکش رسم کرد!

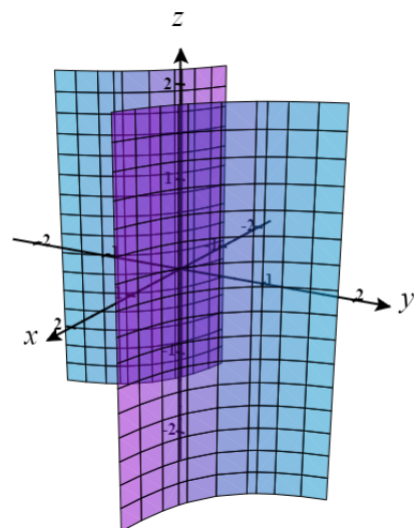


در پیوند زیر در این باره بیشتر مطالعه کنید.

https://en.wikipedia.org/wiki/Ruled_surface

سوال ۵۳. رویه‌ی $xy = 1$ را رسم کنید.

پاسخ. توجه کنید که معادله‌ی بالا، به z بستگی ندارد. پس یک استوانه است موازی محور z ، که سطح مقطع آن منحنی $y = \frac{1}{x}$ است.



□

سوال ۵۴. رویه $z = xy$ را رسم کنید.

پاسخ. (همان طور که در دوره‌ی دبیرستان آموخته‌اید) اگر محورهای x و y را بطور همزمان به اندازه‌ی θ دوران دهیم (یعنی صفحه‌ی xy را به اندازه‌ی θ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران دهیم): داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

$$z = xy \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \times \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2)$$

پس معادله‌ی جدید به صورت زیر است:

$$z = \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2)$$

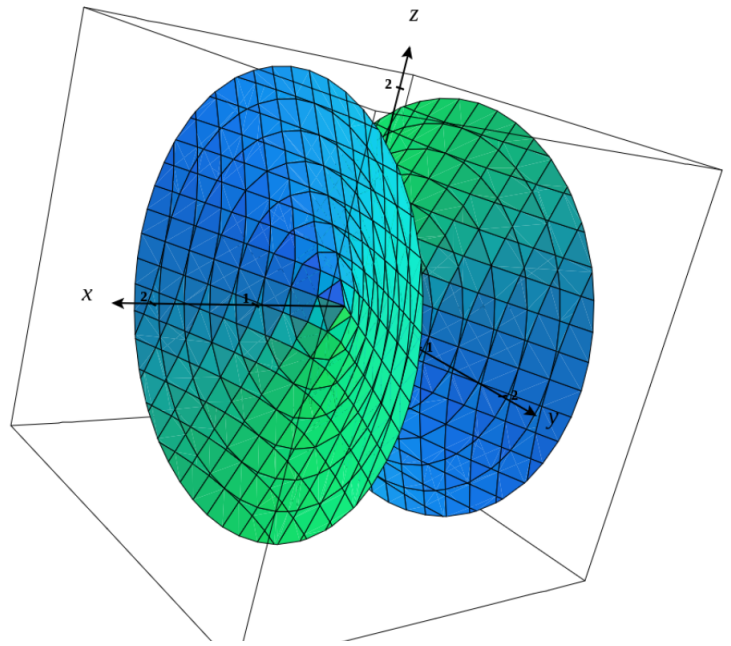
پس شکل بالا از دوران سهمی وار هذلولوی $z = x'^2 - y'^2$ به اندازه‌ی ۴۵ درجه روی صفحه‌ی xy به دست می‌آید (تصویر مورد نظر را در مثال منحنی‌های تراز در بالا کشیده‌ایم).

□

مثال ۵۵. مجموعه‌ی نقاطی را رسم کنید که فاصله‌ی آنها تا محور x دو برابر فاصله‌شان تا صفحه‌ی yz است.

پاسخ. هدفمان رسم مجموعه‌ی نقاط زیر است:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{y^2 + z^2} = 2|x|\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = 4x^2\}$$



فصل ۲

توابع دو متغیره - حد و پیوستگی

۱.۲ تابع دو متغیره یعنی چه؟

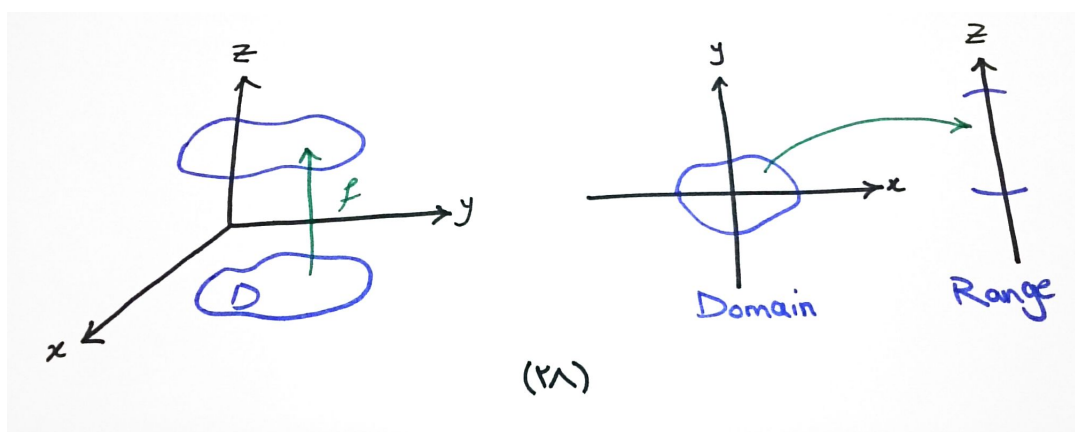
منظور از یک تابع دو متغیره ضابطه‌ای است مانند f که هر نقطه‌ی (x, y) در یک مجموعه‌ی $D \subseteq \mathbb{R}^2$ را به یک نقطه‌ی یکتای $z \in \mathbb{R}$ می‌برد.

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

مجموعه‌ی D را دامنه‌ی تابع می‌خوانیم.
مجموعه‌ی زیر را بُردِ تابع می‌خوانیم.

$$\{f(x, y) \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in D\}$$

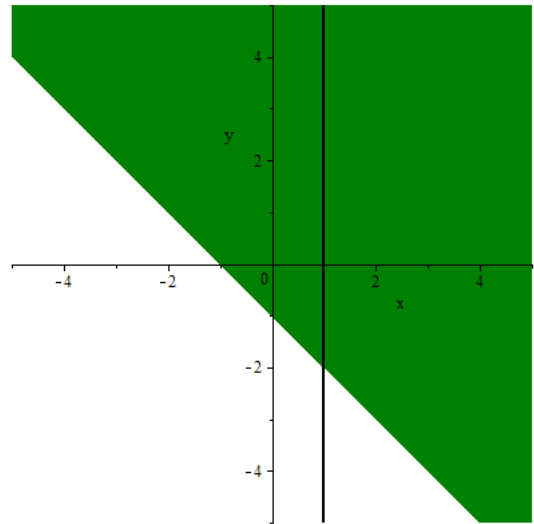


مثال ۵۶. دامنه‌ی تابع زیر را رسم کنید و مقدار آن را $(3, 2)$ محاسبه کنید.

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$$

پاسخ.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y+1 \geq 0, x \neq 1\}$$



□

توجه کنید که خط $x = 1$ جزو دامنه نیست. محاسبه‌ی مقدار تابع در نقطه‌ی داده شده به عهده‌ی شما!

مثال ۵۷. دامنه‌ی توابع زیر را مشخص و رسم کنید:

$$f(x, y) = x \ln(y^2 - x) \quad ۱.$$

پاسخ.

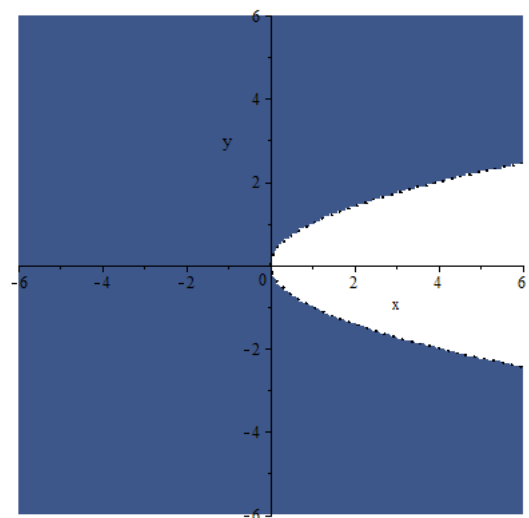
توجه ۵۸. معادله‌ی بالا را به شکل دیگری می‌توان نوشت:

$$z = x \ln(y^2 - x)$$

در این معادله x و y متغیرهای مستقل هستند و z متغیر وابسته به متغیرهای x و y است.

بنا به دامنه‌ی تابع $\ln$ باید داشته باشیم:

$$y^2 - x > 0$$



□

برد تابع نیز $\mathbf{R}$ است.

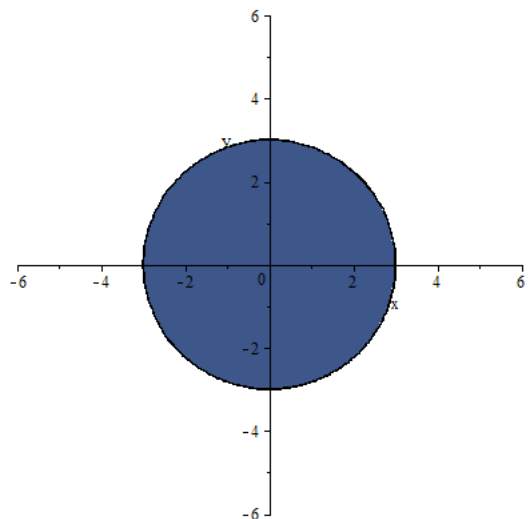
$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad ۲.$$

پاسخ.

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 9 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

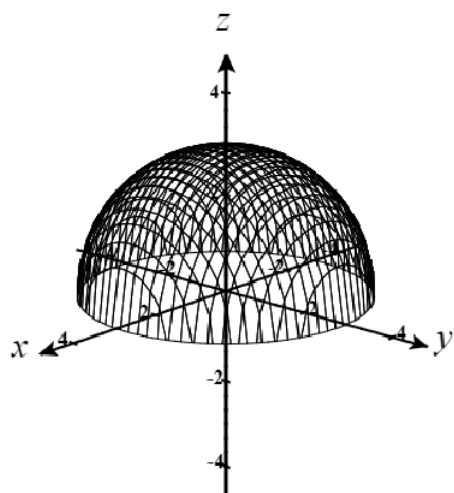
پس داریم:

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$



$$\text{Range}(g) = [0, 3]$$

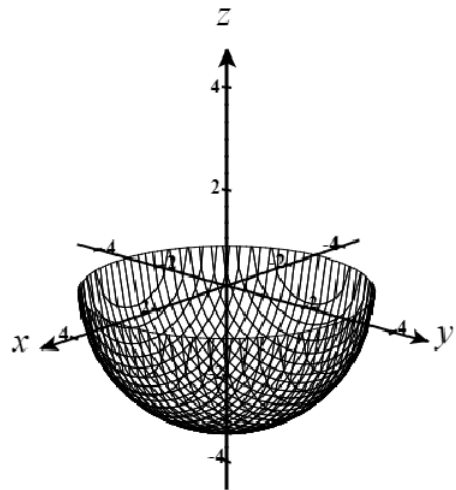
اگر بخواهیم تابع را رسم کنیم شکل آن به صورت زیر است:



توجه کنید که از آنجا که $z > 0$ تنها بخش بالائی کره باید رسم شود (اگر داشته باشیم

$$z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

آنگاه شکل رویه به صورت زیر است:)



□

تعریف ۵۹. فرض کنید $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ یک تابع باشد. مجموعه‌ی زیر را گراف تابع f می‌نامیم.

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | (x, y) \in \text{Dom}(f), z = f(x, y)\}$$

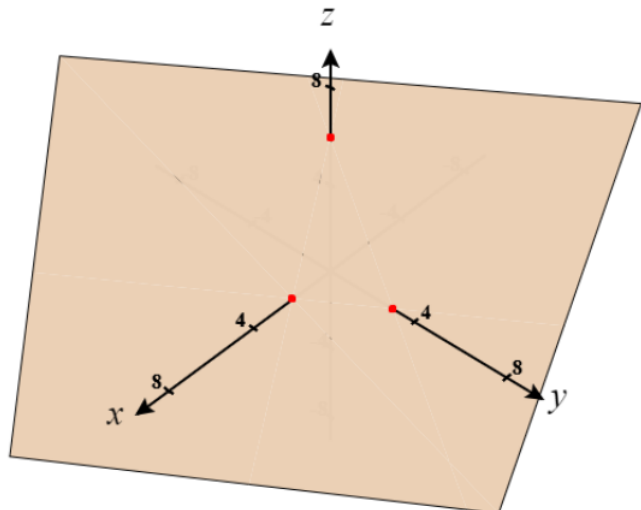
مثال ۶۰. گراف تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$$

پاسخ.

یادآوری ۶۱. معادله‌ی $ax + by + cz = d$ معادله‌ی یک صفحه با بردار نرمال (a, b, c) است. کافیت سه نقطه پیدا کنیم که در معادله‌ی $z = 6 - 3x - 2y$ صدق کنند.

$$(0, 0, 6) \quad (0, 3, 0) \quad (2, 0, 0)$$



□

مثال ۶۲. دامنه و برد تابع زیر را مشخص کنید و گراف آن را رسم کنید:

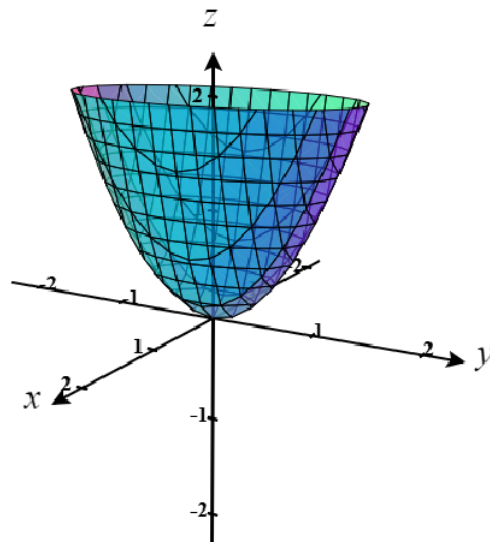
$$h(x, y) = 4x^2 + y^2$$

پاسخ.

$$D(h) = \mathbf{R}^2$$

$$\text{range}(h) = \mathbf{R}^{\geq 0}$$

$$z = 2x^2 + y^2 = (2x)^2 + y^2$$



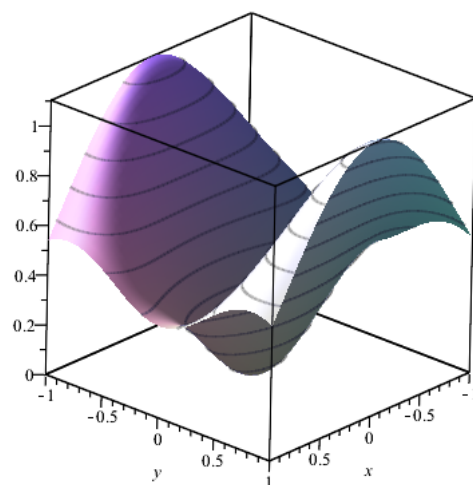
□

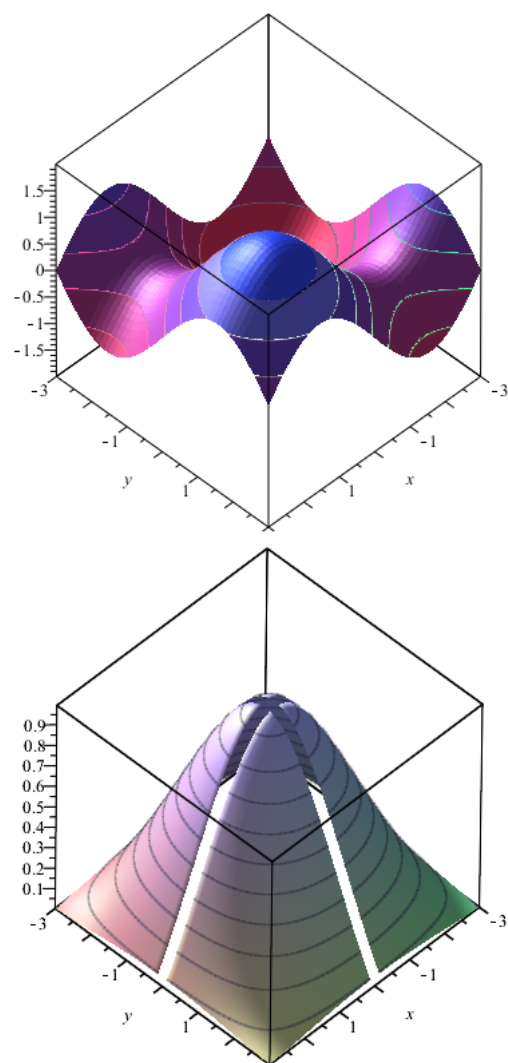
مثال ۶۳. حدس بزنید کدام شکل زیر مربوط به کدام معادله است:

۱. $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

۲. $f(x, y) = \sin x + \sin y$

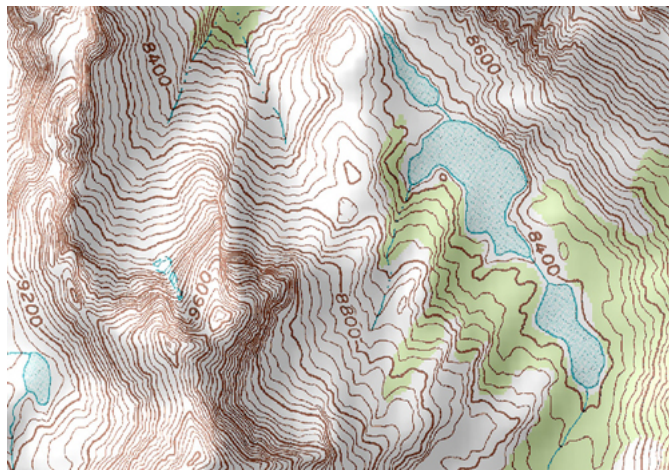
۳. $f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$





۲.۲ منحنی‌های تراز

احتمالاً درباره‌ی نقشه‌های توپوگرافیک شنیده‌اید. در این نقشه‌ها، مشخص می‌کنند که عوارض روی زمین در ارتفاعهای مشخص به چه صورتند. در زیر یک نمونه از چنین نقشه‌هایی را گذاشته‌ایم:



فرض کنید $z = f(x, y)$ یک تابع باشد. به هر منحنی $f(x, y) = k$ در صفحه‌ی xy یک منحنی تراز برای تابع f گفته

می‌شود. مجموعه‌ی منحنی‌های تراز یک تابع را به صورت همزمان در فضای دوبعدی xy رسم می‌کنند.

توجه ۶۴. دو مفهوم متفاوت داریم:

۱. منحنی‌های تراز (که در بالا تعریفشان کردیم)^۱

۲. منحنی‌های هم‌مسیر^۲ (منحنی‌هایی فضائی هستند که از اشتراک‌گیری صفحات $z = k$ با نمودار تابع $z = f(x, y)$ ایجاد می‌شوند. تفاوت این منحنی‌ها با منحنی‌های تراز این است که این منحنی‌ها را در فضای $\mathbb{R}^3$ رسم می‌کنند).

مثال ۶۵. منحنی‌های تراز تابع $z = y^2 - x^2$ را به ازای $z = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ رسم کنید.

پاسخ.

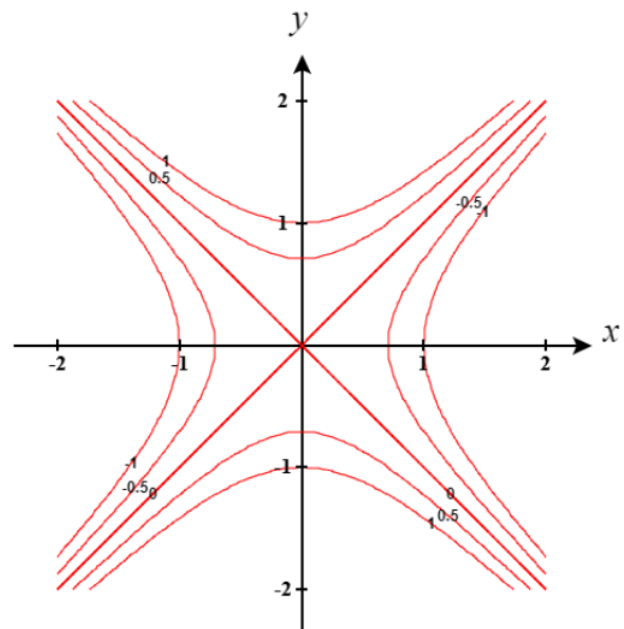
$$z = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$$

$$z = -1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$$

$$z = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (y - x)(y + x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

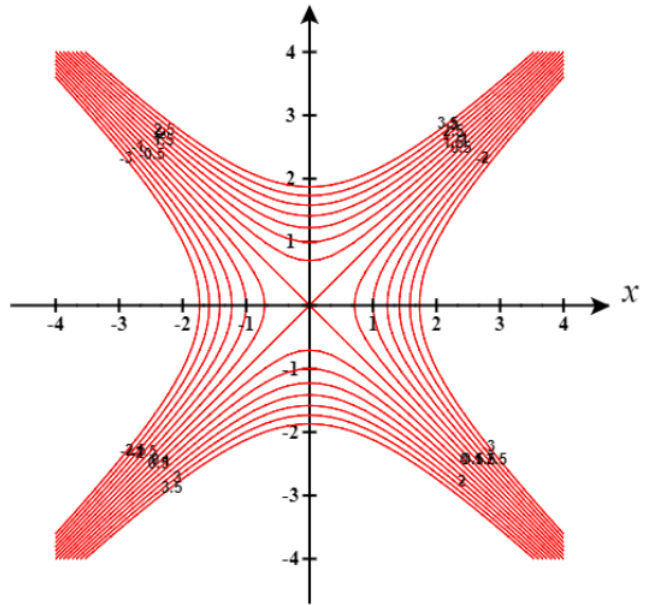
$$z = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$$



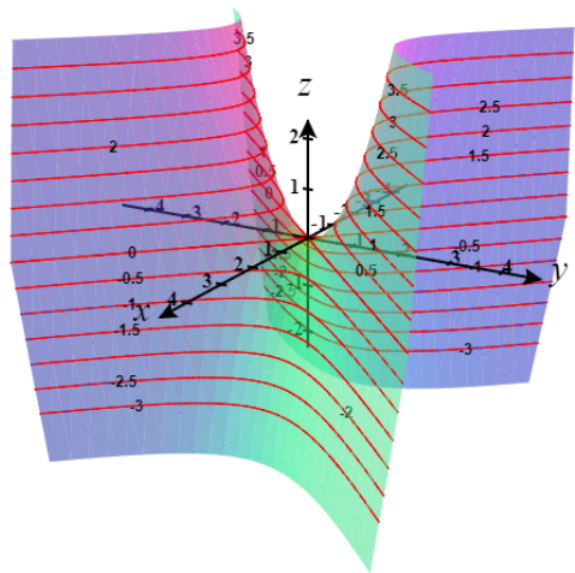
نقشه‌ی کاملتر منحنی‌های تراز تابع بالا به صورت زیر است:

¹level curves

²contour maps



در زیر منحنی‌های هم‌مسیر با تابع بالا را رسم کرده‌ایم:



□

مثال ۶۶. منحنی‌های تراز تابع زیر را رسم کنید.

$$z = \frac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$$

پاسخ.

$$z = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{محور } x$$

$$z = 1 \Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

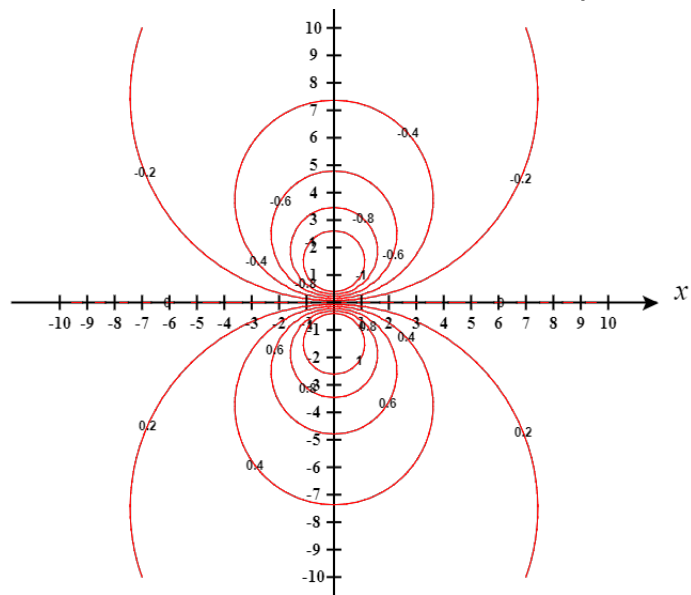
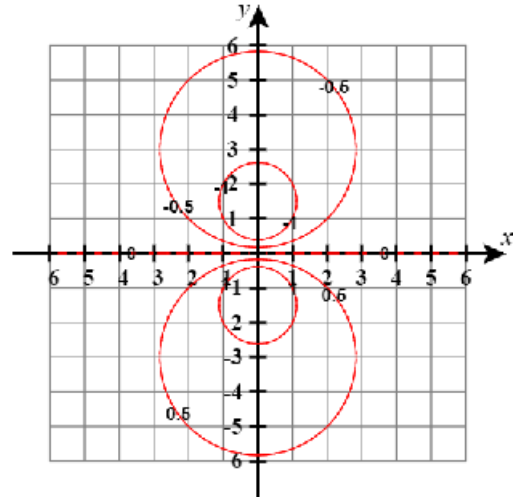
$$z = -1 \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

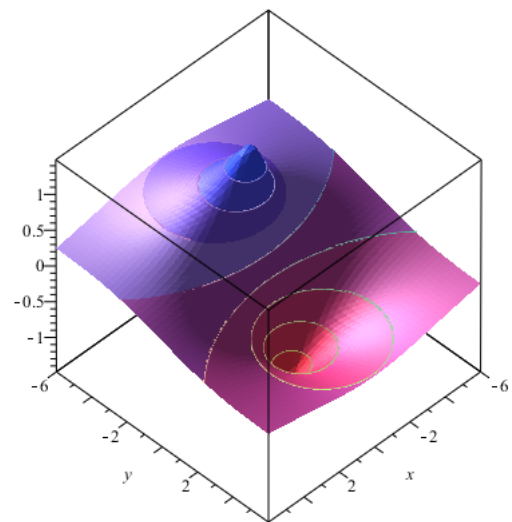
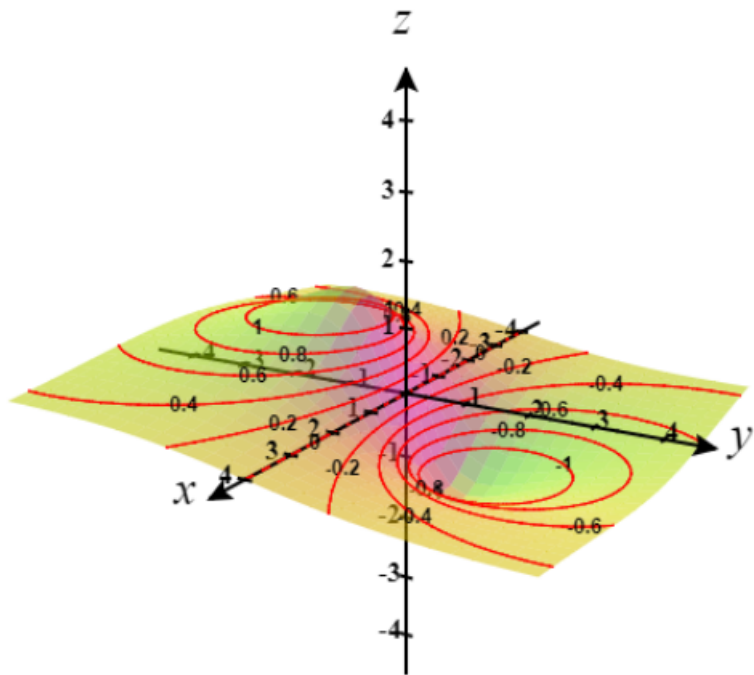
$$z = 2 \Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 1 = 0$$

معادله‌ی بالا جوابی ندارد. پس در $z = ۲$ شکلی نداریم.

$$z = \frac{1}{۲} \Rightarrow x^2 + y^2 + ۱ + ۶y = ۰ \Rightarrow x^2 + (y + ۳)^2 = ۸$$

$$z = -\frac{1}{۲} \Rightarrow x^2 + y^2 + ۱ + ۶y = ۰ \Rightarrow x^2 + (y - ۳)^2 = ۸$$





□

مثال ۶۷. منحنی‌های تراز تابع زیر را رسم کنید.

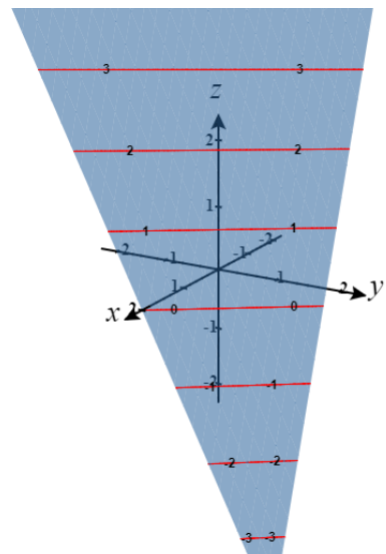
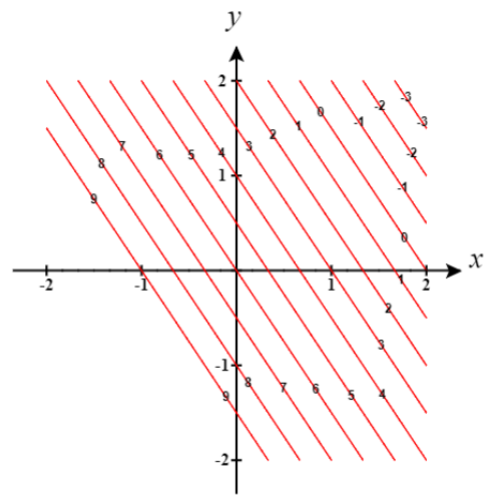
$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y$$

پاسخ.

$$z = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 5$$

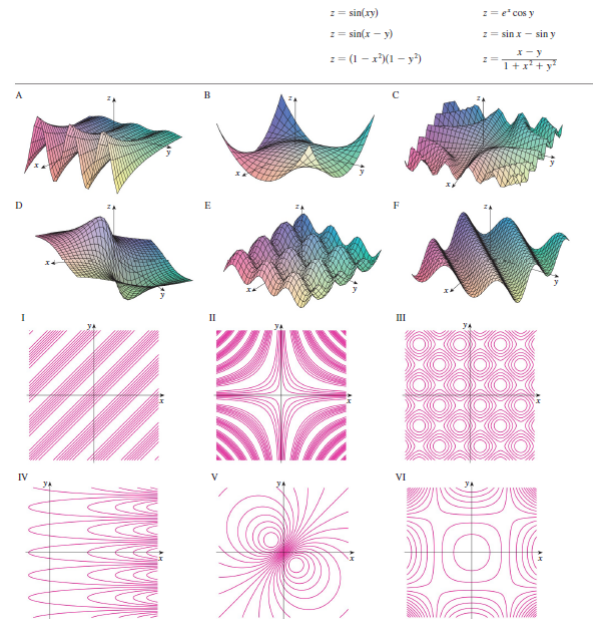
$$z = 2 \Rightarrow 3x + 2y = 4$$

$$z = 3 \Rightarrow 3x + 2y = 3$$



□

تمرین زیر از کتاب استوارت است. معادله‌ها را به رویه‌ها و رویه‌ها را به منحنی‌های تراز آنها وصل کنید:



مثال ۶۸. منحنی‌های تراز تابع‌های زیر را رسم کنید.

$$h(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1 \quad ۱.$$

پاسخ.

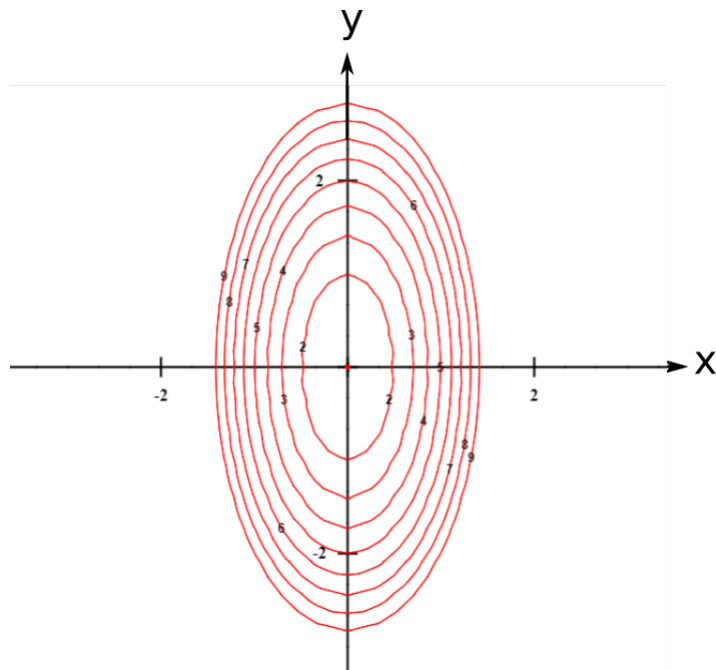
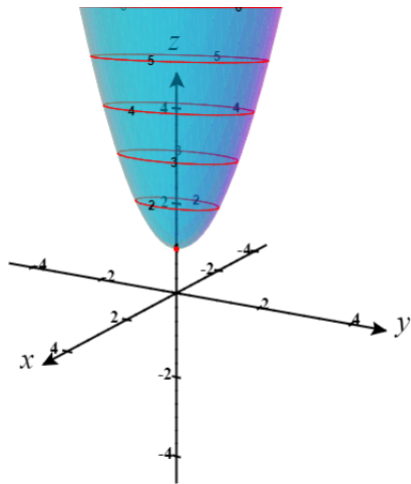
$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$

در $z < 1$ شکلی ایجاد نمی‌شود.

$$z = 1 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$z = 2 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1$$

$$z = 5 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$



توجه ۶۹. در معادله‌ی بالا، در صفحه‌ی $x = 0$ سهمی زیر را داریم:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = f(y) = y^2 + 1 \end{cases}$$

نقطه‌ی $(0, 0, 1)$ یک مینی‌موم نسبی برای سهمی یادشده است. پس در این نقطه داریم $f'(y) = 0$. این نکته را در بخش مشتق‌های جزئی مفصلاً بررسی خواهیم کرد.

□

۲. $z = xy$

پاسخ.

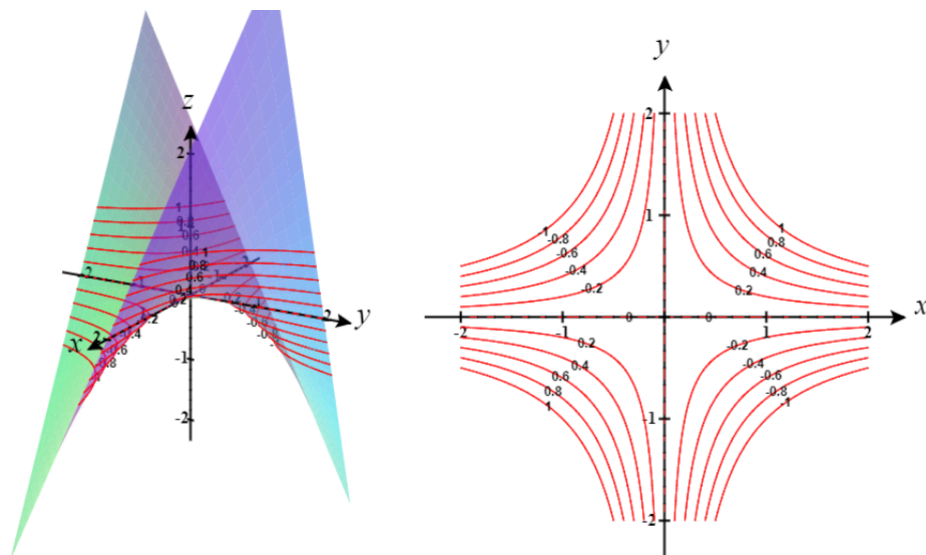
$$z = 0 \Rightarrow xy = 0$$

پس در $z = 0$ داریم: $x = 0$ یا $y = 0$.

$$z = 1 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$z = -1 \Rightarrow xy = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{x}$$

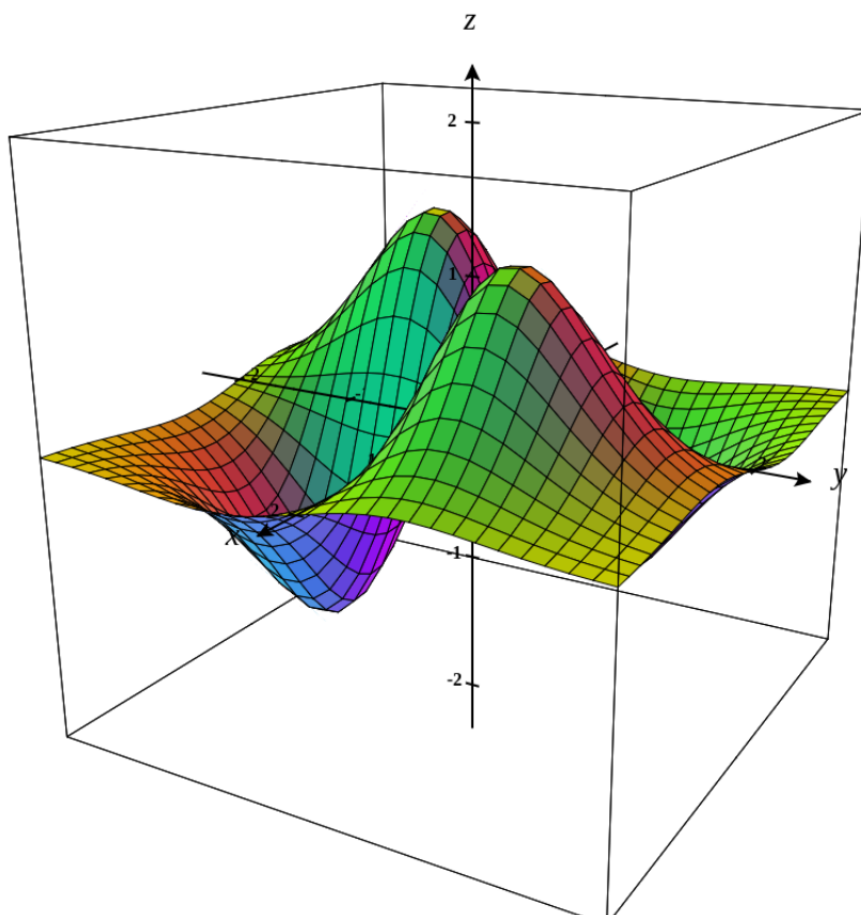
$$z = 2 \Rightarrow xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$$

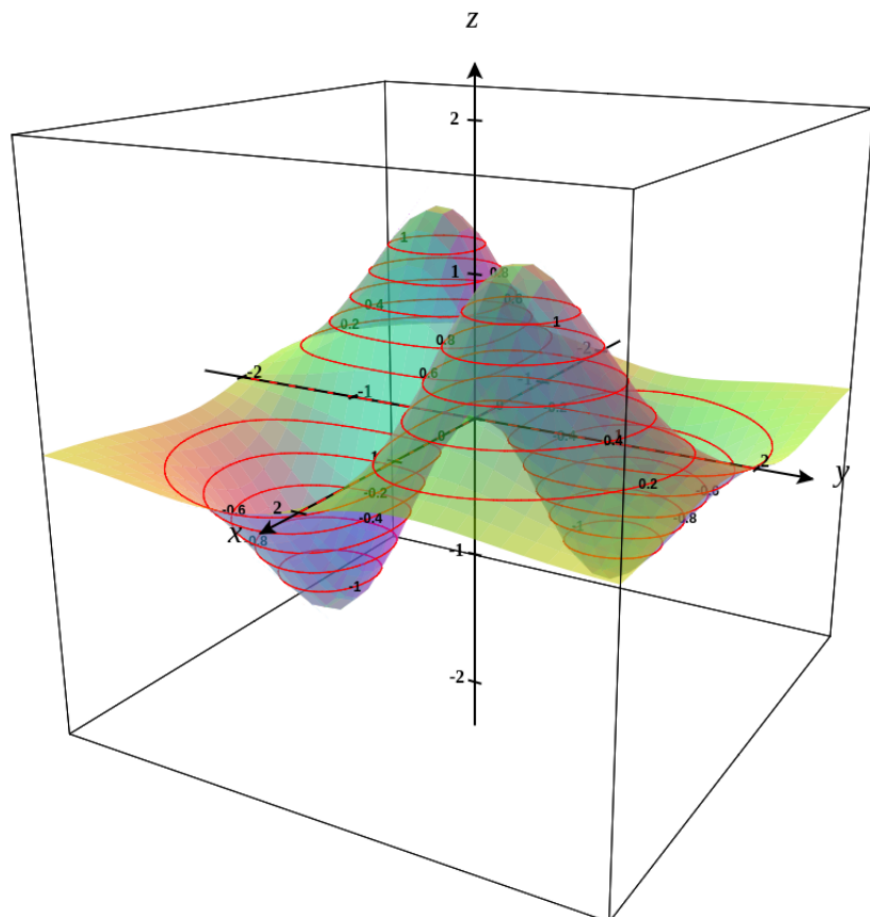
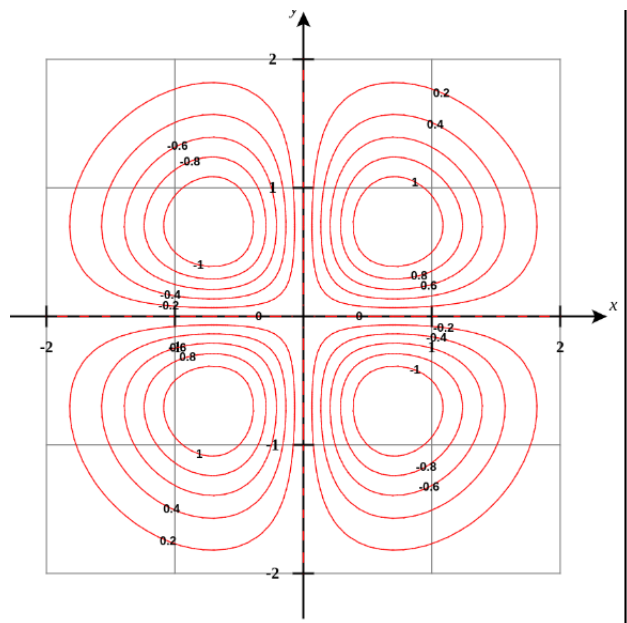


□

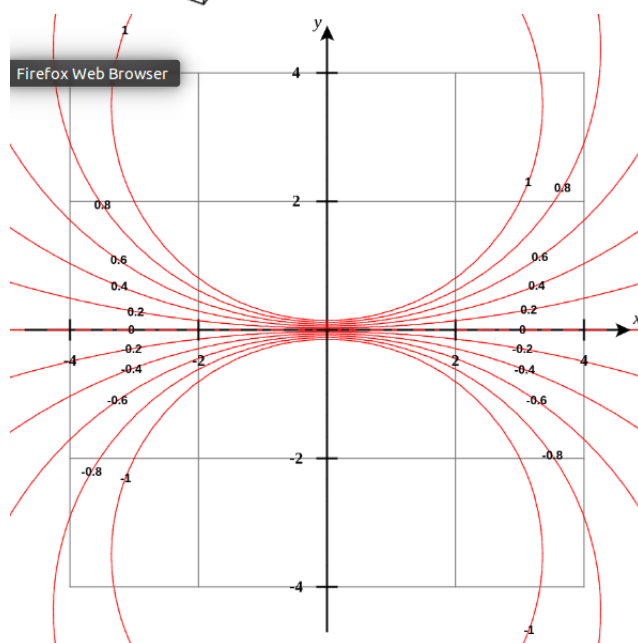
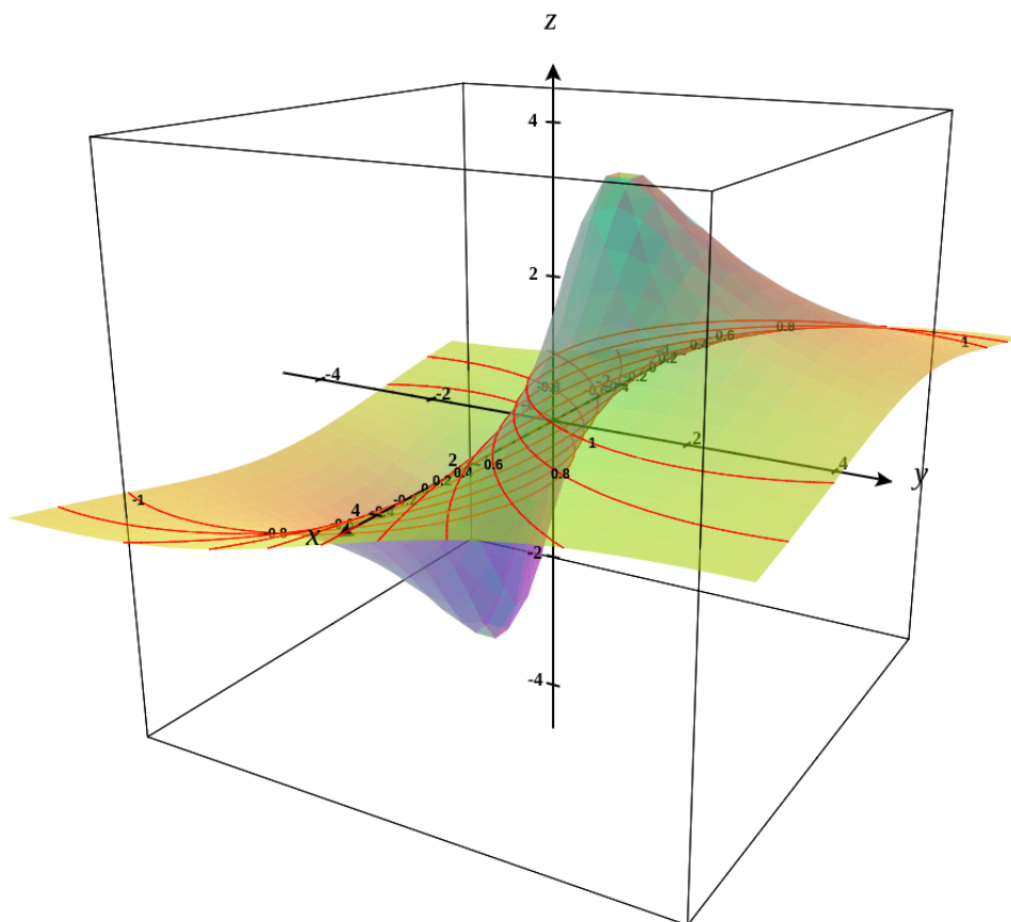
سوال ۷۰. منحنی‌های تراز توابع زیر را با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای رسم کنید:

$$۱. f(x, y) = \frac{xy}{e^x + e^y}$$





$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$$



۱.۲.۲ تمرین

تمرین ۸. منحنی‌های تراز توابع زیر را رسم کنید:

• $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

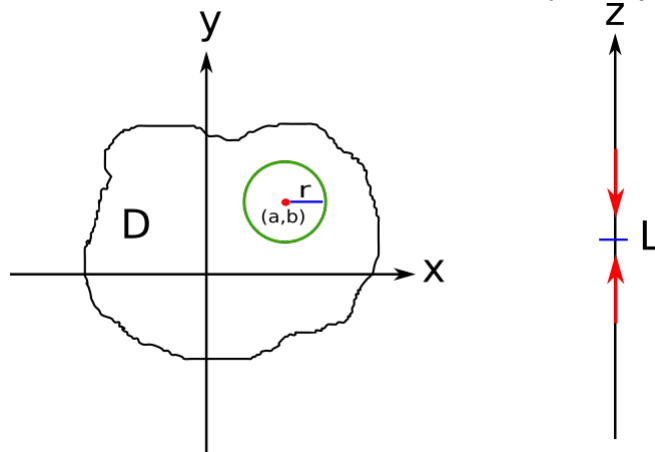
• $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$

۳.۲ حد و پیوستگی

فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. می‌گوئیم

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

هرگاه مقادیر $f(x,y)$ را بتوان به هر اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک کرد، به شرط آنکه (x,y) به اندازه‌ی کافی به (a,b) نزدیک شود.

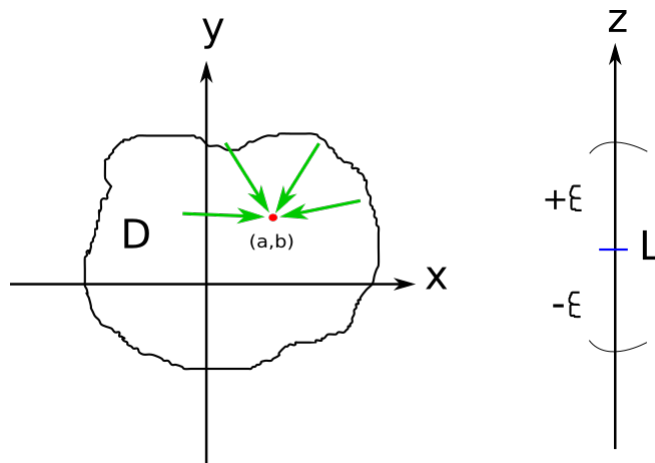


$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L \iff$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \left(\forall x, y \text{ (فاصله‌ی } (x,y) \text{ از } (a,b) \text{ کمتر از } \delta \text{ باشد)} \rightarrow \text{فاصله‌ی } z \text{ از } L \text{ کمتر از } \epsilon \text{ شود} \right)$$

$$\iff \forall \epsilon \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \quad \left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon \right)$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \left(\forall \begin{matrix} (x,y) \\ x, y \end{matrix} \text{ یا } \left(\text{اگر فاصله‌ی } (x,y) \text{ از } (a,b) \text{ کمتر از } \delta(\epsilon) \text{ باشد} \rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon \right) \right)$$

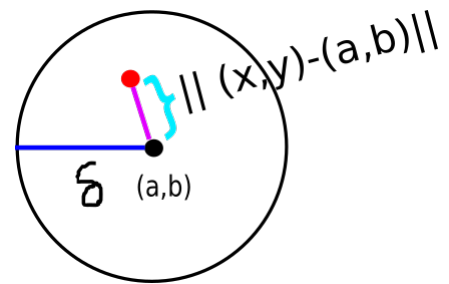


توجه ۷۱. وقتی می‌گوییم (x,y) به اندازه‌ی δ به (a,b) نزدیک است و می‌نویسیم:

$$\|(x,y) - (a,b)\| < \delta$$

یعنی

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

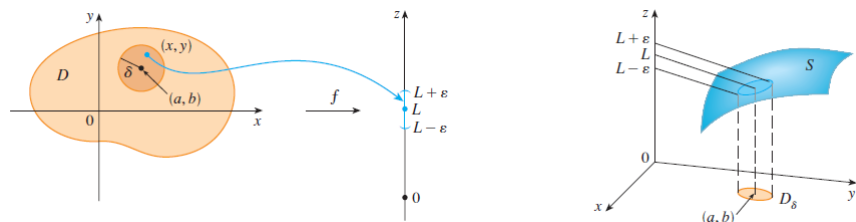


پس تعریف حد در بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L \iff$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall (x,y) \in D(f) \quad \left(0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta(\epsilon) \rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon \right)$$

در واقع وقتی که نقاط (x,y) در دامنه به (a,b) نزدیک می‌شوند (یعنی در داخل دایره با شعاع کم قرار می‌گیرند) مقادیر تابع به L نزدیک می‌شود (یعنی داخل بازه‌های کوچک به مرکز L قرار می‌گیرند). تصویر زیر از کتاب استوارت گرفته شده است:



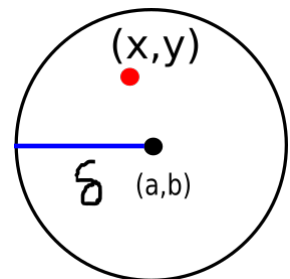
تمرین ۹. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L \iff$$

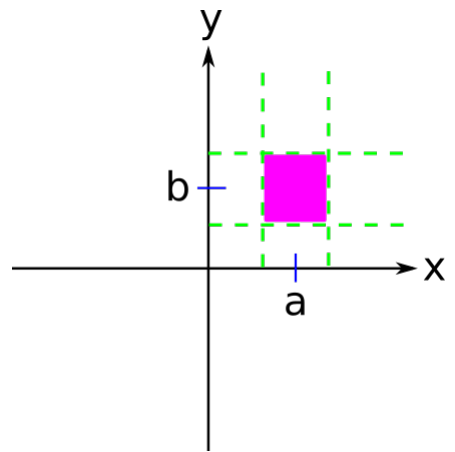
$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall (x,y) \quad \left((0 < |x-a| < \delta) \wedge (0 < |y-b| < \delta) \rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon \right)$$

توجه کنید که تمرین بالا در واقع می‌گوید که می‌توان به جای دایسکهای با شعاع کمتر و کمتر در مستطیلهای با طول و عرض کوچکتر و کوچکتر به نقطه‌ی (a,b) نزدیک شد:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta :$$

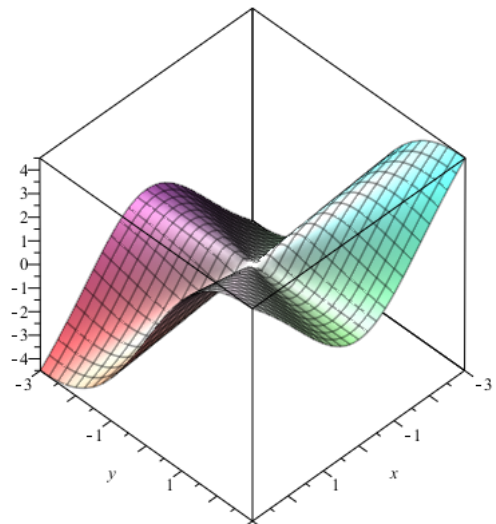


$$\begin{cases} |x-a| < \delta \\ |y-b| < \delta \end{cases} :$$



مثال ۷۲. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$



پاسخ. فرض کنید $\epsilon > 0$ را داشته باشیم، به دنبال δ هستیم به طوری که اگر $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ ، آنگاه $|\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}| < \epsilon$

چرک نویس.

$$\frac{|x^2 y|}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 \sqrt{y^2}}{x^2 + y^2}$$

می دانیم که

$$x^2 \leq x^2 + y^2$$

و

$$\sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

پس داریم:

$$\frac{x^2 \sqrt{y^2}}{x^2 + y^2} \leq \frac{\cancel{x^2} (\cancel{x^2} + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}{\cancel{x^2} + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad *$$

کافی است که δ یک عدد مثبت دلخواه باشد به طوری که $\frac{\epsilon}{3} < \delta$. آنگاه اگر $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ آنگاه

$$\frac{|3x^2y|}{x^2 + y^2} < 3\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\delta < 3 \times \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

□

مثال ۷۳. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$$

پاسخ. فرض کنیم $\epsilon > 0$ داده شده باشد.

چرکنویس.

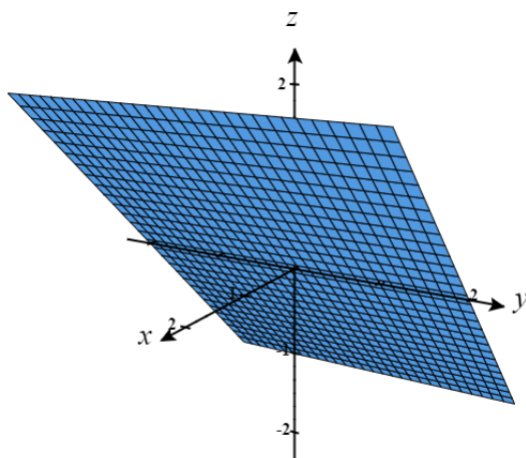
$$|f(x, y) - a| = |x - a|$$

$$|x - a| = \sqrt{|x - a|^2} \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

کافی است δ را یک عدد مثبت بگیریم به طوری که $\epsilon < \delta$. در این صورت اگر $0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$ آنگاه

آنگاه

$$|x - a| \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta < \epsilon$$



در زیر تابع $z = x$ را رسم کرده‌ایم.

□

بطور مشابه می‌توان نشان داد که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b$$

و

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} k = k$$

که در بالا k یک عدد ثابت است.

قضیه ۷۴. فرض کنید $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ و $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M$ (فرض کرده‌ایم که دامنه‌ی f و g در یک دیسک به مرکز (a,b) مشترک باشند).

$$۱. \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = L \pm M$$

$$۲. \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \times g(x,y) = L \times M$$

$$۳. \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} k \times f(x,y) = k \times L$$

$$۴. \text{اگر } M \neq ۰ \text{ آنگاه}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$$

۵. در صورتی که $L \neq ۰$ موجود باشد (یعنی یک عدد حقیقی باشد)، آنگاه:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left(f(x,y) \right)^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$$

از ترکیب قضیه‌ی بالا با مثالهای قبل (درباره‌ی تابعهای ثابت، $z = x$ ، $z = y$) به این نتیجه می‌رسیم که توابع چند جمله‌ای دارای حد هستند. منظور از یک تابع چندجمله‌ای، تابعی است که از جمع تعدادی متناهی عبارت به صورت $ax^m y^n$ ایجاد شده است، مانند $۵xy^3 + x^7 + ۱۰$. همچنین توابع گویا در دامنه‌شان دارای حد هستند. منظور از یک تابع گویا، تابعی است که آن را به صورت خارج قسمت دو تابع چندجمله‌ای می‌توان نوشت.

مثال ۷۵. مقدار حدهای زیر را بدست آورید.

$$۱. \lim_{(x,y) \rightarrow (۰,-۱)} \frac{x-xy+3}{x^2+5xy-y^3}$$

پاسخ.

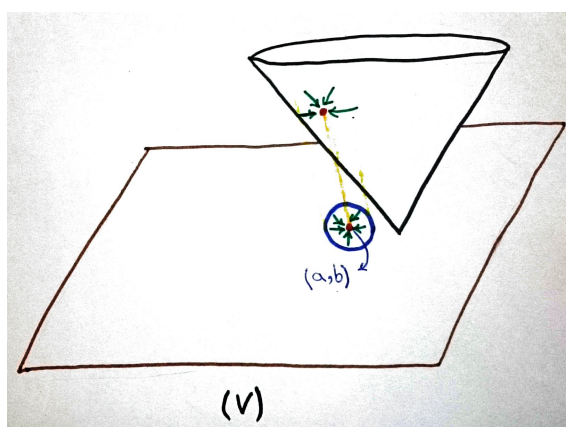
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (۰,-۱)} \frac{x-xy+3}{x^2+5xy-y^3} = \frac{3}{1}$$

□

$$۲. \lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \sqrt{x^2+y^2}$$

پاسخ.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \sqrt{x^2+y^2} = 5$$



□

$$۳. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

پاسخ.

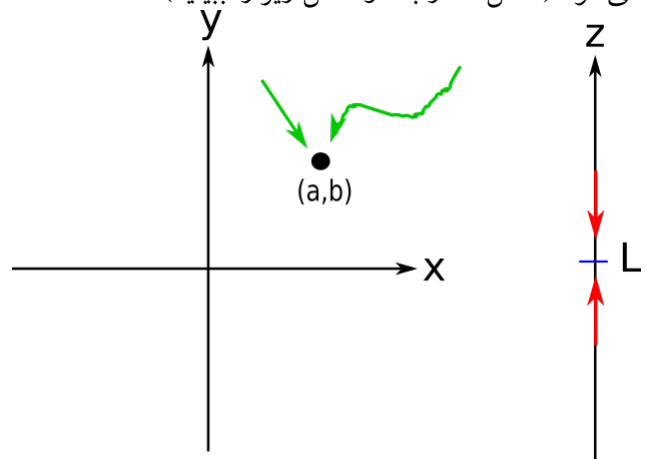
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x-y)}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0$$

□

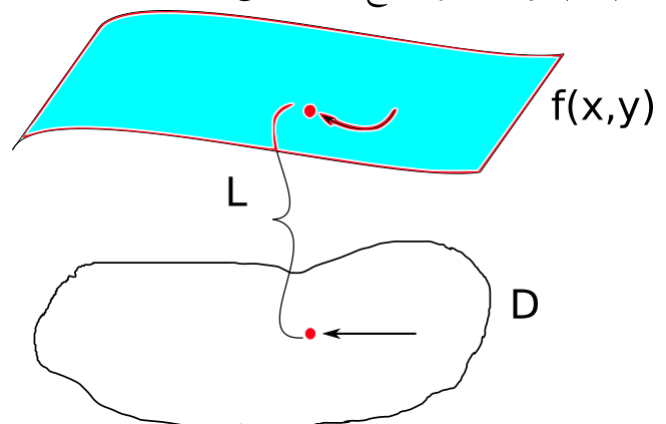
توجه ۷۶. تعریف وجود حد برای یک تابع ایجاب می کند که هرگاه

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

آنگاه از هر مسیری که زوج مرتبه‌های (x,y) در دامنه به (a,b) نزدیک شوند، مقادیر $f(x,y)$ روی آن مسیر به L نزدیک می شود (شکل ۷ در بالا و شکل زیر را ببینید).

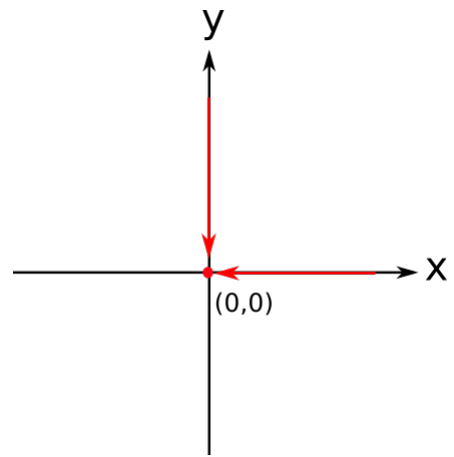


توجه ۷۷. شرط لازم برای وجود حد تابع $f(x,y)$ در نقطه‌ی (a,b) این است که از هر مسیری (در دامنه‌ی تابع) که (x,y) به (a,b) نزدیک شود، تابع حد یکسانی داشته باشد.



به بیان دیگر اگر دو مسیر به سمت (a,b) پیدا شوند که تابع روی آن دو حدهای مختلف داشته باشد، آنگاه حد تابع موجود نیست.

مثال ۷۸. نشان دهید که تابع $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ در هر نقطه‌ی $(0,0)$ حد ندارد.



پاسخ.

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

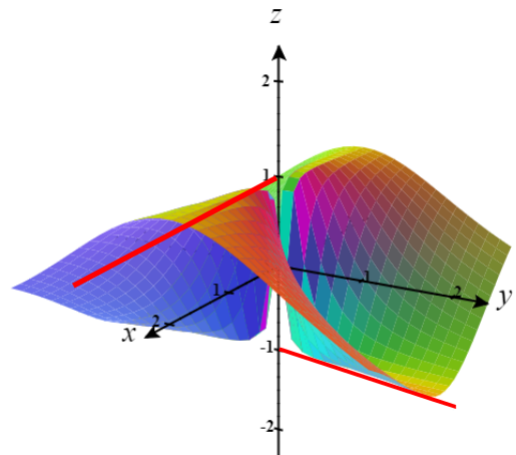
اگر روی نقاط $(x, 0)$ یعنی روی خط $y = 0$ ، نقطه‌ی (x, y) را به $(0, 0)$ میل دهیم، داریم:

$$f(x, 0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1$$

اگر روی نقاط $(0, y)$ یعنی روی خط $x = 0$ ، نقطه‌ی (x, y) به $(0, 0)$ میل کند، داریم:

$$f(0, y) = -1$$



□

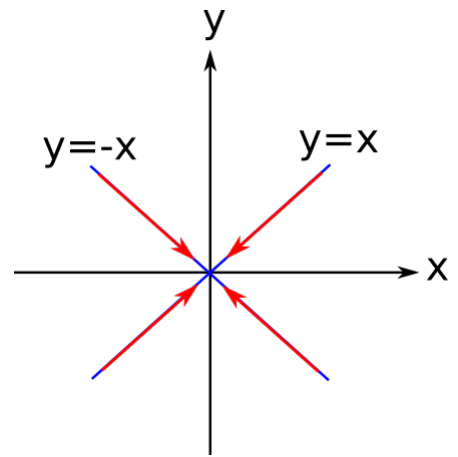
از آنجا که روی دو مسیر متفاوت به دو حد متفاوت رسیده‌ایم، تابع f حد ندارد (تصویر بالا را ببینید)

مثال ۷۹. نشان دهید که تابع $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ در نقطه‌ی $(0, 0)$ حد ندارد.

پاسخ.

$$y = x \Rightarrow \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$$

$$y = -x \Rightarrow \frac{xy}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{2}$$



□

از آنجا که روی دو مسیر متفاوت به دو حد متفاوت رسیده‌ایم، تابع f در $(0, 0)$ حد ندارد.

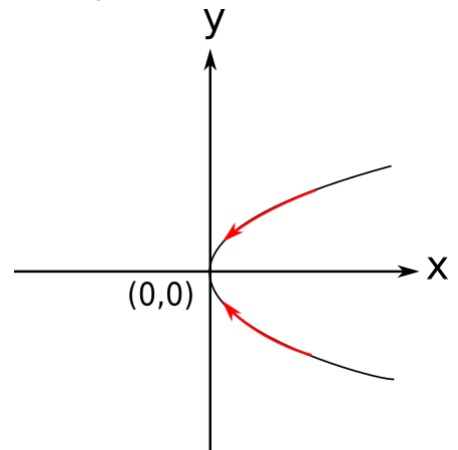
مثال ۸۰. نشان دهید که تابع $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ در نقطه‌ی $(0, 0)$ حد ندارد.

پاسخ.

$$x = y^2 \Rightarrow f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

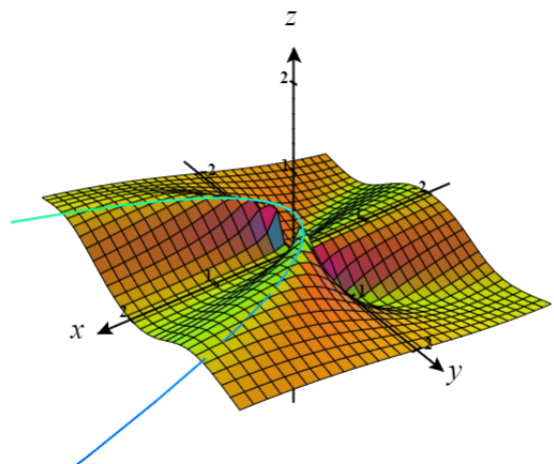
$$x = ky^2 \Rightarrow f(ky^2, y) = \frac{k}{2}$$

از آنجا که حد، به مقدار k بستگی دارد، روی مسیرهای متفاوت $x = ky^2$ در صفحه‌ی xy به حدود متفاوتی می‌رسیم.



مسیر زیر را نیز می‌توانستیم انتخاب کنیم.

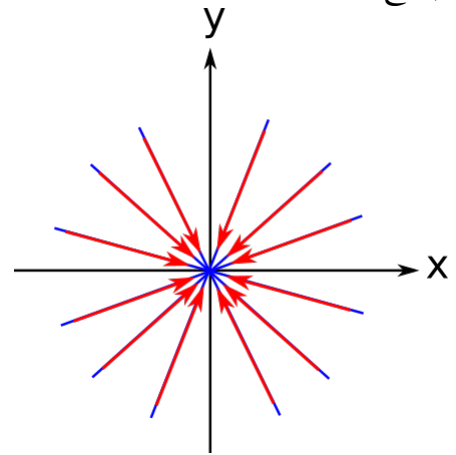
$$y = 0 \Rightarrow f(x, 0) = 0$$



□

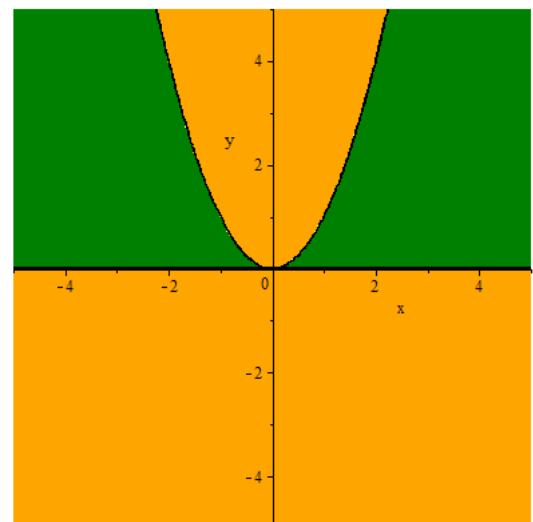
سوال ۸۱ (سوال دانشجویان). فرض کنیم تابع $f(x, y)$ در تمام مسیرهای $y = mx$ دارای حد برابر L باشد. آیا لزوماً حد تابع در نقطه‌ی $(0, 0)$ برابر با L است $(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = L)$ ؟

پاسخ:

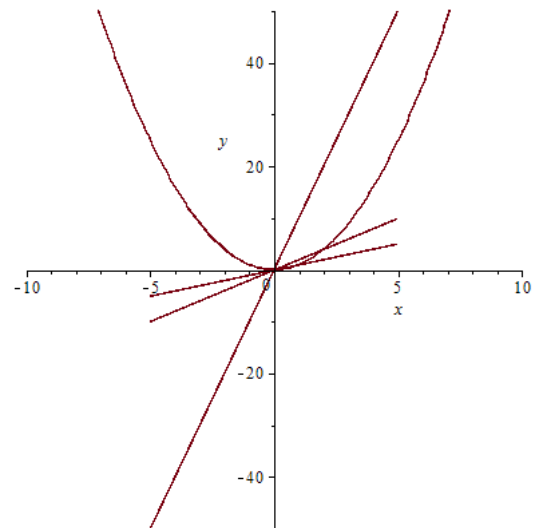


تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \text{ یا } y \geq x^2 \\ 1 & 0 < y < x^2 \end{cases}$$



ادعا می‌کنیم که روی تمام مسیرهای $y = mx$ در صفحه‌ی xy حد تابع در $(0, 0)$ برابر با ۰ است. یک خط دلخواه $y = mx$ را در نظر بگیرید (فرض کنیم $m > 0$). اگر $0 < x < m$ آنگاه $x^2 < mx$ یعنی منحنی $y = mx$ در بازه‌ی $x \in (0, m)$ بالاتر از منحنی $y = x^2$ قرار می‌گیرد. پس مقدار تابع مورد نظر ما روی این منحنی برابر با ۰ است. پس حد تابع نیز روی این منحنی برابر با صفر است. برای x های کمتر از صفر نیز از آنجا که $y = mx < 0$ دوباره مقدار تابع برابر با صفر است و حد تابع نیز صفر است. (منحنی‌های $y = mx$ را در حالتی که $m < 0$ شما بررسی کنید).



حال ادعا می‌کنیم که حد تابع بالا در $(0, 0)$ برابر با صفر نیست. می‌دانیم که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall (x,y) \quad \left(0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow |f(x,y)| < \epsilon \right)$$

پس

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \neq 0 \iff \exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists (x,y) \quad \left(0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \wedge |f(x,y)| \geq \epsilon \right)$$

قرار دهید $\epsilon = \frac{1}{4}$. برای هر $\delta > 0$ نقطه‌ای مانند (x, y) در دایره‌ی به شعاع δ و مرکز $(0, 0)$ پیدا می‌شود که در آن $f(x, y) = 1 > \frac{1}{4}$.

□

تمرین ۱۰. نمودار تابع بالا را رسم کنید.

تمرین ۱۱. برای $\epsilon > 0$ داده شده، δ را به گونه‌ای بیابید که اگر $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ آنگاه

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \epsilon$$

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + 1} \quad \epsilon = 0.05$$

پاسخ.

$$f(0, 0) = 0$$

چرک‌نویس.

$$\left| \frac{y}{x^2 + 1} \right| = \frac{\sqrt{y^2}}{x^2 + 1} \leq \sqrt{y^2} \leq \sqrt{y^2 + x^2}$$

اگر $\epsilon < \delta$ آنگاه اگر $\delta < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ آنگاه $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$

$$\left| \frac{y}{x^2 + 1} \right| < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta < \epsilon$$

□

برای $\epsilon = 0.05$ کافیت برای مثال $\delta = 0.005$ را در نظر بگیریم.

$$f(x, y) = \frac{y+x}{x^2+1} \quad \epsilon = 0.05 \quad 2.$$

$$f(x, y) = \frac{x+y}{2+\cos x} \quad 3.$$

تمرین ۱۲. آیا حد زیر وجود دارد؟

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3}$$

تمرین بالا را در جلسه‌ی بعد پاسخ گفته‌ایم.

تمرین ۱۳. نشان دهید توابع زیر در $(0, 0)$ حد ندارند.

$$f(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad 1.$$

پاسخ. مسیر $y = x$:

$$f(x, x) = \frac{-x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{2}|x|} = \begin{cases} x > 0 \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ x < 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

در واقع در همان مسیر $y = x$ در از دو طرف به دو حد متفاوت می‌رسیم. پس تابع مورد نظر در $(0, 0)$ حد

□

ندارد.

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x-y} \quad 2.$$

پاسخ. توجه کنید که مسیر $y = x$ در این مثال، مجاز نیست زیرا این مسیر در دامنه‌ی تابع قرار ندارد.

مسیر $y = -x$:

$$f(x, y) = \frac{x + (-x)}{x - (-x)} = 0$$

مسیر $(x, 0)$:

$$f(x, y) = \frac{x}{x} = 1$$

□

مثال ۸۲. نشان دهید که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} = 0$

پاسخ. باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x, y) \in D \quad \left(0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow \left| \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon \right)$$

چرک نویس.

$$\left| \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x \sin(xy)|}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{|x \sin(xy)|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x||xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2} |x| |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

پس اگر $\epsilon < \delta$ آنگاه اگر $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ آنگاه:

$$\left| \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta < \epsilon$$

□

مثال ۸۳. آیا تابع زیر در نقطه‌ی $(0, 0)$ حد دارد؟

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^3}$$

پاسخ. یک مسیر پیدا می‌کنیم که تابع روی آن حد ندارد.

چرک نویس:

$$x^3 + y^3 = x^5 \Rightarrow y^3 = x^5 - x^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x^5 - x^3}$$

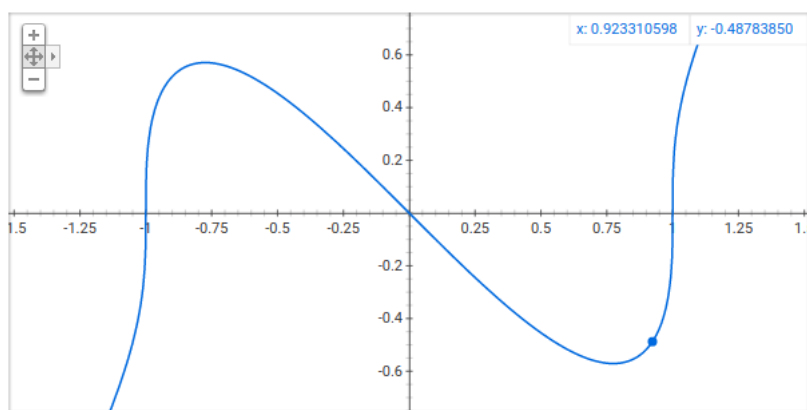
اگر مسیر $y = \sqrt[3]{x^5 - x^3}$ را انتخاب کنیم، آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (x^5 - x^3)^{\frac{2}{3}}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (x^3 (x^2 - 1))^{\frac{2}{3}}}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}{x}$$

حد فوق وجود ندارد، پس حد تابع وجود ندارد. در زیر مسیر یادشده کشیده شده است:

۳ در کلاس گفتیم که نیاز به یک همسایگی δ_1 داریم که در آن نامساوی $|\sin(xy)| \leq |xy|$ برقرار باشد؛ ولی همان طور که خود شما به درستی اشاره کردید، نیازی بدان نداریم.

Graph for $(x^5 - x^3)^{1/3}$



□

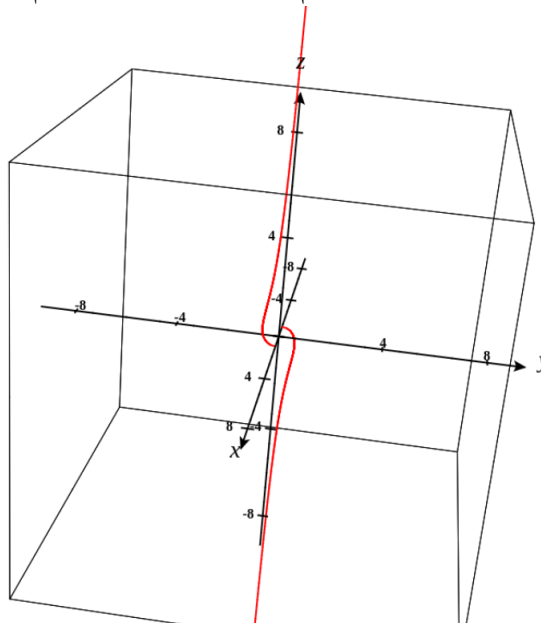
توجه کنید که خط به معادله $y = \sqrt[3]{x^5 - x^3}$ را در فضای دوبعدی می‌توان یک تابع برداری به صورت زیر تصور کرد:

$$\vec{r}(t) = (t, \sqrt[3]{t^5 - t^3}).$$

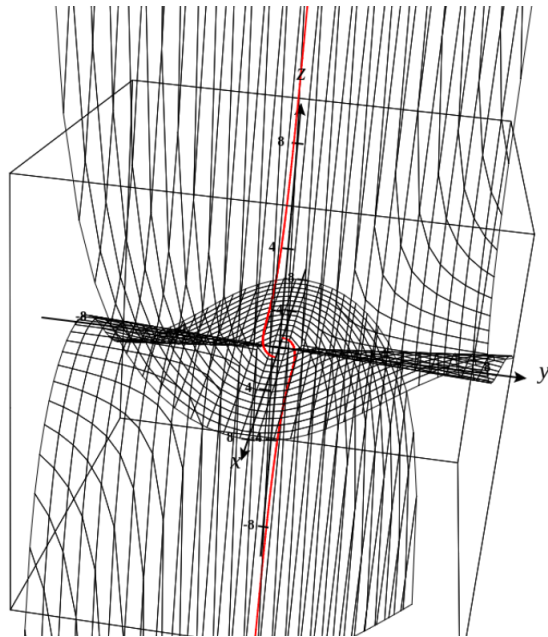
وقتی که روی منحنی فوق در صفحه xy حرکت کنیم، آنگاه، طبق محاسبات بالا، روی رویه، منحنی زیر ایجاد می‌شود:

$$\vec{r}(t) = (t, \sqrt[3]{t^5 - t^3}, \frac{(t^2 - 1)^{3/2}}{t})$$

در زیر شکل این منحنی را کشیده‌ایم (از روی این شکل معلوم می‌شود که چرا تابع بالا حد ندارد):



در زیر رویه را به همراه منحنی بالا که روی آن واقع است می‌بینید:



پیش از آن که درس را شروع کنیم، لازم است در پاسخ

به سوال یکی از دانشجویان مورد یک روش اشتباه برای محاسبه‌ی حد توضیحی بدهیم:

مثال ۸۴. ثابت کنید

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x^2 + 1} = 0$$

پاسخ. چرک‌نویس.

$$\left| \frac{y}{x^2 + 1} \right| \leq \frac{\sqrt{y^2}}{x^2 + 1} \leq \frac{\sqrt{y^2 + x^2}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

پاسخ اشتباه برای سوال بالا:

بنا به محاسبات بالا باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{\delta} < \epsilon \rightarrow \delta > \frac{1}{\epsilon}$$

مثلا اگر به ما $\epsilon = 0.05$ داده باشند داریم:

$$\delta > 20!$$

پاسخ بالا درست نیست. توجه کنید که ما به دنبال یک δ هستیم به طوری که عبارت زیر درست باشد:

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow |f(x, y)| < \epsilon$$

بنا به محاسبات بالا اگر $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ آنگاه

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \geq \frac{1}{\delta}$$

و از قسمت آخر عبارت بالا نمی‌توان بهره‌ی چندانی برد!

برای دیدن پاسخ درست این سوال به جلسات قبل مراجعه کنید.

یادآوری ۸۵. در بررسی حد توابع دو متغیره، دو عبارت زیر نقش کلیدی باز می‌کنند:

هر اندازه‌ی دلخواه

اندازه‌ی کافی

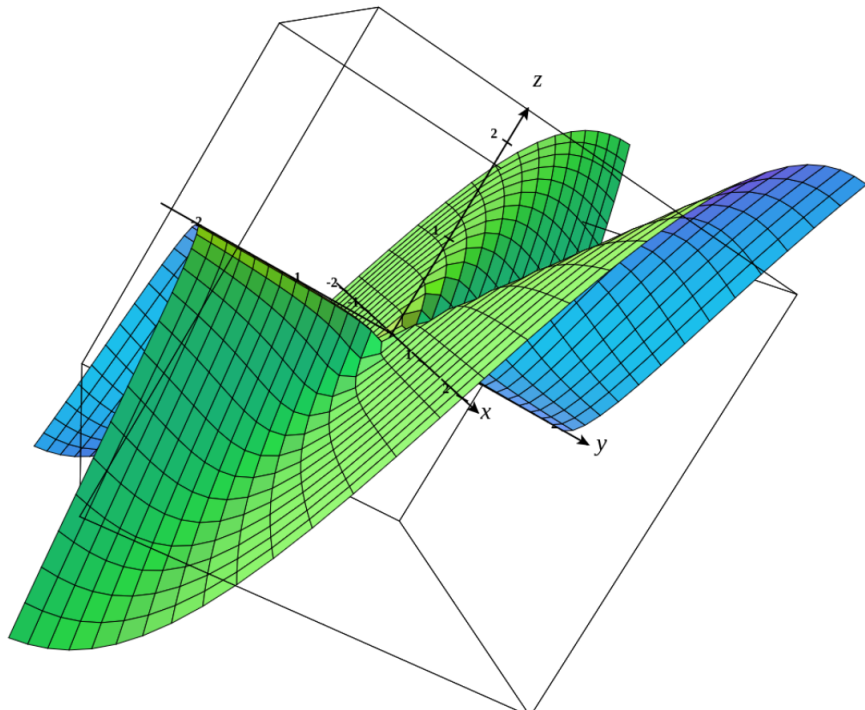
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L \iff \forall \underbrace{\epsilon}_{\text{مقدار دلخواه}} > 0 \quad \exists \underbrace{\delta}_{\text{کافی}} (\|(x,y) - (a,b)\| < \delta \rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon)$$

توجه کنید که

$$\|(x,y) - (a,b)\| < r \iff \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r$$

مثال ۸۶. با استفاده از تعریف نشان دهید که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$



پاسخ. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\|(x,y) - (0,0)\| < \delta \rightarrow |f(x,y) - 0| < \epsilon)$$

چرک نویس

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon \Rightarrow \underbrace{\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} \right|}_{3 \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| |y|} < \epsilon$$

با توجه به اینکه $0 \leq \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1$ اگر طرفین را در $3|y|$ ضرب کنیم، داریم:

$$0 \leq 3 \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| |y| \leq 3|y|$$

پس داریم:

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq 3|y|$$

$$3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2} \text{ پس } 3|y| = 3\sqrt{y^2}$$

در نتیجه

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq 3\sqrt{x^2+y^2}$$

بنا بر محاسبات بالا، برای اینکه $\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| < \epsilon$ کافی است:

$$3\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$$

اگر $\delta < \frac{\epsilon}{3}$ باشد، آنگاه

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow 3\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| < \epsilon$$

پس هرگاه $\epsilon > 0$ داده شده باشد، برای اثبات این که حد تابع موجود است کافی است $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ در نظر گرفته شود. یعنی اگر $\delta = \epsilon/3$ آنگاه اگر فاصله‌ی (x, y) از $(0, 0)$ کمتر از δ باشد، فاصله‌ی $f(x, y)$ از L کمتر از ϵ خواهد شد. $\square$

مثال ۸۷. ثابت کنید که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0.$$

پاسخ. باید ثابت کنیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad (\|(x - x_0) - (y - y_0)\| < \delta \rightarrow |x - x_0| < \epsilon)$$

یعنی برای یک ϵ که به ما داده شده است، باید δ را به گونه‌ای پیدا کنیم که

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \epsilon$$

دو عبارت بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \quad (x - x_0)^2 < \epsilon^2$$

می‌دانیم که

$$(x - x_0)^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

پس اگر δ به گونه‌ای باشد که

$$\delta^2 < \epsilon^2$$

آنگاه اگر

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$$

خواهیم داشت:

$$(x - x_0)^2 < \epsilon^2$$

یعنی

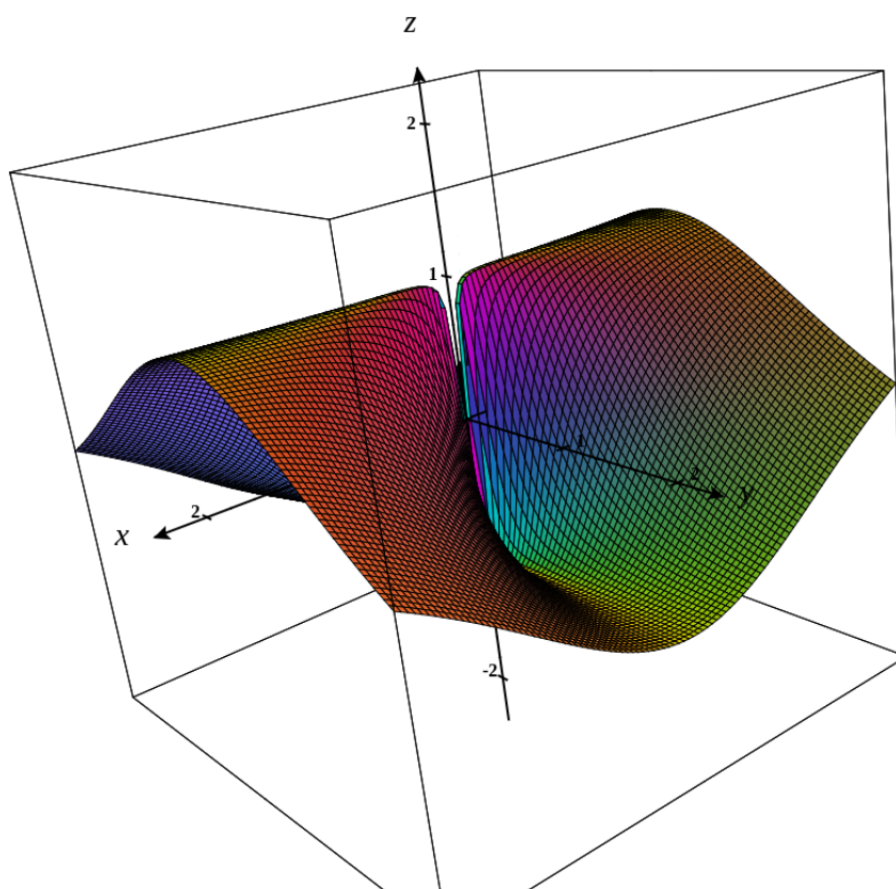
$$|x - x_0| < \epsilon$$

□

و این همان است که می‌خواستیم.

توجه ۸۸. داریم $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ اگر و تنها اگر از هر مسیری که (x,y) به (a,b) نزدیک شود، تابع $f(x,y)$ به L نزدیک شود. پس برای این که ثابت کنیم تابعی در یک نقطه حد ندارد، کافی است دو مسیر پیدا کنیم که روی آنها حد تابع متفاوت شود.

مثال ۸۹. ثابت کنید که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ وجود ندارد.



پاسخ. فرض کنیم که بخواهیم روی خط $(x, 0)$ به $(0, 0)$ نزدیک شویم:

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

مقدار تابع z در نقاط $(x, 0)$ برابر است با $\frac{x^2 - 0}{x^2 + 0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

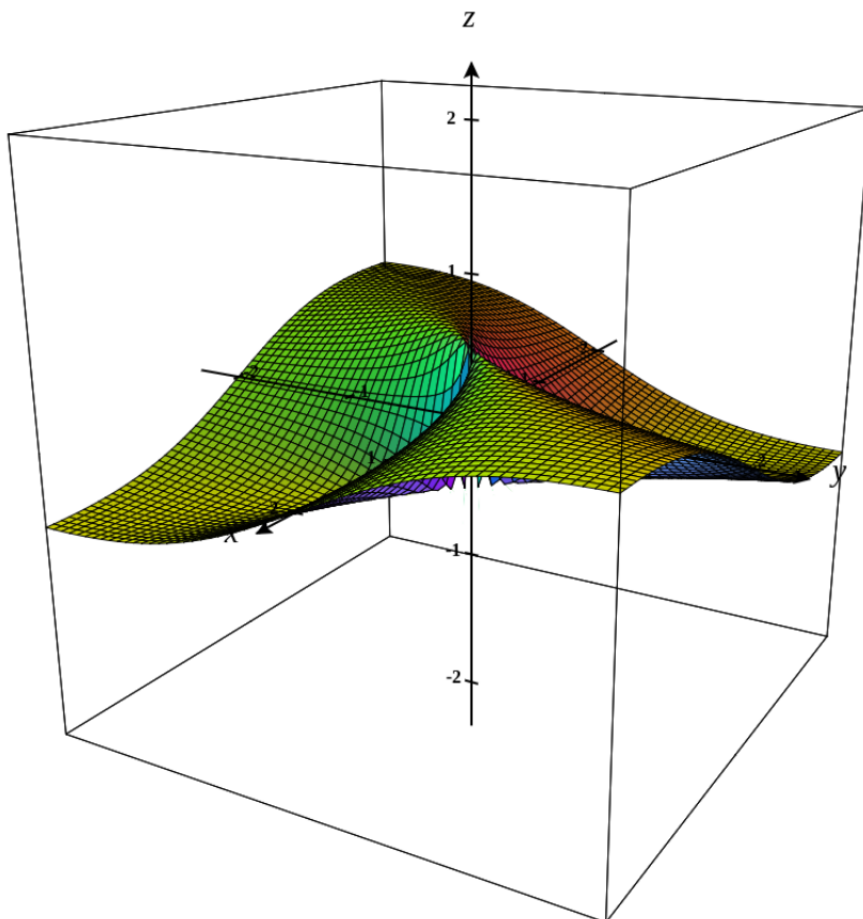
در نقاط $(0, y)$ مقدار تابع برابر است با $\frac{-y^2}{+y^2}$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

□

و در نتیجه این تابع در $(0, 0)$ حد ندارد.

مثال ۹۰. نشان دهید که تابع $\frac{xy}{x^2+y^2}$ در $(0, 0)$ حد ندارد.



پاسخ. اگر روی محور x (نقاط $(x, 0)$) به صفر نزدیک شویم، داریم:

$$\frac{0}{x^2} = 0$$

و اگر روی محور y (نقاط $(0, y)$) به صفر نزدیک شویم، داریم:

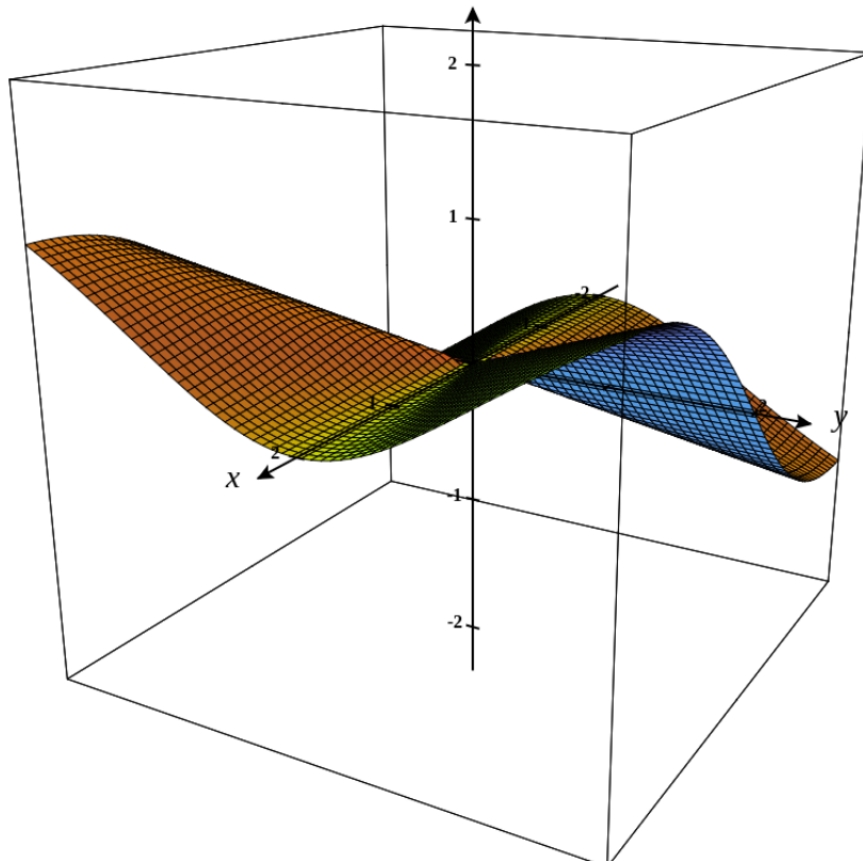
$$\frac{0}{y^2} = 0$$

و اگر روی خط $y = x$ به نقطه $(0, 0)$ نزدیک شویم، داریم:

$$\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

□

مثال ۹۱. نشان دهید که تابع $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ در $(0, 0)$ حد ندارد.



پاسخ. از سمت محور x :

$$\frac{x \times 0}{x^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

از سمت محور y :

$$\frac{0 \times y^2}{0 + y^4} = \frac{0}{y^4} = 0$$

روی خط $x = y^2$ به $(0, 0)$ نزدیک می‌شویم:

$$\frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}$$

□

□

۴.۲ پیوستگی

تعریف ۹۲. تابع $f(x, y)$ را در نقطه‌ی (a, b) پیوسته می‌خوانیم هرگاه

۱. نقطه‌ی (a, b) در دامنه‌ی تابع باشد،

۲. $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ موجود باشد، و

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b) \quad ۳.$$

تابع f را پیوسته می‌خوانیم هرگاه در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته باشد.

ترکیبات جبری توابع پیوسته، پیوسته‌اند.

$$f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g} \quad g(a,b) \neq 0, f^{\frac{m}{n}}$$

پیش‌تر گفتیم که

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$$

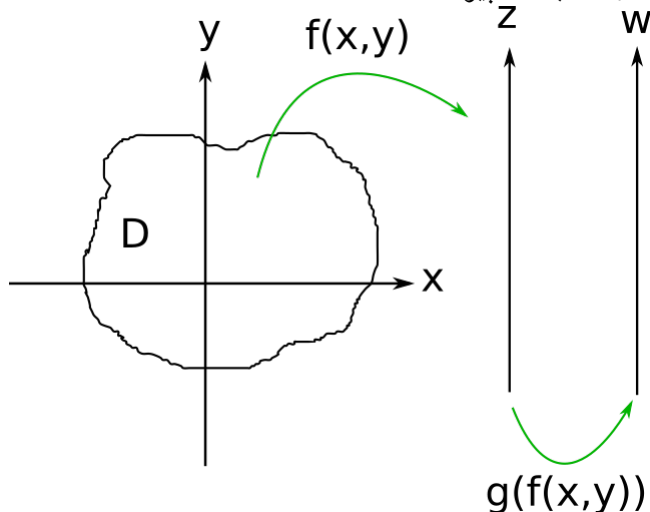
پس $z = x$ تابعی پیوسته است. پس توابع $z = kx^n$ نیز پیوسته‌اند. به طور مشابه توابع $z = ky^n$ پیوسته‌اند و در نتیجه

توابع $z = kx^n y^m$ پیوسته‌اند. از آنجا که حاصلجمع توابع پیوسته، پیوسته است، توابع چندجمله‌ای پیوسته‌اند.

همچنین توابع توابع گویا، یعنی خارج‌قسمتهای دو چندجمله‌ای، (در دامنه‌شان) پیوسته‌اند.

اگر $w = g(z)$ (تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$) پیوسته باشد و $z = f(x,y)$ (تابعی از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$) هم پیوسته باشد، آنگاه $g(f(x,y))$

(از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$) پیوسته است.



مثال ۹۳. توابع زیر در $\mathbb{R}^2$ پیوسته‌اند.

$$\ln(1 + x^2 y^2), \cos \frac{xy}{x^2 + y^2}, e^{x-y}$$

مثال ۹۴. تابع زیر در چه نقاطی پیوسته است؟

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

پاسخ. دامنه‌ی تابع $\mathbb{R}^2$ است. در نقاط $(x,y) \neq (0,0)$ تابع گویا است، پس پیوسته است. در مسیرهای $y = mx$

به $(0,0)$ نزدیک می‌شویم:

$$f(x, mx) = \frac{x^2 (mx)^2}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{x^2 m^2 x^2}{x^2 (1 + m^2)} = \frac{x^2 m^2}{1 + m^2}$$

مشاهده ۹۵. وقتی در مسیرهای یاد شده به نقطه‌ی $(0, 0)$ نزدیک می‌شویم با تغییر شیب، حد تابع عوض می‌شود. در واقع اگر $m = \tan \theta$ حد تابع برابر است با

$$\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

یعنی حد تابع روی این مسیرها، مقادیر مختلفی در بازه‌ی $(0, 1)$ اتخاذ می‌کند.

□

پس تابع در نقطه‌ی $(0, 0)$ ناپیوسته است.

تمرین ۱۴. نشان دهید که تابع $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ در نقطه‌ی $(0, 0)$ حد ندارد. (راهنمایی: در مسیرهای $y = kx^2$ حد تابع را بررسی کنید).

تمرین ۱۵. تابع $h(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ در چه نقاطی پیوسته است.

تمرین ۱۶. نقاطی را که تابع زیر در آنها پیوسته است، مشخص کنید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

پاسخ. از آنجا که توابع گویا در دامنه‌شان پیوسته‌اند، تابع مورد نظر در $(0, 0) \neq (x, y)$ پیوسته است. حال باید بررسی کنیم که آیا

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 1?$$

اگر قرار باشد حد بالا برقرار باشد، روی همه‌ی مسیرها به سمت $(0, 0)$ تابع باید به ۱ میل کند. روی مسیر $y = mx$ داریم:

$$f(x, mx) = \frac{x^2(mx)^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m^2 x^4}{x^2(m^2 + 1)} = \frac{m^2 x^2}{m^2 + 1}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{mx}{m^2 + 1} = 0$$

بنابراین تابع در $(0, 0)$ پیوسته نیست.

تمرین ۱۷. نشان دهید برای تابع تمرین قبل داریم:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$$

باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \left(\forall (x, y) \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow |f(x, y)| < \epsilon \right)$$

فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد.

چرک نویس.

$$\left| \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 |y^3|}{x^2 + x^2 + y^2}$$

حال برای آنکه کسری بزرگتر از کسر بالا بیابیم، مخرج را کوچک و صورت را بزرگ می‌کنیم.

$$\frac{x^2 |y^3|}{x^2 + x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2) |y| y^2}{x^2 + y^2} \leq \sqrt{y^2} (x^2 + y^2) \leq \sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) < \epsilon$$

حال اگر δ هر عدد دلخواهی باشد به طوری که $\sqrt[3]{\epsilon} < \delta < \bullet$ آنگاه

$$|f(x, y) - \bullet| = \left| \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) \leq \delta^3 < \epsilon$$

□

مثال ۹۶. نشان دهید که تابع زیر در مبدأ پیوسته نیست.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^2} & x+y \neq \bullet \\ \bullet & x+y = \bullet \end{cases}$$

پاسخ. اگر تابع در مبدأ پیوسته باشد باید از هر مسیری که (x, y) به مبدأ میل می‌کند تابع به $f(\bullet, \bullet)$ میل کند. روی مسیر $(\bullet, y)$ داریم:

$$f(\bullet, y) = \frac{-1}{y^2}$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (\bullet, \bullet) \\ x = \bullet}} f(x, y) =$$

$$\lim_{y \rightarrow \bullet} \frac{-1}{y^2} = -\infty$$

□

پس تابع مورد نظر پیوسته نیست.

تمرین ۱۸. آیا تابع زیر در مبدأ پیوسته است؟

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & xy \neq \bullet \\ 1 & xy = \bullet \end{cases}$$

پاسخ. ادعا می‌کنیم که تابع بالا در نقطه‌ی $(\bullet, \bullet)$ پیوسته است. باید نشان دهیم که:

$$\forall \epsilon > \bullet \exists \delta > \bullet \forall (x, y) (\bullet < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \rightarrow |f(x, y) - 1| < \epsilon)$$

توجه ۹۷. در نقاط نزدیک به صفر اگر تابع از ضابطه ی دوم پیروی کند، همواره داریم:

$$|f(x, y) - 1| = |1 - 1| < \epsilon$$

پس تنها (x, y) هایی را در نظر می گیریم که $xy \neq 0$ داریم:

$$\left| \frac{\sin(xy)}{xy} - 1 \right| = \left| \frac{\sin(xy) - xy}{xy} \right|$$

بسط تیلور:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

ادعا: برای هر $x > 0$ داریم:

$$x - \sin x < \frac{x^3}{6}$$

این ادعا را با روشهایی که در درس ریاضی ۱ فراگرفته‌اید ثابت کنید.

بنا به ادعای بالا:

$$\frac{|\sin(xy) - xy|}{|xy|} \leq \frac{|x^3 y^3|}{36|xy|} \leq \frac{x^2 y^2}{36}$$

اگر $\sqrt[3]{6}\epsilon < \delta < \delta$ آنگاه اگر $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ آنگاه:

$$|f(x, y) - 1| < \epsilon$$

□

تمرین ۱۹. تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^3} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در کدام نقاط پیوسته است؟

۵.۲ توابع با بیش از دو متغیر

منظور از یک تابع سه متغیره ضابطه‌ای است مانند:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

که هر (x, y, z) متعلق به یک مجموعه‌ی $D \subseteq \mathbb{R}^3$ را به یک عنصر $f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ می‌برد. مجموعه‌ی D را دامنه‌ی تابع f می‌خوانیم.

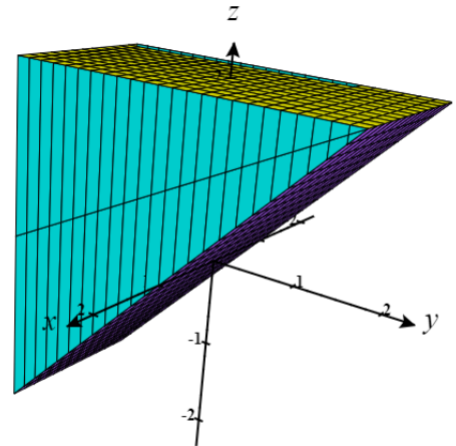
مثال ۹۸. دامنه‌ی تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \sin(z)$$

پاسخ.

$$D(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

نیم‌فضای بالای صفحه‌ی: $z = y$



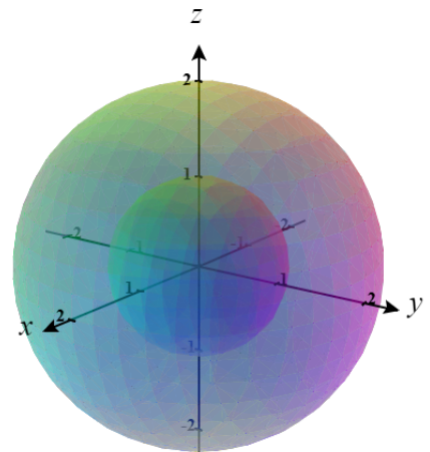
□

مثال ۹۹. رویه‌های تراز تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ را رسم کنید.

پاسخ. هر رویه‌ی تراز تابع یادشده، یک کره است:

$$k = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$k = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4$$



□

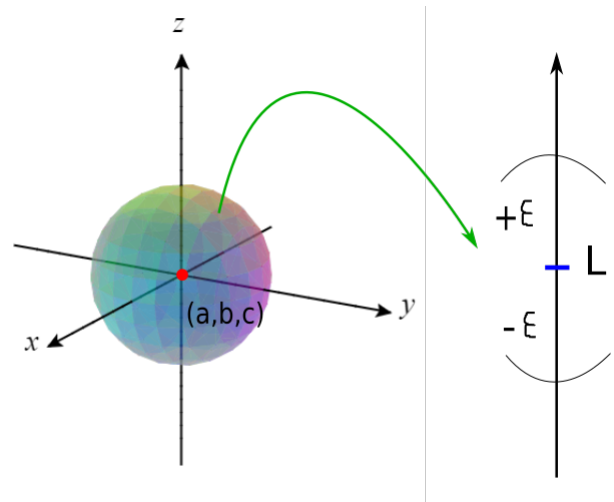
توجه کنید که رسم یک تابع از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}$ ممکن نیست. عموماً دامنه‌ی چنین تابعی را در $\mathbb{R}^3$ و بُرد آن را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ رسم می‌کنیم.

تعریف ۱۰۰. فرض کنید f یک تابع سه متغیره باشد.

$$f : D \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$$

منظور از $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x,y,z) = L$ این است که:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall (x,y,z) \quad \left(0 < \underbrace{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}_{\text{فاصله‌ی نقطه‌ی } (x,y,z) \text{ از } (a,b,c) \text{ کمتر از } \delta \text{ شود}} < \delta \rightarrow |f(x,y,z) - L| < \epsilon \right)$$



مفهوم پیوستگی برای توابع سه متغیره، بطور مشابه تعریف می‌شود. چنین تابعی را در نقطه‌ی (a, b, c) پیوسته می‌خوانیم هرگاه $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x,y,z) = f(a,b,c)$. به عنوان مثال توابع زیر پیوسته‌اند:

$$\ln(x, y, z), \frac{y \sin z}{x-1} \quad (x \neq 1)$$

پاسخ.

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2 + \cos \sqrt{xy}} = \frac{1}{2}$$

□

تمرین ۲۰. فرض کنید $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ، یک تابع باشد. با الگوبری از تعاریف حد برای توابع دو و سه متغیره، عبارت

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = L$$

را تعریف کنید.

پاسخ.

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = L \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in D(f)$$

$$\left(0 < \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \delta \rightarrow |f(x_1, \dots, x_n) - L| < \epsilon \right)$$

□

مثال ۱۰۱. حد تابع زیر را بیابید.

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2 + \cos \sqrt{xy}}$$

تمرین ۲۱. نشان دهید که حدهای زیر موجود نیستند.

$$1. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$2. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^2}$$

تمرین ۲۲. نشان دهید که

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

تمرین ۲۳. نشان دهید که تابع

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y \sin x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

تابعی پیوسته است.

تمرین ۲۴. حدهای زیر را محاسبه کنید:

$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1), x \neq 1} \frac{xy-y^2x+1}{x-1}$$

$$2. \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-4), x \neq x^2, y \neq -4} \frac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$$

$$3. \lim_{(x,y) \rightarrow (4,3), x \neq y+1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+1}{x-y-1}$$

فصل ۳

مشتقات جزئی

۱.۳ مشتقات جزئی

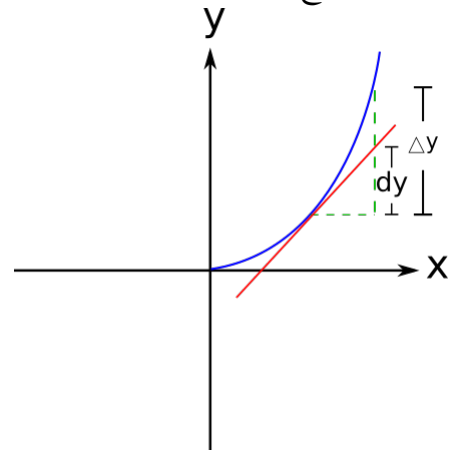
در ریاضی ۱ دیدیم که مشتق یک تابع تک متغیره $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ در یک نقطه $x_0 \in \text{Dom}(f)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

از روی مشتق، نیز «دیفرانسیل» یک تابع را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$dy(x_0) = f'(x_0) dx$$

وقتی یک تابع مشتق‌پذیر باشد، Δy را می‌توان با استفاده از dy تقریب زد:



$$\Delta y \simeq dy$$

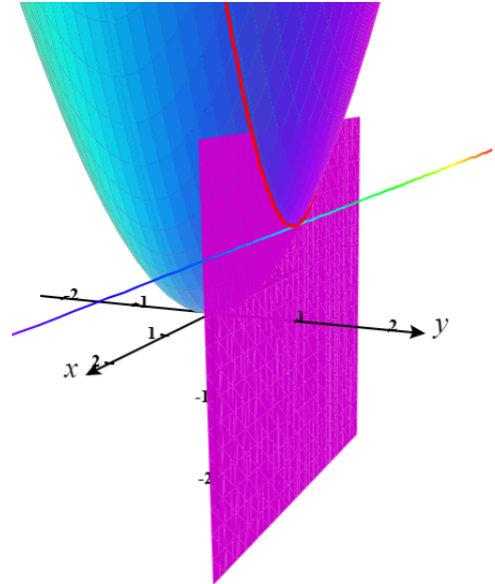
dy تغییر ارتفاع خط مماس را نشان می‌دهد و $\Delta(y)$ تغییر ارتفاع تابع را نشان می‌دهد. در جلسات آینده خواهیم دید که برای یک تابع $z = f(x, y)$ نیز می‌توان dz را تعریف کرد و dz نیز قرار است تقریبی برای $\Delta(z)$ باشد. در آنجا خواهیم دید که dz تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس را نشان می‌دهد و $\Delta(z)$ تغییر ارتفاع تابع را نشان می‌دهد. برای رسیدن به تعریف

dz به مقدماتی نیازمندیم که آنها را در این جلسه و چند جلسه‌ی آینده فراهم آورده‌ایم.

مشتق جزئی تابع $f(x, y)$ نسبت به متغیر x در نقطه‌ی $(x_0, y_0) \in D$ به صورت زیر تعریف می‌شود: (در صورتی که حد زیر موجود باشد).

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

برای محاسبه مشتق جزئی نسبت به x باید اجازه بدهیم که متغیر x در اطراف x_0 تغییر کند ولی $y = y_0$ ثابت بماند.



۲.۳ تعبیر هندسی مشتق جزئی

مشتق جزئی نسبت به متغیر x در نقطه‌ی (x_0, y_0) در واقع شیب خط مماس بر منحنی ایجاد شده در اشتراک رویه‌ی $z = f(x, y)$ و صفحه‌ی $y = y_0$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) است (به شکل بالا نگاه کنید).

نمادگذاری

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

در واقع، مشتق جزئی بر حسب x در نقطه‌ی (x_0, y_0) را می‌توان به صورت زیر نیز تعریف کرد: تابع $g(x) = f(x, y_0)$ را در نظر بگیرید و مشتق این تابع را بر حسب x در نقطه‌ی x_0 محاسبه کنید. منحنی ایجاد شده در محل تقاطع صفحه‌ی $y = y_0$ و رویه‌ی $z = f(x, y)$ دارای معادله‌ی زیر است:

$$\begin{cases} z = g(x) = f(x, y_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

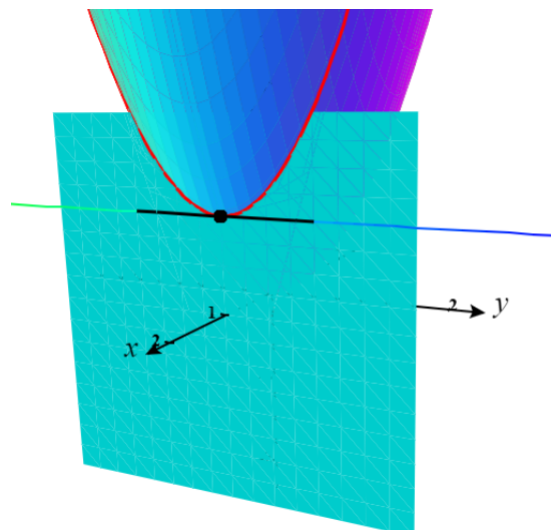
و مشتق جزئی بر حسب x در واقع شیب خط مماس بر منحنی بالاست در نقطه‌ی (x_0, y_0) .

تعریف ۱۰۲.

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

در صورتی که این حد موجود باشد.

تمرین ۲۵. بر اساس شکل زیر $f_y(x_0, y_0)$ را تحلیل هندسی کنید.



مثال ۱۰۳. مشتقات جزئی اول توابع زیر را در نقطه‌ی $(4, 5) = (x_0, y_0)$ محاسبه کنید.

$$1. f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$$

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 3y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(4, 5) = 23$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x + 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(4, 5) = 13$$

توجه ۱۰۴. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دو متغیره باشد، آنگاه

$$f_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_0, y_0) \mapsto f_x(x_0, y_0)$$

خود نیز تابعی دو متغیره است، و می‌توان درباره‌ی پیوستگی یا عدم پیوستگی آن در یک نقطه سخن گفت.

راه دوم.

$$f(x, 5) = x^2 + 15x + 4 \Rightarrow f_x(x, 5) = 2x + 15 \Rightarrow f_x(4, 5) = 23$$

توجه ۱۰۵. تا کنون فهمیدیم که اگر $z = f(x, y)$ یک تابع باشد، و $(x_0, y_0) \in D(f)$ و قرار دهیم:

$$g(x) = f(x, y_0)$$

آنگاه

$$g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$$

و اگر قرار دهیم

$$h(y) = f(x_*, y)$$

آنگاه

$$h'(y_*) = f_y(x_*, y_*)$$

□

$$۲. f(x, y) = y \sin(xy)$$

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos(xy) \Rightarrow f_x(4, 5) = 25 \cos(20)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(xy) + xy \cos(xy) \Rightarrow f_y(4, 5) = \sin(20) + 20 \cos(20)$$

□

تمرین ۲۶. برای تابع زیر، در تمام نقاط f_x و f_y را محاسبه کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

تمرین ۲۷. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در این صورت $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial x}$ را محاسبه کنید.

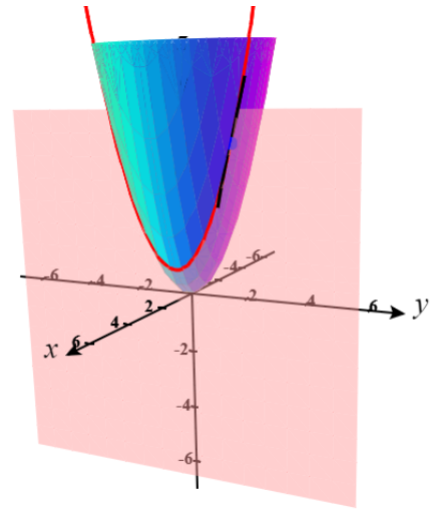
مثال ۱۰۶. صفحه‌ی $x = ۱$ سهمی‌وار $z = x^2 + y^2$ را در یک سهمی قطع می‌کند. شیب خط مماس بر این سهمی را در نقطه‌ی $(۱, ۲, ۵)$ بیابید.

پاسخ. داریم

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 2y$$

مطابق آنچه گفتیم، شیب خط مماس بر منحنی محل تلاقی صفحه‌ی $x = ۱$ و سهمی‌وار مورد نظر برابر است با:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1, 2) = 4$$



□

توجه ۱۰۷. در مثال بالا، در صفحه‌ی $x = 1$ منحنی زیر را داریم:

$$\begin{cases} z = 1 + y^2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$z'(2) = 2 \times 2 = 4$$

مثال ۱۰۸. معادله‌ی خط مماس بر منحنی محل اشتراک رویه‌ی $z = f(x, y)$ و صفحه‌ی $y = y_0$ را بنویسید.

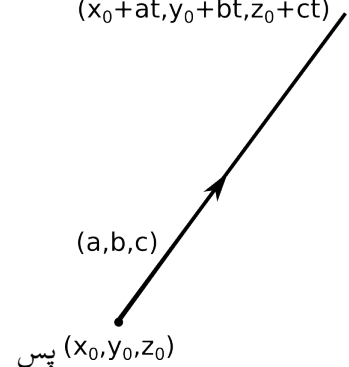
مثال بالا را پس از توضیح کوتاهی در مورد معادله خط، حل خواهیم کرد.

۳.۳ توضیح کوتاه درباره منحنی‌های فضایی

یادآوری ۱۰۹. معادله‌ی پارامتری، معادله‌ای است که در آن رابطه‌ی میان x, y, z به طور مستقیم نوشته نشود، بلکه رابطه‌ی میان آنها توسط وابستگی آنها به یک پارامتر دیگر، مثلاً زمان بیان شود. یک نمونه معادله‌ی پارامتری را در مثال بالا دیدید. به عنوان مثال دیگر، هر خط راست را می‌توان در فضای سه‌بعدی توسط یک معادله‌ی برداری به صورت زیر نوشت:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$$

از روی شکل زیر مشخص است که معادله‌ی بالا چگونه به دست آمده است:



$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

به بیان دیگر:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

برداری (a, b, c) را بردار جهت خط بالا می‌خوانیم.

توجه ۱۱۰. در واقع تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ یک عدد می‌گیرد و یک بردار می‌دهد:

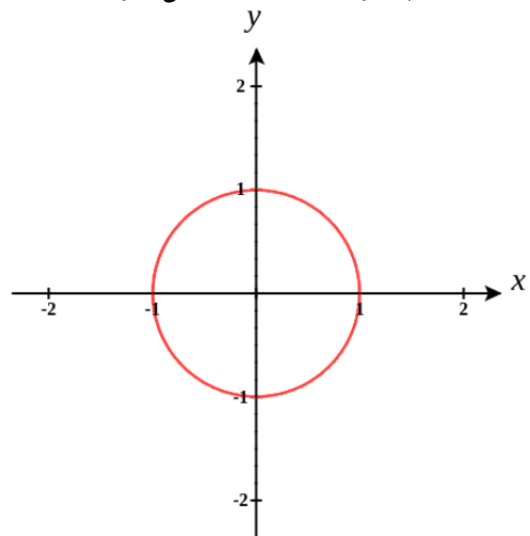
$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

$$(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$$

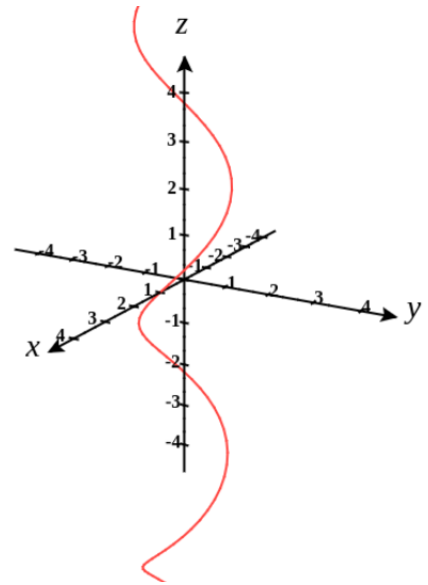
هنگام رسم چنین تابعی، پارامتر t را رسم نمی‌کنیم و فقط مقادیر برداری به دست آمده بر حسب آن را رسم می‌کنیم.

مثال ۱۱۱. منحنی فضائی $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ را رسم کنید.

توجه کنید که از آنجا که $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$ ، منحنی مورد نظر روی استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ واقع شده است. منحنی $(\cos t, \sin t)$ نیز در دو بُعد به شکل زیر است.



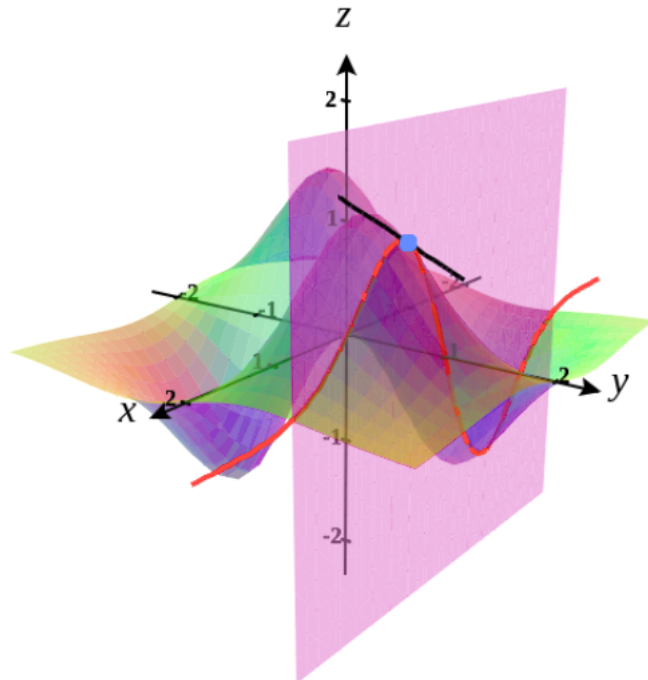
در زیر، خم $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ را رسم کرده‌ایم:



خم بالا به صورت مارپیچ دور استوانه می‌چرخد.

۴.۳ ادامه بحث مشتقات جزئی

مثال ۱۱۲. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر منحنی محل تلاقی رویه‌ی $z = f(x, y)$ و صفحه‌ی $y = y_0$ را در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) بنویسید.



پاسخ.

شیب خط مورد نظر برابر است با

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$$

معادله‌ی خط:

$$\begin{cases} z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

معادله‌ی پارامتری خط:

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = z_0 - \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)x_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)t \end{cases}$$

بردار مولد خط این مثال برابر است با

$$\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$$

بیان دوم. در صفحه‌ی $y = y_0$ منحنی $z = g(x) = f(x, y_0)$ را داریم. معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی x_0 به صورت زیر است:

$$z - z_0 = g'(x_0)(x - x_0)$$

که در آن $g'(x_0)$ برابر است با

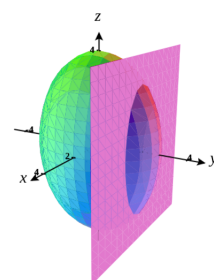
$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$$

□

تمرین ۲۸. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر منحنی محل تلاقی رویه‌ی $z = f(x, y)$ و صفحه‌ی $x = x_0$ را در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) بنویسید.

مثال ۱۱۳. بیضی وار $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ صفحه‌ی $y = 2$ را در یک بیضی قطع می‌کند. معادلات پارامتری خط مماس بر این بیضی را در نقطه‌ی $(1, 2, 2)$ بنویسید. (بیضی مورد نظر را نیز رسم کنید).

پاسخ:



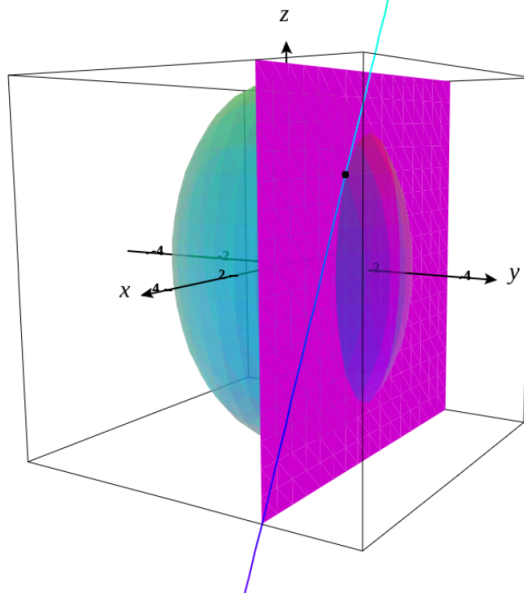
$$\begin{cases} z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(1, 2)(x - 1) \\ y = 2 \end{cases}$$

برای محاسبه‌ی $\partial z / \partial x$ از دو طرف معادله‌ی $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ بر حسب x مشتق می‌گیریم.

$$8x + 0 + 2Z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = -2$$

$$\begin{cases} z = 4 - 2t \\ y = 2 \\ x = t \end{cases}$$

در زیر وضعیت بالا ترسیم شده است:



□

مثال ۱۱۴. فرض کنید x و y مستقل از هم باشند و z به آنها وابسته باشد و داشته باشیم:

$$yz - \ln z = x + y$$

آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} \left(y - \frac{1}{z} \right) = 1 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y - \frac{1}{z}}$$

□

تمرین ۲۹. اگر داشته باشیم

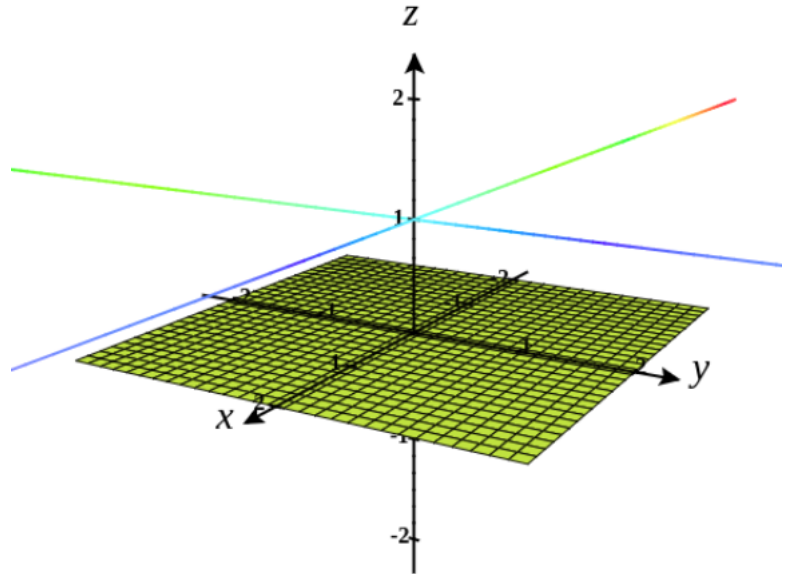
$$f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-\frac{2}{3}} e^{\sin(x^2 y)}$$

آنگاه $f_x(1, 0)$ را بیابید. (راهنمایی: بهتر است از تعریف استفاده کنید!)

توجه ۱۱۵. در توابع تک متغیره (مثلاً تابع $y = f(x)$) دیدیم که اگر مشتق تابع در یک نقطه $x = x_0$ موجود باشد، آنگاه تابع در آن نقطه پیوسته است. اما در توابع $z = f(x, y)$ ممکن است $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ و $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$ هر دو موجود باشند ولی تابع در (x_0, y_0) پیوسته نباشد.

مثال ۱۱۶. تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$$



دقت کنید که تابع f در نقطه‌ی $(0, 0)$ پیوسته نیست، اما $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ و $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ هر دو موجودند.

تمرین ۳۰. نشان دهید که مشتقات جزئی تابع زیر در مبدأ موجودند اما این تابع در مبدأ پیوسته نیست:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

توجه ۱۱۷. اگر $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ هر دو در یک دیسک (یعنی درون یک دایره) به مرکز (a, b) پیوسته باشند آنگاه f در نقطه‌ی (a, b) پیوسته است. در درسهای آینده خواهیم دید که تحت شرایط ذکر شده، حکم قوی‌تر برقرار است و در واقع تابع مورد نظر دیفرانسیل پذیر است. (قضیه کِلِرو)

تمرین ۳۱.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^6} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

نشان دهید که f_x و f_y در تمام نقاط موجودند و در $(0, 0)$ پیوسته نیستند. نشان دهید که f در مبدأ پیوسته نیست.

۵.۳ مشتقات جزئی مراتب بالاتر برای تابع $z = f(x, y)$

گفتیم که اگر $z = f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد، آنگاه $\partial z / \partial x$ و $\partial z / \partial y$ نیز توابعی دو متغیره هستند. پس می‌توان مشتقات جزئی آنها را نیز در نظر گرفت:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{11} \quad ۱.$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \quad ۲. \text{ (به ترتیب نوشتن متغیرها توجه کنید)}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \quad ۳.$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{22} \quad ۴.$$

مثال ۱۱۸. مشتقات f_{xy} و f_{yx} را در یک نقطه دلخواه (a, b) بیابید.

$$f(x, y) = x^3 + x^2 y^2 - 2y^2$$

پاسخ.

$$f_x = 3x^2 + 2xy^2 - 0$$

$$f_y = 2x^2 y - 4y$$

$$f_{xy}(a, b) = 6ab^2 = f_{yx}$$

□

در مثال بالا مشاهده کردید که f_{xy} با f_{yx} برابر شد. هر چند این امر عجیب به نظر می‌رسد، ولی تحت شرایطی همواره برقرار است. در جلسه‌ی بعد در این باره صحبت خواهیم کرد.

۱.۵.۳ تمرین

تمرین ۳۲. $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial x}$ را بیابید.

$$f(x, y) = \frac{ax+by}{cx+dy} \quad ۱.$$

$$f(x, y) = (x^2 - 1)(y + 2) \quad ۲.$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x+y} \quad ۳.$$

$$f(x, y) = e^{xy} \ln y \quad ۴.$$

$$f(x, y) = \int_x^y g(t) dt \quad \text{که در آن } g(t) \text{ تابعی پیوسته است.} \quad ۵.$$

تمرین ۳۳. تمام مشتقات جزئی دوم را بیابید.

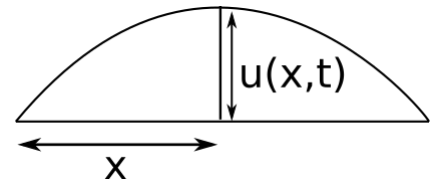
$$f(x, y) = x^2 y + \cos y + y \sin x \quad ۱.$$

$$h(x, y) = x e^y + y + 1 \quad ۲.$$

$$s(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad ۳.$$

تمرین ۳۴. معادله‌ی موج به صورت کلی زیر است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



در معادله‌ی بالا، ضریب a به جنس طناب بستگی دارد. نشان دهید که تابع $u(x, t) = \sin(x - at)$ در معادله‌ی موج صدق می‌کند.

تمرین ۳۵. برای تابعی که در تمرین ۲۷ آمده است $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ را محاسبه کنید.

تمرین ۳۶. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در این صورت $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$ را بیابید.

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2}{h^2}}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(h, 0) - f_x(0, 0)}{h} = \dots$$

□

ادامه دادن راه حل بالا را به عهده‌ی شما نهاده‌ایم.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{تمرین ۳۷. فرض کنید}$$

نشان دهید که $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

پاسخ. در نقطه‌ی $(x, y) = (0, 0)$ مشتق جزئی را باید با استفاده از تعریف محاسبه کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

حال در نقاط $(x, y) \neq (0, 0)$ داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(y(x^2 - y^2) + 2x^2y)(x^2 + y^2) - 2x^2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

پس

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{(y(x^\gamma - y^\gamma) + \gamma x^\gamma y)(x^\gamma + y^\gamma) - \gamma x^\gamma y(x^\gamma - y^\gamma)}{(x^\gamma + y^\gamma)^\gamma} & (x, y) \neq (\cdot, \cdot) \\ \cdot & (x, y) = (\cdot, \cdot) \end{cases}$$

پس:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (\cdot, \cdot) = \lim_{h \rightarrow \cdot} \frac{f_x(\cdot, \cdot + h) - f_x(\cdot, \cdot)}{h} = \lim_{h \rightarrow \cdot} \frac{h(-h^\gamma)h^\gamma}{h^5} = -1$$

□

ادامه‌ی حل سوال به عهده‌ی شما.

$$\text{تمرین ۳۸. تابع } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^\gamma \sin y}{x^\gamma + y^\gamma} & (x, y) \neq (\cdot, \cdot) \\ \cdot & (x, y) = (\cdot, \cdot) \end{cases} \text{ مفروض است.}$$

(آ). نشان دهید f در $(\cdot, \cdot)$ پیوسته است.

پاسخ. باید نشان دهیم که

$$\forall \epsilon > \cdot \quad \exists \delta > \cdot \quad \forall (x, y) \in \text{Dom} \quad \left(\cdot < \sqrt{x^\gamma + y^\gamma} < \delta \rightarrow |f(x, y) - \cdot| < \epsilon \right)$$

محاسبات:

$$\left| \frac{x^\gamma \sin y}{x^\gamma + y^\gamma} \right| \leq \frac{x^\gamma |\sin y|}{x^\gamma + y^\gamma}$$

می‌دانیم که $\frac{x^\gamma}{x^\gamma + y^\gamma} \leq 1$ پس داریم:

$$\frac{x^\gamma |\sin y|}{x^\gamma + y^\gamma} \leq |\sin y|$$

همچنین می‌دانیم $|\sin y| \leq |y|$ پس داریم

$$|\sin y| \leq |y| \leq \sqrt{x^\gamma + y^\gamma}$$

(اتمام محاسبات و ادامه‌ی پاسخ:)

□

اگر $\delta < \epsilon$ آنگاه اگر $\cdot < \sqrt{x^\gamma + y^\gamma} < \delta$ آنگاه $|f(x, y) - \cdot| < \epsilon$

(ب). $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ را در تمام نقاط محاسبه کنید.

پاسخ. در نقاط $(x, y) \neq (\cdot, \cdot)$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sin y (\gamma x) (x^\gamma + y^\gamma) - (\gamma x) x^\gamma \sin y}{(x^\gamma + y^\gamma)^\gamma}$$

محاسبه‌ی $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ در نقطه‌ی $(\cdot, \cdot)$ نیز به صورت زیر است

$$\lim_{h \rightarrow \cdot} \frac{f(\cdot + h, \cdot) - f(\cdot, \cdot)}{h} = \lim_{h \rightarrow \cdot} \frac{\cdot - \cdot}{h} = \cdot$$

پس داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin y(x^2+y^2)-(x^2y)\sin y}{(x^2+y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

□

(ج). $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0+h, 0) - f_x(0, 0)}{h} = \dots$$

□

تمرین ۳۹. برای تابع زیر، $f_{xy}(0, 0)$ و $f_{yx}(0, 0)$ را محاسبه کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

۶.۳ قضیه کِلِرو

در مثالهای قبلی، برای یک تابع خاص f دیدیم که $f_{xy} = f_{yx}$. در زیر قضیه‌ای آورده‌ایم که شرطی کافی برای رویداد بالا به دست می‌دهد:

قضیه ۱۱۹. فرض کنید تابع f در یک دیسک D به مرکز (a, b) تعریف شده باشد. اگر f_{yx} و f_{xy} هر دو در این دیسک پیوسته باشند آنگاه

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

قضیه‌ی بالا با چند بار به کارگیری قضیه‌ی مقدار میانگین ثابت می‌شود. اثبات آن را از کتاب استوارت برای دانشجوی علاقه‌مند گذاشته‌ایم.

اثبات. قرار دهید:

$$g(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$$

و

$$h(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$$

مشاهده کنید که

$$g(a+h) - g(a) = h(b+h) - h(b)$$

حال دو طرف عبارت بالا را به طریق دیگری محاسبه کنید:

$$g(a+h) - g(a) = g'(c)h = (f_x(c, b+h) - f_x(c, b))h = (f_{xy}(c, t))h^2$$

مشابهها

$$h(b+h) - h(b) = h'(d)h = (f_y(a+h, d) - f_y(a, d))h = (f_{yx}(t', d))h^2$$

حال دو حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(b+h)-h(b)}{h^2}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h^2}$ را محاسبه کنید و از پیوستگی f_{xy} و f_{yx} و برابری این دو حد،

□

به نتیجه مورد نظر برسید.

Clairaut's Theorem Suppose f is defined on a disk D that contains the point (a, b) . If the functions f_{xy} and f_{yx} are both continuous on D , then $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

PROOF For small values of h , $h \neq 0$, consider the difference

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a+h, b)] - [f(a, b+h) - f(a, b)]$$

Notice that if we let $g(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$, then

$$\Delta(h) = g(a+h) - g(a)$$

By the Mean Value Theorem, there is a number c between a and $a+h$ such that

$$g(a+h) - g(a) = g'(c)h = h[f_x(c, b+h) - f_x(c, b)]$$

Applying the Mean Value Theorem again, this time to f_x , we get a number d between b and $b+h$ such that

$$f_x(c, b+h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Combining these equations, we obtain

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

If $h \rightarrow 0$, then $(c, d) \rightarrow (a, b)$, so the continuity of f_{xy} at (a, b) gives

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{(c, d) \rightarrow (a, b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b)$$

Similarly, by writing

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a, b+h)] - [f(a+h, b) - f(a, b)]$$

and using the Mean Value Theorem twice and the continuity of f_{yx} at (a, b) , we obtain

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

It follows that $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. ■

تمرین ۴۰. در مثال‌های زیر بررسی کنید که آیا محاسبه‌ی f_{xy} آسان‌تر است یا f_{yx} ؟

۱. $x \sin y + e^y$

۲. $x \ln(xy)$

۳. $\frac{1}{x}$

مثال ۱۲۰ (مثال نقض برای قضیه‌ی بالا). در مثال زیر می‌بینیم که اگر شرایط قضیه‌ی بالا برقرار نباشند، آنگاه حکم آن نیز برقرار نیست. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^r y - x y^r}{x^r + y^r} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

داریم

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^r y - y^r)(x^r + y^r) - (x^r y - x y^r)(r x)}{(x^r + y^r)^r} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

روش محاسبه‌ی $f_x(0, 0)$:

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \\ f_{xy}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, 0 + h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-h^r)(h^r)}{h^\delta} = -1 \end{aligned}$$

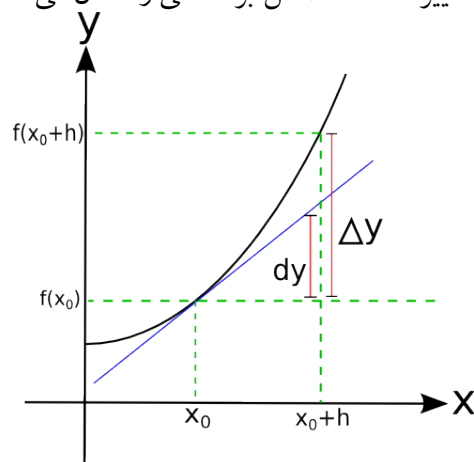
تمرین ۴۱. نشان دهید که $f_{yx}(0, 0) = 1$

پس در بالا $f_{yx}(0, 0) = 1$ و $f_{xy}(0, 0) = -1$

تمرین ۴۲. نشان دهید که این مشاهده قضیه‌ی بالا را نقض نمی‌کند.

۷.۳ صفحه‌ی مماس

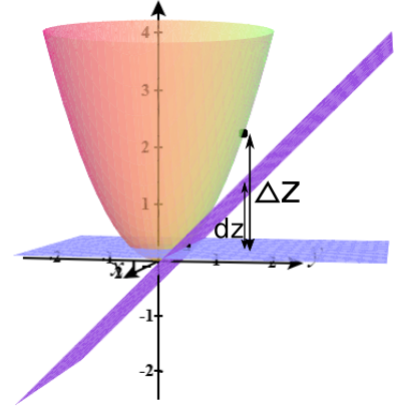
در جلسات آینده قرار است مفهوم دیفرانسیل کلّی را برای یک تابع دو متغیره تعریف کنیم. این مفهوم ارتباط تنگاتنگی با مفهوم صفحه‌ی مماس دارد. این ارتباط، البته دور از انتظار نیست. زیرا در حالت تک‌متغیره نیز، دیفرانسیل یک تابع، تغییرات خط مماس بر منحنی را نشان می‌داد:



$$\Delta y \approx dy = f'(x_0)h$$

$$y - y_0 \approx f'(x_0)(x - x_0)$$

در حالت دو متغیره، قرار است دیفرانسیل، نمایانگر تغییرات صفحه‌ی مماس باشد:



$$\Delta z \approx dz$$

در درسهای آینده، dz را تعریف خواهیم کرد. فعلاً در این جلسه به معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر یک رویه می‌پردازیم:

قضیه ۱۲۱. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) دارای معادله زیر است:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

مشاهده ۱۲۲. می‌دانیم معادله‌ی صفحه به صورت $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$ است که آن را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

توجه ۱۲۳. بنا به قضیه‌ی بالا، بردار نرمال صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی (x_0, y_0) برابر است با

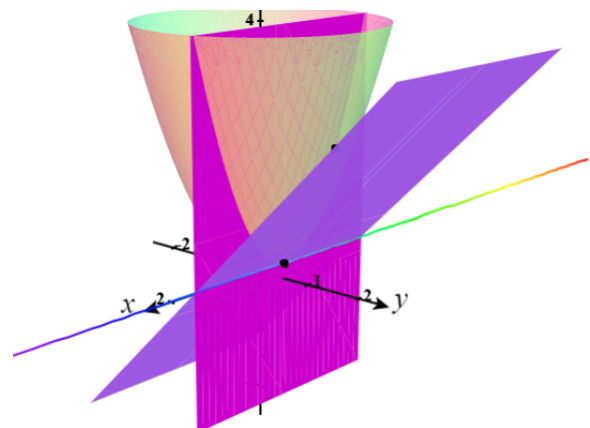
$$(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$$

اثبات قضیه. با توجه به مشاهده‌ی بالا می‌دانیم که معادله‌ی صفحه‌ی مماس به صورت زیر است:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

محاسبه‌ی A : قرار دهید $y = y_0$. اشتراک صفحه‌ی مماس با صفحه‌ی $y = y_0$ خط مماس بر منحنی ایجاد شده از اشتراک رویه با صفحه‌ی $y = y_0$ است. معادله‌ی خط مماس مورد نظر برابر است با

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0)$$



پس داریم

$$A = f_x(x_0, y_0)$$

به طور مشابه

$$B = f_y(x_0, y_0)$$

□

توجه کنید که صفحه‌ی مماس بر یک رویه در نقطه‌ی (x_0, y_0) در واقع شامل خطوط مماس (در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0)) بر منحنی‌هایی است که از اشتراک رویه با صفحات گذرنده از نقطه‌ی $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ایجاد می‌شوند. ثابت کردیم که ^۱ معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) به صورت زیر است:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

مثال ۱۲۴. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر سهمی‌وار بیضوی $z = x^2 + y^2$ را در نقطه‌ی $(1, 1, 2)$ بنویسید.

پاسخ.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2x|_{x=1} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2y|_{y=1} = 2$$

$$z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$$

□

توجه ۱۲۵. صفحه‌ی به معادله‌ی $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ در واقع تقریبی خطی برای تابع $z = f(x, y)$ حول نقطه‌ی (x_0, y_0) است. منظور از یک تقریب خطی، تابعی است به صورت $ax + by$ در واقع هدفمان در بحث دیفرانسیل‌پذیری این است که تقریبی به صورت $ax + by$ برای یک تابع $f(x, y)$ پیدا کنیم.

سوال ۱۲۶. آیا تقریب خطی بالا همواره تقریب مناسبی برای مقادیر تابع است؟

مثال ۱۲۷.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

تمرین ۴۳. نشان دهید که f_x و f_y در نقطه‌ی $(0, 0)$ پیوسته نیستند و

$$f_x(0, 0) = 0$$

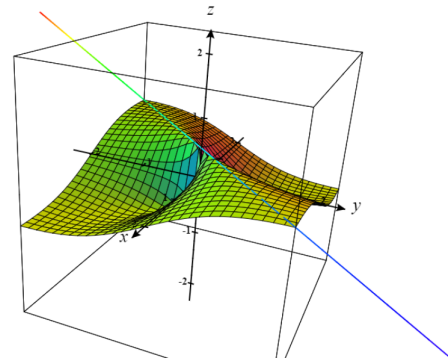
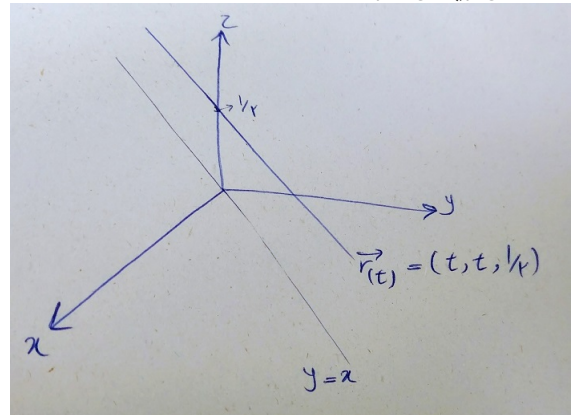
$$f_y(0, 0) = 0$$

^۱ زحمت تایپ جزوه‌ی این جلسه را خانم شیرجری کشیده‌اند.

پس معادله‌ی (صفحه‌ی مماس) بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$z = 0.$$

صفحه‌ی بالا تقریب مناسبی برای مقادیر تابع نیست؛ زیرا روی روی خط $x = y$ مقدار تابع برابر است با $\frac{1}{4}$ و با این صفحه فاصله‌ی زیادی دارد.



در واقع صفحه‌ی مماس در صورتی تقریبی مناسب برای تابع است، که تابع دیفرانسیل‌پذیر باشد.

تعریف ۱۲۸ (غیررسمی). اگر تقریب خطی یاد شده تقریب مناسبی برای مقادیر تابع حول نقطه‌ی (x_0, y_0) باشد، می‌گوییم تابع مورد نظر در نقطه‌ی (x_0, y_0) دیفرانسیل‌پذیر است.

در فصل بعدی به بررسی دقیق‌تر این گفته خواهیم پرداخت.

فصل ۴

دیفرانسیل پذیری

۱.۴ مقدمه

پیش از آنکه دیفرانسیل پذیری توابع دو متغیره را توضیح دهیم، مفهوم دیفرانسیل پذیری توابع تک متغیره را مرور می کنیم. فرض کنید

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

یک تابع تک متغیره باشد. در ریاضی ۱ دیدیم که حد زیر (در صورت وجود) مشتق تابع را به دست می دهد:

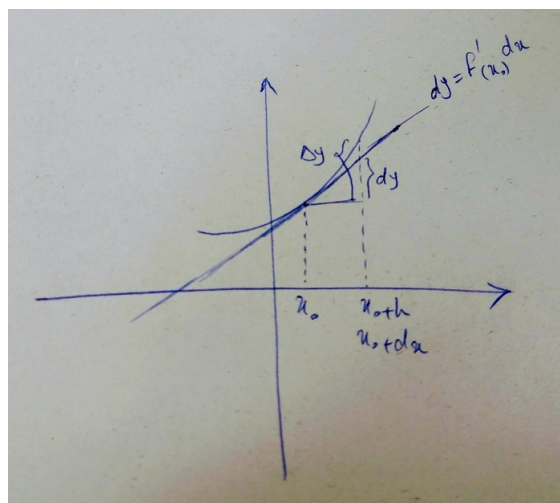
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

همچنین گفتیم که اگر $f'(x_0)$ موجود باشد آنگاه $dy = f'(x_0)dx$ دیفرانسیل تابع نامیده می شود. گفتیم که dy در واقع تقریبی برای Δy است؛ پس

$$y - y_0 \approx dy = f'(x_0)(x - x_0)$$

توجه کنید که معادله ی خط مماس بر تابع در نقطه ی x_0 به صورت زیر است (به شباهت دیفرانسیل و معادله ی این خط مماس توجه کنید).

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$



تعریف دقیق دیفرانسیل پذیری برای توابع تک متغیره بدین صورت است: تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نقطه‌ی $x_0 \in D_f$ دیفرانسیل پذیر می‌خوانیم هرگاه $\alpha \in \mathbb{R}$ به گونه‌ای موجود باشد که:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \alpha h}{h} = 0$$

در واقع وقتی تابع دیفرانسیل پذیر است، تابع خطی αh شبیه به تابع $f(x_0 + h) - f(x_0)$ می‌شود. بیابید تابع صورت را $\epsilon(h)$ بخوانیم؛ داریم

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - \alpha h = h\epsilon(h)$$

پس

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h\epsilon(h) + \alpha h$$

دقت کنید که ^۱

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$$

اگر f دیفرانسیل پذیر باشد، می‌توان ثابت کرد که $\alpha = f'(x_0)$. پس

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0$$

۱.۱.۴ تعریف دقیق دیفرانسیل پذیری (برای توابع دو متغیره)

حال می‌خواهیم مفهوم دیفرانسیل پذیری را به توابع دو متغیره تعمیم بدهیم. در بالا گفتیم که تابع αh تقریبی برای $f(x_0 + h) - f(x_0)$ است و دیفرانسیل به صورت αdx است. در حالت دو متغیره، تقریب خطی ما برای تابع به صورت $\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$ است.

تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ را در نقطه‌ی (x_0, y_0) دیفرانسیل پذیر می‌خوانیم هرگاه $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ چنان موجود باشند که

$$\star \quad \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - \alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

مطابق حالت تک متغیره قرار دهید:

$$\epsilon(h_1, h_2) = \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - \alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

پس تابع f دیفرانسیل پذیر است هرگاه $\alpha_1, \alpha_2, \epsilon(h_1, h_2)$ موجود باشند به طوری که

$$\Rightarrow \epsilon(h_1, h_2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2} + f(x_0, y_0) + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$$

$$\text{و } \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \epsilon(h_1, h_2) = 0$$

^۱ معادله‌ی بالا در واقع قضیه‌ی نمو برای توابع تک متغیره است.

توجه ۱۲۹. اگر f تابعی دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

و می نویسیم:

$$f'(x_0, y_0) = (\alpha_1, \alpha_2).$$

برای اثبات این نکته کافیت حد اصلی بالا (*) را روی مسیرهای $(h, 0)$ و $(0, h)$ محاسبه کنیم.

توجه ۱۳۰. تنها وجود $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ باعث دیفرانسیل پذیری نمی شود و باید حد نوشته شده در تعریف اصلی، صفر شود.

توجه ۱۳۱. اگر f در نقطه (x_0, y_0) دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه در این نقطه پیوسته است.

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0)$$

اثبات به عهده ی شما (از حد نوشته شده در تعریف * کمک بگیرید)

مثال ۱۳۲.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

در این مثال f_x و f_y در $(0, 0)$ موجودند، ولی تابع در این نقطه پیوسته نیست، پس در این نقطه دیفرانسیل پذیر نیست.

مثال ۱۳۳. نشان دهید که تابع زیر در $(0, 0)$ دیفرانسیل پذیر است.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

پاسخ. مشتقات جزئی:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(0 + h_1, 0) - f(0, 0)}{h_1} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h_2) - f(0, 0)}{h_2} = 0$$

حد دیفرانسیل پذیری:

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - \alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

توجه ۱۳۴. اگر تابع f دیفرانسیل پذیر باشد، داریم:

$$\alpha_1 = f_x$$

$$\alpha_2 = f_y$$

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h_1 - f_y(x_0, y_0)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

پس در مورد تابع بالا کافی است ثابت کنیم که

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - (0)h_1 - (0)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

یعنی باید ثابت کنیم که

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{h_1 h_2 (h_1^2 - h_2^2)}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

باید نشان داد که

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (h_1, h_2) \left(0 < \sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \delta \rightarrow \left| \frac{h_1 h_2 (h_1^2 - h_2^2)}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{5}{2}}} \right| < \epsilon \right)$$

چرک نویس:

با توجه به $|h_1^2 - h_2^2| \leq |h_1^2 + h_2^2|$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{|h_1 h_2| |h_1^2 - h_2^2|}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{5}{2}}} &\leq \frac{\sqrt{h_1} \sqrt{h_2} |h_1^2 + h_2^2|}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} (h_1^2 + h_2^2)}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \end{aligned}$$

با توجه به محاسبات بالا، برای هر $\epsilon > 0$ اگر $\delta = \epsilon$ آنگاه اگر

$$\sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \delta$$

آنگاه

$$\frac{h_1 h_2 (h_1^2 - h_2^2)}{\sqrt{(h_1^2 + h_2^2)^5}} \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} < \delta = \epsilon$$

□

قضیه ۱۳۵ (قضیه‌ی نِمو^۲).

تابع $f(x, y)$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) دیفرانسیل پذیر است اگر و تنها اگر توابع $\epsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ و $\epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ موجود باشند بطوری که در یک همسایگی نقطه‌ی (x_0, y_0) بتوان نوشت:

$$\underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}_{=\Delta z} = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) + \epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$$

و دو شرط زیر نیز برقرار باشند:

$$\begin{aligned} \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) &= 0 \\ \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \epsilon_2(\Delta x, \Delta y) &= 0 \end{aligned}$$

تمرین ۴۴. مثال قبلی را با استفاده از قضیه‌ی نمو حل کنید.

تمرین ۴۵. قضیه‌ی نمو را ثابت کنید. (توابع ϵ_1 و ϵ_2 را به راحتی می‌توانید با نوشتن تعریف مشتق‌پذیری به دست آورید)

²Increment

۲.۴ شرطی کافی برای مشتق پذیری

برای بررسی دیفرانسیل پذیری لزوماً از تعاریف استفاده نمی‌کنیم. در قضیه‌ی زیر شرطی کافی برای دیفرانسیل پذیر بودن بیان کرده‌ایم:

قضیه ۱۳۶. اگر f_x و f_y هردو در یک همسایگی نقطه‌ی (x_0, y_0) پیوسته باشند، آنگاه f در آن نقطه دیفرانسیل پذیر است.

Section 14.4

8 Theorem If the partial derivatives f_x and f_y exist near (a, b) and are continuous at (a, b) , then f is differentiable at (a, b) .

PROOF Let

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

According to (14.4.7), to prove that f is differentiable at (a, b) we have to show that we can write Δz in the form

$$\Delta z = f_x(a, b) \Delta x + f_y(a, b) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

where ε_1 and $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ as $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

Referring to Figure 4, we write

$$\Delta z = [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)] + [f(a, b + \Delta y) - f(a, b)]$$

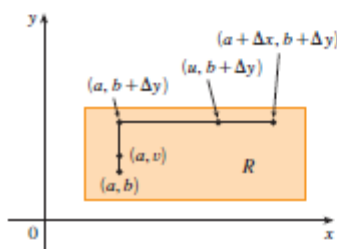


FIGURE 4

Observe that the function of a single variable

$$g(x) = f(x, b + \Delta y)$$

is defined on the interval $[a, a + \Delta x]$ and $g'(x) = f_x(x, b + \Delta y)$. If we apply the Mean Value Theorem to g , we get

$$g(a + \Delta x) - g(a) = g'(u) \Delta x$$

where u is some number between a and $a + \Delta x$. In terms of f , this equation becomes

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y) = f_x(u, b + \Delta y) \Delta x$$

This gives us an expression for the first part of the right side of Equation 1. For the second part we let $h(y) = f(a, y)$. Then h is a function of a single variable defined on the interval $[b, b + \Delta y]$ and $h'(y) = f_y(a, y)$. A second application of the Mean Value Theorem then gives

$$h(b + \Delta y) - h(b) = h'(v) \Delta y$$

where v is some number between b and $b + \Delta y$. In terms of f , this becomes

$$f(a, b + \Delta y) - f(a, b) = f_y(a, v) \Delta y$$

We now substitute these expressions into Equation 1 and obtain

$$\begin{aligned}\Delta z &= f_x(u, b + \Delta y) \Delta x + f_y(a, v) \Delta y \\ &= f_x(a, b) \Delta x + [f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)] \Delta x + f_y(a, b) \Delta y \\ &\quad + [f_y(a, v) - f_y(a, b)] \Delta y \\ &= f_x(a, b) \Delta x + f_y(a, b) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y\end{aligned}$$

where

$$\varepsilon_1 = f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)$$

$$\varepsilon_2 = f_y(a, v) - f_y(a, b)$$

Since $(u, b + \Delta y) \rightarrow (a, b)$ and $(a, v) \rightarrow (a, b)$ as $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ and since f_x and f_y are continuous at (a, b) , we see that $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ and $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ as $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

Therefore f is differentiable at (a, b) . ■

مثال ۱۳۷. نشان دهید که تابع $f(x, y) = xe^{xy}$ در نقطه $(1, 0)$ دیفرانسیل پذیر است و یک تقریب خطی برای این تابع در آن همسایگی بیابید.

پاسخ.

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$f_y(x, y) = x^2 e^{xy}$$

توابع بالا در تمام نقاط از جمله نقطه $(1, 0)$ پیوسته اند. پس تابع مورد نظر دیفرانسیل پذیر است. تقریب خطی:

$$\Delta z \approx f_x(1, 0) \Delta x + f_y(1, 0) \Delta y$$

$$f_x(1, 0) = 1 + 0 = 1$$

$$f_y(1, 0) = 1$$

$$\Delta z \approx \Delta x + \Delta y \Rightarrow f(1 + \Delta x, 0 + \Delta y) \approx f(1, 0) + \Delta x + \Delta y = 1 + \Delta x + \Delta y$$

پس می توان نوشت:

$$f(x, y) \approx 1 + (x - 1) + (y) = x + y$$

□

تمرین ۴۶. تابع f در زیر را در نظر بگیرید. نشان دهید که این تابع در مبدأ مشتق پذیر است اما f_x و f_y در مبدأ پیوسته نیستند. چه نتیجه ای می گیرید؟

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

تمرین ۴۷. نشان دهید که تابع های $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ در مبدأ مشتق پذیر نیستند.

تمرین ۴۸. تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید این تابع در مبدأ پیوسته است، مشتقات جزئی آن در مبدأ موجودند، و این تابع در مبدأ مشتق پذیر نیست.

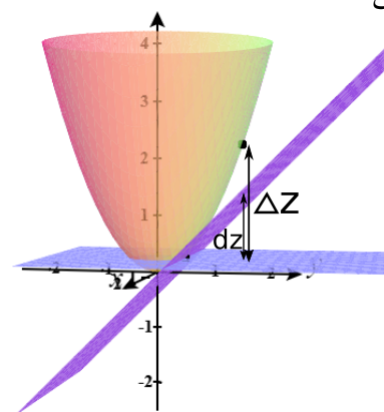
۳.۴ دیفرانسیل کلی یک تابع

تعریف ۱۳۸. اگر f دیفرانسیل پذیر باشد، دیفرانسیل کلی آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

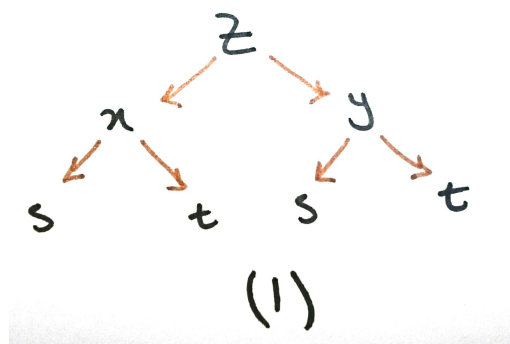
بنا به آنچه درباره‌ی معادله‌ی صفحه‌ی مماس گفتیم، دیفرانسیل کلی در واقع میزان تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس را نشان

می دهد:



۴.۴ قاعده‌ی زنجیره‌ای

فرض کنید z تابعی از x, y باشد و هر کدام از x, y نیز تابعی از متغیرهای s, t باشند. برای محاسبه مشتق جزئی z بر حسب s, t به صورت زیر عمل می کنیم:



مثلاً برای محاسبه‌ی مشتق جزئی بر حسب s باید تمام مسیرها از بالای درخت به سمت s طی شوند:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

مثال ۱۳۹. فرض کنید $z = f(x, y)$ مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته داشته باشد و

$$x = r^2 + s^2$$

$$y = 2rs$$

آنگاه $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

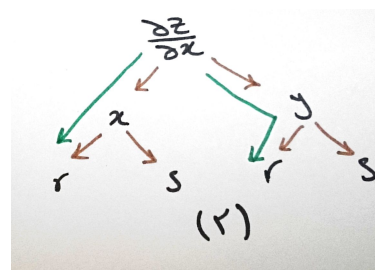
$$\frac{\partial z}{\partial r} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)(2r) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)(2s)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} (2r) + \frac{\partial z}{\partial y} (2s) \right) =$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} 2r \right)}_A + \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial y} 2s \right)}_B$$

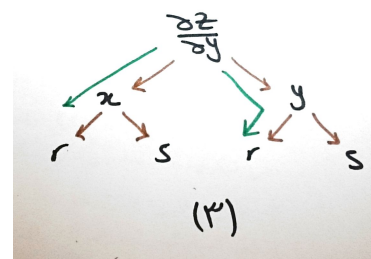
$$A = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) 2r + 2 \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \times \frac{\partial y}{\partial r} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \times (2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \times (2s) + 2 \frac{\partial z}{\partial x}$$



$$B = 2s \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 2s \times \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \times \frac{\partial y}{\partial r} \right) =$$

$$2s \times \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \times 2r + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \times 2s \right)$$



□

مفهوم دیفرانسیل پذیری را می توان به توابع سه متغیره نیز تعمیم داد و قواعد دیفرانسیل پذیری و قاعده ی زنجیره ای برای توابع سه متغیره نیز درستند.

$$\omega = f(x, y, z) \quad \omega : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega}{\partial z} dz$$

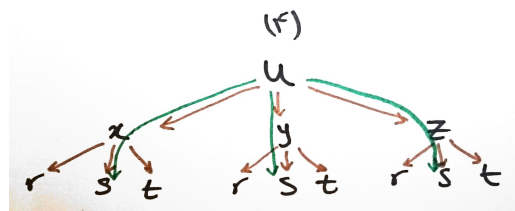
مثال ۱۴۰. با داشتن اطلاعات زیر، $\frac{\partial u}{\partial s}$ را محاسبه کنید:

$$u = x^2 y + y^2 z^2$$

$$x = r s e^t$$

$$y = r s^2 e^t$$

$$z = r^2 s \sin t$$



پاسخ.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = \dots$$

□

تمرین ۴۹. فرض کنید $f(x, y, z) = xy + z$ در حالی که $x = \cos(t)$ ، $y = \sin(t)$ و $z = t$. در این صورت $\frac{\partial f}{\partial t}$ را محاسبه کنید.

تمرین ۵۰. فرض کنید $f(x, y, z) = x + 2y + z^2$ در حالی که $x = \frac{r}{s}$ ، $y = r^2 + \ln s$ و $z = 2r^2$. در صورت $\frac{\partial f}{\partial r}$ و $\frac{\partial f}{\partial s}$ را محاسبه کنید.

تمرین ۵۱. فرض کنید $f(x, y) = x^2 + y^2$ در حالی که $x = r - s$ و $y = r + s$. در این صورت $\frac{\partial f}{\partial r}$ و $\frac{\partial f}{\partial s}$ را محاسبه کنید.

تمرین ۵۲. نشان دهید که هر تابع به صورت $w = f(s)$ که در آن $s = y + ax$ جوابی برای معادله دیفرانسیل زیر است:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = a \frac{\partial w}{\partial y}.$$

تمرین ۵۳. فرض کنید $f(u, v, w)$ و مشتقات جزئی آن پیوسته باشند و داشته باشیم $u = x - y$ و $v = y - z$ و $w = z - x$. نشان دهید $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

۵.۴ مشتق‌گیری ضمنی

فرض کنید که مقادیر y بر حسب x در طی یک معادله‌ی $F(x, y) = 0$ به طور ضمنی داده شده باشد. چنین معادله‌ای را می‌توان معادله‌ی یک منحنی تراز برای رویه‌ی $z = f(x, y)$ فرض کرد.

توجه ۱۴۱. $z = f(x, y)$ رویه است ولی $f(x, y) = k$ که یک عدد ثابت است، منحنی تراز رویه در ارتفاع k است.

فرض کنید که بدانیم که y تابعی از x است. پس داریم:

$$F(x, f(x)) = 0$$

داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y} \end{aligned}$$

قضیه ۱۴۲ (تابع ضمنی). فرض کنید F در یک دیسک شامل (a, b) تعریف شده باشد و $F(a, b) = 0$ و $F_y(a, b) \neq 0$ و F_x و F_y روی آن دیسک پیوسته باشند. آنگاه از معادله‌ی $F(x, y) = 0$ می‌توان y را به عنوان تابعی از x در یک همسایگی مناسب از a استخراج کرد و مشتق این تابع از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

قضیه ۱۴۳ (قضیه‌ی تابع ضمنی برای توابع سه متغیره). فرض کنید که تابع سه متغیره‌ی F در یک کره‌ی شامل نقطه‌ی (a, b, c) تعریف شده باشد و F_x, F_y, F_z هر سه در این کره پیوسته باشند و $F(a, b, c) = 0$ و $F_z(a, b, c) \neq 0$. آنگاه رابطه‌ی $F(x, y, z) = 0$ متغیر z را به صورت تابعی دیفرانسیل‌پذیر از x, y در یک همسایگی نقطه‌ی (a, b, c) به دست می‌دهد و برای این تابع داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \end{aligned}$$

دقت کنید که اهمیت قضیه‌ی تابع ضمنی در آن است که به ما می‌گوید چه زمانی می‌توانیم از یک رابطه‌ی ضمنی بین z, y, x متغیر z را به صورت یک تابع از دو متغیر دیگر استخراج کنیم.

مثال ۱۴۴. فرض کنید y تابعی از x باشد و $x^3 + y^3 = 6xy$ ؛ آنگاه $y'(x)$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^3 + y^3 - 6xy = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= 3x^2 - 6y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 6x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-3x^2 + 6y}{3y^2 - 6x} \end{aligned}$$

□

مثال ۱۴۵. $\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial z}{\partial x}$ را بیابید، با این فرض که

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1 = 0$$

پاسخ.

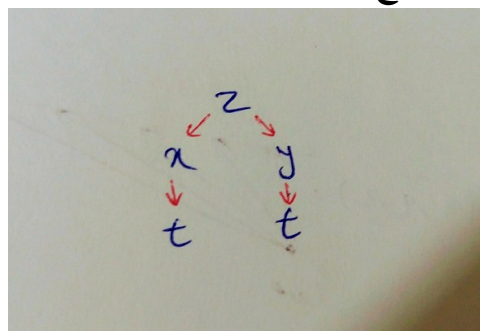
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-(3x^2 + 6yz)}{3z^2 + 6xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \dots$$

□

۶.۴ یادآوری فرمولها

مشتق تابع مرکب:



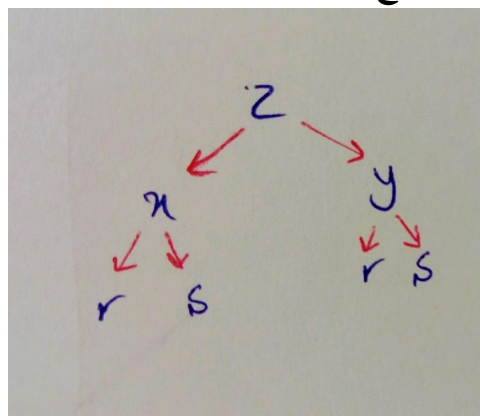
$$z = f(x, y)$$

$$y = h(t), \quad x = g(t)$$

$$z = f(g(t), h(t))$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

مشتق تابع مرکب (جزئی):



$$z = f(x, y)$$

$$x = g_1(r, t) \quad y = g_2(r, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

مشتق تابع ضمنی (دو متغیره):

اگر $F(x, y) = 0$ آنگاه:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

مشتق تابع ضمنی (سه متغیره):

اگر $F(x, y, z) = 0$ آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

۷.۴ حل چند تمرین

تمرین ۵۴. فرض کنید $f(x, y)$ تابعی مشتقپذیر باشد. اگر معادله $f(z - 3x, z - 2y) = 1$ را به عنوان تابعی مشتقپذیر از x و y مشخص کند، نشان دهید که

$$2 \frac{\partial z}{\partial x} + 3 \frac{\partial z}{\partial y} = 6$$

تمرین ۵۵. فرض کنید f تابعی مشتقپذیر باشد. اگر z به عنوان تابعی از x, y توسط رابطه‌ی ضمنی زیر داده شده باشد،

$$f(x + z, y + z) = 1$$

نشان دهید که

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -1$$

پاسخ.

$$g(x, y, z) = f(x + z, y + z) - 1 = 0$$

$$u = x + z, v = y + z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

□

تمرین ۵۶. فرض کنید $z = f(x, y)$ توسط معادله ضمنی $f(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{y}) = 1$ داده شده است. نشان دهید

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

پاسخ. قرار دهید $g(x, y, z) = f(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{y}) - 1 = 0$ داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}(-\frac{z}{x^2})}{\frac{\partial f}{\partial u} \frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{1}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial u}(-\frac{z}{y^2}) + \frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial u} \frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{1}{x}}$$

□

تمرین ۵۷. فرض کنید $z = f(\frac{x}{y})$. نشان دهید که $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

تمرین ۵۸. تابع f را همگن از درجه n می خوانیم هرگاه f مشتقات جزئی دوم پیوسته داشته باشد و

$$\forall t \quad f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

الف) نشان دهید که تابع $f(x, y) = x^2 y + 2xy^2 + 5y^3$ همگن از درجه ۳ است.

پاسخ.

$$f(x, y) = x^2 y + 2xy^2 + 5y^3$$

$$f(tx, ty) = t^3 (x^2 y + 2xy^2 + 5y^3)$$

$$f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$$

□

ب) اگر f همگن از درجه n باشد، نشان دهید که

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y)$$

پاسخ. از آنجا که f همگن است داریم:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

بنا به قاعده زنجیره ای:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y = nt^{n-1} f(x, y)$$

بنابراین با ضرب طرفین در t به عبارت مورد نظر خود می رسیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)tx + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)ty = nt^n f(x, y) = n f(tx, ty)$$

□

پاسخ.

$$g(x, y, z) = f(\underbrace{z - 3x}_u, \underbrace{z - 2y}_v) - 1 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{-(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x})}{\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z}} = \frac{-(\frac{\partial f}{\partial u}(-3) + \frac{\partial f}{\partial v}(0))}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{-(\frac{\partial f}{\partial v}(-2))}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}}$$

$$2 \frac{\partial z}{\partial x} + 3 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6(\frac{\partial f}{\partial u})}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}} + \frac{6(\frac{\partial f}{\partial v})}{\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}} = 6$$

□

تمرین ۵۹. فرض کنید $w = xy + yz + zx$ و $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ و $z = r\theta$ و $\frac{\partial w}{\partial r}$ را در $r = 2$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = (y + z) \cos \theta + (x + z) \sin \theta + (x + y) \theta$$

در نقطه‌ی $(r, \theta) = (2, \frac{\pi}{4})$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r}(2, \frac{\pi}{4}) &= (2 \sin \frac{\pi}{4} + \pi) \cos(\frac{\pi}{4}) + (2 \cos(\frac{\pi}{4}) + \pi) \sin(\frac{\pi}{4}) + (2 \cos(\frac{\pi}{4}) + 2 \sin(\frac{\pi}{4})) \frac{\pi}{4} \\ &= 2\pi \sin(\frac{\pi}{4}) = 2\pi \end{aligned}$$

□

تمرین ۶۰. گیریم که ضابطه‌ی ضمنی $y \cos x = x^2 + y^2$ میان x, y برقرار باشد. حاصل $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

پاسخ.

$$F(x, y) = y \cos x - x^2 - y^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -y \sin x - 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \cos x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin x + 2x}{\cos x - 2y}$$

□

تمرین ۶۱. فرض کنید که مقادیر x, y در رابطه‌ی زیر صدق کنند:

$$\tan^{-1}(x^2 y) = x + xy^2$$

حاصل $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه کنید.

تمرین ۶۲. فرض کنید z تابعی از x و y باشد و $yz + x \ln(y) = z^2$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$F(x, y, z) = yz + x \ln y - z^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = y - 2z, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \ln y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\ln y}{y - 2z}$$

□

تمرین ۶۳. اگر $\cos(xyz) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ آنگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-(xz \sin(xyz) + 2y)}{-xy \sin(xyz) - 2z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-(zy \sin(xyz) + 2x)}{-xy \sin(xyz) - 2z}$$

□

تمرین ۶۴. فرض کنید $f(x, y, z) = \varphi(x - y, y - z)$. نشان دهید که $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

تمرین ۶۵. فرض کنید z بر حسب x, y از رابطه‌ی ضمنی زیر حاصل شود:

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = z.$$

در این صورت $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را محاسبه کنید.

تمرین ۶۶. فرض کنید $z = f(xyz)$ که در آن f تابعی مشتق‌پذیر است. نشان دهید $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

تمرین ۶۷. فرض کنید $w = f\left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right)$. نشان دهید $x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} = 0$.

تمرین ۶۸. همان تمرین بالا را برای ضابطه $w = f\left(\frac{x+y}{y}\right)$ انجام دهید.

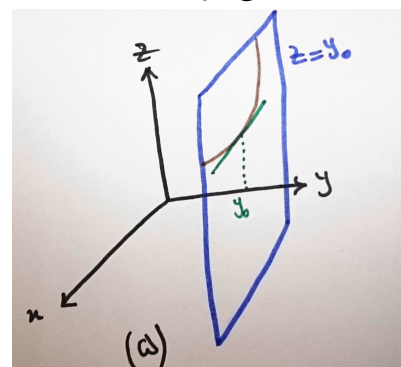
فصل ۵

مشتقات سوئی و ارتباط آنها با دیفرانسیل پذیری

گفتیم که برای محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial x}$ در نقطه‌ی $y = y_0$ کافی است از تابع زیر بر حسب x مشتق بگیریم:

$$z = f(x, y_0)$$

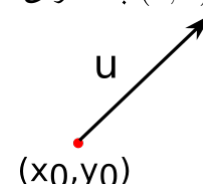
از لحاظ هندسی نیز عبارت بالا را به صورت زیر تحلیل کردیم:



مشتق مورد نظر از عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\overbrace{(x_0, y_0) + h(1, 0)}) - f(x_0, y_0)}{h}$$

بنا به عبارتی که در آکولاد بالائی نوشته‌ایم، برای محاسبه‌ی مشتق جزئی بر حسب x از نقطه‌ی (x_0, y_0) در جهت بردار $(1, 0)$ به اندازه‌ی h دور شده‌ایم و تغییرات تابع را اندازه‌گیری کرده‌ایم:



در واقع از یک تابع داده شده می‌توان در جهت هر بردار دلخواهی مشتق گرفت:

فرض کنید $\vec{u} = (a, b)$ یک بردار یکه باشد. مشتق سویی تابع $f(x, y)$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) در جهت بردار $\vec{u}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} = D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$$

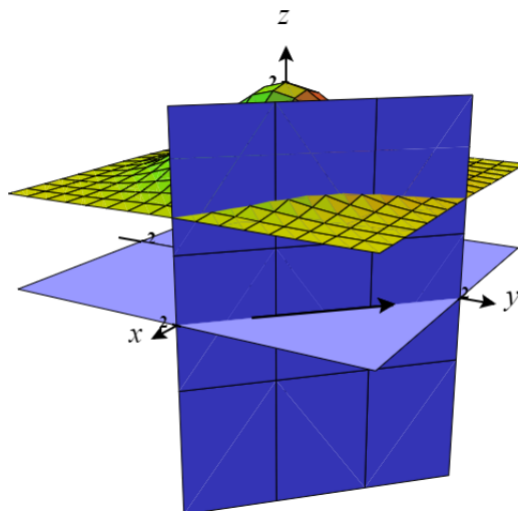
به طور خاص اگر $\vec{u} = (1, 0)$ آنگاه

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0)$$

مشابهاً اگر $\vec{u} = (0, 1)$ آنگاه

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

مشتق سوئی در جهت بردار u را به صورت زیر تعبیر هندسی می‌کنیم: صفحه‌ی گذرنده از نقطه‌ی (x_0, y_0) در جهت بردار u و موازی محور z را رسم می‌کنیم و شیب خط مماس بر منحنی ایجاد شده در اشتراک این صفحه با رویه را حساب می‌کنیم:



با استفاده از مشتقات سوئی می‌توانیم به بررسی این نکته بپردازیم که تابع ما در جهت‌های مختلف، با چه نرخ تغییر می‌کند و در کدام جهت، سریعتر تغییر می‌کند.

گفتیم که مشتق سوئی یک تابع دو متغیره‌ی $f(x, y)$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) در جهت بردار یکه‌ی $u = (a, b)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

گفتیم که از لحاظ هندسی، محاسبه‌ی مشتق سوئی در جهت بردار یاد شده، یعنی در نظر گرفتن اشتراک رویه با صفحه‌ی زیر:

$$\begin{cases} y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

و محاسبه‌ی شیب خط مماس بر منحنی ایجاد شده در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) . نیز گفتیم که در جهت دو بردار زیر، مشتق‌های سوئی همان مشتق‌های جزئی هستند:

$$i = (1, 0) \quad D_i f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$j = (0, 1) \quad D_j f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

قضیه ۱۴۶. فرض کنید $z = f(x, y)$ تابعی دیفرانسیل پذیر بر حسب x و y باشد. آنگاه مشتق f در جهت هر بردار یکه $u = (a, b)$ موجود است و از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$u = (a, b) \quad D_u f(x., y.) = \frac{\partial f}{\partial x}(x., y.)a + \frac{\partial f}{\partial y}(x., y.)b$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x., y.), \frac{\partial f}{\partial y}(x., y.) \right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (a, b)$$

تمرینهای ۶۹ و ۷۷ را ببینید.

اثبات. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$g(h) = f(x. + ah, y. + bh)$$

داریم

$$g'(.) = \lim_{h \rightarrow .} \frac{g(h) - g(.)}{h} = \lim_{h \rightarrow .} \frac{f(x. + ah, y. + bh) - f(x., y.)}{h} = D_u f(x., y.)$$

اما از طرفی

$$g = f(x, y)$$

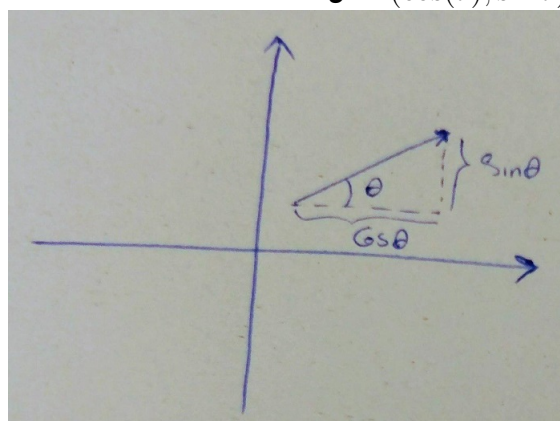
$$x = x. + ha, \quad y = y. + hb$$

پس

$$g'(.) = \frac{\partial f}{\partial x}(x., y.) + \frac{\partial f}{\partial y}(x., y.)b$$

□

توجه کنید که هر بردار یکه ی دوبعدی u را می توان با توجه به زاویه ای که با محور x می سازد به صورت $u = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ نشان داد:



در این صورت داریم:

$$D_u f = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

مثال ۱۴۷. فرض کنید $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ و فرض کنید که u برداری باشد که با محور x زاویه ی $\theta = \frac{\pi}{6}$ می سازد. مشتق تابع را در جهت این بردار محاسبه کنید.

پاسخ.

$$D_u f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\cos \frac{\pi}{6}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sin \frac{\pi}{6}) = (3x^2 - 3y)(\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-3x + 4y)(\frac{1}{2})$$

□

تمرین ۶۹. تابع $\begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

(آ). در چه جهت‌هایی مانند $\vec{u} = (a, b)$ در نقطه‌ی $(0, 0)$ تابع دارای مشتق سوئی است؟

پاسخ. فرض کنید $u = (a, b)$ یک بردار یکه باشد.

$$\vec{u} = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

داریم:

$$D_u f(x, y)|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h} \Rightarrow$$

$$D_u f(x, y)|_{(0,0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ah, bh)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(ah)(bh)}{h\sqrt{a^2 h^2 + b^2 h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{abh}{|h| \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{=1}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{abh}{|h|}$$

اگر $a \neq 0$ و $b \neq 0$ آنگاه حد بالا از یک طرف $+ab$ و از یک طرف $-ab$ است. پس تابع در سوی (a, b) مشتق‌پذیر نیست. برای این که حد بالا موجود باشد، باید یا $a \neq 0$ یا $b \neq 0$. یعنی تابع تنها در جهت بردارهای $i, -i, j, -j$ مشتق سوئی دارد.

□

(ب). آیا تابع در نقطه‌ی $(0, 0)$ مشتق‌پذیر است؟

پاسخ.

یادآوری ۱۴۸. اگر تابع f در نقطه‌ی (x_0, y_0) دیفرانسیل‌پذیر (مشتق‌پذیر) باشد، آنگاه f در نقطه‌ی (x_0, y_0) در هر جهتی مشتق‌پذیر است و مشتق سوئی f در جهت (a, b) با فرمول (*) محاسبه می‌شود.

$$(*) \quad D_{u=(a,b)} f(x, y)|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (a, b)$$

نشان می‌دهیم رابطه‌ی (*) در نقطه‌ی $(0, 0)$ برای تابع f برقرار نیست. پس این تابع مشتق‌پذیر نیست.

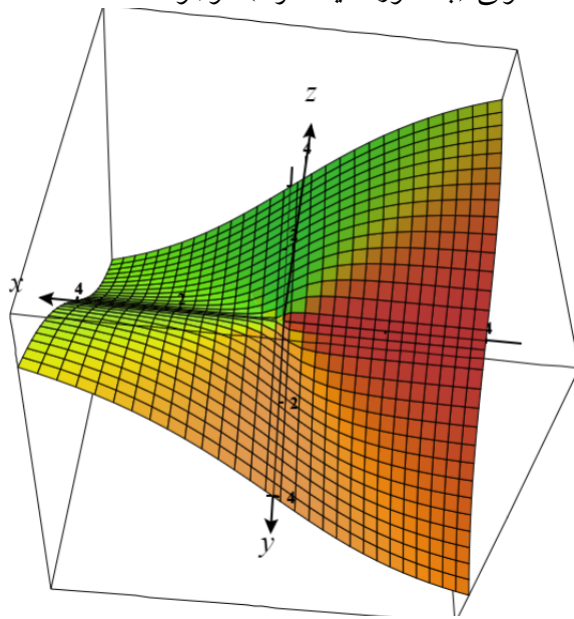
$$f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 0$$

اگر تابع در $(0, 0)$ مشتق‌پذیر باشد، داریم:

$$D_{u=(a,b)} f(x, y)|_{(0,0)} = 0a + 0b$$

می‌بینیم که اگر $a \neq 0$ و $b \neq 0$ این فرمول برقرار نیست، پس این تابع نیز مشتق‌پذیر نیست.

در زیر تصویر تابع بالا کشیده است. دقت کنید که صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی $(0, 0)$ قابل رسم نیست، هر چند مشتقات سوئی (به صورت یک‌طرفه) موجودند.



□

تمرین ۷۰. نشان دهید تابع زیر، در مبدأ، در تمام جهات مشتق سوئی برابر با صفر دارد اما پیوسته نیست:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

تمرین ۷۱. تابع $f(x, y) = \sqrt{xy}$ را در نظر بگیرید. مشتقات جزئی آن را در $(0, 0)$ حساب کنید. این تابع در $(0, 0)$ کدام جهات مشتق‌پذیر است؟ آیا این تابع در $(0, 0)$ دیفرانسیل‌پذیر است؟

تمرین ۷۲. تابع $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ را در نظر بگیرید. مشتقات جزئی آن را در $(0, 0)$ حساب کنید. این تابع در $(0, 0)$ کدام جهات مشتق‌پذیر است؟ آیا این تابع در $(0, 0)$ دیفرانسیل‌پذیر است؟

تمرین ۷۳. تابع زیر در مبدأ، در چه جهاتی مشتق‌پذیر است؟

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

تمرین ۷۴. تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. آیا رابطه $D_{(a,b)}f(0, 0) = f_x(0, 0)a + f_y(0, 0)b$ در تمام جهات برقرار است؟

تمرین ۷۵. مشتقات سوئی تابع زیر را در مبدأ محاسبه کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

۱.۵ بردار گرادیان

در طی جلسات گذشته حتماً متوجه شده‌اید که بردار $(f_x(x, y), f_y(x, y))$ در تعاریف مربوط به مشتق ظاهر می‌شود. این تابع برداری شایسته‌ی نامی است:

تعریف ۱۴۹. فرض کنید $f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \vec{j}$$

علامت ∇ نابلا خوانده می‌شود و نابلا کلمه‌ای یونانی به معنی ساز «چنگ» است. تابع بالا را تابع گرادیان می‌خوانیم. توجه کنید که گرادیان یک تابع برداری است. یعنی هر نقطه از $\mathbb{R}^2$ را به یک بردار در $\mathbb{R}^2$ می‌برد.

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\nabla(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

مثال ۱۵۰. اگر $f(x, y) = \sin x + e^{xy}$ آنگاه

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \vec{j} = (\cos x + ye^{xy}) \vec{i} + (xe^{xy}) \vec{j}$$

$$(x, y) \mapsto (\cos x + ye^{xy}) \vec{i} + (xe^{xy}) \vec{j}$$

توجه ۱۵۱. با استفاده از نماد نابلا می‌توان نوشت: (اگر $u = (a, b)$)

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot (a, b) = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b$$

مثال ۱۵۲. مشتق تابع $f(x, y) = x^2 y^3 - 4y$ را در جهت بردار $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ و در نقطه‌ی $(2, -1)$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}$$

$$\nabla f(x, y) = (2xy^3, 3x^2y^2 - 4)$$

$$\nabla f(2, -1) = (-4, 8)$$

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{29}} \vec{i} + \frac{5}{\sqrt{29}} \vec{j}$$

$$D_{\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right)} f(2, -1) = -4 \times \frac{2}{\sqrt{29}} + 8 \times \frac{5}{\sqrt{29}}$$

□

توجه ۱۵۳. فرض کنید $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی سه متغیره باشد. آنگاه $\nabla f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ دارای ضابطه‌ی زیر است:

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right)$$

همچنین اگر $\vec{u} = (a, b, c)$ یک بردار یکه باشد، تعریف می کنیم:

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

مثال ۱۵۴. مشتق تابع $f(x, y, z) = x \sin(yz)$ را در جهت بردار $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ در نقطه‌ی $(1, 3, 0)$ محاسبه کنید.

پاسخ.

$$\nabla f(x, y, z) = (\sin(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz))$$

$$\nabla f(1, 3, 0) = (\sin(0), 0 \times \cos(0), 3 \times \cos(0)) = (0, 0, 3)$$

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$$

$$D_u f(1, 3, 0) = (0, 0, 3) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = 0 + 0 - \frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{3}{\sqrt{6}}$$

□

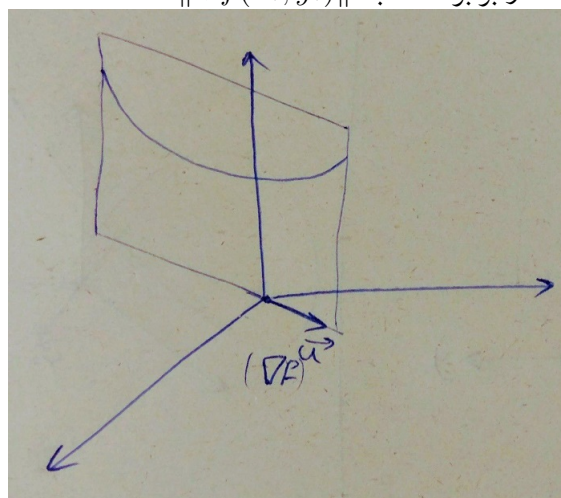
توجه ۱۵۵. فرض کنید f (دو متغیره یا سه متغیره) تابعی دیفرانسیل پذیر باشد. گفتیم که:

$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(x, y)\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta$$

(θ زاویه‌ی بین ∇f و $\vec{u}$ است.)

بنابراین حداکثر مقدار D_u زمانی روی می دهد که $\cos \theta = 1$ یعنی زمانی که $\vec{u}$ در جهت بردار گرادیان باشد؛ و این

مقدار برابر است با: $\|\nabla f(x, y)\|$



مثال ۱۵۶.

الف) نرخ تغییرات تابع $f(x, y) = xe^y$ را وقتی از نقطه‌ی $(2, 0)$ به سمت نقطه‌ی $(\frac{1}{2}, 2)$ حرکت می کنیم، بیابید.

ب) در کدام جهت تابع حداکثر نرخ تغییرات را دارد و این مقدار چقدر است؟

پاسخ.

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{2} - 2, 2 - 0\right) = \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\left(-\frac{3}{2}, 2\right)}{\sqrt{\frac{9}{4} + 4}} = \frac{\left(-\frac{3}{2}, 2\right)}{\frac{5}{2}} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\nabla f(x, y) = (e^{y^2}, x \cdot e^{y^2})$$

$$\nabla f(2, 0) = (1, 2)$$

$$D_u f(2, 0) = \nabla f \cdot \vec{u} = (1, 2) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{-3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

□

تابع در جهت بردار $(1, 2)$ حداکثر نرخ تغییرات را دارد و این مقدار برابر است با: $\sqrt{4+1}$.

تمرین ۷۶. فرض کنید که دما در هر نقطه توسط رابطه‌ی زیر داده شده باشد، در نقطه‌ی $(1, 1, -2)$ در کدام جهت دما سریعتر افزایش می‌یابد؟

$$T(x, y, z) = \frac{80}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$$

پاسخ. هر تابعی در هر نقطه در جهت بردار گرادیان حداکثر نرخ افزایش را داراست.

$$\nabla T = \left(\frac{-2x \times 80}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-2y \times 80}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-2z \times 80}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2} \right)$$

$$\nabla T(1, 1, -2) = \left(\frac{-160}{\sqrt{2}}, \frac{-160}{\sqrt{2}}, \frac{320}{\sqrt{2}} \right)$$

□

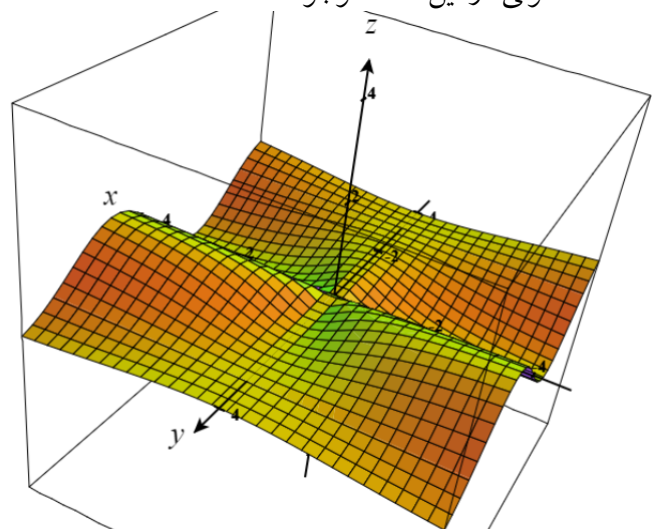
$$\text{تمرین ۷۷. تابع } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$f(x, y)$ مفروض است.

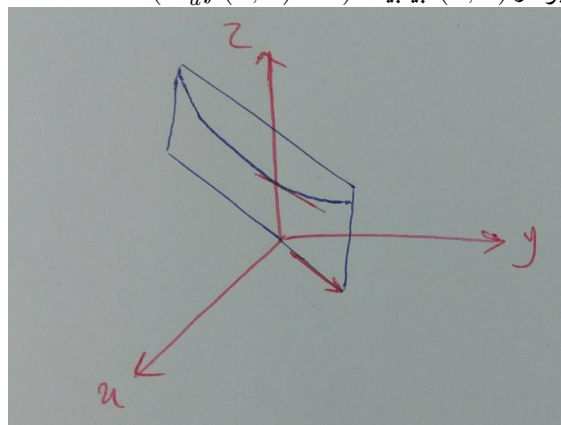
۱. در چه جهت‌هایی تابع بالا مشتق‌پذیر است؟

۲. آیا تابع در نقطه‌ی $(0, 0)$ مشتق‌پذیر است؟ (راهنمایی: رابطه‌ی $D_u f = \nabla f \cdot u$ برقرار نیست. پس مشتق‌پذیر نیست.)

در زیر نمودار این تابع را رسم کرده‌ایم. دقت کنید که صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی $(0, 0)$ قابل رسم نیست ولی همه‌ی مشتقات سوئی در این نقطه موجودند.



تمرین ۷۸. اگر $f(x, y) = xe^{xy}$ مشتقات جزئی مرتبه ی دوم پیوسته داشته باشد، مشتق سوئی دوم این تابع را در جهت بردار $(4, 6)$ بیابید. $(D_u^2 f(4, 6) = ?)$



توجه ۱۵۷. فرض کنید $f(x, y)$ و $u = (a, b)$ داریم:

$$D_u f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b$$

$$D_u^2 f(x, y) = D_u \left[\frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial y} b \right] = D_u \left(\frac{\partial f}{\partial x} a \right) + D_u \left(\frac{\partial f}{\partial y} b \right) =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} a^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} ab + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} ab + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} b^2 =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} a^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} ab + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} b^2$$

توجه کنید که در قسمت آخر از این فرض استفاده کرده ایم که مشتقات جزئی دوم تابع مورد نظر پیوسته اند.

با استفاده از توجه بالا تمرین را حل کنید. توجه کنید که باید بردار داده شده را تبدیل به یک بردار یکه کنید.

۲.۵ مرور

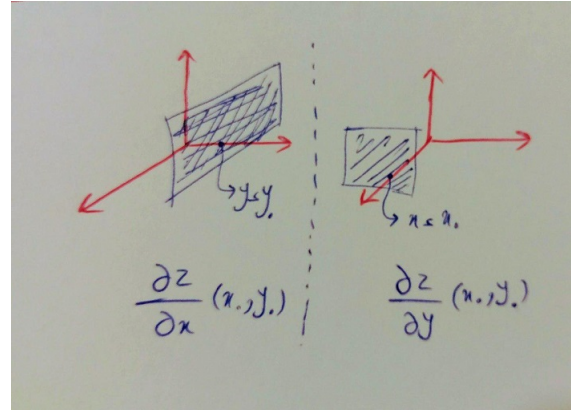
گفتیم که منظور از یک تابع دو متغیره، تابعی مانند $z = f(x, y)$ است از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$.

مشتقات ضمنی:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

در صورتی که حدهای بالا موجود باشند. مفاهیم بالا را به صورت زیر تعبیر هندسی کردیم.



وجود $\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial z}{\partial x}$ تضمین کننده‌ی دیفرانسیل پذیری و حتی پیوستگی نیست.

دیفرانسیل کلی تابع:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

گفتیم که دیفرانسیل کلی، از لحاظ هندسی، تغییر ارتفاع صفحه‌ی مماس را نشان می‌دهد. (با رسم تصویری، فرمول بالا را برای خود تعبیر کنید).

گرادیان:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

مشتق سوئی: نیز دیدیم که مشتق سوئی تابع در جهت بردار u به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

مشتق سوئی در جهت بردار گرادیان حداکثر می‌شود و حداکثر میزان تغییرات تابع در آن جهت برابر است با $|\nabla f|$ توجه کنید که اگر $z = f(h_1(x, y), h_2(x, y))$ آنگاه

$$\frac{\partial z}{\partial h_1}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}(h_1(x, y))$$

در واقع مشتق ضمنی بر حسب x یعنی مشتق ضمنی بر حسب مؤلفه‌ی اول تابع.

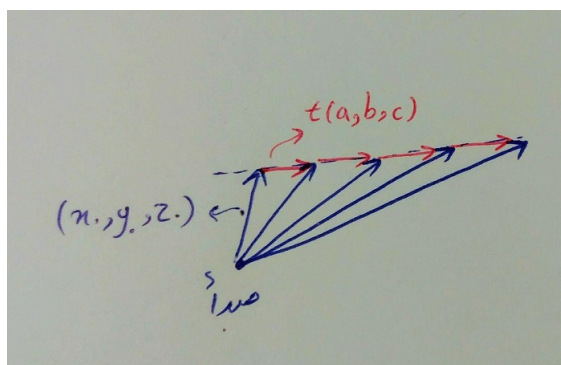
۳.۵ صحبتی بیشتر درباره منحنی‌های فضایی

فرض کنید $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک تابع برداری باشد. چنین تابعی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

هر تابع به صورت بالا، یک «منحنی فضایی» را پارامتر بندی می‌کند. یک نمونه از منحنی‌های فضایی، خط مستقیم است:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$$

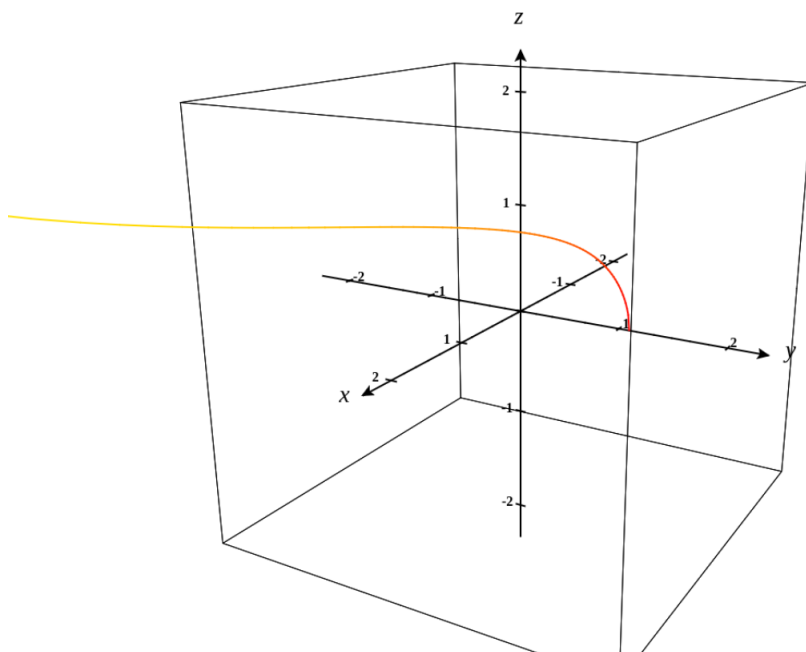


در زیر مثالهای دیگری از منحنی‌های فضائی آورده‌ایم:

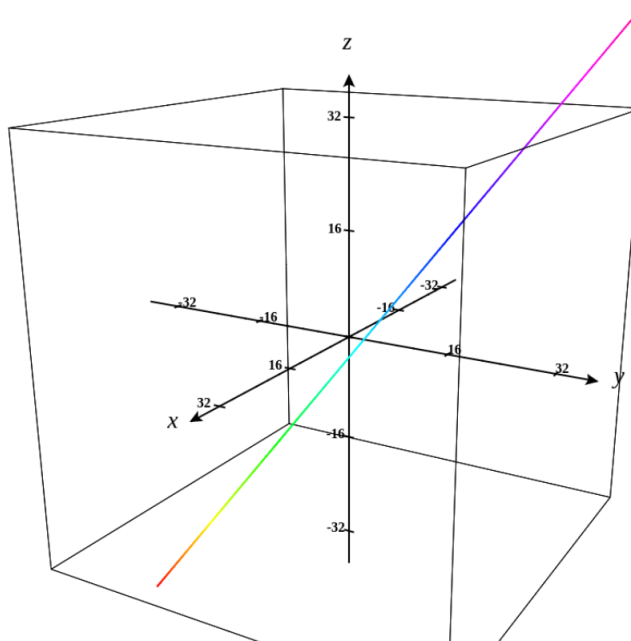
مثال ۱۵۸.

$$\vec{r}(t) = (t^3, \ln(3 - 2t), \sqrt{t})$$

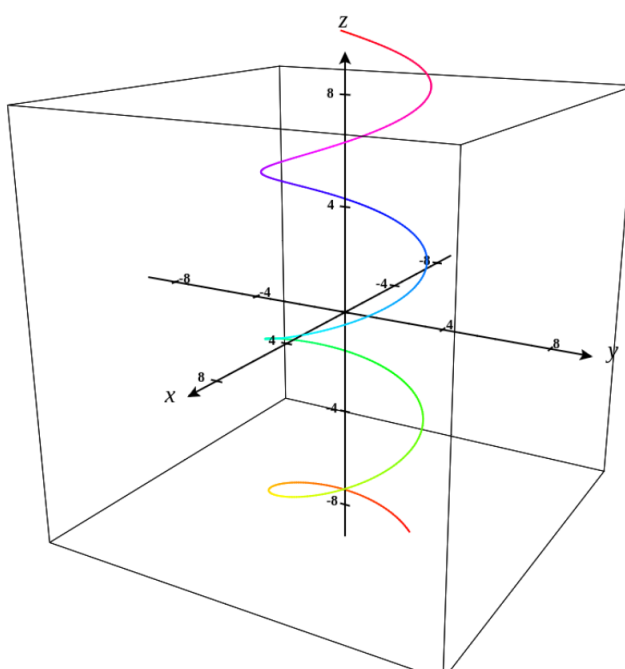
در زیر این منحنی را برای $0 \leq t \leq 10$ رسم کرده‌ایم:



$$\vec{r}(t) = (1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t)$$



$$\vec{r}(t) = (2 \sin t, 2 \cos t, t)$$

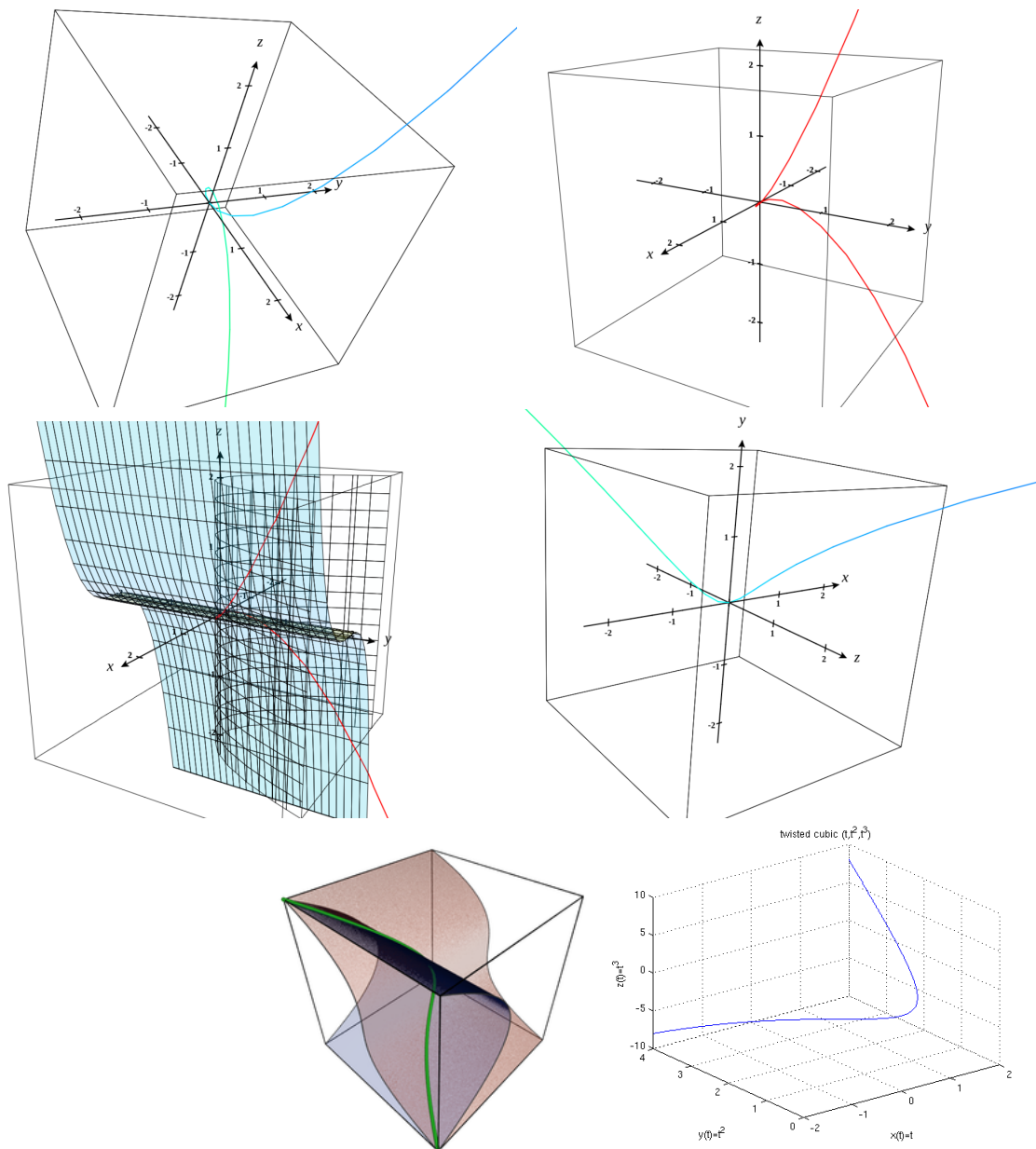


دقت کنید که منحنی بالا روی استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 4$ واقع است.

$$\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$$

این منحنی فضائی، منحنی مکعبی پیچانده شده نام دارد و در واقع اشتراک رویه‌های زیر است:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$$



مثال ۱۵۹. در صفحه زیر، می‌توانید «خم پروانه‌ای» را مشاهده کنید:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_curve_\(transcendental\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_curve_(transcendental))

گفتیم که هر تابع برداری به صورت

$$\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

یک خم را در فضا مشخص می‌کند.

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

مثال ۱۶۰. منحنی محل تلاقی استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ و $y + z = 2$ را پارامتربندی کنید و معادله‌ی برداری آن را نیز بنویسید.

پاسخ. می‌خواهیم معادله‌ی ای مانند $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ برای خم به وجود آمده از تلاقی دو رویه بنویسیم. تصویر خم مورد نظر روی صفحه‌ی xy همان سطح مقطع استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه‌ی xy است. پس می‌توان نوشت:

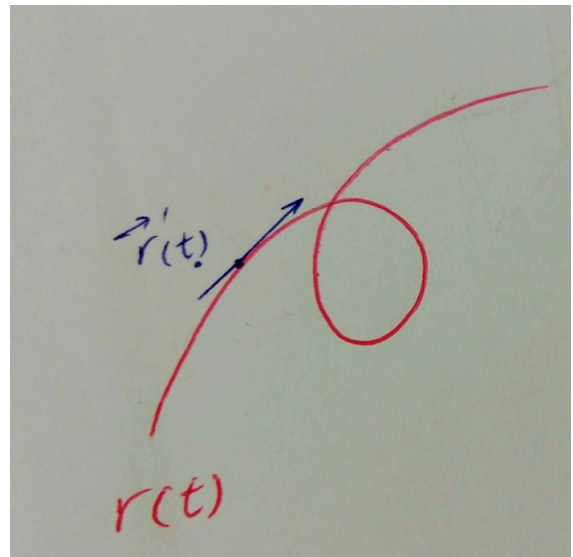
$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \sin t)$$

□

مثال ۱۶۱. معادله‌ی $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ را پارامتر بندی کنید.

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t)$$

توجه ۱۶۲. اگر $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ آنگاه بردار مماس بر منحنی $r(t)$ در زمان t به صورت $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ است. این مطلب را در ادامه توضیح داده‌ایم.^۱

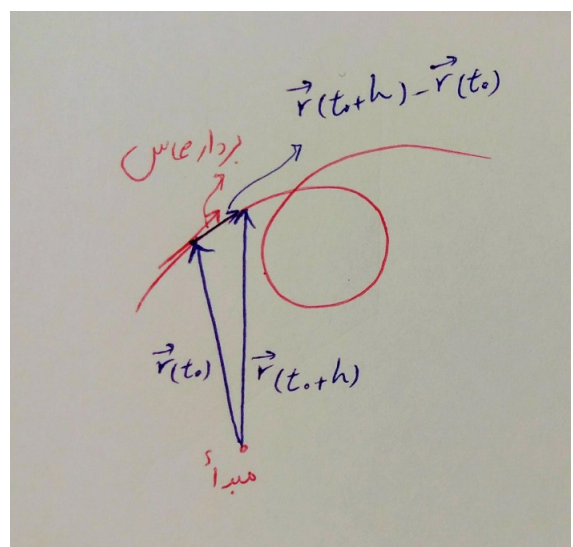


فرض کنید

$$\vec{r}(t) : (f(t), g(t), h(t))$$

معادله‌ی برداری یک خم باشد. دقت کنید که در رسم خم‌ها، مؤلفه‌ی t را رسم نمی‌کنیم. حال در $t = t_0$ تعریف می‌کنیم:

$$\vec{r}'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h} = (f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0))$$



^۱ از خانم شیرجری بابت تایپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

همان طور که در تصویر بالا مشاهده می‌کنید، $r'(t_0)$ در واقع جهت بردار مماس بر خم را در نقطه‌ی $P = \vec{r}(t_0)$ مشخص می‌کند.

تمرین ۷۹. منحنی‌های زیر روی یک رویه‌ی S واقعند و از نقطه‌ی $(2, 1, 3)$ واقع بر آن روی می‌گذرند. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه را در آن نقطه بنویسید.

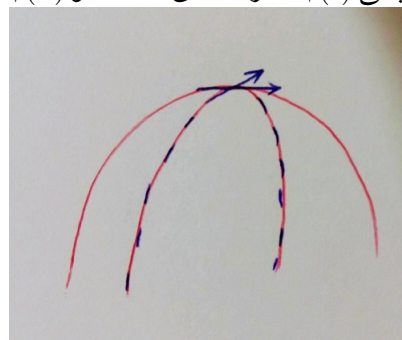
$$\vec{r}_1(t) = (2 + 3t, 1 + t^2, 3 - 4t + t^3)$$

$$\vec{r}_2(u) = (1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1)$$

پاسخ. نخست توجه کنید که

$$\vec{r}_1(0) = (2, 1, 3) \quad , \quad \vec{r}_2(1) = (2, 1, 3)$$

یعنی $\vec{r}_1(t)$ در نقطه‌ی $t = 0$ و $\vec{r}_2(u)$ در نقطه‌ی $u = 1$ به نقطه‌ی $(2, 1, 3)$ می‌رسند:



$$\vec{r}'_1(t) = (3, 2t, -4 + 3t) \implies \vec{r}'_1(0) = (3, 0, -4)$$

$$\vec{r}'_2(u) = (2u, 6u^2, 2) \implies \vec{r}'_2(1) = (2, 6, 2)$$

دو بردار $\vec{r}'_1(0)$, $\vec{r}'_2(1)$ هر دو روی صفحه‌ی مماس مورد نظر واقعند. پس بردار نرمال صفحه‌ی مورد نظر از حاصلضرب خارجی آنهاست:

$$\vec{n} = (3, 0, -4) \times (2, 6, 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 24\vec{i} - 14\vec{j} + 18\vec{k} = (24, -14, 18)$$

پس معادله‌ی صفحه مورد نظر به صورت زیر است:

$$24x - 14y + 18z = 24 \times 2 - 14 \times 1 + 18 \times 3 = 88$$

که به صورت زیر ساده‌تر می‌شود:

$$\implies 24x - 14y + 18z - 88 = 0$$

□

تمرین ۸۰. معادله پارامتری خط مماس بر خم زیر را در $t = 0$ بنویسید:

$$r(t) = e^t i + (\sin t)j + \ln(1 - t)k.$$

۴.۵ صفحات مماس بر رویه های تراز

در درسهای گذشته دیدیم که اگر $z = f(x, y)$ یک تابع دومتغیره باشد (که یک رویه را مشخص می‌کند) آنگاه معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) بر رویه‌ی یادشده به صورت زیر است:

$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$$

در اینجا می‌خواهیم معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر یک رویه را پیدا کنیم که توسط یک معادله‌ی ضمنی به صورت $F(x, y, z) = 0$ داده شده باشد.

فرض کنید $w = F(x, y, z)$ تابعی سه متغیره باشد. همان طور که در درسهای پیشین دیدیم، هر معادله به صورت $F(x, y, z) = k$ یک رویه‌ی تراز از این تابع را بدست می‌دهد. پس فرض کنید $F(x, y, z) = k$ یک رویه تراز باشد و $\vec{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ یک خم واقع بر این رویه باشد. از آنجا که $\vec{r}(t)$ روی رویه‌ی $F(x, y, z) = k$ واقع شده است، داریم:

$$F(f(t), g(t), h(t)) = k$$

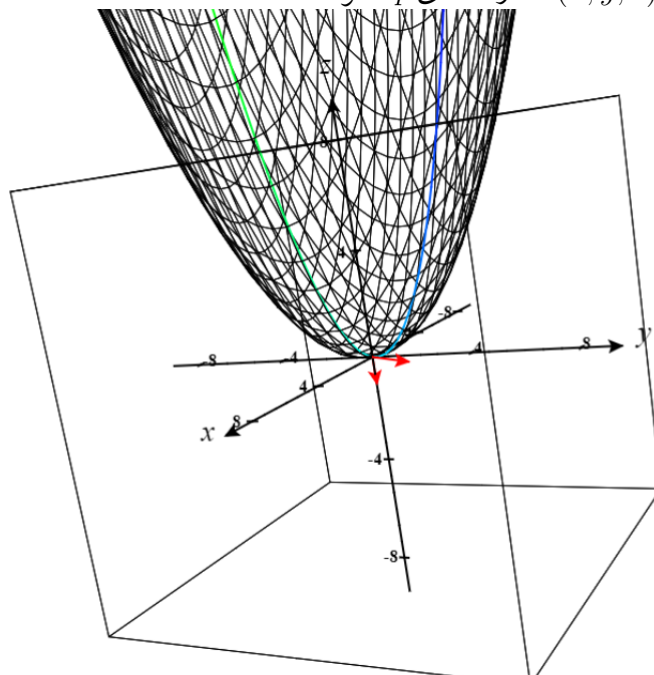
از عبارت بالا بر حسب t مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial F}{\partial x} f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} g'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} h'(t) = 0$$

پس در هر نقطه‌ی $P = r(t_0)$ داریم:

$$\vec{\nabla} F(p) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} F(p) \perp \vec{r}'(t_0)$$

بنابراین برای هر منحنی $\vec{r}(t)$ بردار $\vec{\nabla} F(p)$ بر $\vec{r}'(t)$ در نقطه‌ی p عمود است. پس $\vec{\nabla} F(p)$ بر صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $F(x, y, z) = k$ در نقطه‌ی p عمود است.



نتیجه ۱۶۳. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $F(x, y, z) = k$ در نقطه‌ی $p = (x_0, y_0, z_0)$ به صورت زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(p)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(p)(z - z_0) = 0$$

بطور خاص اگر $z = f(x, y)$ آنگاه می‌توان نوشت:

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$$

پس معادله‌ی صفحه‌ی مماس به صورت زیر است:

$$-f_x(x - x_0) - f_y(y - y_0) + 1(z - z_0) = 0$$

یعنی:

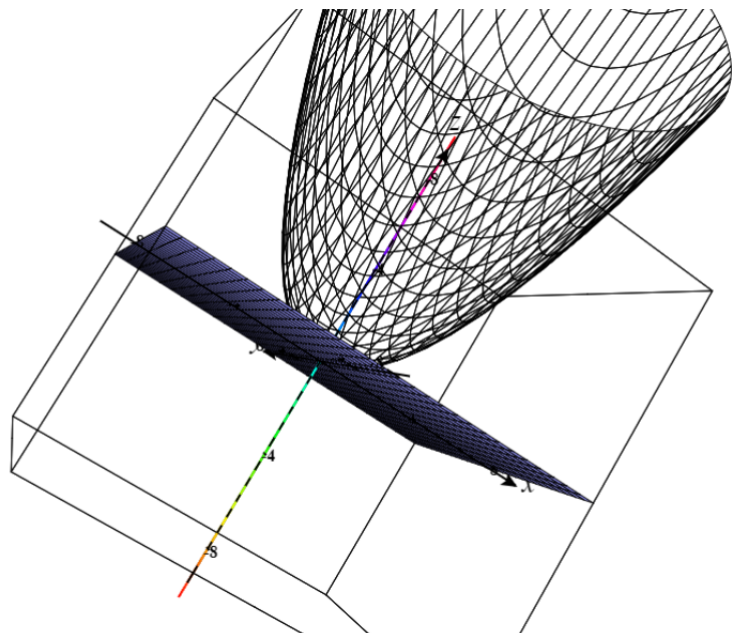
$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$$

و این بر آنچه قبلاً ثابت کرده‌ایم نیز مطابقت دارد.

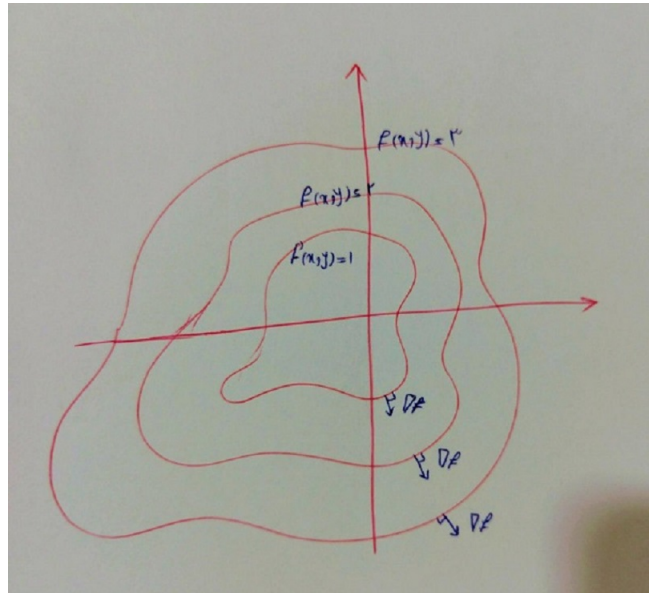
تعریف ۱۶۴. به خطی که در جهت عمود بر یک رویه از نقطه‌ی p بگذرد، خط نرمال بر آن رویه گفته می‌شود.

پس اگر $F(x, y, z) = 0$ معادله‌ی رویه‌ی مورد نظر باشد، معادله‌ی خط نرمال آن در نقطه‌ی p به صورت زیر است:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(p)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(p)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(p)}$$



توجه کنید که به طور مشابه اگر $F(x, y) = k$ یک معادله‌ی دو متغیره باشد (که یک منحنی تراز از یک رویه را نشان می‌دهد) آنگاه $\nabla f = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$ در نقطه‌ی (x, y) بر منحنی $F(x, y) = k$ عمود است:



از طرفی گفتیم که ∇ در هر نقطه، جهتی را نشان می‌دهد که تابع در آن جهت سریعتر افزایش می‌یابد. در واقع اگر نقشه‌ی توپوگرافیک یک کوه را داشته باشیم (فرض کنیم به صورت بالا)، آنگاه با استفاده از بردار گرادیان می‌توانیم پرشیبترین مسیر میان دو ارتفاع مشخص را پیدا کنیم. این مسیر بر تمام منحنی‌های $f(x, y) = k$ عمود است.

مثال ۱۶۵. معادلات صفحه‌ی مماس و خط نرمال را بر بیضی‌وار $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ در نقطه‌ی $(2, 1, -3)$ بنویسید.

پاسخ. صفحه‌ی مماس:

$$F_x(x - x_0) = F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0$$

$$\frac{x_0}{4}(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + \frac{2z_0}{9} = 0$$

$$(x - 2) + 2(y - 1) - \frac{6}{9}(z + 3) = 0$$

خط نرمال:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\frac{6}{9}}$$

□

توجه ۱۶۶. $\nabla f(x_0, y_0)$ بر منحنی تراز $f(x, y) = k$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) عمود است (در صورتی که $f(x_0, y_0) = k$). همچنین $\nabla f(x_0, y_0)$ در جهت افزایش تابع است.

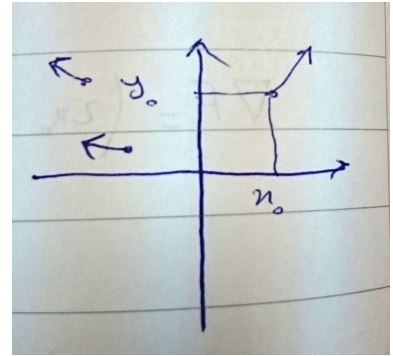
توجه ۱۶۷. (در حالت سه‌متغیره) اگر $\omega = F(x, y, z)$ آنگاه $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ بر هر رویه‌ی تراز $F(x, y, z) = k$ که از (x_0, y_0, z_0) بگذرد در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) عمود است.

تمرین ۸۱. فرض کنید $f(x, y) = y^2 - x^2$. آنگاه ∇f را رسم کنید.

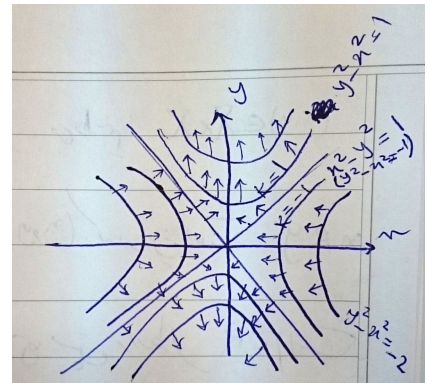
پاسخ.

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\begin{aligned}\nabla f : \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x., y.) &\mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x., y.), \frac{\partial f}{\partial y}(x., y.) \right) \\ \nabla(x., y.) &= (-2x., 2y.) \\ (x., y.) &\mapsto (-2x., 2y.)\end{aligned}$$



بنا به توجه‌های بالا، شکل مورد نظر سوال، به صورت زیر است:



□

تمرین ۸۲. در کدام نقطه روی بیضی وار $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ صفحه‌ی مماس با صفحه‌ی $x + 2y + z = 1$ موازی است؟

پاسخ. بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر بیضی وار $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ در نقطه‌ی $(x., y., z.)$ برابر است با

$$\nabla F(x., y., z.) = (2x., 2y., 4z.)$$

بنابراین هدف ما یافتن نقاطی مانند $(x., y., z.)$ روی بیضی وار مورد نظر است به طوری که $(1, 2, 1) \parallel (2x., 2y., 4z.)$.

$$\begin{cases} x.^2 + y.^2 + 2z.^2 = 1 \\ \frac{2x.}{1} = \frac{2y.}{2} = \frac{4z.}{1} \end{cases}$$

□

حل معادله‌ی بالا و ادامه‌ی پاسخ سوال به عهده‌ی شما!

تمرین ۸۳. نشان دهید که بیضی وار $9 = x^2 + 2y^2 + z^2$ و کره‌ی $0 = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24$ در نقطه‌ی $(1, 1, 2)$ بر هم مماسند.

پاسخ.

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$$

$$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$$

کافی است نشان دهیم که در نقطه‌ی یادشده، $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \parallel \nabla G(x_0, y_0, z_0)$

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (6x_0, 4y_0, 2z_0)$$

$$\nabla G(x_0, y_0, z_0) = (2x_0 - 8, 2y_0 - 6, 2z_0 - 8)$$

$$\frac{6x_0}{2x_0 - 8} = \frac{4y_0}{2y_0 - 6} = \frac{2z_0}{2z_0 - 8} \quad (*)$$

□ کافی است بررسی کنیم که نقطه‌ی $(1, 1, 2)$ در $(*)$ صدق می‌کند. (بررسی کنید).

تمرین ۸۴. نشان دهید که صفحات مماس بر مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ همه از مبدأ مختصات می‌گذرند.

پاسخ. معادله‌ی صفحه‌ی مماس در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) دارای معادله‌ی زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0$$

□ کافی است نشان دهیم نقطه‌ی $(0, 0, 0)$ در معادله‌ی صفحه‌ی مماس صدق می‌کند (ادامه با شما!)

تمرین ۸۵. نشان دهید که هر خط عمود بر کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ از مبدأ مختصات می‌گذرد.

پاسخ. معادله‌ی خط نرمال بر کره در نقطه‌ی (x_0, y_0, z_0) به صورت زیر است.

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{2x_0} = \frac{y - y_0}{2y_0} = \frac{z - z_0}{z_0}$$

حال نشان می‌دهیم که همه‌ی خطهای به معادله‌ی بالا از مبدأ می‌گذرند (یعنی مبدأ در معادله‌ی این خطها صدق می‌کند).

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2} \quad \checkmark$$

□

تمرین ۸۶. صفحه‌ی $y + z = 3$ استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 5$ را در یک بیضی قطع می‌کند. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر این بیضی را در صفحه‌ی یاد شده در نقطه‌ی $(1, 2, 1)$ بنویسید.

پاسخ. راه حل اول:

توجه ۱۶۸. خط مورد نظر هم روی صفحه‌ی مماس بر استوانه در نقطه‌ی $(1, 2, 1)$ واقع است و هم روی صفحه‌ی $y + z = 3$.

پس بردار خط مورد نظر بر بردارهای نرمال دو صفحه یاد شده عمود است. بردار نرمال صفحه‌ی اول برابر است با $(0, 1, 1)$ و بردار نرمال صفحه‌ی مماس برابر است با

$$\nabla F(x, y, z)|_{(1, 2, 1)} = (2x, y, 0)|_{(1, 2, 1)} = (2, 2, 0)$$

پس بردار خط مورد نظر برابر است با

$$(0, 1, 1) \times (2, 2, 0) = (a, b, c) \quad (\text{محاسبه به عهده‌ی شما})$$

و معادله‌ی خط به صورت زیر است:

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{b} = \frac{z-1}{c}$$

پاسخ دوم. بیضی مورد نظر را به صورت زیر پارامتر بندی می‌کنیم:

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{5} \cos t, \sqrt{5} \sin t, 3 - \sqrt{5} \sin t)$$

نقطه‌ی $(1, 2, 1)$ به ازای

$$t = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

حاصل می‌شود. جهت خط مماس برابر است با جهت بردار

$$\vec{r}'(t) = \dots$$

□

تمرین ۸۷. معادله‌ی پارامتری خط مماس بر منحنی محل اشتراک سهمی وار $z = x^2 + y^2$ و بیضی وار $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ را در نقطه‌ی $(-1, 1, 2)$ بنویسید.

پاسخ. خط مورد نظر هم بر صفحه‌ی مماس بر سهمی وار و هم بر صفحه‌ی مماس بر بیضی وار واقع است.

$$\vec{n}_1 = (-2, 2, -1) \quad \text{نرمال سهمی وار}$$

$$\vec{n}_2 = (-8, 2, 4) \quad \text{نرمال بیضی وار}$$

بردار خط مورد نظر برابر است با

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (a, b, c) \quad \text{محاسبه به عهده‌ی شما}$$

معادله‌ی خط مورد نظر به صورت زیر است:

$$\frac{x+1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-2}{c}$$

□

(ادامه با شما!)

۵.۵ تمرین

تمرین ۸۸. معادله خط مماس و خط عمود بر رویه $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ را در نقطه $(2, 2, \sqrt{7})$ بنویسید.

تمرین ۸۹. فرض کنید C خم محل تلاقی رویه‌های $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ و $xy + z = 0$ باشد. معادلات پارامتری خط مماس بر C را در نقطه $(2, 1, -2)$ بنویسید.

تمرین ۹۰. مکان هندسی نقاطی از رویه $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 2xz + 4yz = 8$ را بیابید که در آنها صفحه مماس موازی صفحه xy باشد.

تمرین ۹۱. نشان دهید صفحات مماس بر رویه $z = x \sin(\frac{y}{x})$ در هر نقطه، از مبدأ می‌گذرند.

تمرین ۹۲. معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(1, 1, 0)$ می‌گذرد و بر رویه $z = x^2 + y^2$ عمود است. معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقاط $(1, 0, 0)$ و $(2, 2, 2)$ می‌گذرد و به این رویه مماس است.

تمرین ۹۳. خط عمود بر رویه $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ در نقطه $(1, 1, 1)$ در چه نقطه دیگری این رویه را قطع می‌کند؟

تمرین ۹۴. روشی برای محاسبه فاصله یک نقطه (x_0, y_0, z_0) از یک صفحه $ax + by + cz = d$ ارائه کنید. با استفاده از این روش، فرمول مورد نیاز را استخراج کنید.

تمرین ۹۵. معادله خط مماس بر خم محل تلاقی رویه‌های $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ و $xy + z = 0$ را در نقطه $(2, 1, -2)$ بیابید.

۶.۵ بسط تیلور توابع چندمتغیره

توجه. این مطالب را جناب آقای دکتر بهرامی درباره‌ی بسط تیلور توابع دو متغیره نوشته و در اختیار کلاس ما قرار داده‌اند. این بخش، تکمیلی است و در بخش بعدی، به نجوی مشابه همین مطلب گفته شده است.

ابتدا مفهوم بسط تیلور را برای توابع حقیقی یک متغیره یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم ϕ تابعی حقیقی تعریف شده بر بازه‌ای از اعداد حقیقی حاوی دو عدد t_0 و t باشد. اگر مشتق مرتبه $(n+1)$ -ام ϕ بر این بازه پیوسته باشد آنگاه عدد c بین t_0 و t وجود دارد که

$$\phi(t) = \phi(t_0) + \phi'(t_0)(t - t_0) + \frac{\phi''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{\phi^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \frac{\phi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(t - t_0)^{n+1}$$

به این ترتیب برای مقادیر t به اندازه کافی نزدیک t_0 ،

$$\phi(t) \approx \phi(t_0) + \phi'(t_0)(t - t_0) + \frac{\phi''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \cdots + \frac{\phi^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n$$

در قضیه زیر این خاصیت را برای توابع دومتغیره گسترش می‌دهیم.

قضیه. فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^2$ و $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ بر D مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبه $n + 1$ داشته باشد. برای دو نقطه (x, y) و (x_*, y_*) در D با این خاصیت که پاره‌خط واصل بین دو نقطه در D قرار بگیرد، نقطه (x^*, y^*) بر این پاره‌خط وجود دارد که

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_*, y_*) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*)(x - x_*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*)(y - y_*) \right) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_*, y_*)(x - x_*)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_*, y_*)(x - x_*)(y - y_*) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_*, y_*)(y - y_*)^2 \right) \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(x_*, y_*)(x - x_*)^{n-k}(y - y_*)^k \right) \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k}(x^*, y^*)(x - x_*)^{n+1-k}(y - y_*)^k \right) \end{aligned}$$

اثبات. فرض کنیم L خط گذرکننده از دو نقطه (x_*, y_*) و (x, y) باشد. در این صورت معادلات پارامتری L به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{cases} x(t) = x_* + t(x - x_*) \\ y(t) = y_* + t(y - y_*) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

با توجه به فرض، $\{(x(t), y(t)) \mid t \in [0, 1]\} \subset D$. قرار می‌دهیم $\phi(t) := f(x(t), y(t))$. در این صورت ϕ تابعی تعریف شده بر $[0, 1]$ بوده، بنابر قاعده رنجیری، برای هر t در این بازه

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))(x - x_*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))(y - y_*) \\ \phi''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x(t), y(t))(x - x_*)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x(t), y(t))(x - x_*)(y - y_*) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x(t), y(t))(y - y_*)^2 \\ &\vdots \\ \phi^{(n)}(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(x(t), y(t))(x - x_*)^{n-k}(y - y_*)^k \\ \phi^{(n+1)}(t) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k}(x(t), y(t))(x - x_*)^{n+1-k}(y - y_*)^k \end{aligned}$$

بنابر این ϕ بر بازه $[0, 1]$ مشتق مرتبه $(n+1)$ -ام پیوسته دارد. بنابر بسط تیلور برای توابع یک متغیره، $c \in (0, 1)$ وجود دارد که

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0)(1 - 0) + \frac{\phi''(0)}{2!}(1 - 0)^2 + \dots + \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!}(1 - 0)^n + \frac{\phi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1 - 0)^{n+1}$$

با جایگذاری مقادیر در رابطه فوق و معرفی $(x^*, y^*) := (x(c), y(c))$ نتیجه به دست می‌آید.

نتیجه. تحت شرایط قضیه فوق، برای (x, y) نزدیک (x_0, y_0)

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx f(x_0, y_0) &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k}(x_0, y_0)(x - x_0)^{n-k}(y - y_0)^k \right) \end{aligned}$$

مثال. تابع f با ضابطه $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}}$ مفروض است. دامنه تعریف این تابع برابر مجموعه $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$ است. به سادگی مشاهده می‌شود، f بر دامنه تعریف خود دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه است. به این ترتیب، به طور مثال اگر بخواهیم مقدار f را در یک همسایگی از نقطه $(2, 1)$ با یک چندجمله‌ای درجه ۲ تقریب بزنیم آنگاه

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx f(2, 1) &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1)(x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)(y - 1) \right) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1)(x - 2)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1)(x - 2)(y - 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 1)(y - 1)^2 \right) \end{aligned}$$

با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{1}{2}(x - y)^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{3}{4}(x - y)^{-\frac{5}{2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{3}{4}(x - y)^{-\frac{5}{2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{3}{4}(x - y)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1) = \frac{3}{4}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1) = -\frac{3}{4}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 1) = \frac{3}{4}$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{x-y}} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}(x - 2) + \frac{1}{2}(y - 1) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}(x - 2)^2 - \frac{3}{4}(x - 2)(y - 1) + \frac{3}{4}(y - 1)^2 \right)$$

۷.۵ چندجمله‌ای‌های تیلور

یادآوری چندجمله‌ای تیلور در توابع تک متغیره

درجه‌ی اول

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

درجه‌ی دوم

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

درجه‌ی سوم

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

بسط تیلور

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

گفتیم که اگر $z = f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد، چند جمله‌ای تیلور درجه‌ی اول آن (تقریب خطی آن) حول نقطه‌ی $(x, y) = (a, b)$ به صورت زیر است:

$$f(x, y) \approx P_1(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b)$$

معادله‌ی بالا در واقع از فرمول دیفرانسیل کلی به دست آمده است:

$$\Delta z \approx dz = f_x dx + f_y dy$$

چندجمله‌ی تیلور درجه‌ی اول را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$P_1(x, y) = f(a, b) + \begin{pmatrix} f_x(a, b) & f_y(a, b) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

اگر قرار دهیم:

$$f'(a, b) = \begin{pmatrix} f_x(a, b) & f_y(a, b) \end{pmatrix}$$

شباهت معادله‌ی بالا به حالت تک‌متغیره‌ی زیر آشکار می‌شود:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

چند جمله‌ای تیلور در توابع دو متغیره

درجه‌ی دوم

$$z = f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + \frac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y-b)^2$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$f(x, y) \approx \underbrace{P_2(x, y)}_{\text{تیلور درجه‌ی دوم}} = f(a, b) + \begin{bmatrix} f_x(a, b) & f_y(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} +$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x-a & y-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix}$$

احتمالاً تا اینجا توجه کرده‌اید که مشتقات توابع چندمتغیره، در واقع توابعی ماتریسی هستند.^۲

$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ تک متغیره	$\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ دو متغیره
$f(x.)$	$f(x., y.)$
$f'(x.)$	$\begin{bmatrix} f_x(x., y.) & f_y(x., y.) \end{bmatrix}$
$f''(x.)$	$\begin{bmatrix} f_{xx}(x., y.) & f_{xy}(x., y.) \\ f_{yx}(x., y.) & f_{yy}(x., y.) \end{bmatrix}$

تمرین ۹۶. چند جمله‌ای تیلور درجه‌ی دوم را برای تابع $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ حول نقطه‌ی $(0, 0)$ بنویسید.

برای بیان صورت کلی چندجمله‌ای‌های تیلور برای توابع چند متغیره، نخست یک نمادگذاری معرفی می‌کنیم: عبارت

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n$$

را شبیه به اتحادهای دبیرستان باز کنید. برای مثال:

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

حال چندجمله‌ای‌های تیلور برای توابع چندمتغیره به صورت زیر هستند:

$$f(a+h, b+k) = \sum \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f|_{(a,b)}$$

بنابراین جمله اول $f(a, b)$ است، جمله دوم به صورت نوشته شده در بالاست و جمله سوم به صورت زیر است:

$$\frac{1}{3!} (h^3 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxy} + 3h k^2 f_{yyx} + k^3 f_{yyy})$$

۸.۵ تمرین

برای توابع زیر، چندجمله‌ای تیلور درجه دوم بنویسید:

حول مبدا $\sin(x) \sin(y)$

حول مبدا $e^x \cos(y)$

حول مبدا $e^x \ln(1+y)$

حول $(1, 2)$ $\sqrt{x^2 + y^2}$

حول مبدا e^{x-2y}

^۲ این مطلب را در ریاضیات سطوح بالاتر خواهید آموخت. دانشجویان رشته‌ی ریاضی در درس هندسه‌ی دیفرانسیل یا آنالیز ۳ با این مطالب آشنا خواهند شد.

فصل ۶

اکسترممهای نسبی

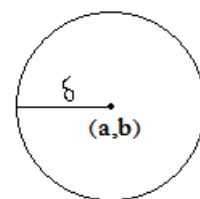
۱.۰.۶ یافتن اکسترممهای توابع دو متغیره

یادآوری ۱۶۹ (توابع تک متغیره). فرض کنید $f(x)$ یک تابع تک متغیره باشد که در سرتاسر $\mathbf{R}$ تعریف شده است. اگر این تابع در یک نقطه‌ی $x = a$ اکسترمم نسبی داشته باشد و در این نقطه مشتق پذیر باشد آنگاه $f'(a) = 0$ (محک مشتق اول). به نقطه‌ای که در آن مشتق موجود نباشد یا صفر باشد، یک نقطه‌ی بحرانی می‌گفتیم و آموختیم که اکسترممها در نقاط بحرانی رخ می‌دهند. در محک مشتق دوم نیز آموختیم که در نقطه‌ی بحرانی $x = a$ اگر $f''(a) > 0$ آنگاه تقعر به سمت بالاست (مینیمم نسبی) و اگر $f''(a) < 0$ آنگاه تقعر به سمت پایین (ماکزیمم نسبی) است.

در ادامه‌ی این درس، متناظر مطالب بالا را برای توابع دو متغیره بیان خواهیم کرد.

تعریف ۱۷۰. منظور از یک همسایگی باز به شعاع δ از نقطه‌ی (a, b) مجموعه‌ی زیر است:

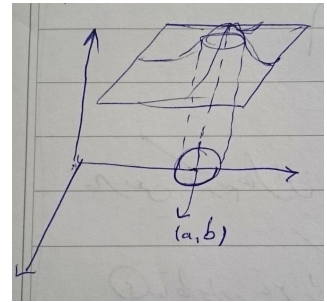
$$B_\delta(a, b) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta\}$$



تعریف ۱۷۱. تابع $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ دارای ماکزیمم نسبی است هرگاه $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که

$$\forall (x, y) \in B_\delta(a, b) \quad f(x, y) \leq f(a, b)$$

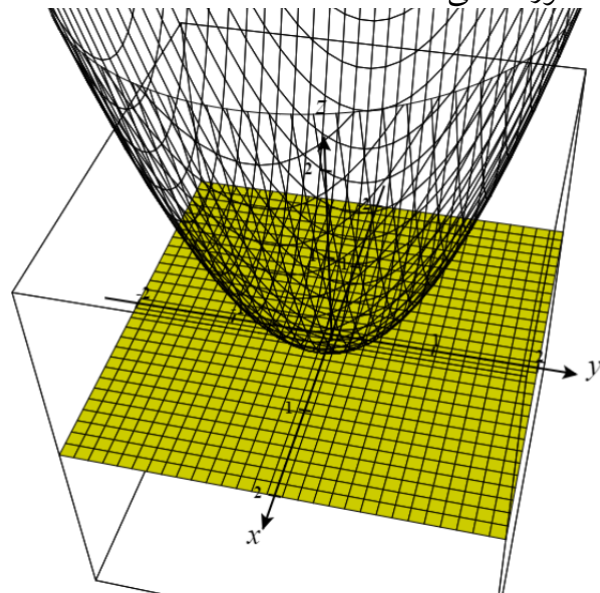
به طور مشابه مینیمم نسبی تعریف می‌شود.



تابع f در نقطه‌ی (a, b) ماکزیمم مطلق دارد هرگاه

$$\forall (x, y) \in \text{Dom}(f) \quad f(x, y) \leq f(a, b)$$

مشاهدات ۱۷۲. وقتی می‌گوئیم صفحه‌ی A به رویه‌ی $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی مماس (a, b) است، یعنی در یک همسایگی $B_\delta(a, b)$ صفحه‌ی A رویه را تنها در یک نقطه قطع می‌کند. وقتی نقطه‌ای اکسترمم نسبی باشد، صفحه‌ی مماس در آن نقطه به صورت افقی است:



قضیه ۱۷۳. اگر تابع $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) اکسترمم نسبی داشته باشد آنگاه اگر $f_x(x_0, y_0)$ و $f_y(x_0, y_0)$ موجود باشند داریم:

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

به بیان دیگر

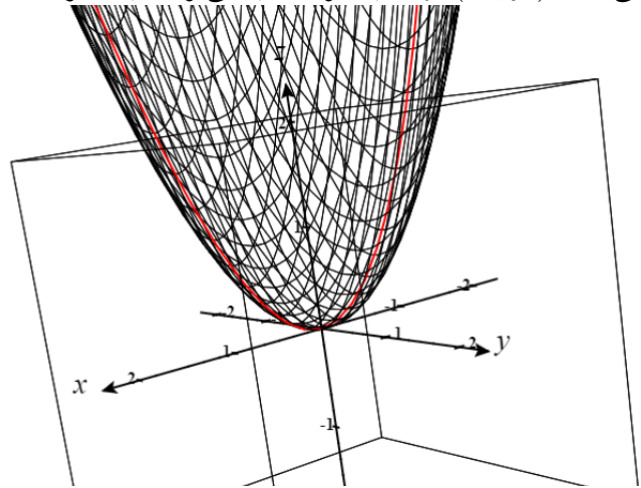
$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$$

که تأییدکننده‌ی مشاهده‌ی بالاست که صفحه‌ی مماس در این نقاط افقی است.

اثبات. منحنی $z = f(x, y_0)$ روی رویه‌ی $z = f(x, y)$ واقع است. از آنجا که رویه در نقطه‌ی (x_0, y_0) اکسترمم دارد، این منحنی در نقطه‌ی $x = x_0$ دارای اکسترمم نسبی است. بنابراین

$$f'(x, y_0)|_{x=x_0} = 0$$

یعنی $f_x(x_0, y_0) = 0$ ؛ و به طور مشابه می توان ثابت کرد که $f_y(x_0, y_0) = 0$.

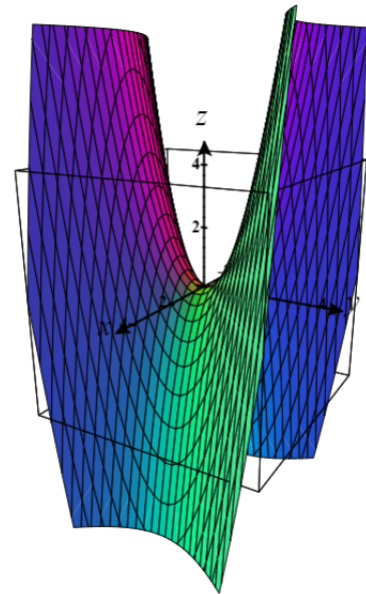


□

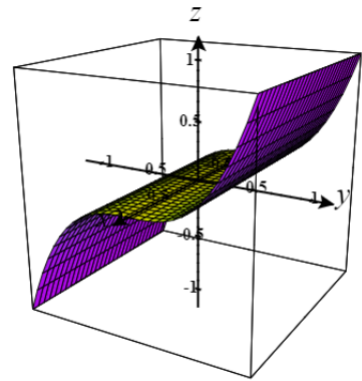
تعریف ۱۷۴. نقطه‌ی $(a, b) \in \text{Dom}(f)$ را یک **نقطه‌ی بحرانی** برای تابع f می خوانیم هرگاه در آن $f_x = f_y = 0$ یا یکی از f_x یا f_y موجود نباشند.

توجه ۱۷۵. اکسترممها همواره در نقاط بحرانی اتفاق می افتند، اما هر نقطه‌ی بحرانی لزوماً اکسترمم نیست.

مشاهدات ۱۷۶. در توابع دو متغیره، علاوه بر اکسترمم می توانیم وضعیت زینی داشته باشیم:



توجه کنید که نقطه‌ی بالا در یک جهت ماکزیمم است و در جهت دیگر مینی موم. به طور کلی نقطه‌ی زینی، یک نقطه‌ی بحرانی است که در آن $f_x = f_y = 0$ و این نقطه نه مینی موم است و نه ماکزیمم. پس در این نقطه، نمی توان صفحه‌ای بر رویه مماس کرد که رویه را در تنها در یک نقطه قطع کند. به نمودار $z = y^3$ در زیر دقت کنید. نقطه‌ی $(0, 0)$ نیز یک نقطه‌ی زینی است:



نتیجه ۱۷۷. اگر (x_0, y_0) یک نقطه‌ی بحرانی باشد، دو حالت داریم:

حالت اول: $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. در این حالت نقطه‌ی مورد نظر یا ماکزیمم نسبی است یا مینی‌موم نسبی است یا زینی. (به نقطه‌ای که در آن $f_x = f_y = 0$ یک نقطه‌ی ایستائی گفته می‌شود).

حالت دوم. یکی از f_x یا f_y موجود نیستند. در این حالت یا مینی‌موم نسبی داریم یا ماکزیمم نسبی یا هیچکدام.

مثال ۱۷۸. اکسترم‌های تابع زیر را بیابید و نوع آن‌ها را مشخص کنید.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$

پاسخ. ابتدا نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم.

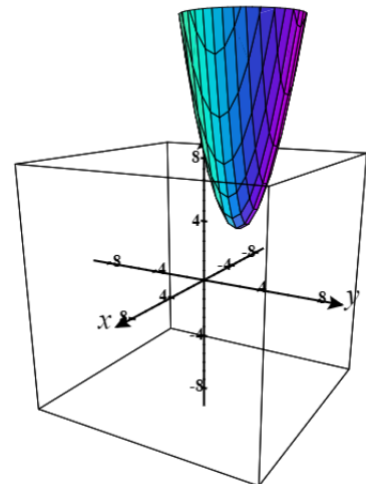
$$f_x = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f_y = 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$$

پس نقطه‌ی $(1, 3)$ یک نقطه‌ی بحرانی برای تابع بالا است. می‌توان نوشت:

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 4$$

پس نقطه‌ی $(1, 3)$ نقطه‌ی مینی‌موم نسبی و مطلق تابع مورد نظر است:



□

تمرین ۹۷. نخست دامنه، و سپس نقاط بحرانی تابع $f(x, y) = x \ln y$ را بیابید.

۲.۰.۶ نقاط بحرانی

یادآوری ۱۷۹ (توابع تک متغیره). فرض کنید که

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

یک تابع تک متغیره‌ی پیوسته باشد که

$$x \mapsto f(x).$$

گفتیم که نقاط بحرانی یک چنین تابعی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. نقاطی مانند x به طوری که $f'(x) = 0$. این نقاط نیز یا

(آ) مینی‌موم نسبی، یا

(ب) ماکزیمم نسبی، و یا

(ج) زینی (مانند نقطه‌ی $(0, 0)$ در $y = x^3$ هستند.

۲. نقاطی مانند x به طوری که $f'(x)$ موجود نیست. این نقاط یا

(آ) مینی‌موم نسبی، یا

(ب) ماکزیمم نسبی، هستند و یا

(ج) هیچکدام نیستند.

در زیر مفهوم نقاط بحرانی را برای توابع دو متغیره توضیح داده‌ایم.

نقاط بحرانی توابع دو متغیره

نقاط بحرانی:

۱. نوع اول نقاطی هستند که در آنها به طور همزمان

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

این نوع نقاط را نقاط ایستایی می‌خوانند. این نقاط یکی از حالات زیر را دارند:

(آ) مینی‌موم نسبی

(ب) ماکزیمم نسبی

(ج) زینی (مانند نقطه‌ی $(0, 0)$ در $z = y^3$ و $z = x^2 - y^2$)

۲. نوع دوم نقاطی هستند که در آنها یکی از $\frac{\partial f}{\partial x}$ یا $\frac{\partial f}{\partial y}$ یا هر دو موجود نباشند. این نقاط یکی از وضعیتهای زیر را دارند:

(آ) مینی موم نسبی

(ب) ماکزیمم نسبی

(ج) هیچکدام

مثال ۱۸۰. نقاط بحرانی تابع $z = y^2 - x^2$ و نوع آنها را مشخص کنید.

پاسخ.

$$z = f(x, y) = y^2 - x^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

در نقطه‌ی $(0, 0)$ داریم:

$$\nabla f(0, 0) = (0, 0)$$

در مسیر $(0, y^2)$ روی رویه نقطه‌ی $(0, 0)$ یک مینی موم نسبی است.

$$(0, y) \mapsto (0, y^2)$$

در مسیر $(-x^2, 0)$ نقطه‌ی $(0, 0)$ یک ماکزیمم نسبی است.

$$(x, 0) \mapsto (-x^2, 0)$$

□

پس $(0, 0)$ مینی موم و ماکزیمم نسبی است. یعنی نقطه‌ی $(0, 0)$ زینی است.

۳.۰.۶ محک مشتق دوم برای تعیین اکسترمم‌ها و نقاط زینی

فرض کنید مشتقات دوم تابع $f(x, y)$ روی یک دیسک به مرکز (a, b) پیوسته باشند و

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

بنویسید:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} (a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b)$$

آنگاه وضعیت زیر را داریم:

$$\begin{cases} D > 0 \rightarrow \begin{cases} \text{نقطه‌ی } (a, b) \text{ یک مینی موم نسبی است.} & f_{xx}(a, b) > 0 \\ \text{نقطه‌ی } (a, b) \text{ یک ماکزیمم نسبی است.} & f_{xx}(a, b) < 0 \end{cases} \\ D < 0 \rightarrow \text{نقطه‌ی } (a, b) \text{ یک نقطه‌ی زینی است.} \\ D = 0 \rightarrow \text{نقطه‌ی } (a, b) \text{ ممکن است مینی موم نسبی، ماکزیمم نسبی یا زینی باشد.} \end{cases}$$

ایده‌ی اثبات. اگر $u = (h, k)$ یک بردار یکه‌ی دلخواه باشد آنگاه مشتق دوم در جهت این بردار، نشان دهنده‌ی تقعر منحنی‌ای است که همزمان روی رویه و صفحه‌ی گذرنده از این بردار قرار دارد. اگر تقعر تمام این نوع منحنی‌های رو به بالا باشد، نقطه‌ی (a, b) یک مینی موم نسبی است. پیش از ادامه دادن اثبات، توجه شما را به یادآوری زیر جلب می‌کنم.

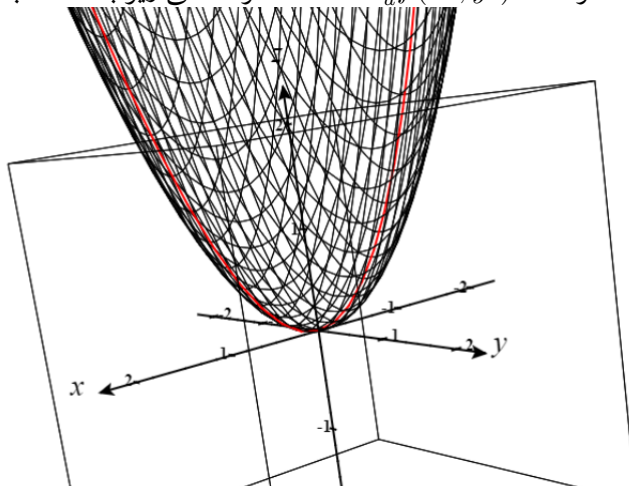
یادآوری ۱۸۱ (مشتق سوئی دوم یک تابع). مشتق تابع $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) در جهت بردار یکه‌ی $u = (a, b)$ به صورت زیر است:

$$D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

مشتق سوئی در واقع شیب خط مماس بر منحنی محل تلاقی رویه‌ی مورد نظر با صفحه‌ای است که روی بردار (a, b) به موازات محور z رسم شده است. تقعر این منحنی را می‌توان با استفاده از مشتق سوئی دوم بررسی کرد:

$$D_u^2 f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)a^2 + f_{yy}(x_0, y_0)b^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)ab$$

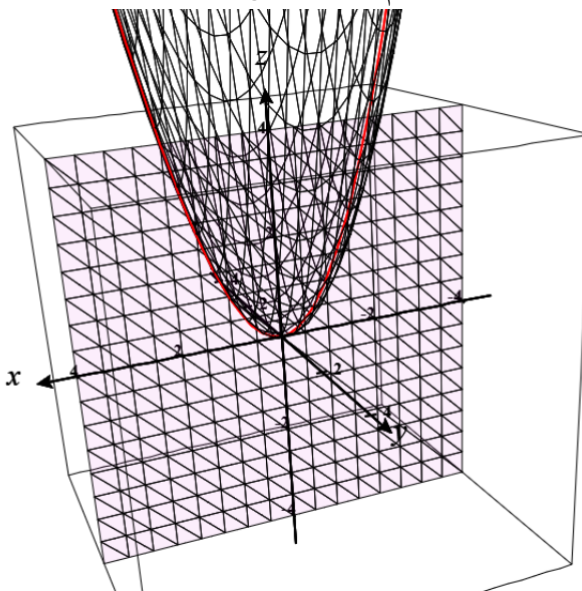
اگر $D_u^2 f(x_0, y_0) > 0$ آنگاه تقعر منحنی زیر به سمت بالاست:



$$D_{u=(h,k)}^2 f(a, b) > 0$$

$$\begin{aligned} D_{(h,k)}^2 f(a, b) &= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \\ &= f_{xx}\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}} \underbrace{(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)}_D \end{aligned}$$

در عبارت بالا f_{xx} و قسمتی که D نام گذاری شده است تعیین کننده‌ی نوع نقاط بحرانی هستند. به بیان ساده‌تر، D^2 در بالا یک عبارت درجه دوم است. زمانی که دلتا (مشخصه) آن منفی باشد، خود عبارت همواره مثبت است.



□

مثال ۱۸۲. اکسترم‌ها و نقاط زینی تابع $f(x, y) = y^2 - x^2$ را مشخص کنید.

پاسخ. تعیین نقاط بحرانی:

$$f_x = -2x \Rightarrow (x = 0 \Rightarrow f_x = 0)$$

$$f_y = 2y \Rightarrow (y = 0 \Rightarrow f_y = 0)$$

پس نقطه‌ی $(0, 0)$ یک نقطه‌ی بحرانی است.

$$f_{xx}(x, y) = -2 \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = -2$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 2$$

$$D(0, 0) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

□

پس نقطه‌ی $(0, 0)$ یک نقطه‌ی زینی است.

مثال ۱۸۳. اکسترم‌ها و نقاط زینی تابع $z = y^3$ را تعیین کنید.

مثال ۱۸۴. اکسترم‌های موضعی و نقاط زینی تابع زیر را تعیین کنید و طرحی تقریبی از آن رسم کنید.

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

پاسخ.

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4y \Rightarrow f_x(x, y) = 0 \Rightarrow y = x^3$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 - 4x \Rightarrow f_y(x, y) = 0 \Rightarrow x = y^3$$

با استفاده از دو معادله‌ی بالا داریم

$$x = (x^3)^3 \Rightarrow x^9 - x = 0 \Rightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

نقاط بحرانی تابع برابرند با

$$(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$$

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 \Rightarrow f_{xx}(0, 0) = 0, f_{xx}(1, 1) = 12, f_{xx}(-1, -1) = 12$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -4$$

$$f_{yy}(x, y) = 12y^2 \Rightarrow f_{yy}(0, 0) = 0, f_{yy}(1, 1) = 12, f_{yy}(-1, -1) = 12$$

نقطه‌ی $(0, 0)$:

$$D(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

پس نقطه‌ی $(0, 0)$ نقطه‌ی زینی است.

نقطه‌ی $(1, 1)$:

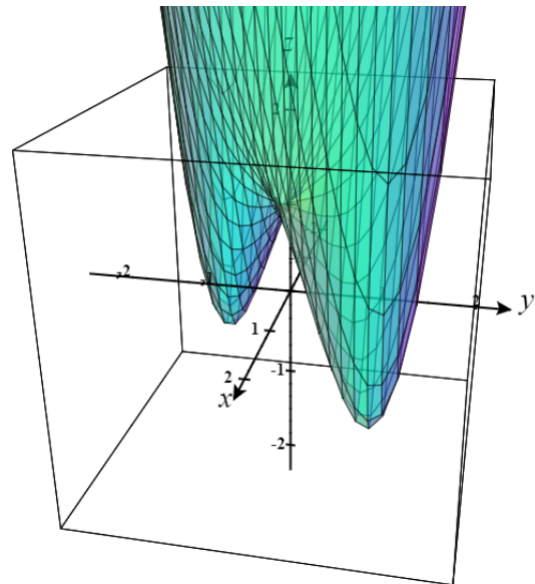
$$D(1, 1) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 > 0, f_{xx}(1, 1) > 0$$

پس نقطه‌ی $(1, 1)$ مینی‌موم نسبی است.

نقطه‌ی $(-1, -1)$:

$$D(-1, -1) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 > 0, f_{xx}(-1, -1) > 0$$

پس نقطه‌ی $(-1, -1)$ مینی‌موم نسبی است.



□

توجه کنید که تابع بالا یک تابع پیوسته است که دو مینی‌موم موضعی دارد بی آنکه هیچ ماکزیمم موضعی داشته باشد. آیا چنین چیزی در توابع تک‌متغیره ممکن است؟

تمرین ۹۸. نقاط بحرانی توابع زیر و نوع آنها را مشخص کنید.

$$1. f(x, y) = (x - 1) \ln(xy) \quad xy > 0$$

پاسخ.

$$f_y(x, y) = \frac{(x - 1)x}{xy} = 0$$

تابع بالا در $x = 0$ برابر صفر است ولی نظر به دامنه‌ی تابع $x = 0$ غیر قابل قبول است. اگر $x \neq 0$ داریم

$$f_y(x, y) = \frac{x - 1}{y} = 0$$

پس $x = 1$ حال

$$f_x(x, y) = \ln(xy) + \frac{y}{xy}(x - 1) = 0 \Rightarrow \ln(xy) + \frac{x - 1}{x} = 0$$

$$f_x(1, y) = 0 \Rightarrow y = 1$$

نقطه‌ی $(1, 1)$ تنها نقطه‌ی بحرانی تابع مورد نظر است.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} (1, 1)$$

اگر $D > 0$ و $f_{xx} > 0$ آنگاه نقطه‌ی $(1, 1)$ مینی موم نسبی است و اگر $D > 0$ و $f_{xx} < 0$ آنگاه نقطه‌ی $(1, 1)$ یک ماکزیمم نسبی است.

$$f_{xx}(x, y) = \frac{y}{xy} + \frac{x - x + 1}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f_{xx}(1, 1) = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y} \Rightarrow f_{xy}(1, 1) = 1$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{1 - x}{y^2} \Rightarrow f_{yy}(1, 1) = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

□

$D < 0$ پس نقطه‌ی $(1, 1)$ یک نقطه‌ی زینی است.

$$f(x, y) = y(e^x - 1) \quad 2.$$

$$f(x, y) = xye^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} \quad 3.$$

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y \quad 4.$$

مثال ۱۸۵. کوتاهترین فاصله‌ی نقطه‌ی $(1, 0, -2)$ را به صفحه‌ی $z = 4 - x - 2y$ بیابید.

پاسخ. فرض کنید (x, y, z) نقطه‌ای روی صفحه باشد. پس $z = 4 - x - 2y$. فاصله‌ی نقطه‌ی $(1, 0, -2)$ از نقطه‌ی (x, y, z) برابر است با

$$d(x, y, z) = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (z - (-2))^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$$

$$F = d^2(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

کافی است نقطه‌ای مانند (x_0, y_0) پیدا کنیم که در آن تابع F مینی موم شود.

تعیین نقاط بحرانی F :

$$F_x(x, y) = 2(x - 1) + (-2)(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0 \Rightarrow 2x + 2y = 7$$

$$F_y(x, y) = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0 \Rightarrow 2x + 5y = 12$$

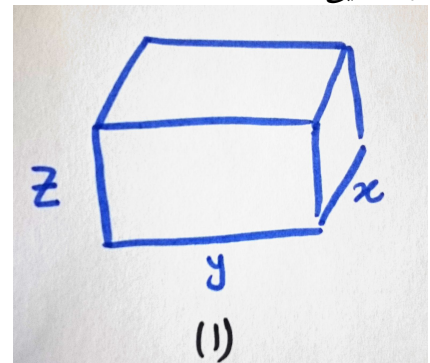
بعد از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول به نقطه‌ی $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$ می‌رسیم. بنا به صورت سوال می‌دانیم که تابع F دارای مینی موم نسبی است. پس این مینی موم در نقطه‌ی $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$ رخ می‌دهد. (زیرا این نقطه، بحرانی است.) پس فاصله‌ی مورد نظر برابر است با

$$\sqrt{F(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})} = \dots$$

□

مثال ۱۸۶. حداکثر حجم یک جعبه‌ی مکعب مستطیلی بدون در را بیابید که بتوان با $12m^2$ مقوا ساخت.

راهنمایی.



$$2xy + 2zx + xy = 12$$

$$V(x, y, z) = xyz$$

$$z = \frac{12 - xy}{2y + 2x}$$

تابع $F(x, y)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$F(x, y) = xy \left(\frac{12 - xy}{2y + 2x} \right)$$

□

کافی است x, y را به گونه‌ای بیابیم که تابع F ماکزیمم داشته باشد. (یه محک دوم نیازی نیست.)

۱.۶ تمرین

تمرین ۹۹. نقاط بحرانی و اکسترم‌های نسبی توابع

$$f(x, y) = x(5 - x^2 - y^2 + 4y)$$

$$g(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$$

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y$$

$$g(x, y) = (x - y)(1 - xy)$$

$$g(x, y) = y(e^x - 1)$$

$$k(x, y) = x^2 + y^2 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$$

$$t(x, y) = y \cos(x)$$

$$f(x, y) = x^2 - 2x^2 + y^2 - 3y$$

$$h(x, y) = \frac{1}{y} + xy$$

$$f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$$

$$f(x, y) = xye^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}$$

را تعیین کنید.

۲.۶ اکستریم‌های مطلق

یادآوری ۱۸۷ (از توابع تک متغیره). فرض کنید $f(x)$ یک تابع پیوسته در بازه‌ی بسته‌ی کراندار $[a, b]$ باشد. آنگاه f در بازه‌ی $[a, b]$ دارای ماکزیمم و مینی‌موم مطلق است.
دستورالعمل محاسبه:

۱. نقاط بحرانی تابع را در بازه‌ی $[a, b]$ بیابید.
۲. مقدار تابع را در نقاط مرزی a, b تعیین می‌کنیم.
۳. مقدار تابع را در نقاط بحرانی با مقادیر تابع در نقاط مرزی مقایسه می‌کنیم.

اصطلاحات توپولوژیک در قضیه‌ی بالا:

۱. تابع پیوسته

۲. نقطه‌ی مرزی

۳. مجموعه‌ی بسته و کراندار

هدفمان در ادامه‌ی درس این است که متناظر آنچه در یادآوری ۱۸۷ بیان شده است، برای توابع دو متغیره ثابت کنیم. برای این منظور، باید مفاهیم بسته بودن، کراندار بودن و پیوسته بودن را برای این حالت نیز تعریف کنیم. مفهوم پیوسته بودن را در درسهای پیشین دیده‌ایم. در زیر به بقیه‌ی این مفاهیم توپولوژیک پرداخته‌ایم. یادگرفتن درست معنی توپولوژی، نیاز به گذراندن ۴ واحد درسی در رشته‌ی ریاضی دارد و جزو اهداف اصلی درس ریاضی ۲ نیست. شما تنها باید بدانید که هرگاه سخن از پیوستگی، فاصله، مجموعه‌ی باز و مجموعه‌ی بسته، و غیره به میان می‌آید، پای توپولوژی در کار است.

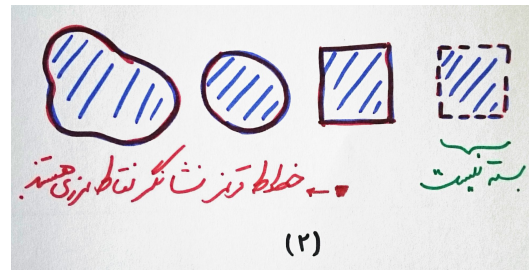
۱.۲.۶ توپولوژی در $\mathbb{R}^2$

۱. دیسک باز به مرکز (a, b) و شعاع δ :

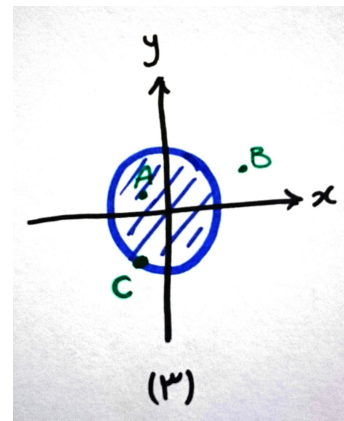
$$B_\delta((a, b)) = \{(x, y) | \underbrace{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}_{\text{اکید}} \leq \delta\}$$

۲. نقاط مرزی یک مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}^2$. نقطه $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ را یک نقطه مرزی برای مجموعه $D \subseteq \mathbb{R}^2$ می‌خوانیم هرگاه برای هر دیسک باز $B_\delta((a, b))$ (به ازای مقادیر مختلف δ) داشته باشیم:

$$\begin{cases} B_\delta((a, b)) \cap D \neq \emptyset \rightarrow \text{این اشتراک نباید خود } (a, b) \text{ شود.} \\ B_\delta((a, b)) \cap \underbrace{D^c}_{D^c = \mathbb{R}^2 - D} \neq \emptyset \rightarrow \text{این اشتراک نباید خود } (a, b) \text{ شود.} \end{cases}$$



مثال ۱۸۸. $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ (دقت کنید که دایره $x^2 + y^2 = 1$ جزو D نیست.)



A نقطه مرزی نیست.

B نقطه مرزی نیست.

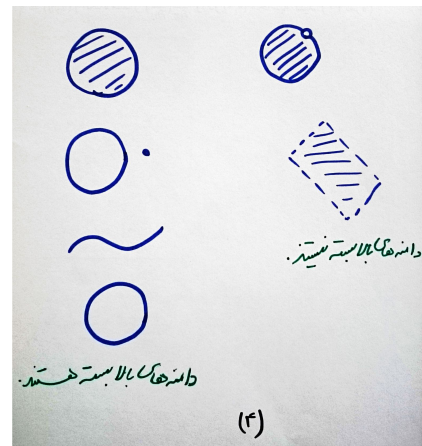
C نقطه مرزی است. پس مجموعه نقاط مرزی D مجموعه زیر است:

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$$

۳. مجموعه بسته:

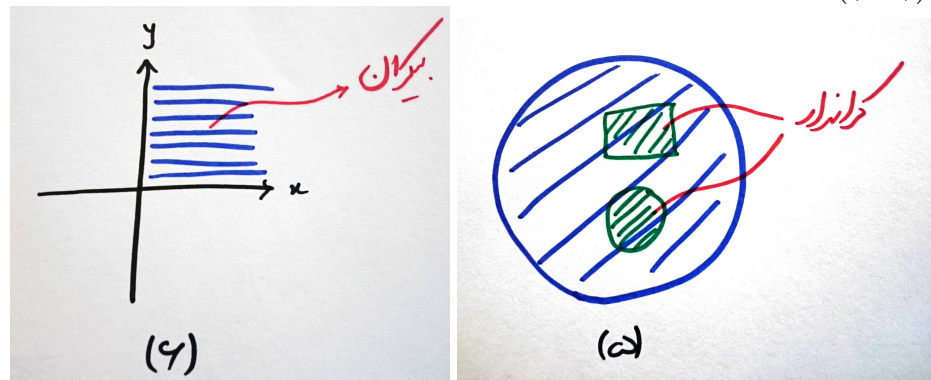
مجموعه $D \subseteq \mathbb{R}^2$ را بسته می‌خوانیم هرگاه شامل تمام نقاط مرزی خود باشد.

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$



۴. مجموعه‌ی کراندار

مجموعه‌ی $D \subseteq \mathbb{R}^2$ را کراندار می‌خوانیم هرگاه نقطه‌ی $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ و شعاع δ موجود باشند به طوری که $D \subseteq B_\delta((a, b))$



تعریف ۱۸۹. فرض کنید $z = f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد. می‌گوییم تابع f در نقطه‌ی (a, b) ماکزیمم مطلق دارد هرگاه

$$\forall (x, y) \in \text{Dom}(f) \quad f(x, y) \leq f(a, b)$$

توجه کنید که نیازی نیست که تابع در یک همسایگی (دیسک باز) از نقطه‌ای که در آن ماکزیمم یا مینی‌موم مطلق اتفاق می‌افتد، تعریف شده باشد. در واقع ممکن است که اکسترممهای مطلق روی مرز یک ناحیه رخ دهند. حال آماده‌ایم تا قضیه‌ای مشابه درس ریاضی ۱، برای اکسترممهای مطلق توابع دو متغیره بیان کنیم:

قضیه ۱۹۰. اگر $f(x, y)$ یک تابع پیوسته در یک مجموعه‌ی بسته و کراندار D باشد آنگاه f در D هم ماکزیمم و هم مینی‌موم مطلق دارد.

روش محاسبه‌ی اکسترمم‌های مطلق

۱. نقاط بحرانی تابع را بیابید.

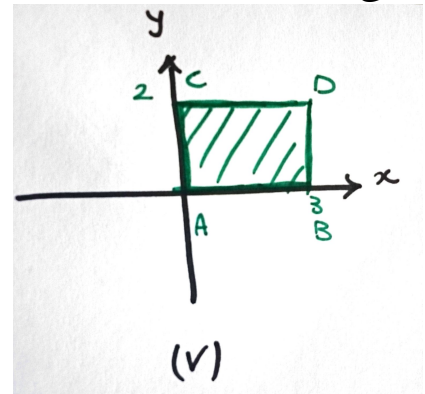
۲. مرز دامنه را مشخص کنید.

۳. مقادیر تابع را در نقاط بحرانی با مقادیر تابع در نقاط مرزی مقایسه کنید.

مثال ۱۹۱. اکسترم‌های مطلق تابع زیر را در دامنه‌ی مشخص شده بیابید.

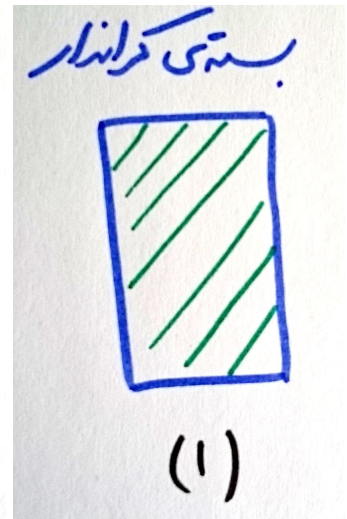
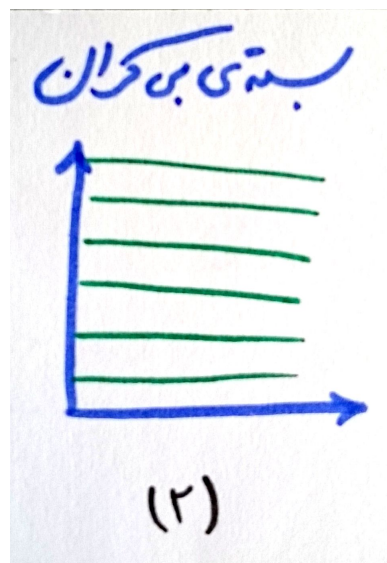
$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y \quad D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$$

پاسخ.



□

گفتیم که اگر $f(x, y)$ یک تابع دو متغیره‌ی پیوسته باشد که در یک مجموعه‌ی بسته‌ی کراندار D تعریف شده است آنگاه f در D دارای مینی‌موم و ماکزیمم مطلق است.



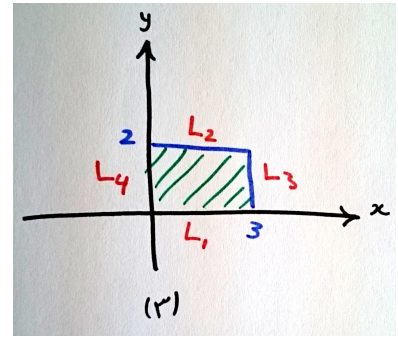
دستورالعمل:

مقادیر تابع را در نقاط بحرانی با مقادیر تابع در نقاط مرزی با هم مقایسه کنید.

مثال ۱۹۲. اکسترم‌های مطلق تابع $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ را در مجموعه‌ی D پیدا کنید.

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$$

پاسخ. D یک ناحیه‌ی بسته و کراندار است. تابع f چند جمله‌ای و از این رو پیوسته است.



حال نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم. توجه کنید که نقاط بحرانی، روی مرزها نیستند، بلکه درون ناحیه‌ی داده شده هستند.

$$f_x(x, y) = 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$f_y(x, y) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

تنها نقطه‌ی بحرانی نقطه‌ی $(1, 1)$ است. داریم:

$$f(1, 1) = 1 - 2 + 2 = 1$$

مجموعه نقاط روی خطوط مرزهای دامنه را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم.

$$L_1 = \{(x, 0) | 0 \leq x \leq 3\}, \quad L_2 = \{(x, 2) | 0 \leq x \leq 3\}$$

$$L_3 = \{(3, y) | 0 \leq y \leq 2\}, \quad L_4 = \{(0, y) | 0 \leq y \leq 2\}$$

محاسبه‌ی مقادیر تابع در L_1 :

$$f(x, 0) = x^2 \quad 0 \leq x \leq 2$$

این تابع در نقاط زیر اکسترمم دارد:

$$f(0, 0) = 0, f(3, 0) = 9$$

پس $(0, 0)$ مینی‌موم مطلق در L_1 و $(3, 0)$ ماکزیمم مطلق در L_1 است.

محاسبه‌ی مقادیر تابع در L_2 :

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \quad x \in (0, 3)$$

$$f(2, 2) = 4 \quad \text{ماکزیمم مطلق در مسیر } L_2$$

$$f(0, 2) = 4 \quad \text{مینی‌موم مطلق در مسیر } L_2$$

محاسبه‌ی مقادیر تابع در L_3 :

$$f(3, y) = 9 - 6y + 2y = 9 - 4y \quad y \in [0, 2]$$

$$f(3, 2) = 9 - 8 = 1, f(3, 0) = 9$$

پس در مسیر L_3 نقطه‌ی $f(3, 2)$ مینی‌موم مطلق و نقطه‌ی $f(3, 0)$ ماکزیمم مطلق است.
محاسبه‌ی مقادیر تابع در L_4 :

$$f(0, y) = 2y \quad y \in [0, 2]$$

$$f(0, 0) = 0, f(0, 2) = 4$$

پس در مسیر L_4 نقطه‌ی $(0, 0)$ مینی‌موم مطلق و نقطه‌ی $(0, 2)$ ماکزیمم مطلق است. از مقایسه‌ی نقاط بدسته آمده نتیجه می‌گیریم که در نقاط $(0, 0)$ و $(2, 2)$ مینی‌موم رخ می‌دهد و مقدار تابع در این نقاط برابر صفر است؛ همچنین در نقطه‌ی $(3, 0)$ ماکزیمم مطلق رخ داده است و مقدار تابع در این نقطه ۹ است. $\square$

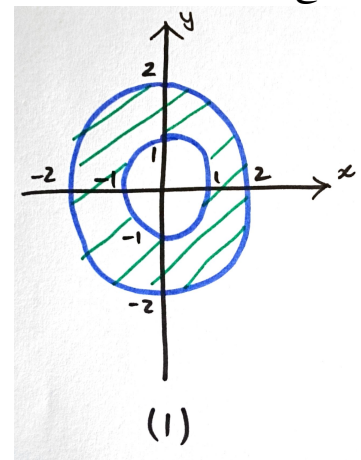
تمرین ۱۰۰. اکسترم‌های مطلق تابع $f(x, y) = xy^2$ را در ناحیه‌ی D بیابید.

$$D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$$

تمرین ۱۰۱. اکسترم‌های مطلق تابع $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ را در ناحیه‌ی D بیابید.

$$D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

پاسخ.

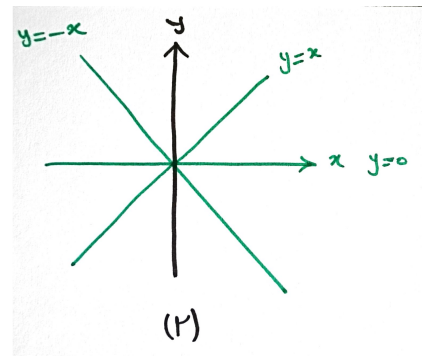


ناحیه‌ی D بسته و کراندار است و تابع f در ناحیه‌ی D پیوسته است. بنابراین f در D دارای اکسترم‌های مطلق است. حال می‌خواهیم نقاط بحرانی تابع $f(x, y)$ برای $(x, y) \in D$ را بیابیم.

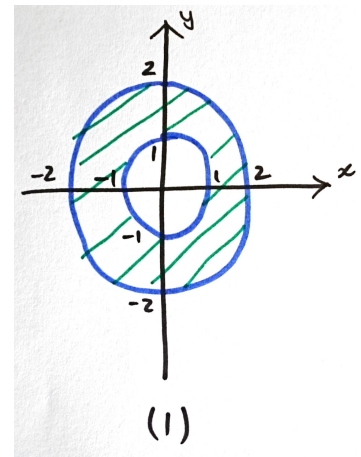
$$f_x(x, y) = \frac{y^2(x^2 + y^2) - 2x(xy^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow y^2(y^2 - x^2) = 0$$

بنابراین $f_x(x, y)$ روی خطوط $y = 0$ و $y = \pm x$ برابر صفر است.

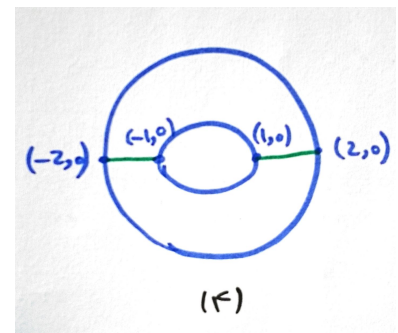


$$f_y(x, y) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2y(xy^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3y + 2xy^3 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$



روی خطوط $x = 0$ و $y = 0$ مقدار f_y صفر است. پس نقاط بحرانی تابع که از اشتراک این خطوط به دست می‌آیند به صورت زیرند:

$$D \cap \{(x, y) | y = 0\}$$



مقادیر تابع در نقاط بحرانی برابر صفر است. حال اکستریم‌های تابع را روی مرزهای D بدست می‌آوریم.

$$L_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$$

مقادیر تابع $f(x, y)$ روی مرز L_1 را توسط تابع تک متغیره g به صورت زیر پوشیده می‌شوند:

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x, y) \in L_1} g(x) = x(1 - x^2) = x - x^3 \quad x \in [-1, 1]$$

برای تعیین اکستریم‌های تابع $g(x)$ در ناحیه $[-1, 1]$ ابتدا نقاط بحرانی تابع را بدست می‌آوریم.

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مقادیر تابع در این نقاط به صورت زیر است.

$$g(x) = x - x^3 \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3^3}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} \end{cases}$$

پس برای تابع $f(x, y)$ مقادیر زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{1 - \frac{1}{3}}\right) &\Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{1 - \frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{1 - \frac{1}{3}}\right) &\Rightarrow f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{1 - \frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \end{aligned}$$

محاسبه‌ی g در نقاط مرزی:

$$g(1) = 0, g(-1) = 0$$

یعنی

$$f(1, 0) = f(-1, 0) = 0.$$

حال به طور مشابه مقادیر تابع را روی مرز L_2 محاسبه می‌کنیم.

$$L_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$$

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \in L_2$$

$$h(x) = \frac{x(4 - x^2)}{4} \quad x \in [-2, 2]$$

روند بالا را برای تابع h نیز تکرار کنید. مقادیر تابع f را در نقاط بدست آمده با هم مقایسه کنید. ادامه با شما! اکسترم‌های بدست آمده به صورت زیر خواهند بود:

$$f\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{4 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) = 0.77 \text{ ماکزیمم مطلق}$$

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{4 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) = -0.77 \text{ مینی‌موم مطلق}$$

□

۳.۶ تمرین

اکسترم‌های مطلق توابع زیر را بر ناحیه داده شده پیدا کنید:

• $x^2 + y^2 - 2x$ در ناحیه بسته محاط توسط مثلث به رئوس $(0, 2)$ ، $(2, 0)$ و $(0, -2)$.

• $x^2 + y^2 + x^2y + 4$ در ناحیه

$$D = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

• $x^2 + xy + y^2 - 6y$ در ناحیه

$$D = \{(x, y) : -3 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 5\}$$

۴.۶ روش ضرایب لاگرانژ

در مثال قبل لازم بود که اکستریم‌های مطلق تابع $f(x, y)$ را روی ناحیه‌ی $L_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ محاسبه کنیم. برای این کار از توابع تک متغیره استفاده کردیم. در این بخش، می‌خواهیم روشی کلی برای محاسبه‌ی اکستریم‌های مطلق یک تابع، تحت یک قید ارائه کنیم. نخست روش مورد نظر را به صورت یک دستورالعمل بیان می‌کنیم و سپس برای این دستورالعمل توجیه‌های هندسی و جبری خواهیم آورد:

برای تعیین اکستریم‌های مطلق $f(x, y)$ تحت قید $g(x, y) = k$ از روش زیر استفاده می‌کنیم:

(۱) دستگاه سه معادله با سه مجهول زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = k \end{cases}$$

(۲) مقادیر اکستریم مطلق تابع f دقیقاً در برخی از (x, y) ‌های جواب معادله‌ی بالا رخ می‌دهد. مقادیر تابع را در این نقاط با هم مقایسه می‌کنیم.

(۳) جوابهایی که در آنها g_x, g_y همزمان صفر هستند نیز باید به طور جداگانه بررسی شوند.

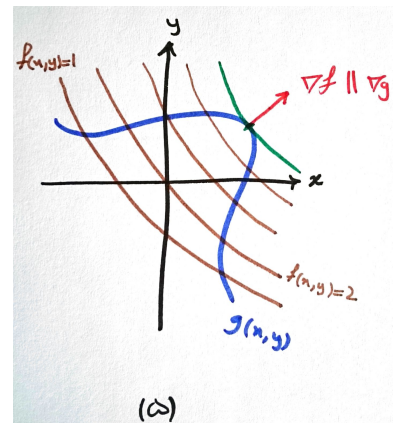
به بیان دیگر دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \rightarrow \text{گرادیان } f \text{ با گرادیان } g \text{ موازی شود.} \\ g(x, y) = k \end{cases}$$

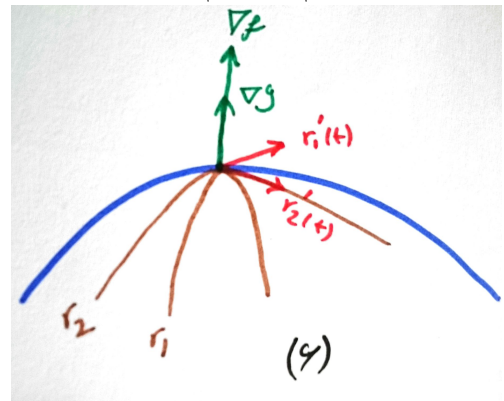
تعمیم ۱۹۳. برای تعیین اکستریم‌های مطلق تابع $f(x, y, z)$ تحت قید $g(x, y, z) = k$ دستگاه چهار معادله با چهار مجهول زیر را حل کرده مقادیر تابع را در (x, y, z) ‌های بدست آمده با هم مقایسه می‌کنیم. حداکثر این مقادیر، ماکزیمم مطلق و حداقل آنها مینی‌موم مطلق خواهد شد.

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = k \end{cases}$$

در شکل زیر توجیهی هندسی برای روش ضرایب لاگرانژ برای توابع دو متغیره آورده‌ایم. دقت کنید که در تقاطع با نمودار تابع $g(x, y) = k$ تابع f زمانی حداکثر می‌شود که منحنی تراز آن بر g مماس شود؛ دقیقاً در جایی که f می‌خواهد از $g(x, y) = k$ خارج شود. در نقطه‌ای که ایندو بر هم مماسند، باید گرادیانها با هم موازی باشند.



بیایید برای توابع سه متغیره، روش ضرایب لاگرانژ را به طور دقیقتر توجیه کنیم. تابع سه متغیره $f(x, y, z)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم اکستریم مطلق آن را روی رویه $g(x, y, z) = k$ محاسبه کنیم.



فرض کنید $\vec{r}(t)$ یک منحنی فضایی باشد به طوری که $\vec{r}(t) = p$ و یک نقطه‌ی ماکزیمم مطلق برای تابع f باشد. پس تابع تک متغیره زیر از $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ در $t = t_0$ دارای ماکزیمم مطلق است.

$$t \mapsto f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$$

تابع $h(t)$ در نقطه‌ی $t = t_0$ دارای ماکزیمم مطلق است. پس $h'(t_0) = 0$.

$$\frac{\partial f(x(t), y(t), z(t))}{\partial t}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}z'(t) = 0$$

پس در نقطه‌ی p داریم:

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{r}'(t) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \perp \vec{r}'(t_0)$$

خلاصه ۱۹۴. ∇f بر تمام بردارهای $\vec{r}'(t)$ برای منحنی‌های گذرنده از p عمود است. پس ∇f بر صفحه‌ی مماس بر g در نقطه‌ی p عمود است. از طرفی ∇g نیز در همان نقطه بر صفحه‌ی مماس عمود است. پس

$$\nabla f \parallel \nabla g$$

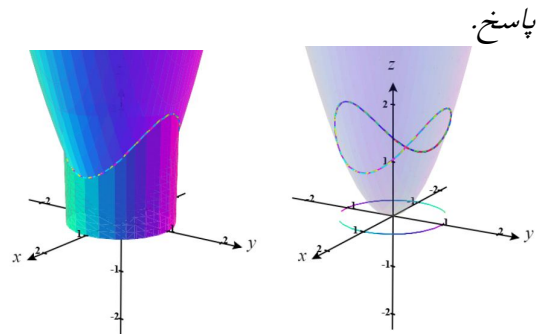
توجه ۱۹۵. در بالا فقط یک دستور العمل غیردقیق بیان کردیم. به طور دقیق تر روش ضرایب لاگرانژ برای محاسبه اکستریمهای تابع $f(x, y, z)$ با شرط $g(x, y, z) = 0$ استفاده می‌شود؛ اما صورت دقیق قضیه به صورت زیر است:

فرض کنید f, g مشتقات اول پیوسته حول یک نقطه‌ی P داشته باشند. فرض کنید P روی منحنی $g(x, y, z) = 0$ واقع باشد و بدانیم که f روی P دارای ماکزیمم یا مینیوم نسبی است. همچنین فرض کنید P یک نقطه

انتهایی از منحنی $g(x, y) = 0$ نباشد و $\nabla g(P) \neq 0$. در این صورت در نقطه P گرادیانهای f, g با هم موازی هستند.

در واقع موقع استفاده از ضرایب لاگرانژ باید به این نکته دقت کنیم که اولاً شرط $\nabla f \parallel \nabla g$ موجب وجود اکسترم نیست. ثانیاً اکسترم مورد نظر در صورت وجود، یا در یک نقطه است که در آن $\nabla g = 0$ ، یا در یک نقطه است که در آن $\nabla f \parallel \nabla g$ ، و یا در یک نقطه انتهایی منحنی $g(x, y) = 0$.

مثال ۱۹۶. حداقل و حداکثر مقدار تابع $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ را روی دایره‌ی $x^2 + y^2 = 1$ را تعیین کنید.



$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y) = k \end{cases} = \begin{cases} 2x = \lambda(2x) \\ 4y = \lambda(2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

از معادله‌ی $2x = \lambda(2x)$ نتیجه می‌گیریم که یا $x \neq 0$ و $\lambda = 1$ ؛ یا $x = 0$. از معادله‌ی $4y = \lambda(2y)$ و معادله‌ی $x^2 + y^2 = 1$ و جواب‌های معادله‌ی قبلی نتیجه می‌گیریم که

$$(1) \quad \lambda = 1 \rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (\pm 1, 0)$$

$$(2) \quad x = 0 \rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow (0, \pm 1)$$

پس مینی‌موم‌های مطلق تابع برابرند با

$$f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$$

و ماکزیمم‌های مطلق تابع برابرند با

$$f(0, 1) = f(0, -1) = 2$$

□

گفتیم که برای تعیین اکسترمهای مطلق تابع $f(x, y, z)$ تحت قید $g(x, y, z) = k$ باید دستگاه زیر با چهار معادله با چهار مجهول x, y, z, λ را حل کنیم.

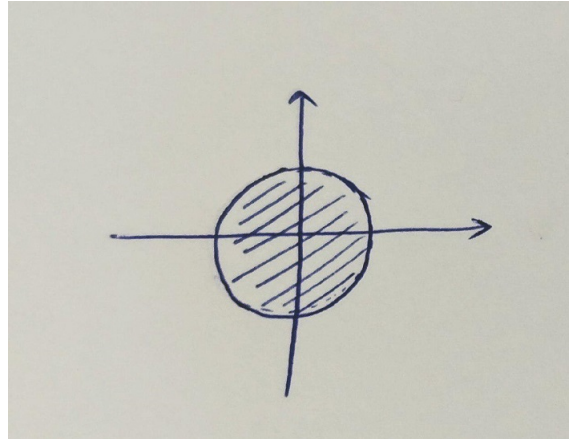
$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y, z) = k \end{cases}$$

مثال ۱۹۷. ماکزیمم و مینیمم های مطلق تابع $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ را روی دیسک $x^2 + y^2 \leq 1$ بیابید.

پاسخ. مراحل پاسخ به صورت زیر هستند:

(۱) تعیین نقاط بحرانی تابع در درون دیسک $x^2 + y^2 < 1$. (۲) تعیین اکسترمم های مطلق تابع روی مرز $x^2 + y^2 = 1$.
مرحله اول:

$$f_x(x, y) = 2x \quad f_y(x, y) = 4y$$



پس نقطه‌ی $(0, 0)$ نقطه‌ی بحرانی است.

$$f(0, 0) = 0$$

مرحله دوم: تعیین اکسترمم های تابع $f = x^2 + 2y^2$ تحت قید $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{cases} 2x = 2x\lambda \Rightarrow x = 0 \quad or \quad \lambda = 1 \\ 4y = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

از معادله‌ی سوم:

$$x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

نقاط: $(\pm 1, 0)$ $(0, \pm 1)$

$$\underbrace{f(0, 0) = 0}_{\text{مینیمم مطلق}} \quad f(\pm 1, 0) = 1 \quad \underbrace{f(0, \pm 1) = 2}_{\text{ماکزیمم مطلق}}$$

□

مثال ۱۹۸. نقطه‌ی روی صفحه‌ی $x + 4y + 3z = 2$ پیدا کنید که تابع $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ در آن نقطه دارای کمترین مقدار باشد.

پاسخ. استفاده از روش ضرایب لاگرانژ:

$$\begin{cases} 1 = \lambda(4x) \rightarrow x = \frac{1}{4\lambda} \\ 4 = \lambda(6y) \rightarrow y = \frac{2}{3\lambda} \\ 3 = \lambda(2z) \rightarrow z = \frac{3}{2\lambda} \end{cases} \Rightarrow \frac{3 + 32 + 18}{12\lambda} = \frac{53}{12\lambda} = 2$$

$$x + 4y + 3z = 2 \rightarrow \frac{1}{4\lambda} + 4\left(\frac{2}{3\lambda}\right) + 3\left(\frac{3}{2\lambda}\right) = 2$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{53}{24} \simeq 2.2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4 \times 2.2} \quad y = \frac{2}{3 \times 2.2} \quad z = \frac{3}{2 \times 2.2}$$

□

۵.۶ تمرین

تمرین ۱۰۲. حداکثر حجم یک جعبه ی مکعب مستطیلی بدون در را بیابید که با $12m^2$ مقوا ساخته شود. راهنمایی: از روش ضرایب لاگرانژ با قید و تابع زیر استفاده کنید:

$$\begin{cases} 2xy + 2yz + xz = 12 \\ V = xyz \end{cases}$$

تمرین ۱۰۳. از بین مثلث ها، مثلثی رابیاید که مجموع سینوس زوایای آن حداکثر شود.

راهنمایی: $f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3$ تحت قید $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$

تمرین ۱۰۴. سه عدد بیابید که حاصل جمع آنها ۱۲۰۰ و حاصل ضرب آنها ماکزیمم شود.

تمرین ۱۰۵. سه عدد بیابید که حاصل ضرب آنها n شود و مجموع مربعات آنها حداکثر شود.

راهنمایی:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz = n \end{cases}$$

تمرین ۱۰۶. اکسترم های توابع زیر را تحت قید داده شده بیابید.

(الف)

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x + y + z \\ g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + 8y^2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$$

(ج)

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ x - 2y + 2z = 6 \end{cases}$$

(د)

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

(ه)

$$\begin{cases} f(x, y) = xe^y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

(و)

$$\begin{cases} f(x, y, z) = e^{xyz} \\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 24 \end{cases}$$

(ظ)

$$\begin{cases} f(x, y, z) = xyz \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

تمرین ۱۰۷. اکستریمهای مطلق تابع سه متغیره $f(x, y, z) = x^2 - 2yz$ را بر مجموعه

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$$

بیابید.

تمرین ۱۰۸. نقاطی روی بیضی $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ پیدا کنید که فاصله ی آنها تا مبدأ حداقل باشد.

پاسخ. کافی است مینیموم مطلق تابع $x^2 + y^2 + z^2$ را تحت قید $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ بیابیم. (روش ضرایب لاگرانژ)

□

تمرین ۱۰۹. نقاطی واقع بر بیضی $x^2 + 2y^2 = 1$ بیابید که در آنها $f(x, y) = xy$ اکستریم مطلق داشته باشد.

تمرین ۱۱۰. مقادیر اکستریم تابع $f(x, y) = x^2y$ را بر خط $x + y = 3$ بیابید.

تمرین ۱۱۱. در نقطه (x, y) روی یک ورق فلزی، دما برابر است با $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. مورچه ای روی یک دایره به شعاع ۵ به مرکز مبدأ، روی این ورق فلزی راه می رود. حداکثر و حداقل دمایی که این مورچه با آن مواجه می شود چقدر است؟

تمرین ۱۱۲. از شرکتی خواسته شده مخزنی برای انبار کردن گاز مایع طراحی کند. مشتری مخزنی می خواهد که استوانه ای شکل و دو انتهای آن به صورت نیمکره باشد و ظرفیت آن ۸۰۰۰ متر مربع باشد. همچنین مشتری می خواهد حداقل مقدار ورق در ساخت این مخزن استفاده شود. شعاع و ارتفاع استوانه مخزن چقدر باید باشد؟

تمرین ۱۱۳. مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $x^2 + y^2$ را با قید $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$ بیابید.

تمرین ۱۱۴. نزدیکترین نقطه صفحه $13 = x + 2y + 3z$ به نقطه $(1, 1, 1)$ را بیابید.

تمرین ۱۱۵. مقادیر ماکزیمم و مینیوم تابع $f(x, y, z) = x - 2y + 5z$ را بر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ بیابید.

تمرین ۱۱۶. مینیوم فاصله رویه $1 = x^2 + y^2 - z^2$ از مبدأ را بیابید.

تمرین ۱۱۷. نقاطی از کره $25 = x^2 + y^2 + z^2$ را بیابید که در آنها تابع $x + 2y + 3z$ مقادیر ماکزیمم و مینیوم خود را اختیار می‌کند.

تمرین ۱۱۸. مقادیر ماکزیمم و مینیوم تابع $2y + 3y^2 + x^2$ را بر قرص واحد $1 \leq x^2 + y^2$ بیابید.

تمرین ۱۱۹. یک فضاپیما به شکل بیضی وار

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$$

وارد جو زمین می‌شود و سطح آن شروع به گرم شدن می‌کند. بعد از یک ساعت دمای هر نقطه (x, y, z) بر سطح فضاپیما برابر است با

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600.$$

گرمترین نقطه روی فضاپیما را بیابید.

تمرین ۱۲۰. می‌خواهیم یک تلسکوپ روی یک سیاه تازه کشف شده، در جایی نصب کنیم که میدان مغناطیسی ضعیف‌ترین باشد. سیاره مورد نظر کروی است و شعاع آن ۶ واحد است. شدت میدان مغناطیسی از رابطه $M(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$ به دست می‌آید. تلسکوپ را در کجا قرار دهیم؟

تمرین ۱۲۱. یک شرکت داروسازی، یک محصول با ترکیب دو ماده تولید می‌کند. هزینه تولید این محصول $U(x, y)$ $xy + 2x$ است. شرکت مایل با شرط $2x + y = 30$ مقدار U را مینیوم کند. مقادیر مورد نیاز را بیابید.

۶.۶ کار نکردن روش

تمرین ۱۲۲. نشان دهید روش ضرایب لاگرانژ برای محاسبه مینیوم تابع $f(x, y) = y$ با شرط $g(x, y) = y^3 - x^2 = 0$ کار نمی‌کند. (g را با استفاده از نرم‌افزارها رسم کنید.)

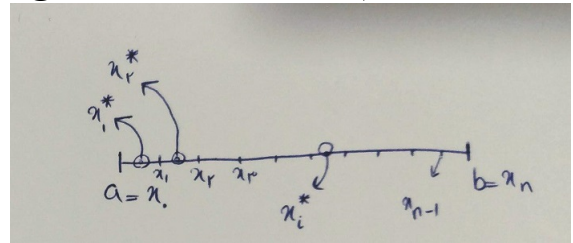
تمرین ۱۲۳. برای یافتن ماکزیمم تابع $f(x, y) = x + y$ با قید $xy = 16$ اگر از روش استفاده کنید به دو نقطه می‌رسید. اما این تابع با این شرط هیچ ماکزیممی ندارد.

فصل ۷

انتگرال دو گانه

۱.۰.۷ مرور مفهوم انتگرال در ریاضی عمومی یک

پیش از آنکه بخواهم درباره‌ی انتگرال دو گانه توضیح دهم، لازم می‌دانم مفاهیمی ضروری را از درس ریاضی ۱ یادآوری کنم.



فرض کنید $f(x)$ یک تابع تک متغیره باشد که روی بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ تعریف شده است. این بازه را به n قسمت با طولهای مساوی تقسیم کنید. طول هر قسمت برابر خواهد بود با:

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x$$

از بازه‌ی i ام عنصر x_i^* را انتخاب کنید و جمع ریمانی زیر را بسازید.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

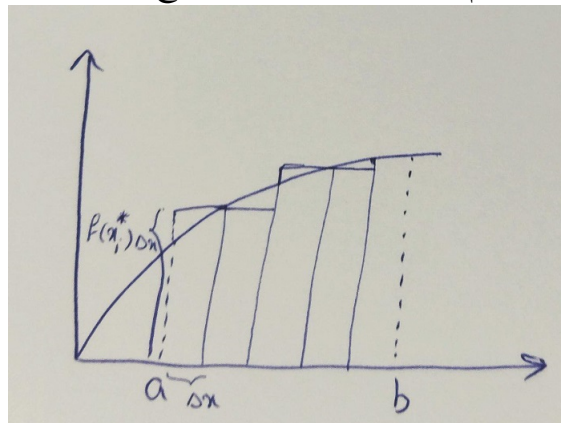
حال می‌توانیم تعداد بازه‌ها در این تقسیم بندی را زیاد کنیم، و نهایتاً به صورت حد بگیریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

اگر حاصل حد بالا موجود باشد، تابع f را در $[a, b]$ انتگرال پذیر می‌خوانیم و می‌نویسیم:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x.$$

نیز گفتیم که از لحاظ هندسی، اگر تابع مورد نظر مثبت باشد، حد بالا در واقع مساحت زیر منحنی تابع را نشان می‌دهد.



عموماً برای محاسبه‌ی انتگرال از قضیه‌ی اساسی استفاده می‌کردیم. بنا به این قضیه، مفهوم انتگرالگیری به نوعی دوگان مفهوم مشتقگیری است.

قضیه‌ی اساسی حسابان:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

به بیان دیگر اگر تابع F را به صورت زیر تعریف کنیم

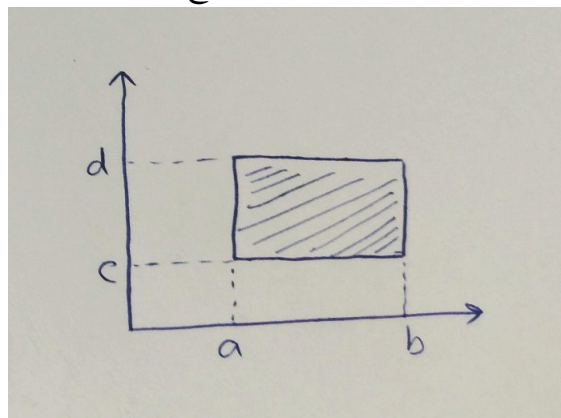
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

آنگاه

$$F'(x) = f(x)$$

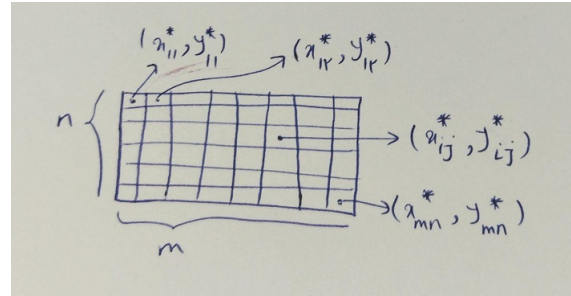
۱.۷ جمع‌های ریمانی دوگانه

فرض کنید $f(x, y)$ یک تابع دو متغیره باشد که روی ناحیه‌ی مستطیلی R تعریف شده باشد:



$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

دامنه، یعنی R را به صورت مقابل به $n \times n$ قسمت با مساحت‌های مساوی ΔA تقسیم بندی می کنیم.



از هرکدام از مستطیل های ایجاد شده نقطه ای به دلخواه، مثلاً نقطه‌ی (x_{ij}^*, y_{ij}^*) را، انتخاب می کنیم و جمع ریمانی را می سازیم:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

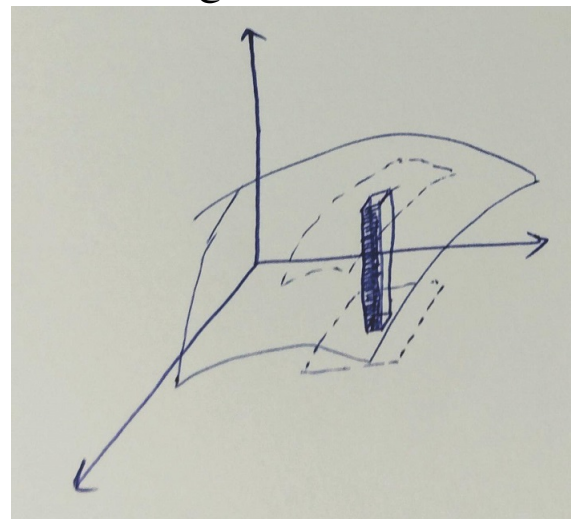
تعریف ۱۹۹. تابع f را در ناحیه ی مستطیلی R انتگرال پذیر می خوانیم هرگاه حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

و در این صورت می نویسیم:

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

تعبیر هندسی: فرض کنید تابع $f(x, y) \geq 0$ روی ناحیه ی مستطیلی R تعریف شده باشد.



عبارت

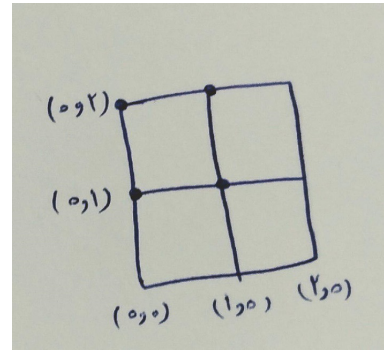
$$f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A$$

حجم یک مکعب مستطیل را نشان می دهد که مقطع آن ΔA است. حاصل جمع حجم این مکعب مستطیلها در واقع تقریبی

برای حجم جسم واقع شده بر زیر رویه‌ی $z = f(x, y)$ و بالای ناحیه ی مستطیلی R است. بنابراین $\iint_R f(x, y) dA$

بیانگر حجم ناحیه‌ی زیر رویه‌ی $f(x, y)$ و بالای مستطیل R است.

مثال ۲۰۰. حجم جسمی را که بالای مستطیل $R = [0, 2] \times [0, 2]$ و زیر سهمی وار بیضوی $z = 16 - x^2 - 2y^2$ واقع شده است، تقریب بزنید.



پاسخ.

$$f(0, 2) = 8 \quad f(0, 1) = 14$$

$$f(1, 2) = 7 \quad f(1, 1) = 13 \quad \Delta A = 1$$

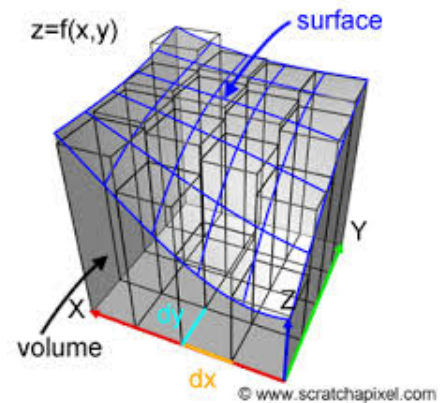
□

$$\text{حجم مورد نظر} \approx 1(8 + 7 + 14 + 13) = 42$$

گفتیم که جمعهای ریمانی در واقع تقریبی برای حجم یک ناحیه به دست می دهند و با حدگیری از آنها به انتگرال دوگانه

می رسیم.

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x, y)_{i,j} \Delta A = \iint_R f(x, y) dA$$



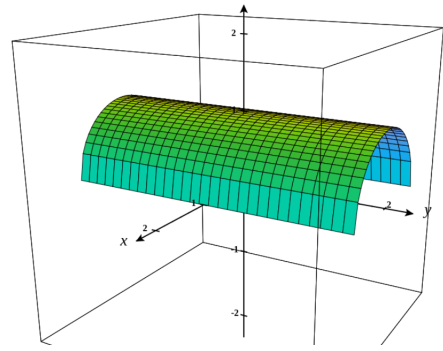
مثال ۲۰۱. فرض کنید $R = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$. حاصل $\iint_R \sqrt{1-x^2} dA$ را محاسبه کنید.

پاسخ. بنابر آنچه گفته شد، کافی است حجم ناحیه ی زیر رویه ی $z = \sqrt{1-x^2}$ و بالای R را محاسبه کنیم. حجم نیم

استوانه برابر است با

$$\frac{4\pi}{2} = 2\pi$$

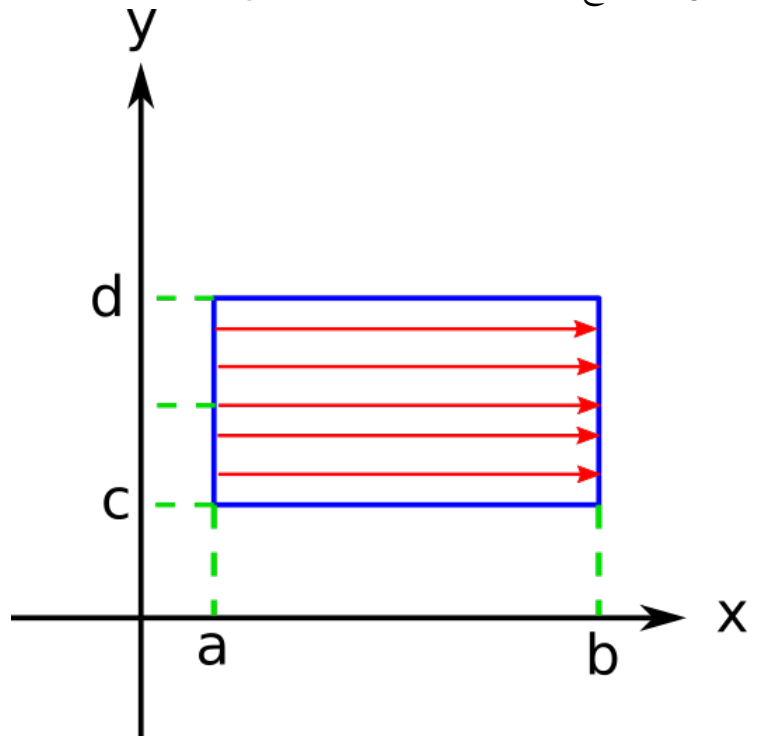
^۱ زحمت تایپ جزوه ی این جلسه را خانم شیرجزی کشیده اند.



□

۱.۱.۷ انتگرال جزئی

فرض کنید تابع $f(x, y)$ روی ناحیه‌ی مستطیلی R تعریف شده باشد.

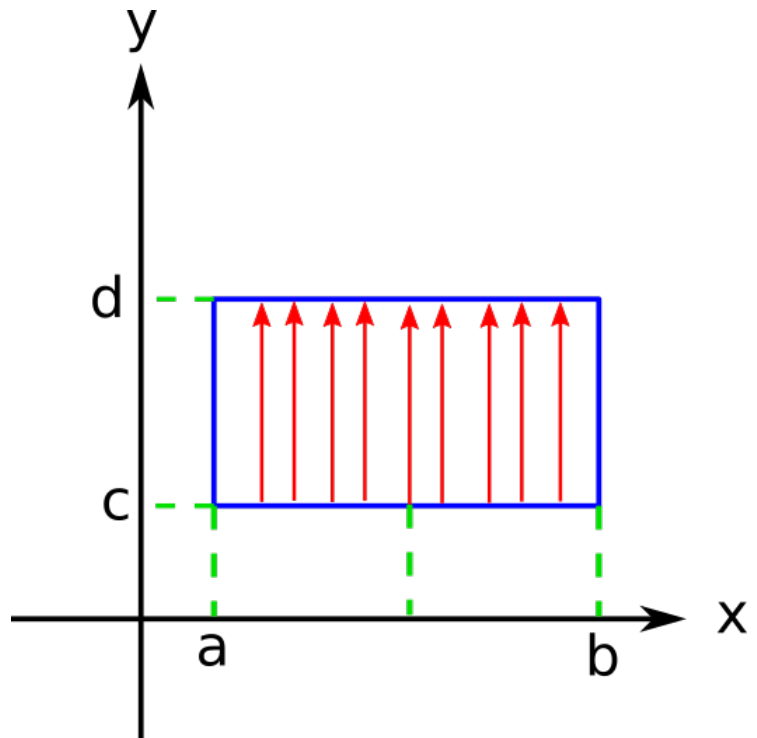


برای عدد دلخواه y در بازه‌ی $[c, d]$ تعریف می‌کنیم:

$$h(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (\text{انتگرال جزئی نسبت به } x)$$

عبارت بالا برای هر $y \in [c, d]$ دلخواه قابل تعریف است. پس تابع زیر را داریم:

$$y \xrightarrow{h} \int_a^b f(x, y) dx$$



به طور مشابه برای x دلخواه در بازه‌ی $[a, b]$ تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad (\text{انتگرال جزئی نسبت به } y)$$

با استفاده از انتگرالهای جزئی، می‌توانیم انتگرالهای مکرر را به صورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۲۰۲.

$$(*) \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx := \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

در تعریف بالا، به ترتیب ظاهر شدن dy و dx در سمت چپ، توجه داشته باشید. بعداً قرار است درباره‌ی این ترتیب انتگرال‌گیری بیشتر صحبت کنیم. بنا بر آنچه در بالا گفته شد، محاسبه‌ی انتگرال $(*)$ یعنی محاسبه‌ی

$$\int_a^b h(x) dx.$$

مشابه‌اً با تغییر ترتیب انتگرال‌گیری، تعریف زیر را داریم:

تعریف ۲۰۳.

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy := \int_c^d \underbrace{\left(\int_a^b f(x, y) dx \right)}_{h(y)} dy$$

تمرین ۱۲۴. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$۱. \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx$$

پاسخ.

$$\int_1^2 x^2 y dy = x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_1^2 = 2x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2}x^2$$

$$\int_1^3 \int_1^3 x^2 y dy dx = \int_1^3 \frac{x^3}{3} dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{27}{4}$$

□

$$2. \int_1^3 \int_1^3 x^2 y dx dy$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} \int_1^3 x^2 y dx &= \frac{x^3}{3} y \Big|_1^3 = \frac{27}{3} y \\ \int_1^3 \int_1^3 x^2 y dx dy &= \int_1^3 \frac{27}{3} y dy = \frac{27}{3} \frac{y^2}{2} \Big|_1^3 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

□

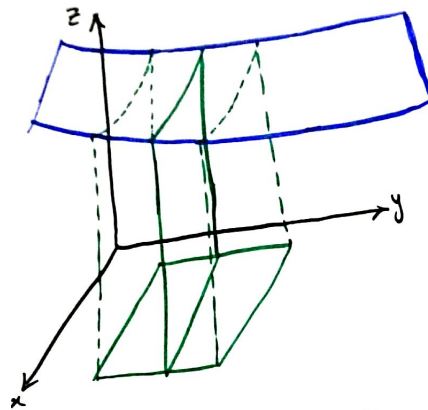
در بالا دیدیم که با تعویض ترتیب انتگرالگیری به جوابهای یکسانی رسیدیم. این امر تحت شرایط قضیه‌ی زیر همواره درست است.

۲.۷ قضیه فوبینی

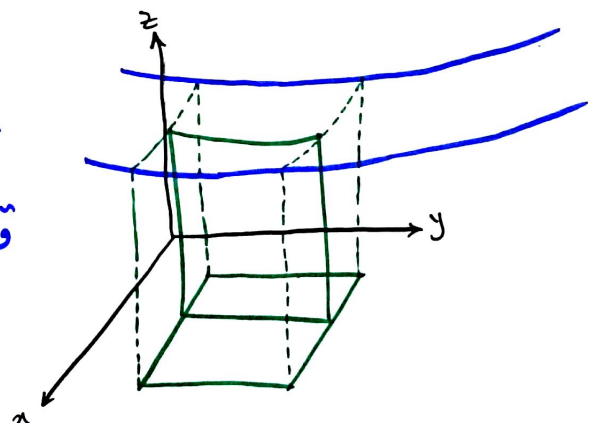
قضیه ۲۰۴ (فوبینی). اگر تابع f در ناحیه‌ی مستطیلی R (یعنی $R = [a, b] \times [c, d]$) پیوسته باشد آنگاه

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

توجیه هندسی



توجیه هندسی
قضیه فوبینی



یکی از مواهب قضیه فوبینی این است که

گاهی تغییر ترتیب انتگرالگیری، انتگرالگیری را ساده‌تر می‌کند.

مثال ۲۰۵. $\iint_R y \sin(xy) dA$ را محاسبه کنید که در آن $R = [1, 2] \times [0, \pi]$. (ترتیب مناسب انتگرالگیری را خودتان تشخیص دهید).

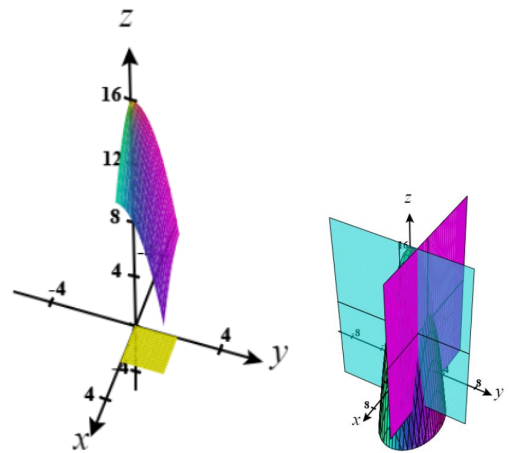
پاسخ.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^\pi y \sin(xy) dy dx &= \int_0^\pi \int_1^2 y \sin(xy) dx dy \\ \int_1^2 y \sin(xy) dx &= -\cos(xy) \Big|_1^2 = -\cos(2y) + \cos(y) \\ \int_0^\pi (-\cos(2y) + \cos(y)) dy &= \left(-\frac{\sin(2y)}{2} + \sin(y) \right) \Big|_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

□

مثال ۲۰۶. حجم جسمی را بیابید که توسط سهمی وار بیضوی $x^2 + 2y^2 + z = 16$ و صفحات $x = 2$ و $y = 2$ و صفحات مختصات احاطه شده است.

اثبات.



ناحیه‌ی انتگرالگیری برابر است با

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\} \\ \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dy dx &= \int_0^2 (16y - yx^2 - \frac{2}{3}y^3) \Big|_0^2 dx = \int_0^2 (32 - 2x^2 - \frac{16}{3}) dx \\ &= \int_0^2 (\frac{80}{3} - 2x^2) dx = (\frac{80}{3}x - \frac{2}{3}x^3) \Big|_0^2 = \frac{160}{3} - \frac{16}{3} = \frac{144}{3} = 48 \end{aligned}$$

□

توجه ۲۰۷. حواستان باشد که انتگرال دوگانه، حاصلضرب دو تا انتگرال یگانه نیست:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \neq \int_a^b f(x, y) dx \times \int_c^d f(x, y) dy$$

توجه ۲۰۸. با این حال اگر f فقط تابعی از x و g فقط تابعی از y باشد داریم:

$$\int_a^b \underbrace{\int_c^d f(x)g(y)dy}_{A} dx$$

$$A = \int_c^d f(x)g(y)dy = f(x) \int_c^d g(y)dy$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x)g(y)dydx = \int_a^b Adx = \int_a^b f(x) \int_c^d g(y)dydx = \int_a^b f(x)dx \times \int_c^d g(y)dy$$

تمرین ۱۲۵. انتگرال‌های زیر را بیابید.

$$۱. \int_1^e \int_1^e \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy dx$$

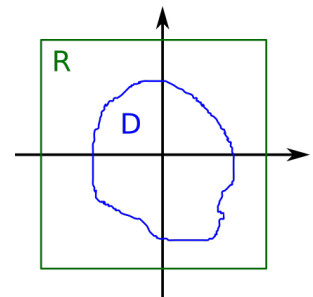
$$۲. \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xy\sqrt{x^2 + y^2} dy dx$$

تمرین ۱۲۶. حجم جسمی را بیابید که توسط رویه $z = 1 + x^2ye^y$ و صفحات $\begin{cases} z = 0 \\ x = \pm 1 \\ y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ احاطه شده است.

۳.۷ انتگرالگیری در نواحی کلی

درباره‌ی انتگرالگیری در نواحی مستطیلی در جلسات پیش سخن گفتیم. در این جا می‌خواهیم انتگرالگیری روی نواحی دلخواه را مورد بررسی قرار دهیم. فرض کنید D یک ناحیه‌ی دلخواه در $\mathbb{R}^2$ باشد. تابع f را روی این ناحیه انتگرالپذیر می‌خوانیم هرگاه تابع F تعریف شده به صورت زیر، در ناحیه‌ای مستطیلی شامل D انتگرالپذیر باشد.

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \in R - D \end{cases}$$

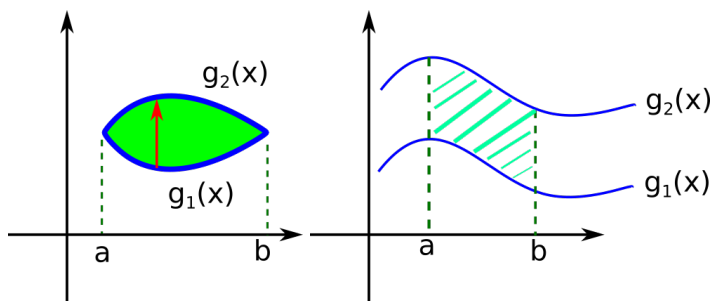


محاسبه‌ی انتگرال در نواحی کلی چندان آسان نیست؛ لیکن در نواحی خاصی می‌توان انتگرال را آسانتر حساب کرد. در زیر درباره‌ی این نواحی و نحوه‌ی انتگرالگیری در آنها سخن گفته‌ایم.

نواحی نوع اول

نواحی به صورت زیر را نوع اول می خوانیم:

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$



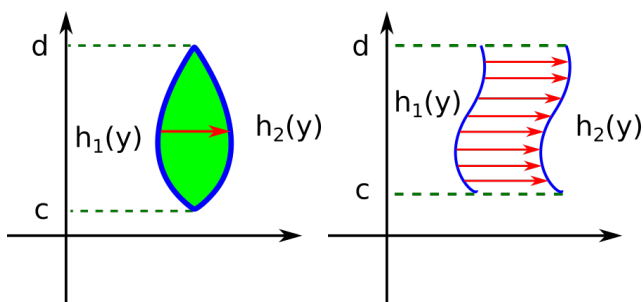
اگر D یک ناحیه‌ی نوع اول مانند بالا باشد داریم:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \underbrace{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy}_{\text{تابعی از } x} dx$$

نواحی نوع دوم

نواحی مانند D در زیر را نوع دوم می خوانیم:

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$



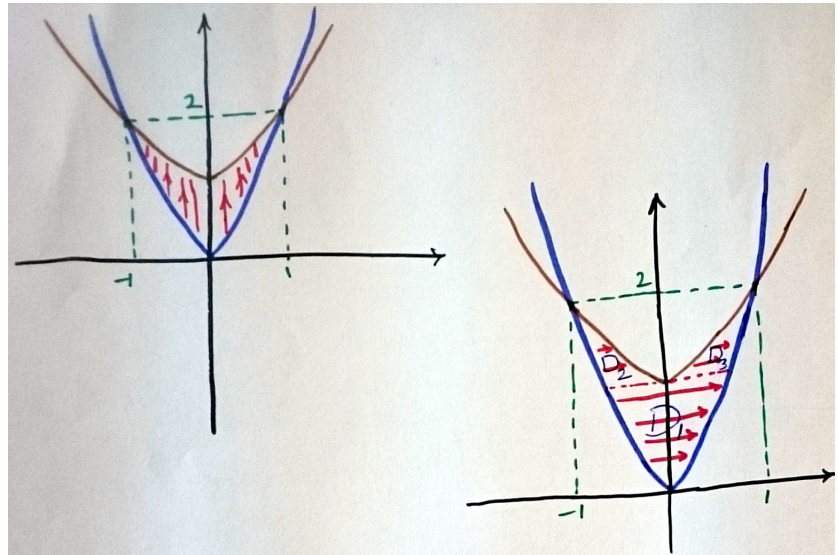
اگر D یک ناحیه‌ی نوع دوم باشد، آنگاه

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \underbrace{\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx}_{\text{تابعی از } y} dy$$

مثال ۲۰۹. فرض کنید D ناحیه‌ی محصور بین سهمی‌های $y = 1 + x^2$ و $y = 2x^2$ باشد. آنگاه $\iint_D (x + 2y) dA$ را محاسبه کنید.

پاسخ. ابتدا ناحیه‌ی انتگرالگیری را ترسیم می کنیم.

$$1 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm 1$$



D را می‌توان یک ناحیه نوع اول در نظر گرفت و به صورت زیر انتگرالگیری کرد:

$$\iint_D (x + 2y) dA = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{1+x^2} (x + 2y) dy dx$$

$$\int_{x^2}^{1+x^2} (x + 2y) dy = xy \Big|_{x^2}^{1+x^2} + y^2 \Big|_{x^2}^{1+x^2} = x(1 + x^2 - x^2) + (1 + x^2)^2 - x^4 =$$

$$-3x^4 - x^2 + 2x^2 + x + 1$$

$$\int_{-1}^1 (-3x^4 - x^2 + 2x^2 + x + 1) dx = \left(-\frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{47}{15}$$

D را می‌توان اجتماعی از نواحی نوع دوم در نظر گرفت و همین سوال را به صورت زیر حل کرد:

$$y = 2x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{y}{2}}$$

$$\iint_{D_1} (x + 2y) dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} (x + 2y) dx dy$$

$$\int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} (x + 2y) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2yx \right) \Big|_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} = 4\sqrt{\frac{y}{2}}y$$

$$\int_0^1 \left(\frac{4}{\sqrt{2}} \sqrt{y^3} \right) dy = \frac{4}{\sqrt{2}} \sqrt{y^5} \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

$$\iint_{D_2} (x + 2y) dA = \int_1^2 \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} (x + 2y) dx dy = \dots$$

$$\iint_{D_2} (x + 2y) dA = \int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} (x + 2y) dx dy = \dots$$

□

مثال ۲۱۰. حجم جسمی را محاسبه کنید که زیر سهمی وار $z = x^2 + y^2$ و بالای ناحیه‌ی محصور شده توسط خطوط $y = x^2$ و $y = 2x$ واقع شده است.

پاسخ.

$$x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = 2$$

بر اساس ناحیه‌ی نوع دوم:

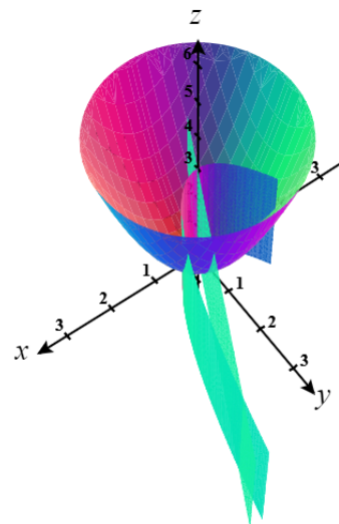
$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx dy$$

بر اساس ناحیه‌ی نوع اول:

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx$$

$$\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy = (x^2 y + \frac{y^3}{3}) \Big|_{x^2}^{2x} = 2x^3 + \frac{8}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3} = \frac{14}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3}$$

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^2 (\frac{14}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3}) dx = (\frac{14}{12}x^4 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}) \Big|_0^2$$



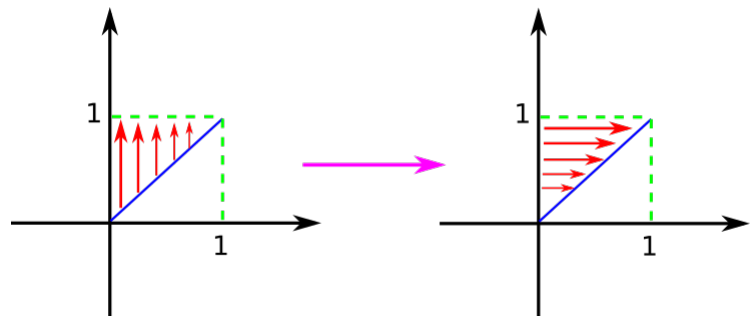
□

توجه ۲۱۱. هیچ نیازی نیست که هر سوالی را هم با در نظر گرفتن نواحی نوع اول و هم با در نظر گرفتن نواحی نوع دوم حل کنید. در مثالهای بالا تنها با اهداف آموزشی این کار را انجام داده‌ایم. در واقع، باید بتوانید نوعی از ناحیه را انتخاب کنید که شما را راحتتر به پاسخ انتگرال برساند.

مثال ۲۱۲. $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx$ را محاسبه کنید.

پاسخ.

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$



$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx = \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) dx dy$$

$$\int_0^y \sin(y^2) dx = x \sin(y^2) \Big|_0^y = y \sin(y^2)$$

$$\int_0^1 y \sin(y^2) dy = \frac{-\cos(y^2)}{2} \Big|_0^1 = \frac{-\cos(1)}{2} + \frac{1}{2}$$

□

۱.۳.۷ ویژگی‌های انتگرال

$$\iint_D (f(x, y) + g(x, y)) dA = \iint_D f(x, y) dA + \iint_D g(x, y) dA \quad ۱.$$

$$\iint_D c \times f(x, y) dA = c \times \iint_D f(x, y) dA \quad ۲.$$

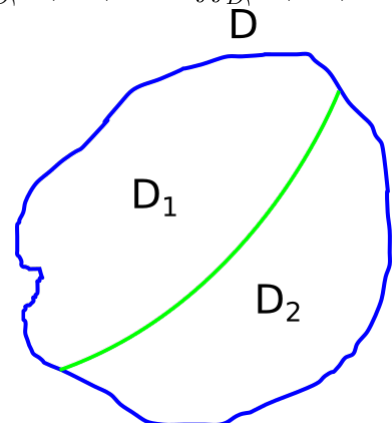
۳. اگر در ناحیه‌ی D داشته باشیم

$$f(x, y) \geq g(x, y)$$

آنگاه

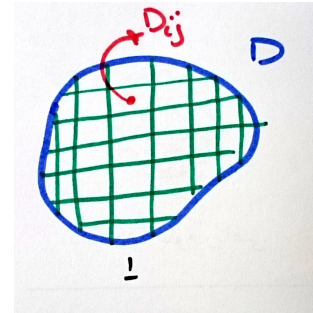
$$\iint_D f(x, y) dA \geq \iint_D g(x, y) dA$$

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA \quad ۴.$$



۵. مساحت ناحیه‌ی D برابر است با

$$\iint_D \underbrace{f(x, y)}_{=1} dA = \iint_D dA$$

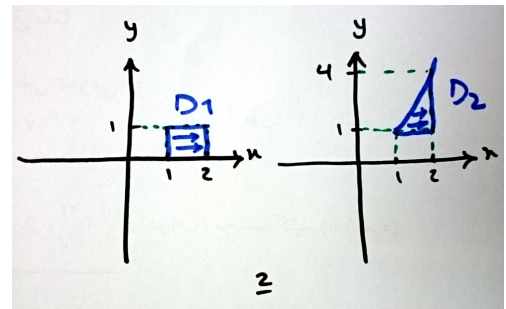


تمرین ۱۲۷. انتگرال مکرر زیر را محاسبه کنید.

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx dy + \int_1^2 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{x^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx dy$$

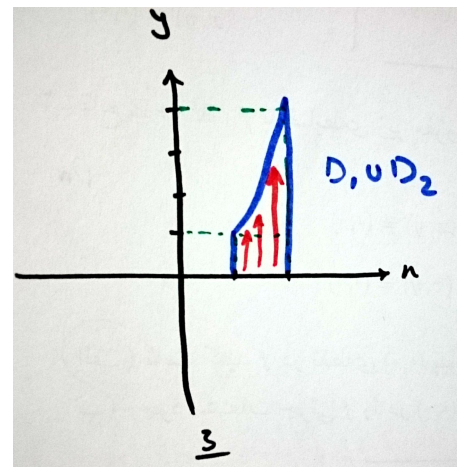
پاسخ.

$$\underbrace{\int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx dy}_{D_1} + \underbrace{\int_1^2 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{y}{x^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx dy}_{D_2}$$



اگر ناحیه‌ی D_1 و ناحیه‌ی D_2 اشتراک نداشته باشند آنگاه داریم

$$\iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA = \iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dA$$



بنا به شکل بالا ناحیه‌ی انتگرالگیری را به صورت زیر پارامتر بندی می‌کنیم:

$$\int_1^2 \int_0^{x^2} \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dy dx$$

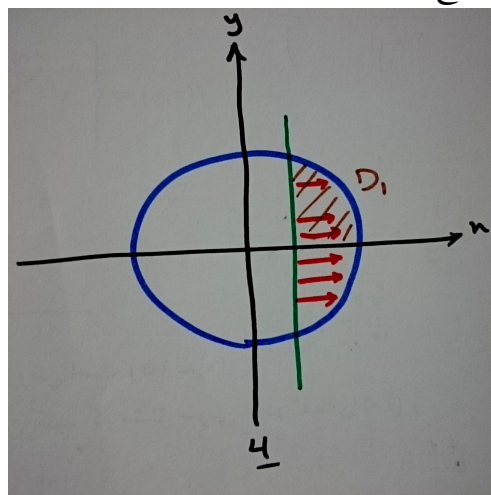
$$\int_0^{x^2} \frac{y}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dy = \frac{1}{x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \int_0^{x^2} y dy = \frac{1}{2x^4} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) y^2 \Big|_0^{x^2} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$\int_1^2 \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \dots$$

□

تمرین ۱۲۸. مساحت داخل دایره‌ی $x^2 + y^2 = 4$ و سمت راست خط $x = 1$ را حساب کنید.

پاسخ.



$$\iint_D dA = \left(\iint_{D_1} dA \right) \times 2$$

$$\iint_{D_1} dA = \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy dx$$

$$\int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy = y \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2}$$

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$x = 2 \sin \theta \Rightarrow dx = 2 \cos \theta d\theta$$

□

ادامه با شما.

۴.۷ تمرین

تمرین ۱۲۹. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$۱. \int_0^2 \int_0^{2-x} \frac{xe^{xy}}{4-y} dy dx$$

$$۲. \iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dA$$

D ناحیه‌ی واقع بین خطوط $x=0$ ، $y=0$ ، $x+y=1$ است.

تمرین ۱۳۰. حجم جسمی را بیابید که در بالای ناحیه‌ی مستطیلی $0 \leq x \leq 1$ و $1 \leq y \leq 2$ و زیر صفحه‌ی $z = 4 - x - y$ واقع شده است.

تمرین ۱۳۱. حاصل انتگرال زیر را حساب کنید:

$$I = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^2} dy,$$

تمرین ۱۳۲. انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

$$\int_0^1 \int_0^y (xy + y^2) dx dy$$

$$\int_0^2 \int_0^y y^2 e^{xy} dx dy$$

$$\int_0^1 \int_0^{e^v} \sqrt{1+e^v} dw dv$$

$$\int_0^1 \int_{2y}^3 e^{x^2} dx dy$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 \sqrt{y} \sin(y) dy dx$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{y^2+1} dy dx$$

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 y \cos(x^2 - 1) dx dy$$

$$\int_0^1 \int_{\arcsin(y)}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) \sqrt{1+\cos^2 x} dx dy$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 e^{x^3} dx dy$$

تمرین ۱۳۳. حاصل $\iint_R xy^2 dA$ را محاسبه کنید که در آن R ناحیه‌ای در ربع اول مختصات بین منحنی‌های $y = x^2$ و $x = y^2$ است.

تمرین ۱۳۴. حاصل $\iint_D x \cos(y) dA$ را محاسبه کنید که در آن D ناحیه‌ای در ربع اول است که بین محورها و منحنی $y = 1 - x^2$ احاطه شده است.

تمرین ۱۳۵. حاصل $\iint_D \ln x dA$ را محاسبه کنید که در آن D ناحیه‌ای در ربع اول است که توسط خط $2x + 2y = 5$ و منحنی $xy = 1$ احاطه شده است.

تمرین ۱۳۶. انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$\iint_D \frac{y}{x^2 + 1} dA \quad D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

$$\iint_D 2x + y dA \quad D = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2, -1 \leq x \leq 1\}$$

$$\iint_D e^{-y^2} dA \quad D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq y\}$$

$$\iint_D y\sqrt{x^2 - y^2} dA \quad D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$$

تمرین ۱۳۷. حجمهای زیر را حساب کنید:

۱. زیر رویه $z = 1 + x^2 y^2$ بالای ناحیه احاطه شده توسط منحنیهای $x = y^2$ و $x = 4$.

۲. زیر رویه $z = xy$ بالای مثلث با رئوس $(1, 1)$ و $(4, 1)$ و $(1, 2)$.

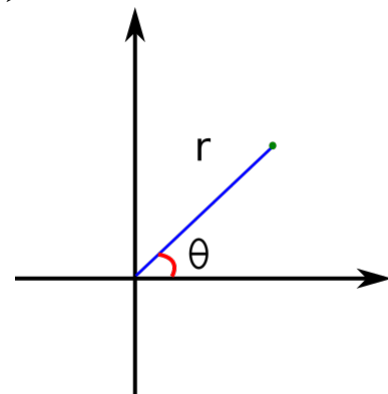
۳. احاطه شده توسط سهمی وار $z = x^2 + y^2 + 1$ و صفحات $x = 0$ و $y = 0$ و $z = 0$ و $x + y = 2$.

۴. چهاروجهی ای که توسط صفحات مختصات و صفحه $2x + y + z = 4$ احاطه شده است.

۵. توسط استوانه $z^2 + y^2 = 4$ و صفحات $x = 2y$ و $x = 0$ و $z = 0$ در یک هشتم اول احاطه شده است.

۱.۴.۷ انتگرال دوگانه در مختصات قطبی

هر نقطه در صفحه را می توان با مختصات قطبی (r, θ) نمایش داد. تبدیلهای لازم برای این تغییر مختصات به صورت



زیرند:

$$(x, y) = (r, \theta)$$

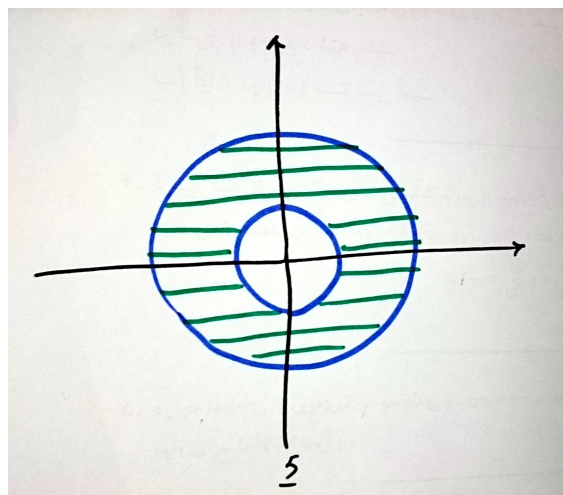
$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

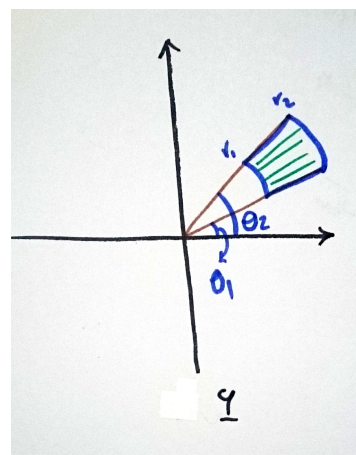
مجموعه ای زیر مثالی از یک مستطیل قطبی است.

$$D = \{(r, \theta) | 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$



به طور کلی به مجموعه‌ای مانند مجموعه‌ی زیر، یک **مستطیل قطبی** گفته می‌شود.

$$D = \{(r, \theta) | r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$$



قضیه ۲۱۳. فرض کنید D یک ناحیه‌ی دلخواه باشد.

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

دقت کنید که **المان سطح**، در انتگرال بالا به صورت زیر تغییر کرده است:

$$dxdy \approx r dr d\theta$$

توجه کنید که از ضرب کردن dx در dy به عبارت $r dr d\theta$ نمی‌رسیم. ضرب بالا قواعد خاص خود را دارد که پرداختن بدانها در سطح این درس نمی‌گنجد. پس اگر بنویسیم

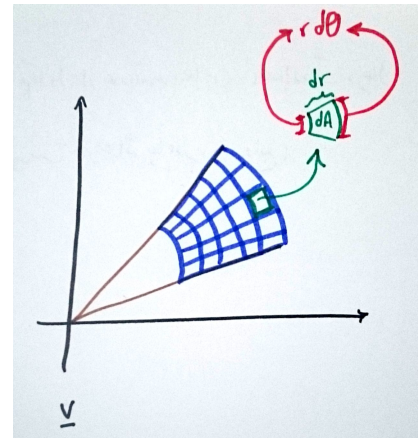
$$x = r \cos \theta \Rightarrow dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta$$

$$y = r \sin \theta \Rightarrow dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta$$

آنگاه

$$dxdy \neq r dr d\theta$$

هرچند قصد نداریم درباره‌ی ماهیت ضرب بالا توضیح دهیم، لازم است که فرمول $dxdy = r dr d\theta$ را توجیه کنیم. توجیه اول. (توجیه نادقیق). عموماً در رویکرد مهندسی، مطابق شکل زیر، فرض کنیم که ایمان مساحت، تقریباً مستطیلی شکل است. این مستطیل دارای اضلاع به اندازه‌ی dr و $r d\theta$ است. پس

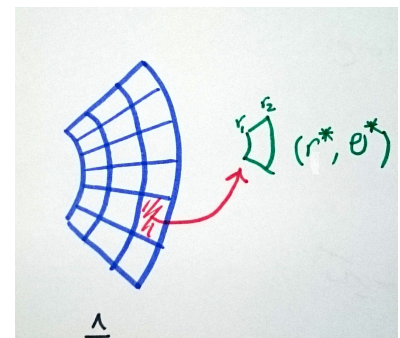


$$dA = dr(rd\theta) = r dr d\theta$$

توجیه دوم. برای محاسبه‌ی انتگرال در مختصات قطبی باید حاصل جمعی مانند زیر را محاسبه کنیم:

$$\sum_r \sum_\theta f(x(r^*, \theta^*), y(r^*, \theta^*)) dA$$

که در آن r^* و θ^* عناصری دلخواه هستند که از میان المانهای سطح انتخاب شده‌اند.



داریم

$$\Delta A = \frac{1}{4} r_2^2 \Delta \theta - \frac{1}{4} r_1^2 \Delta \theta$$

$$\Delta A = \frac{1}{4} (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) \Delta \theta$$

می‌توانیم r^*, θ^* را نقاط وسط هر سطح کوچک در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} r^* = \frac{r_1 + r_2}{2} \\ \theta^* = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \end{cases}$$

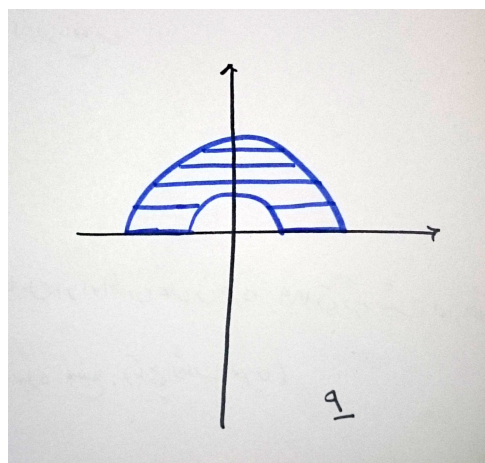
آنگاه داریم:

$$\Delta A = \Delta r(r^*) \Delta \theta = r^* \Delta r \Delta \theta$$

مثال ۲۱۴. $\iint_R (3x + 4y^2) dA$ را محاسبه کنید که در آن R ناحیه‌ی محصور بین دایره $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ و بالای محور مختصات است.

پاسخ.

$$D = \{(r, \theta) | 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$



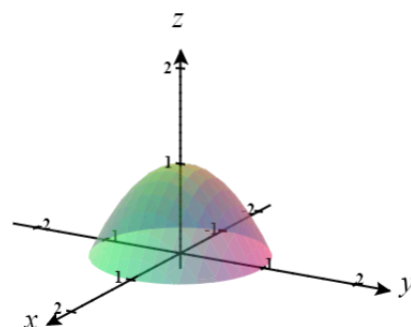
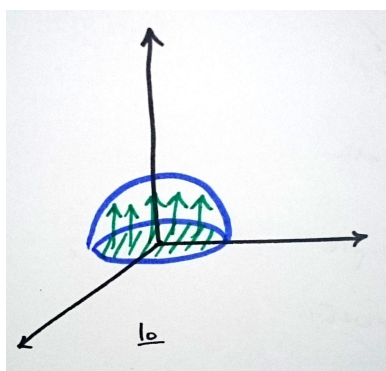
$$\begin{aligned} \iint_R (3x + 4y) dA &= \int_0^\pi \int_1^2 (3r \cos \theta + 4r \sin \theta) r dr d\theta = \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 3r^2 \cos \theta dr d\theta + \int_0^\pi \int_1^2 4r^2 \sin \theta dr d\theta = \\ &= \int_0^\pi \cos \theta d\theta \times \int_1^2 3r^2 dr + \int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \int_1^2 4r^2 dr = \dots \end{aligned}$$

□

برای محاسبه‌ی انتگرال $\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta$ کافیست که $\frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ را با $\sin^2 \theta$ جایگزین کنید.

مثال ۲۱۵. حجم جسمی را بیابید که توسط صفحه‌ی $z = 0$ و سهمی‌وار $z = 1 - x^2 - y^2$ احاطه شده است.

پاسخ.

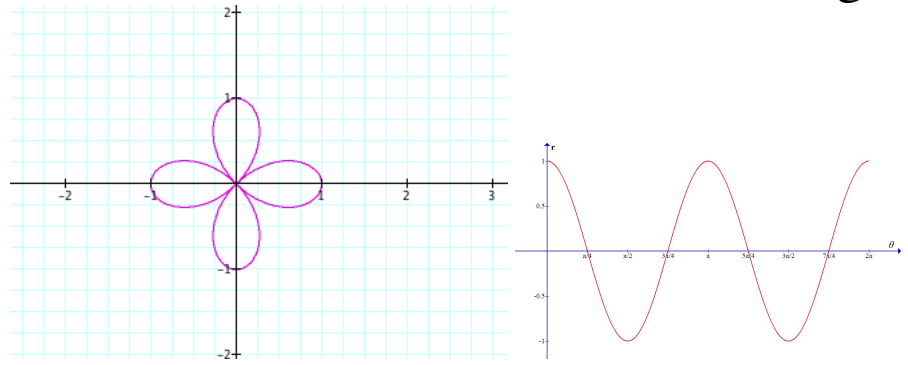


$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta = \dots$$

□

مثال ۲۱۶. مساحت محدود به گلِ رُزِ چهار برگ $r = \cos 2\theta$ را حساب کنید.

پاسخ.



مساحت کل برابر است با چهار برابر مساحت قسمت یکی از گلبرگها:

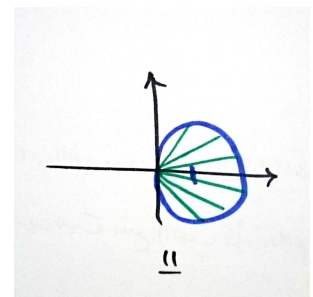
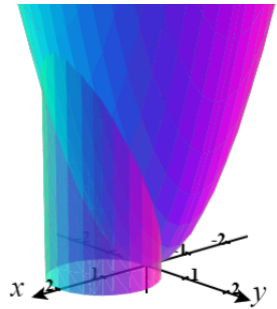
$$4 \times \iint_D dA = 4 \times \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos 2\theta} r dr d\theta = \frac{\pi}{8}$$

□

مثال ۲۱۷. حجم جسمی را بیابید که زیر سهمی وار $z = x^2 + y^2$ و بالای صفحه xy و داخل استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ واقع شده است.

پاسخ.

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$$



ناحیهی انتگرالگیری را به صورت زیر پارامتر بندی می‌کنیم:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq r \leq 2 \cos \theta$$

دقت کنید که معادله $x^2 + y^2 = 2x$ به صورت $r^2 = 2r \cos \theta$ و از آنجا به صورت $r = 2 \cos(\theta)$ در آمده است و

تابع $z = x^2 + y^2$ به صورت r^2 نوشته شده است.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} (r^2) r dr d\theta$$



۵.۷ جلسه‌ی سی و یکم، شنبه

بحث انتگرالگیری در مختصات قطبی را با نکته‌ی زیر به پایان می‌رسانیم.

توجه ۲۱۸. مختصات قطبی ابزار مناسبی برای محاسبه‌ی برخی انتگرالهای یگانه بدست می‌دهد.

مثال ۲۱۹. انتگرال ناسره‌ی $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ را محاسبه کنید.

یادآوری ۲۲۰.

$$\int_c^d \int_a^b f(x)g(y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy$$

پاسخ.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2} dx \times \int_0^\infty e^{-y^2} dy &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 \\ \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^{-r^2}}{-2} \right) \Big|_0^\infty = \dots \end{aligned}$$

□

۱.۵.۷ تغییر متغیر

گفتیم که در انتگرالگیری با مختصات قطبی، تغییر متغیر زیر را داریم:

$$dx dy = r dr d\theta$$

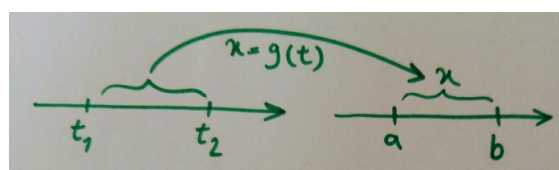
در ادامه‌ی درس، تغییر متغیر را به طور کلی بررسی می‌کنیم. نخست نکته‌ی زیر را از ریاضی ۱ یادآوری می‌کنیم.

یادآوری ۲۲۱. فرض کنید که $x = g(t)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. در ریاضی ۱ دیدیم که

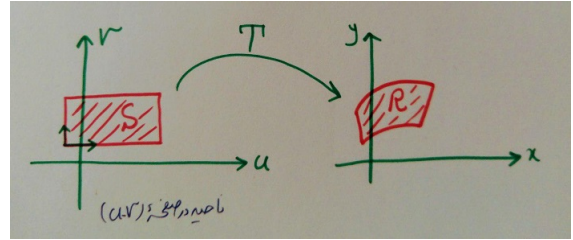
$$\int_{a=g(t_1)}^{b=g(t_2)} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{f(g(t))}_u \underbrace{g'(t) dt}_{du}$$

به بیان دیگر

$$\int_{a=g(t_1)}^{b=g(t_2)} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t)) \frac{\partial x}{\partial t} dt$$



در ادامه‌ی درس می‌خواهیم متناظر گفته‌ی بالا را برای انتگرال دوگانه به دست آوریم.



فرض کنید T یک نگاشت باشد که از مختصات uv به مختصات xy می‌رود. به بیان دیگر نگاشت T به صورت زیر است:

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

هم‌چنین فرض می‌کنیم که این نگاشت ویژگی توپولوژیک و آنالیزی مطلوبی داشته باشد (توابع $x(u, v), y(u, v)$ مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند و ژاکوبین این نگاشت (که در ادامه تعریف خواهد شد، ناصفر باشد). چنین نگاشتی به گونه‌ای است که مرزهای ناحیه‌ی S (در شکل بالا) را به مرزهای ناحیه‌ی R می‌برد.

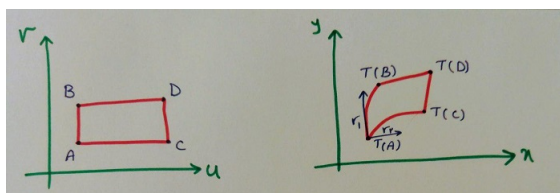
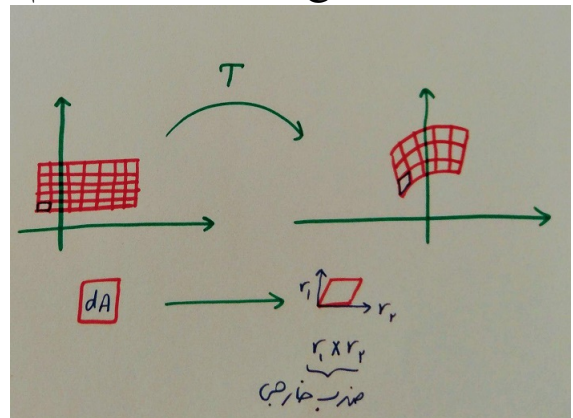
تحت شرطهای بالا، می‌توان انتگرالگیری در ناحیه‌ی R را به انتگرالگیری در ناحیه‌ی S تبدیل کرد:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \underbrace{\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|}_{\text{قدر مطلق}} du dv \quad (*)$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

(ماتریس ژاکوبین تبدیل T)

دقت کنید که در فرمول (*) علامت قدر مطلق آمده است، بنابراین اگر دترمینان منفی شود، آن را تبدیل به مثبت باید کرد. ایده‌ی اثبات از دیدگاه هندسی: دقت کنید که یک المان مستطیلی به یک المان متوازی‌الاضلاع تبدیل شده است. بردارهای سازنده‌ی متوازی‌الاضلاع را در زیر محاسبه کرده‌ایم.



گوشه‌های مشخص شده در بالا را در زیر بزرگتر کشیده‌ایم:

توضیحات عکس:

$$A = (u., v.) \quad , \quad B = (u., v. + \Delta v) \quad , \quad C = (u. + \Delta u, v.) \quad , \quad D = (u. + \Delta u, v. + \Delta v)$$

$$T(A) = (x(u., v.), y(u., v.)) \quad T(B) = (x(u., v. + \Delta v), y(u., v. + \Delta v))$$

$$T(C) = (x(u. + \Delta u, v.), y(u. + \Delta u, v.)) \quad T(D) = (x(u. + \Delta u, v. + \Delta v), y(u. + \Delta u, v. + \Delta v))$$

$$\vec{r}_1 \approx T(B) - T(A) = (x(u., v. + \Delta v), y(u., v. + \Delta v)) - (x(u., v.), y(u., v.)) =$$

$$(x(u., v. + \Delta v) - x(u., v.), y(u., v. + \Delta v) - y(u., v.))$$

$$\simeq (\Delta v \frac{\partial x}{\partial v}(u., v.), \Delta v \frac{\partial y}{\partial v}(u., v.)) = \Delta v (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v})$$

$$\vec{r}_2 \approx T(C) - T(A) = (x(u. + \Delta u, v.), y(u. + \Delta u, v.)) - (x(u., v.), y(u., v.)) =$$

$$(x(u. + \Delta u, v.) - x(u., v.), y(u. + \Delta u, v.) - y(u., v.))$$

$$\simeq (\Delta u \frac{\partial x}{\partial u}(u., v.), \Delta u \frac{\partial y}{\partial u}(u., v.)) = \Delta u (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u})$$

$$dA = \text{مساحت ناحیه‌ی به صورت متوازی الاضلاع} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} \Delta u \Delta v$$

$$dA = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} du dv$$

توجه ۲۲۲. روش فوق زمانی کار می کند که در ناحیه ی S داشته باشیم:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

۲.۵.۷ تغییر مختصات قطبی

حال فرمول بالا برای تغییر مختصات قطبی امتحان می کنیم.

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

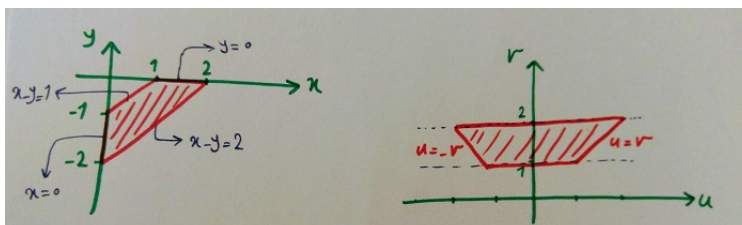
$$dA = dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta = r dr d\theta$$

۳.۵.۷ مثالها

مثال ۲۲۳. $\iint_R e^{\frac{x+y}{x-y}} dA$ را محاسبه کنید که در آن R ناحیه ی دوزنقه ای محدود به نقاط $(1, 0), (2, 0), (0, -1), (0, -2)$ است.

پاسخ.

$$u = x + y \quad v = x - y$$



$$x = \frac{1}{2}(u + v) \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} \left| -\frac{1}{2} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du dv$$

$$\int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} dv = v e^{\frac{u}{v}} = v(e^1 - e^{-1})$$

$$\int_1^2 \int_{-v}^v \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} du dv = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \int_1^2 v dv = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \frac{v^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \frac{3}{2}$$

□

مثال ۲۲۴. انتگرال دوگانه ی زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

$$\iint_D \frac{x^2 \sin(xy)}{y} dA$$

D ناحیه ی محدود به منحنی های $x^2 = \pi y$ و $x^2 = \frac{\pi y}{2}$ و $y^2 = x$ و $y^2 = \frac{x}{2}$ است.

۶.۷ جلسه‌ی سی و دوم، انتگرالهای سه گانه

پیش از شروع درس مثال دیگری از تغییر متغیر حل می‌کنیم.

مثال ۲۲۵. انتگرال دوگانه‌ی زیر را با تغییر متغیر مناسب حل کنید.

$$\iint_D \frac{x^{\frac{1}{2}} \sin(xy)}{y} dA$$

D ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های $x^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi y}{\sqrt{2}}$ و $x^{\frac{1}{2}} = x$ و $y^{\frac{1}{2}} = x$ و $y^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$ است.

پاسخ.

$$u = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y} \quad \frac{\pi}{\sqrt{2}} \leq u \leq \pi$$

$$v = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq v \leq 1$$

$$uv = \frac{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}}{xy} = xy$$

$$\iint_D \frac{x^{\frac{1}{2}} \sin(xy)}{y} dA = \int_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^{\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 u \sin(uv) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dv du$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$y^{\frac{1}{2}} = vx \Rightarrow x = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{v}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = uy \Rightarrow \frac{y^{\frac{1}{2}}}{v^{\frac{1}{2}}} = uy \Rightarrow y = v^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{v} \Rightarrow x = v^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = v^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} u^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} v^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}} u^{-\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{2}} v^{-\frac{3}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = v^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} u^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} v^{-\frac{3}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} v^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} u^{-\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\int_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^{\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 u \sin(uv) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dv du$$

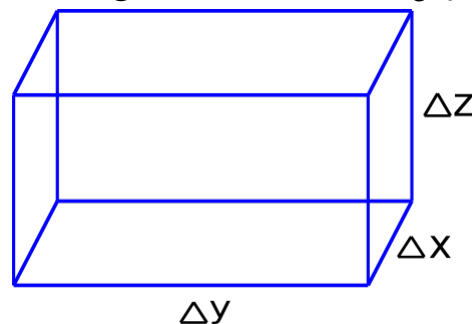
$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 u \sin(uv) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dv = \cos(uv) \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \cos u - \cos \frac{u}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}^{\pi} (\cos u - \cos \frac{u}{\sqrt{2}}) du = \dots$$

□

۱.۶.۷ انتگرال‌های سه‌گانه

فرض کنید B یک ناحیه‌ی مکعبی با حدود معلوم زیر باشد و f تابعی از $\mathbb{R}^3$ به $\mathbb{R}$ باشد:



$$B = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$

تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \iiint_B f(x, y, z) dv &= \\ \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) dz dy dx &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx \end{aligned}$$

مثال ۲۲۶. انتگرال $\iiint_B xyz^2 dv$ را محاسبه کنید که در آن ناحیه‌ی B به صورت زیر است:

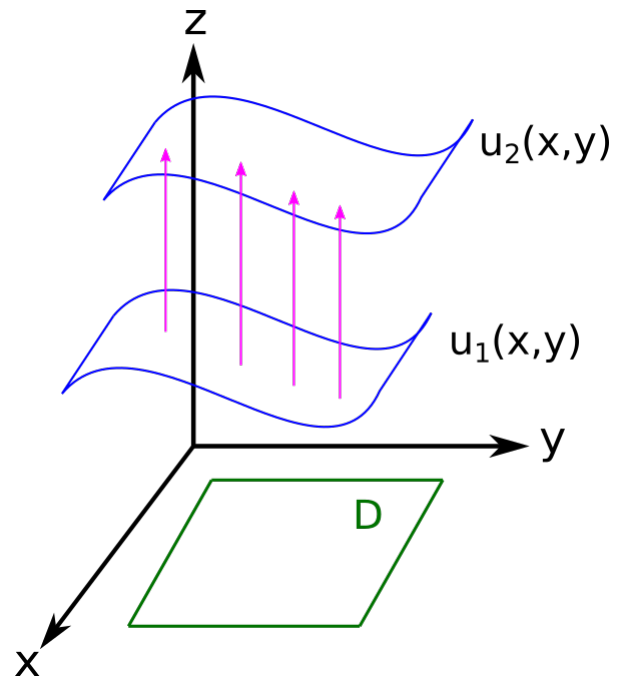
$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dx dy dz \\ \int_0^1 xyz^2 dx &= \frac{x^2}{2} yz^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} yz^2 \\ \int_{-1}^2 \frac{1}{2} yz^2 dy &= \frac{y^2}{4} z^2 \Big|_{-1}^2 = z^2 - \frac{z^2}{4} = \frac{3z^2}{4} \\ \int_0^3 \frac{3z^2}{4} dz &= \frac{z^3}{4} \Big|_0^3 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

انتگرالگیری سه‌گانه تنها روی نواحی مکعبی صورت نمی‌گیرد. انتگرالگیری روی نواحی کلی کار آسانی نیست ولی اگر خوش‌شانس باشیم ناحیه‌ی انتگرالگیری ما ممکن است به صورت ساده‌تری باشد.

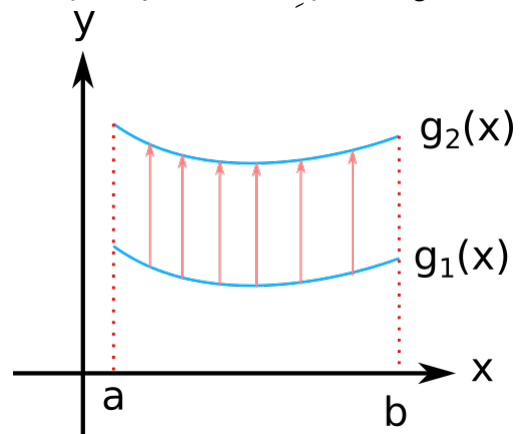
نواحی ساده‌تر

$$B = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$



$$\iiint_B f(x, y, z) dv = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dA$$

باز ممکن است خود ناحیه D نیز به صورت زیر باشد:



آنگاه خواهیم داشت:

$$\iiint_B f(x, y, z) dv = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

وضعیتی که در بالا شرح داده شد، ممکن است با یک جابه‌جائی متغیرها برقرار باشد. مثلاً ممکن است ناحیه انتگرالگیری به صورت زیر باشد:

$$c \leq y \leq d \quad g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \quad u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)$$

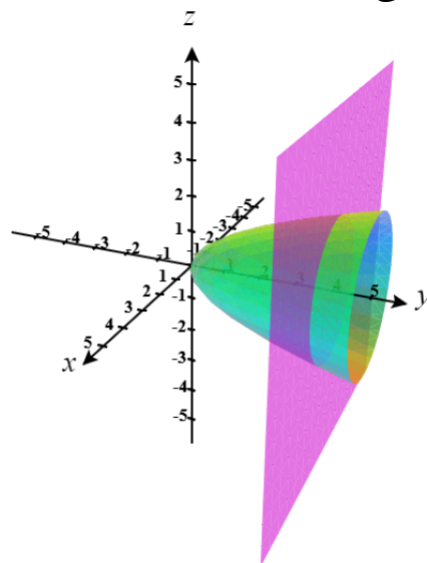
یا به صورت زیر:

$$r \leq z \leq s \quad g_1(z) \leq x \leq g_2(z) \quad u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)$$

سایر نواحی ممکن را شما بررسی و ترسیم کنید. همه‌ی آنچه درباره‌ی انتگرالگیری دوگانه فراگرفته‌ایم در محاسبه‌ی انتگرالهای سه‌گانه به کارمان می‌آید:

مثال ۲۲۷. $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dv$ را محاسبه کنید که در آن E ناحیه‌ی محدود به سهمی وار $y = x^2 + z^2$ و صفحه‌ی $y = 4$ است.

پاسخ.



ابتدا انتگرالی را که باید محاسبه کنیم به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\iint_D \left(\int_{x^2+z^2}^4 \sqrt{x^2 + z^2} dy \right) dx dz = \iint_D \left(y \sqrt{x^2 + z^2} \Big|_{x^2+z^2}^4 \right) dx dz =$$

$$\iint_D \left(4 \sqrt{x^2 + z^2} - (x^2 + z^2) \sqrt{x^2 + z^2} \right) dx dz$$

پس از اینجا به بعد با یک انتگرال دوگانه مواجهیم که آن را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 (4r - r^3) r dr d\theta = 2\pi \int_0^2 (4r^2 - r^4) dr =$$

$$2\pi \left(\frac{4}{3} r^3 - \frac{r^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{128}{15} \pi.$$

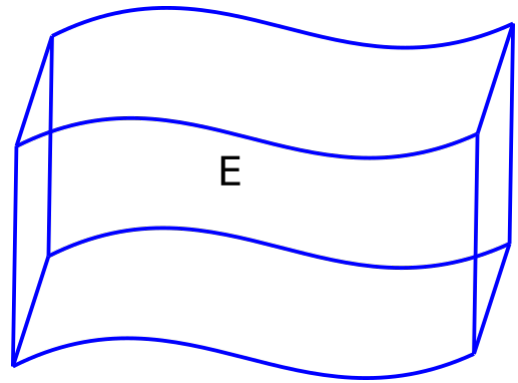
□

تمرین ۱۳۸. انتگرال $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx$ را به صورت $\iiint f(x, y, z) dx dz dy$ بنویسید.

توجه ۲۲۸. در درسهای پیشین روشی برای محاسبه‌ی حجم با استفاده از انتگرال دوگانه ارائه کردیم ولی محاسبه‌ی احجام با استفاده از انتگرال سه گانه غالباً راحت‌تر است.

حجم ناحیه‌ی سه بُعدی E با فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$v = \iiint_E dv$$

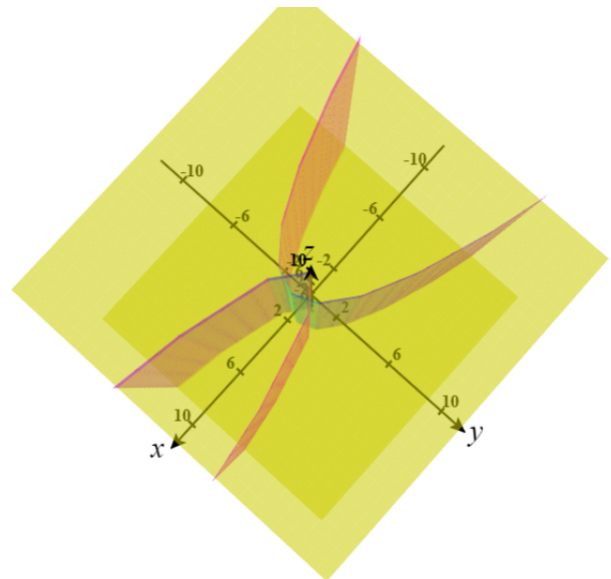
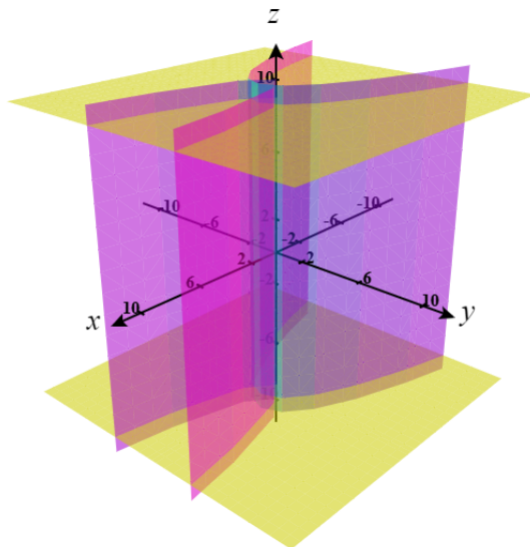


مثال ۲۲۹. حجم ناحیه‌ی محدود به استوانه‌ی $3x - 4 = y^2 = x$ و صفحات $z = 9$ و $z = -9$ را محاسبه کنید.

پاسخ. حجم مورد نظر برابر است با

$$\iint_D \left(\int_{-9}^9 dz \right) dA = \iint_D 18 dA = 18 \int_{-1}^1 \int_{y^2}^{\frac{4-y^2}{3}} dx dy =$$

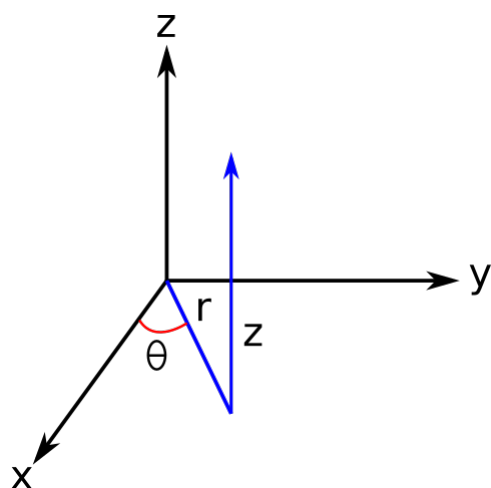
$$18 \int_{-1}^1 \left(\frac{4-y^2}{3} - y^2 \right) dy = \dots \text{ شما به عهده‌ی شما}$$



□

۲.۶.۷ مختصات استوانه‌ای

برای محاسبه‌ی انتگرالهای سه گانه برای ا حجمی که حول یک محور، حالت استوانه‌ای دارند، تغییر متغیر استوانه‌ای کار را آسانتر می‌کند:



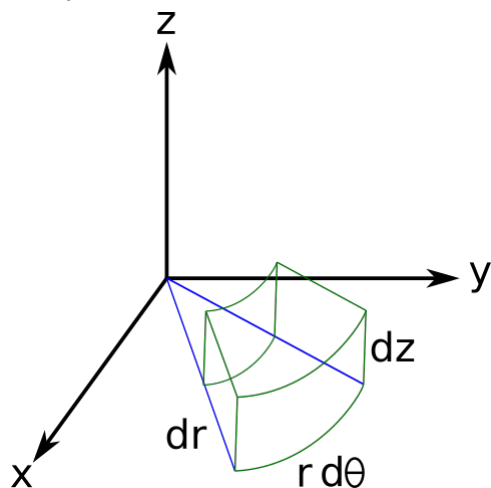
$$(x, y, z) \cong (r, \theta, z)$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

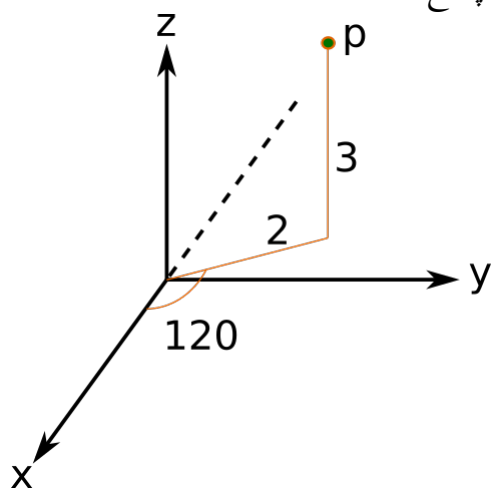
$$z = z$$

به وجود r دقت کنید $dv = dx dy dz \approx r dr d\theta dz$



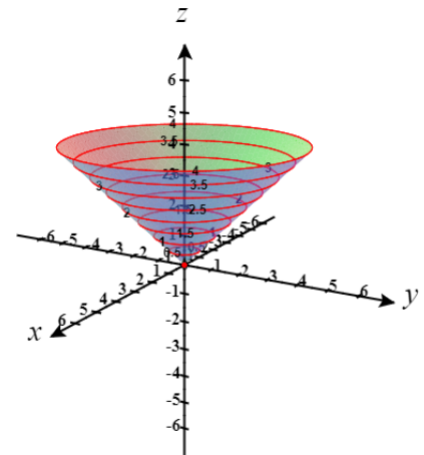
مثال ۲۳۰. نقطه‌ی $(2, \frac{2\pi}{3}, 3)$ را در مختصات استوانه‌ای مشخص کنید.

پاسخ.



مثال ۲۳۱. رویه‌ی $z = r$ را رسم کنید.

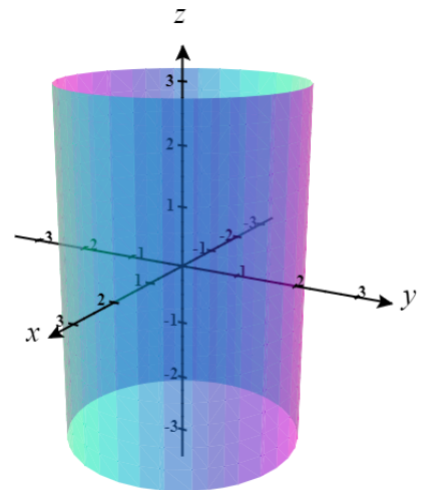
پاسخ.



□

مثال ۲۳۲. رویه‌ی $r = 2$ را رسم کنید.

پاسخ.



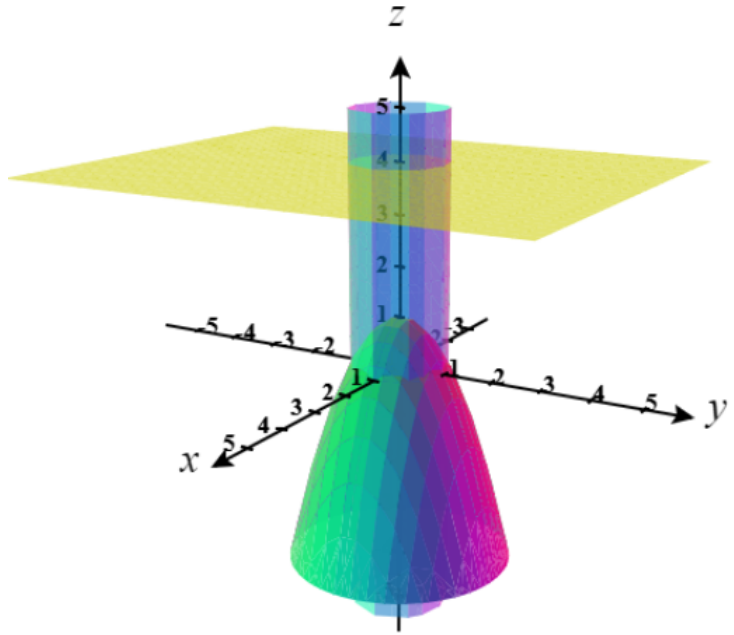
□

مثال ۲۳۳. جسم E داخل استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ و زیر صفحه‌ی $z = 4$ و بالای سهمی‌وار $z = 1 - x^2 - y^2$ واقع شده است. چگالی این جسم در هر نقطه رابطه‌ی خطی زیر را با فاصله‌ی آن نقطه تا محور مرکزی استوانه دارد.

$$f(x, y, z) = \underbrace{K}_{\text{ثابت}} r$$

جرم جسم را بیابید.

پاسخ.



$$\iiint_E K r dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{1-r^2}^5 (Kr) r dz dr d\theta =$$

$$K \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 (3 + r^2) dr d\theta = 2\pi K \int_0^{\pi} (3r^2 + r^4) dr = \frac{12}{5} \pi K$$

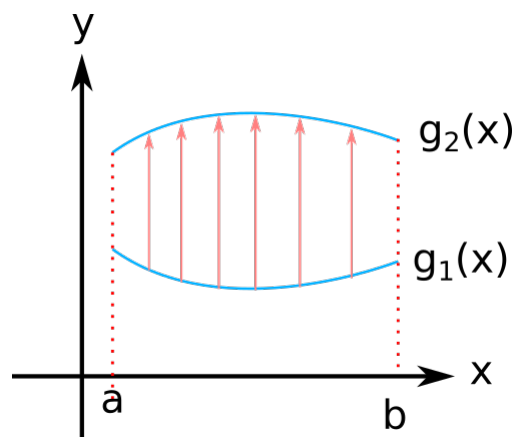
□

تمرینهای تمرین ۳۷، ۳۸ در صفحه‌ی ۳۰ جزوه‌ی تمرینها را حل کنید.

۷.۷ نیم جلسه‌ی سی و سوم، چهارشنبه، انتگرالگیری در مختصات کروی

پیش از آنکه درس درباره‌ی مختصات کروی را آغاز کنیم، نیاز به رفع یک ابهام است. برای محاسبه‌ی مساحت هم می‌توان از انتگرال یگانه و هم دوگانه استفاده کرد. برای محاسبه‌ی حجم نیز هم می‌توان از انتگرال دوگانه و هم از انتگرال سه‌گانه به صورتهای زیر استفاده کرد:

مساحت ناحیه‌ی محصور



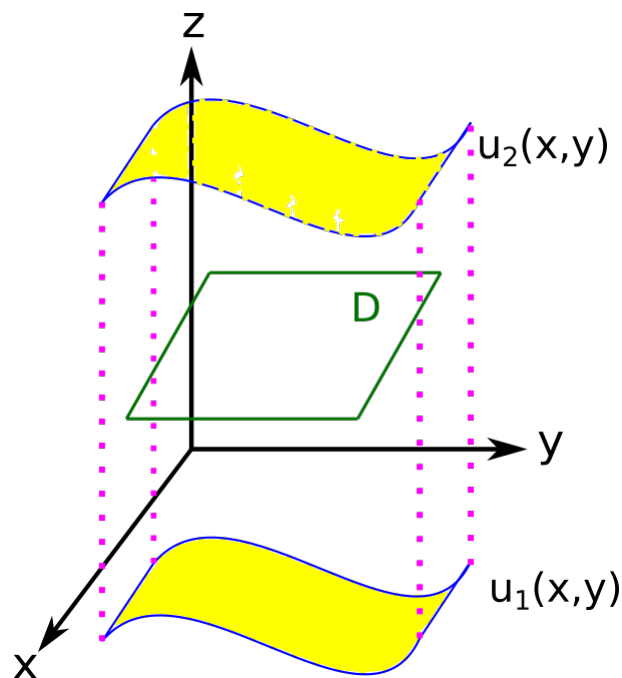
با استفاده از انتگرال یگانه:

$$\int_a^b |g_2(x) - g_1(x)| dx$$

با استفاده از انتگرال دوگانه:

$$\iint_A dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dA = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) dx$$

حجم ناحیه‌ی محصور



با استفاده از انتگرال دوگانه:

$$\iint_D (u_2(x, y) - u_1(x, y)) dA$$

با استفاده از انتگرال سه گانه:

$$\iiint_E dv = \iint_D \left(\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} dz \right) dA = \iint_D (u_2(x, y) - u_1(x, y)) dA$$

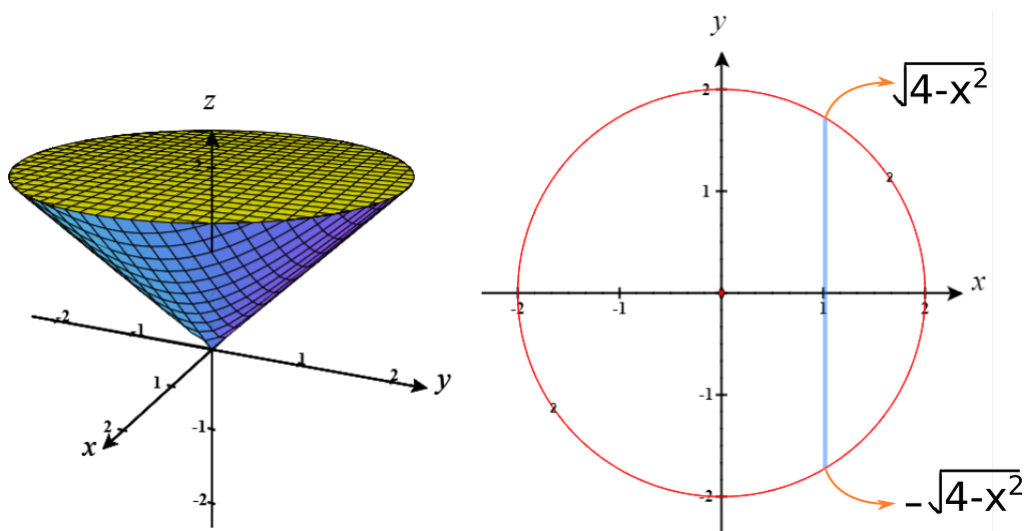
در جلسه‌ی قبل انتگرالگیری با استفاده از مختصات استوانه‌ای را بررسی کردیم:

$$\iiint_E \square dx dy dz = \iiint_E \square r dr d\theta dz$$

بگذارید این بحث را با مثالی به پایان ببریم:

مثال ۲۳۴.

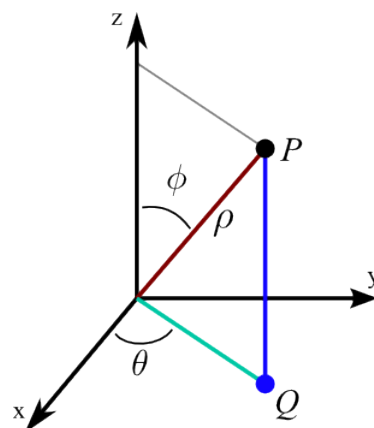
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx$$



برای محاسبه‌ی انتگرال فوق کافی است انتگرال زیر را محاسبه کنیم. محاسبه‌ی آن را به عهده‌ی شما می‌گذاریم:

$$\int_{\cdot}^{\cdot\pi} \int_{\cdot}^{\cdot} \int_r^{\cdot} (r^{\cdot}) r dz dr d\theta = \dots$$

۱.۷.۷ مختصات کروی



فاصله‌ی نقطه‌ی P تا مبدأ برابر است با ρ . مختصات نقطه‌ی (x, y, z) در دستگاه دکارتی را در دستگاه کروی به صورت (ρ, θ, ϕ) نشان می‌دهیم. با مختصات (ρ, θ, ϕ) که $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، $0 \leq \phi \leq \pi$ و $\rho \geq 0$ می‌توان تمام هشت قسمت دستگاه مختصات سه بُعدی را پوشش داد.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin \phi$$

$$x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

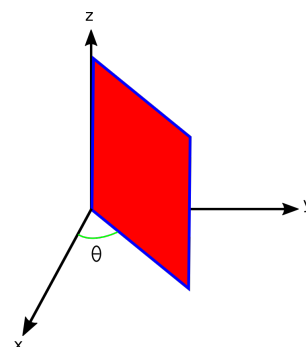
$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

معادله‌ی کره $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ در دستگاه کروی به صورت زیر است:

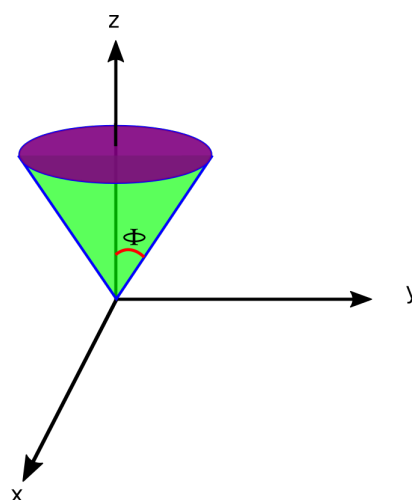
$$\rho = c$$

در زیر چند شکل با استفاده از دستگاه کروی کشیده شده‌اند.

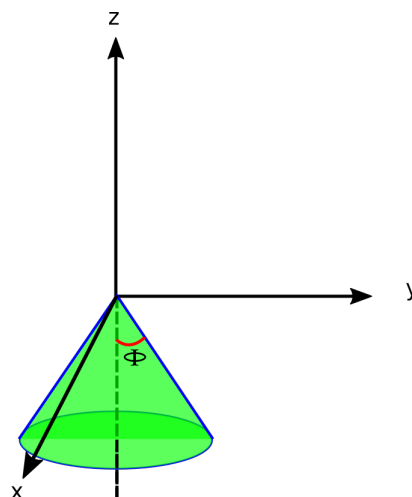
$$\theta = c$$



$$0 < \phi < \frac{\pi}{4}$$



$$\frac{3\pi}{4} < \phi < \pi$$

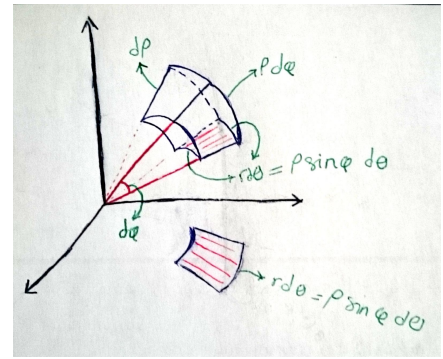


تغییرات متغیر لازم برای محاسبه‌ی انتگرال در مختصات کروی به صورت زیرند:

$$\iiint_E f(x, y, z) dv$$

$$dv = dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dv = \iiint_E f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^3 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$



مثال ۲۳۵. انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{1/3}} dv$$

که در آن:

$$B = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

پاسخ.

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{\rho^{1/3}} \rho^3 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

$$\int_0^1 e^{\rho^{1/3}} \rho^3 \sin \phi d\rho = \sin \phi \left. \frac{e^{\rho^{1/3}}}{\frac{1}{3}} \right|_0^1 = \frac{\sin \phi}{3} (e - 1)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi}{3} (e - 1) d\theta = \frac{2\pi}{3} \sin \phi (e - 1)$$

$$\int_0^\pi \frac{2\pi}{3} \sin \phi (e - 1) d\phi = \frac{2\pi}{3} (e - 1) (-\cos \phi) \Big|_0^\pi$$

توجه ۲۳۶. اگر حدود انتگرالها مشخص باشد و هر تابعی تنها به یک متغیر بستگی داشته باشد، آنگاه

$$\int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x)g(y)h(z)dzdydx = \int_r^s h(z)dz \times \int_c^d g(y)dy \times \int_a^b f(x)dx$$

تمرین ۱۳۹. تمرینهای ۳۸ تا ۴۱ صفحه‌ی ۳۰ جزوه‌ی تمرینها را حل کنید.

۲.۷.۷ ادامه‌ی مختصات کروی

مثال ۲۳۷. حجم جسمی را بیابید که بالای مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و زیر کُره $z = x^2 + y^2 + z^2$ واقع شده است.

پاسخ.

$$x^2 + y^2 + z^2 = z \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$$

یادآوری ۲۳۸.

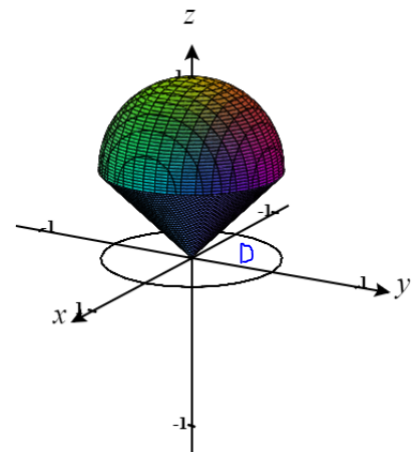
$$z^2 + az = \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

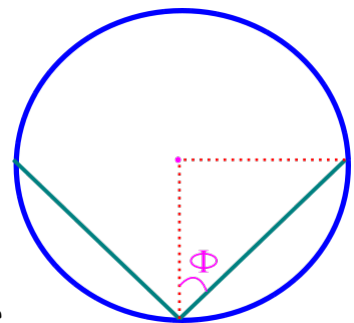
حجم ناحیه‌ی بین مخروط و کره برابر است با

$$\iiint_E dv$$

$$E = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \text{کره} \\ (x, y) \in D \text{ ناحیه‌ی} \end{cases}$$



$$\tan \phi = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$



معادله‌ی کره را در مختصات کروی به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = z \Rightarrow \rho^2 = \rho \cos \phi \Rightarrow \rho = \cos \phi$$

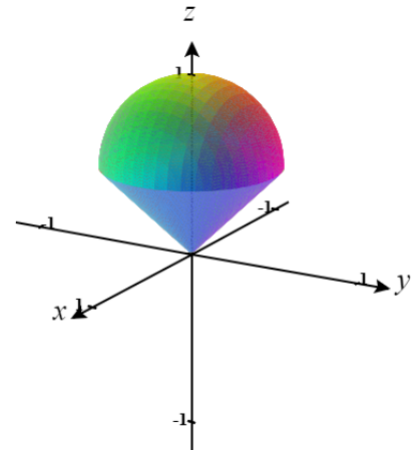
انتگرال مورد نظر ما در مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho = \sin \phi \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^{\cos \phi} = \frac{\sin \phi \cos^3 \phi}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \phi \cos^3 \phi}{3} d\phi = \left. \frac{-\cos^4 \phi}{4 \times 3} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{12} + 1$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{12} + 1\right) d\theta = 2\pi \left(-\frac{1}{12} + 1\right)$$



□

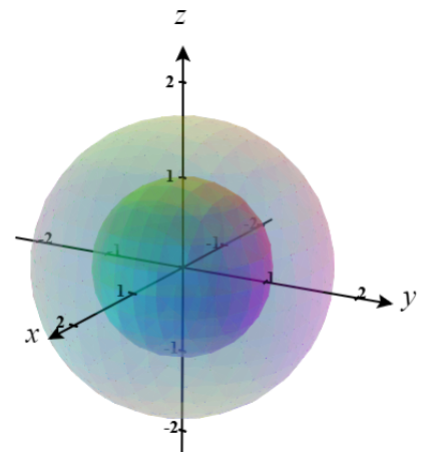
تمرین ۱۴۰. سعی کنید مثال بالا را در دستگاه‌های استوانه‌ای و مکعبی حل کنید.

مثال ۲۳۹. انتگرال $\iiint_T \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dv$ را محاسبه کنید که در آن که ناحیه‌ی بین دو کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = e$ است.

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

$$1 \leq \rho \leq \sqrt{e}$$



تمرین ۱۴۱. حجم ناحیه‌ی محدود بین کره‌های $x^2 + y^2 + z^2 = z$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ را بیابید.

۳.۷.۷ انتگرالگیری از میدانهای برداری روی مسیرهای خطی

توابع فصل قبل، توابعی مانند $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ، بودند که به آنها توابع عددی می‌گویند. در فصل قبل آموختیم که چگونه از توابع عددی در نواحی مختلف انتگرالگیری کنیم.

تمرین ۱۴۲. در یک صفحه، با کشیدن شکل، انواع انتگرالگیری‌هایی را که تا اینجا آموخته‌ایم مرور کنید.

در ادامه‌ی درس قرار است با چند نوع دیگر از انتگرالگیری آشنا شویم که در فیزیک کاربردهای بی‌شماری دارند. هدف ما در ادامه‌ی درس، آشنا شدن با مفاهیم زیر است:

۱. انتگرال توابع عددی روی خط (منحنی) و روی رویه

۲. انتگرالگیری از توابع برداری روی خط و روی رویه

۳. رابطه‌ی انتگرالهای بالا با انتگرال دوگانه و سه‌گانه

بحث را با معرفی مفهوم میدانهای برداری شروع می‌کنیم.

۸.۷ جلسه‌ی سی و چهارم

۱.۸.۷ ادامه‌ی مختصات کروی

مثال ۲۴۰. حجم جسمی را بیابید که بالای مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و زیر کره‌ی $z = x^2 + y^2 + z^2 = z$ واقع شده است.

پاسخ.

$$x^2 + y^2 + z^2 = z \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$$

یادآوری ۲۴۱.

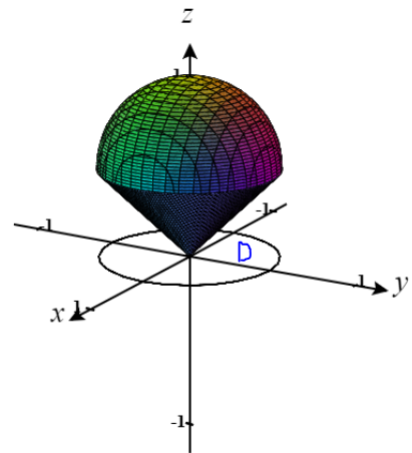
$$z^2 + az = \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

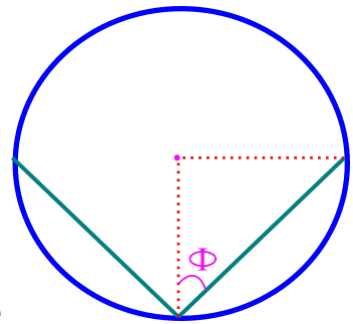
حجم ناحیه‌ی بین مخروط و کره برابر است با

$$\iiint_E dv$$

$$E = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \text{کره} \\ (x, y) \in D \text{ ناحیه‌ی} \end{cases}$$



$$\tan \phi = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$



معادله‌ی کره را در مختصات کروی به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = z \Rightarrow \rho^2 = \rho \cos \phi \Rightarrow \rho = \cos \phi$$

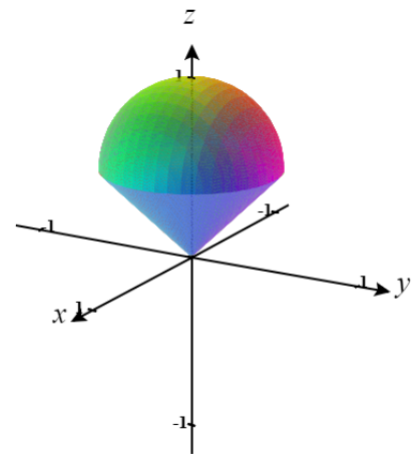
انتگرال مورد نظر ما در مختصات کروی به صورت زیر است:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$\int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho = \sin \phi \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^{\cos \phi} = \frac{\sin \phi \cos^3 \phi}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \phi \cos^3 \phi}{3} d\phi = \left. \frac{-\cos^2 \phi}{4 \times 3} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{12} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{1}{16}$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{16} \right) d\theta = \frac{\pi}{8}$$



□

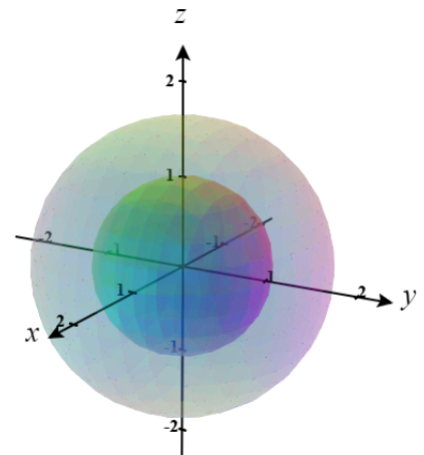
تمرین ۱۴۳. سعی کنید مثال بالا را در دستگاه‌های استوانه‌ای و مکعبی حل کنید.

مثال ۲۴۲. انتگرال $\iiint_T \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dv$ را محاسبه کنید که در آن T ناحیه‌ی بین دو کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = e$ است.

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

$$1 \leq \rho \leq \sqrt{e}$$



تمرین ۱۴۴. حجم ناحیه‌ی محدود بین کره‌های $x^2 + y^2 + z^2 = z$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ را بیابید.

فصل ۸

آنالیز برداری

توابع فصول قبلی، توابعی مانند $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ بودند که به آنها توابع عددی می‌گفتیم. در فصل قبل آموختیم که چگونه از توابع عددی در نواحی مختلف انتگرالگیری کنیم.

تمرین ۱۴۵. در یک صفحه، با کشیدن شکل، انواع انتگرالگیری‌هایی را که تا اینجا آموخته‌ایم مرور کنید.

در ادامه‌ی درس قرار است با چند نوع دیگر از انتگرالگیری آشنا شویم که در فیزیک کاربردهای بی‌شماری دارند. هدف ما در ادامه‌ی درس، آشنا شدن با مفاهیم زیر است:

۱. انتگرال توابع عددی روی خط (منحنی) و روی رویه

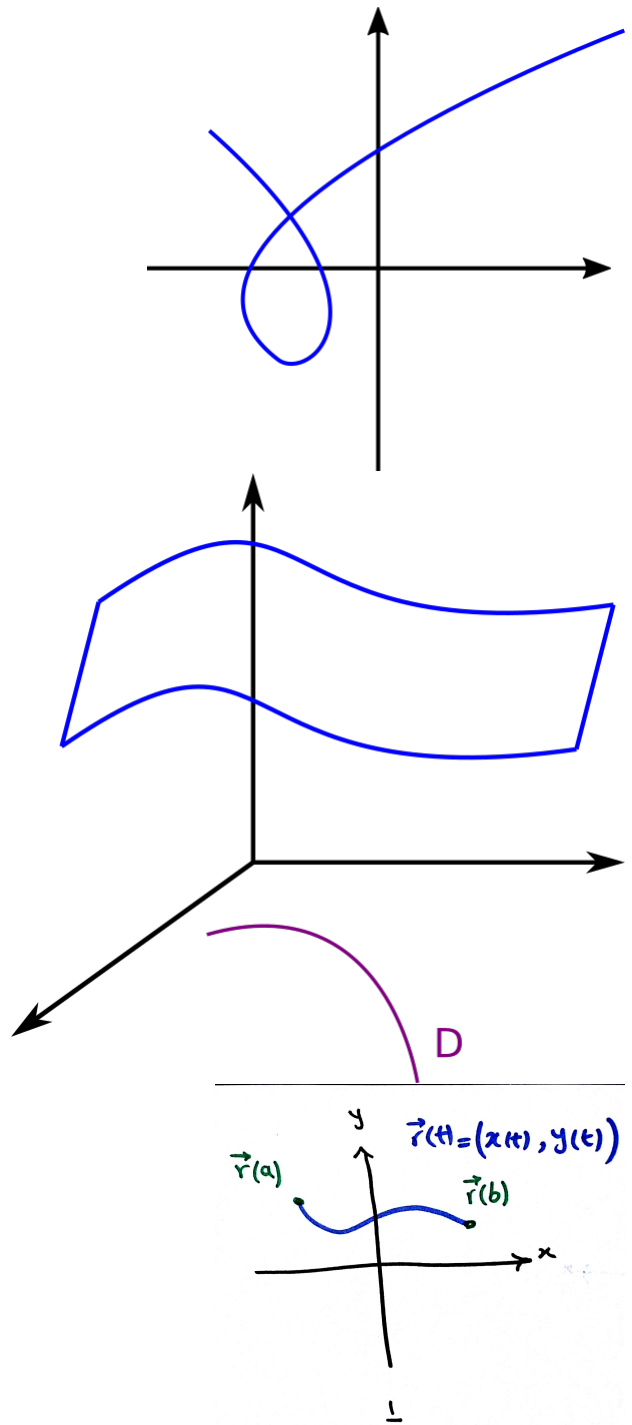
۲. انتگرالگیری از توابع برداری روی منحنی و روی رویه

۳. رابطه‌ی انتگرالهای بالا با انتگرال دوگانه و سه‌گانه (نظایر قضایای اساسی حساب)

۱.۰.۸ انتگرالگیری روی خط از توابع عددی

فرض کنید $\vec{r}(t): C$ یک خم هموار در $\mathbb{R}^3$ باشد. منظور از هموار بودن خم این است که $\vec{r}'(t)$ پیوسته باشد و $|\vec{r}'(t)| \neq 0$ $\forall t$. صفر نبودن مشتق بدین معنی است که در حین پیمودن مسیر خم، سرعت صفر نمی‌شود، یعنی خم بی‌هیچ توقفی طی می‌شود.

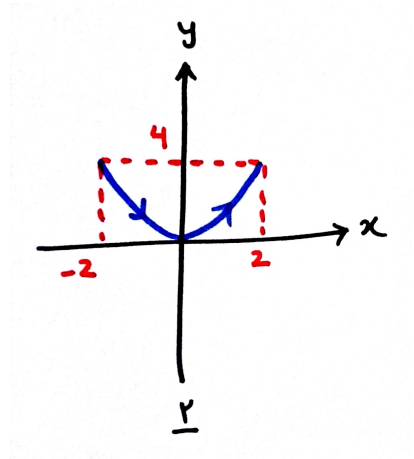
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$



مثال ۲۴۳. منحنی $y = x^2$ را به صورت یک خم نمایش دهید. $(-2 \leq x \leq 2)$.

پاسخ.

$$\vec{r}(t) = (t, t^2) \quad -2 \leq t \leq 2$$

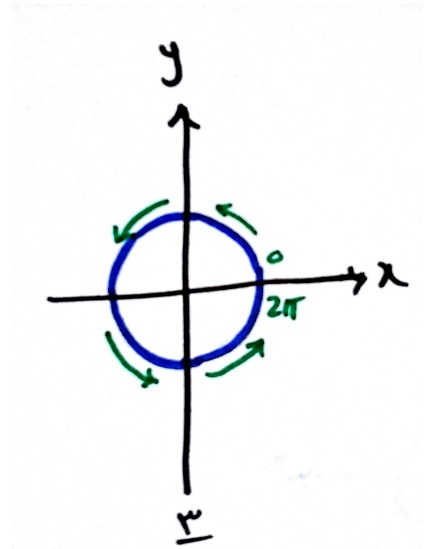


□

مثال ۲۴۴. خم $0 \leq t \leq 2\pi$ را $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ رسم کنید.

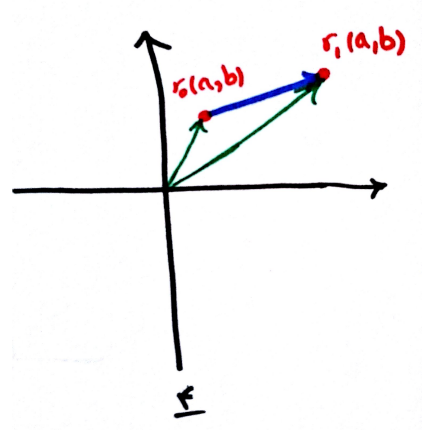
پاسخ.

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$



□

مثال ۲۴۵. معادله‌ی برداری پاره‌خطی را بنویسید که نقطه‌ی A را به نقطه‌ی B وصل کند.



فرض کنید نقطه‌ی A دارای بردار مکان r و نقطه‌ی B دارای بردار مکان r_1 باشد.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + (\vec{r} - \vec{r}_1)t \quad 0 \leq t \leq 1$$

به بیان دیگر:

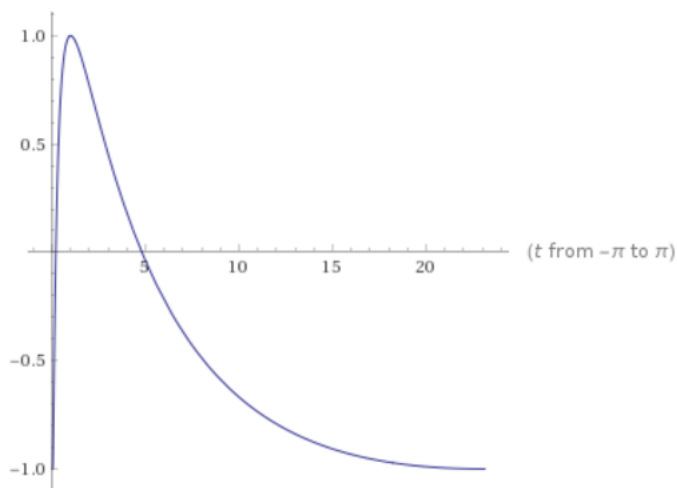
$$\vec{r}(t) = t\vec{r}_1 + (1-t)\vec{r}_2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

مثال ۲۴۶. خم‌های زیر را (با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای) رسم کنید.

۱. $(\cos t, 2 \sin t)$

۲. $(e^t, \cos t)$

در زیر دومی را به عنوان نمونه رسم کرده‌ایم:

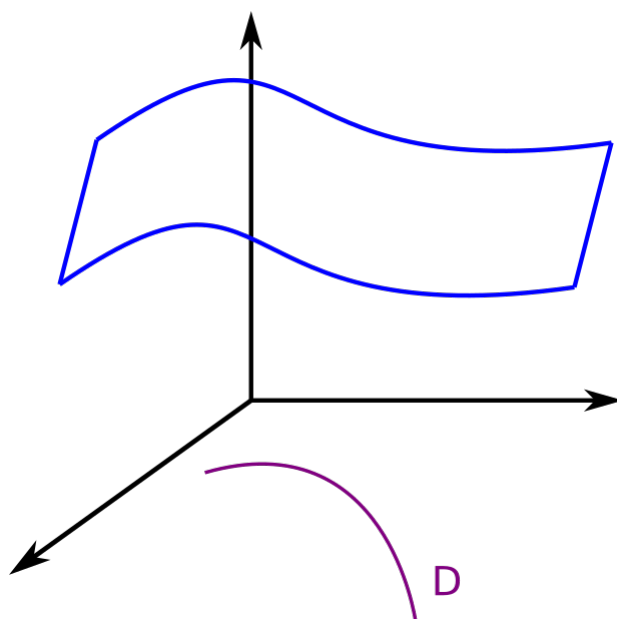


حال فرض کنید $f(x, y)$ یک تابع عددی از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}$ باشد:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

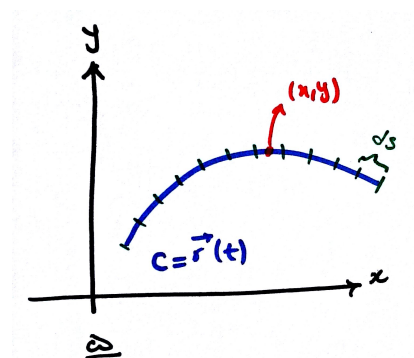
در ادامه می‌خواهیم انتگرال تابع f را روی مسیر خم C تعریف کنیم. این انتگرال را با نماد زیر نشان خواهیم داد:

$$\int_c f(x, y) ds$$



برای تعریف

$$\int_c f ds$$



خم مورد نظر را به قطعاتی به طول Δs تقسیم می‌کنیم و از هر قطعه یک نقطه انتخاب می‌کنیم و حد زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum f(x^*, y^*) \Delta s$$

اگر حد بالا موجود باشد می‌نویسیم:

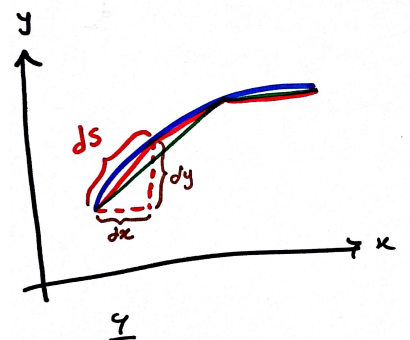
$$\int_c f(x, y) ds = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum f(x, y) \Delta s$$

توجه ۲۴۷. طول خم برابر است با

$$\int_c ds$$

محاسبه‌ی ds

اندازه‌ی ds را وقتی تعداد قطعات زیاد باشند، می‌توان با طول پاره‌خطی که دو سر ds را به هم وصل می‌کند تخمین زد.



پس:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

منحنی مورد نظر ما توسط معادله‌ی برداری $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ داده شده است. پس

$$dx = x'(t)dt \quad dy = y'(t)dt$$

پس داریم:

$$ds = |\vec{r}'(t)|dt$$

که در آن

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$$

و

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

حال می‌توانیم همه چیز را در یک تعریف خلاصه کنیم:

تعریف ۲۴۸. فرض کنید خم c توسط معادله‌ی برداری $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ داده شده باشد و $a \leq t \leq b$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی عددی باشد. داریم

$$\int_c f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

توجه ۲۴۹. طول خم به معادله‌ی $a \leq t \leq b$ برابر است با

$$\int_c ds = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$$

دقت کنید که دامنه‌ی یک تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ می‌تواند تمام $\mathbb{R}^2$ باشد ولی در انتگرالگیری خطی ما به مقادیر تابع روی یک منحنی که در دامنه‌ی تابع واقع شده است توجه داریم.

توجه ۲۵۰. یک خم مشخص را شاید بتوان به گونه‌های مختلفی پارامتر بندی کرد. برای مثال یک دایره را در زیر به دو صورت پارامتر بندی کرده‌ایم.

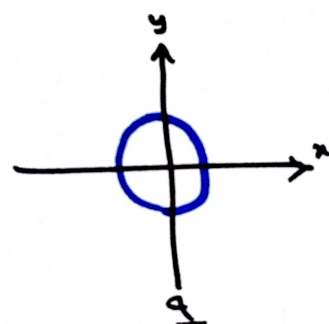
$$c: \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$c: \vec{h}(t) = (\cos 2t, \sin 2t) \quad 0 \leq t \leq \pi$$

حاصل انتگرال از یک تابع عددی به نوع پارامتر بندی خم بستگی ندارد:

$$\int_c f(x, y) ds = \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^\pi f(\vec{h}(t)) |\vec{h}'(t)| dt$$

دقت کنید که فرق دو پارامتر بندی بالا این است که در دومی خم سریعتر پیموده می‌شود.



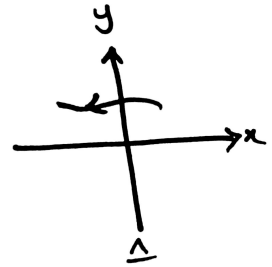
توجه ۲۵۱. طول خم نیز مستقل از نوع پارامتربندی آن است.

توجه ۲۵۲. انتگرال یک تابع عددی روی یک خم به جهت خم بستگی ندارد:

$$c: \vec{r}(t)$$

$$-c: \vec{h}(t)$$

$$\int_c f(x, y) ds = \int_{-c} f(x, y) ds$$



تعمیم ۲۵۳ (سه بُعدی). فرض کنید $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ یک تابع عددی باشد و c یک خم هموار با معادله برداری

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad a \leq t \leq b$$

باشد آنگاه

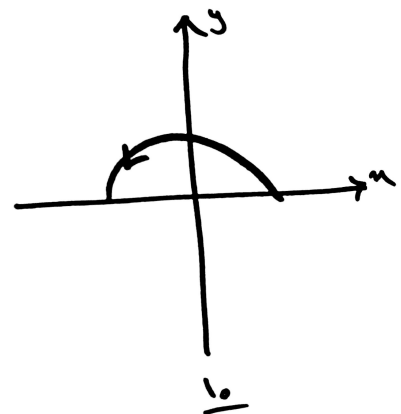
$$\int_c f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

$$ds = |\vec{r}'(t)| dt = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

مثال ۲۵۴. $\int_c (2 + x^2 y) ds$ را محاسبه کنید که در آن c نیمه‌ی بالائی دایره‌ی $x^2 + y^2 = 1$ است.

پاسخ.

$$c: \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq \pi$$



$$\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

$$\int_c f(x, y) ds = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \times 1 dt = 2\pi + \int_0^\pi \underbrace{\cos^2 t}_u \underbrace{\sin t dt}_{-du} = 2\pi + \left. \frac{-\cos^3 t}{3} \right|_0^\pi = 2\pi - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = 2\pi + \frac{2}{3}$$

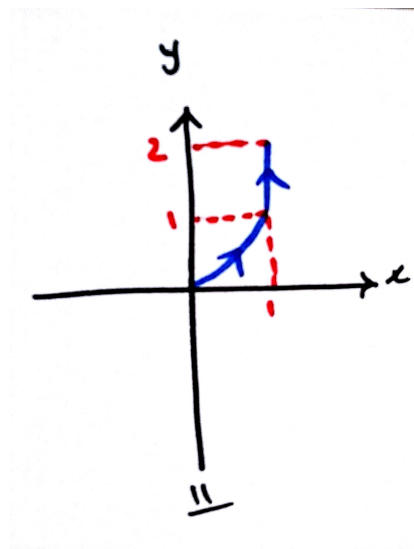
□

تمرین ۱۴۶. $\int_c 2x ds$ را حساب کنید که در آن $c = c_1 \cup c_2$ و c_1 سهمی $y = x^2$ از نقطه‌ی $(0, 0)$ تا نقطه‌ی $(1, 1)$ است و c_2 خطی عمودی از $(1, 1)$ تا $(1, 2)$ است.

پاسخ.

$$c_1 : \vec{r}'_1(t) = (t, 2t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$c_2 : \vec{r}'_2(t) = (1, 1) \quad 1 \leq t \leq 2$$



$$\vec{r}'_1(t) = (1, 2t) \Rightarrow |\vec{r}'_1(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$\vec{r}'_2(t) = (0, 1) \Rightarrow |\vec{r}'_2(t)| = \sqrt{0 + 1} = 1$$

توجه ۲۵۵. اگر c اجتماعي از خم‌های هموار $c_1, \dots, c_n$ باشد آنگاه

$$\int_c f(x, y) ds = \int_{c_1} f(x, y) ds + \dots + \int_{c_n} f(x, y) ds$$

$$\int_{c_1} 2x ds = \int_0^1 2t(\sqrt{1 + 4t^2}) dt$$

$$u = 1 + 4t^2 \Rightarrow du = 8t dt \Rightarrow \frac{du}{8} = t dt$$

$$\int_0^1 2t(\sqrt{1 + 4t^2}) dt = \frac{1}{4} \int_1^5 \sqrt{u} \frac{du}{8} = \frac{1}{32} \left. \frac{u^{3/2}}{3/2} \right|_1^5 = \dots$$

$$\int_{c_2} 2x ds = \int_1^2 2 \cdot 1 dt = 2 - 1 = 1$$

$$\int_c f(x, y) ds = \int_{c_1} f(x, y) ds + \int_{c_2} f(x, y) ds$$

□

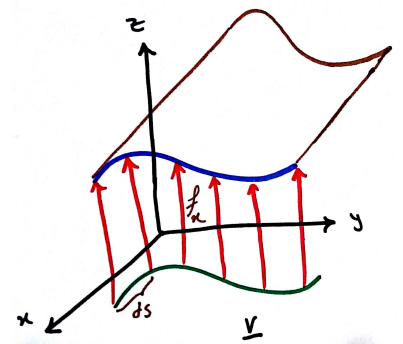
تمرین ۱۴۷. در موارد زیر، حاصل $\int_c f ds$ را محاسبه کنید:

۱. $f(x, y, z) = x + y$ و $c = r(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ برای $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

۲. $f(x, y, z) = xy + y + z$ و $c = r(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k}$

۱.۸ شهود هندسی

همان طور که در شکل زیر مشاهده می کنید، در حقیقت $\int_c f ds$ مساحت زیر f و بالای منحنی c را نشان می دهد:



تمرین ۱۴۸. مسئله زیر را با استفاده از انتگرالگیری عددی روی خمها حل کنید:

مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = 2y$ را بیابید که بالای صفحه xy و زیر کره $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ قرار دارد.

۲.۸ چند انتگرال دیگر وابسته به خم

تا اینجا با انتگرالگیری یک تابع عددی روی یک خم آشنا شدیم. دقت کنید که مقادیر تابع روی خم محاسبه می شدند و ds در پایان انتگرال نوشته می شد. در زیر چند نوع انتگرال دیگر را معرفی کرده ایم.

تعریف ۲۵۶. برای محاسبه $\int_c f(x, y) dx$ روی خم

$$c: \vec{r}(t) \quad a \leq t \leq b$$

که در آن $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ می نویسیم:

$$\int_c f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

به طور مشابه

$$\int_c f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

برای توابع $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ هم مطالب فوق را می توان تعمیم داد.

$$\int_c f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

$$\int_c f(x, y, z) dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt$$

$$\int_c f(x, y, z) dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt$$

$$\int_c f(x, y, z) dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt$$

خلاصه: با انتگرالهای $\int_c f ds$, $\int_c f dx$, $\int_c f dy$ آشنا شدیم. دقت کنید که

$$\int_c f ds = \int_{-c} f ds$$

ولی

$$\int_c f dx = - \int_{-c} f dx$$

و

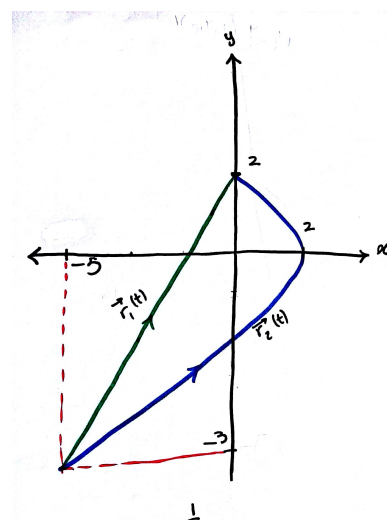
$$\int_c f dy = - \int_{-c} f dy$$

همچنین دیدیم که اگر منحنی c دارای یک معادله پارامتری $r(t)$ باشد انتگرالهای بالا را چگونه می توان محاسبه کرد.

تمرین ۱۴۹. $\int_c y^2 dx + x dy$ را محاسبه کنید که در آن c اجتماع پاره خط از $(-5, -3)$ تا $(0, 2)$ و سهمی $x = 4 - y^2$ از $(-5, -3)$ تا $(0, 2)$ است.

پاسخ.

$$\int_c \square = \int_{c_1} \square + \int_{c_2} \square$$



$$\vec{r}_1(t) : (-5, -3) + (5, 5)t = (\underbrace{-5 + 5t}_{x(t)}, \underbrace{-3 + 5t}_{y(t)}) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{C_1} y^2 dx + x dy = \underbrace{\int_{C_1} y^2 dx}_A + \underbrace{\int_{C_1} x dy}_B$$

$$x = -5 + 5t \Rightarrow dx = 5dt$$

$$A = \int_{C_1} y^2 dx = \int_1^2 (-3 + 5t)^2 5dt = \frac{(-3 + 5t)^3}{3} \Big|_1^2 = \dots$$

$$B = \int_{C_1} x dy = \int_1^2 (-5 + 5t) 5dt = \dots$$

$$\vec{r}_2(t) : (4 - t^2, t)$$

$$\int_{C_2} y^2 dx + x dy = \int_{-3}^2 (t^2)(-2t)dt + (4 - t^2)dt = \dots$$

حاصل انتگرال $\int_C y^2 dx + x dy$ برابر است با

$$\int_{C_1} y^2 dx + x dy + \int_{C_2} y^2 dx + x dy$$

□

تکمیل پاسخ به عهده شما.

تمرین ۱۵۰. حاصل $\int_C y \sin z ds$ را محاسبه کنید که در آن C منحنی مارپیچ دارای معادله $x = \cos(t)$ و $y = \sin(t)$ و $z = t$ برای $0 \leq t \leq 2\pi$ است.

تمرین ۱۵۱. حاصل انتگرال $\int_C y dx + z dy + x dz$ را حساب کنید که در آن C از دو پاره خط C_1 و C_2 تشکیل شده است که C_1 نقطه $(2, 0, 0)$ را به نقطه $(3, 4, 5)$ وصل می‌کند و C_2 نقطه $(3, 4, 5)$ را به نقطه $(3, 4, 0)$ وصل می‌کند.

۳.۸ میدان‌های برداری

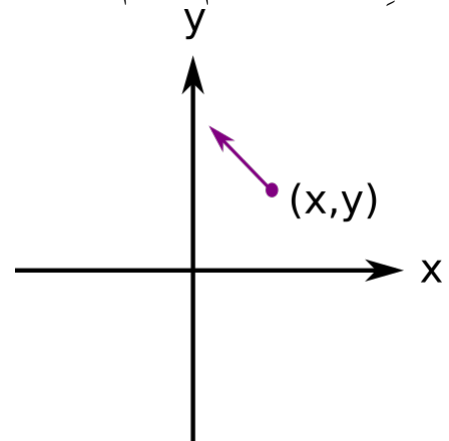
منظور از یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ تابعی است از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$:

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

دقت کنید که یک تابع برداری مانند بالا، از دو تابع عددی تشکیل شده است:

$$F(x, y) = (h(x, y), k(x, y))$$

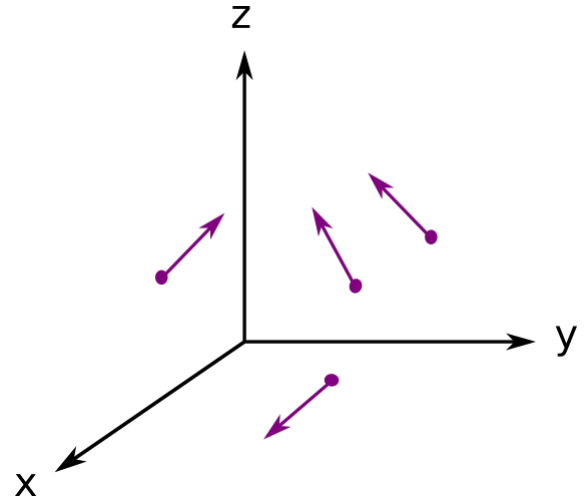
معمولاً دامنه و برد این توابع را در یک دستگاه به صورت همزمان می‌کشیم بدین صورت که با شروع از هر نقطه‌ای (x, y) بردار $F(x, y)$ را رسم می‌کنیم.



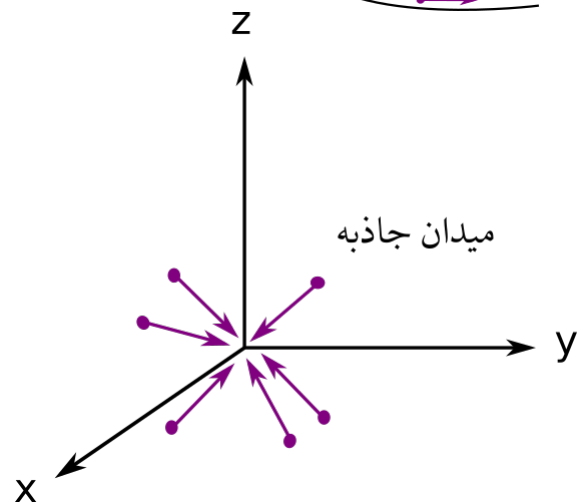
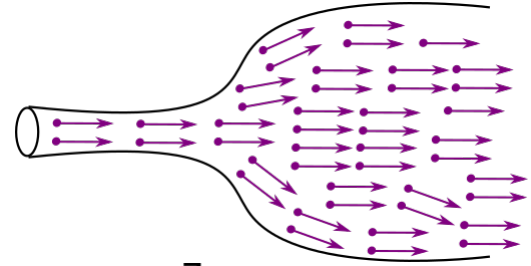
به طور مشابه منظور از یک میدان برداری روی $\mathbf{R}^3$ تابعی است مانند تابع زیر:

$$F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (h(x, y, z), k(x, y, z), l(x, y, z))$$



میدان سرعت یک مایع در درون یک لوله، میدانهای جاذبه و مغناطیسی مثالهایی از میدانهای برداری هستند:

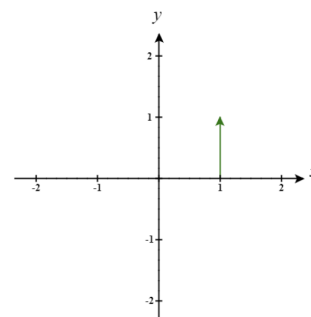


مثال ۲۵۷. تابع برداری $F(x, y) = -y \vec{i} + x \vec{j}$ را رسم کنید.

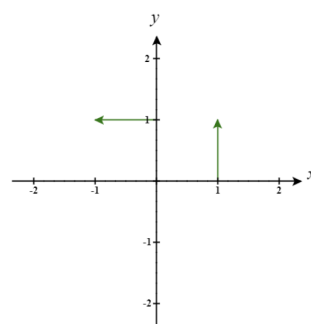
پاسخ.

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

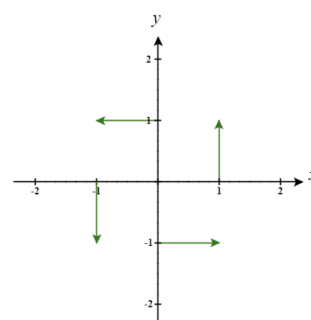
$$(1, 0) \rightarrow (0, 1)$$



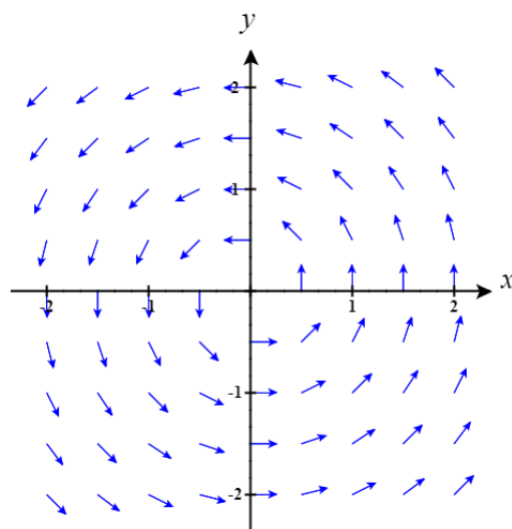
$$(0, 1) \rightarrow (-1, 0)$$



$$(-1, 0) \rightarrow (0, -1) \quad \text{و} \quad (0, -1) \rightarrow (1, 0)$$



و به همین ترتیب برای نقاط دیگر ادامه دهیم در نهایت شکل زیر حاصل می شود.



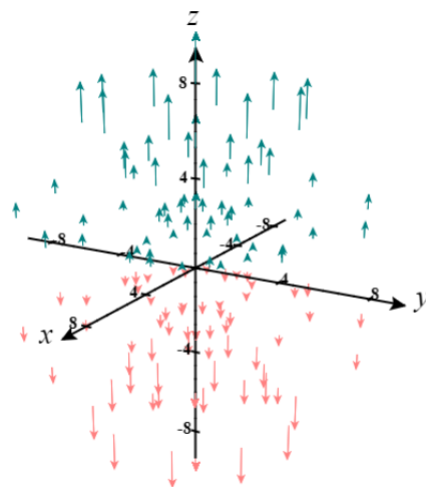
به طور دقیقتر اگر بردار مکان نقطه‌ی (x, y) باشد، آنگاه

$$(x, y) \cdot (-y, x) = -xy + xy = 0 \Rightarrow \vec{r}(x, y) \perp \vec{F}(x, y)$$

یعنی میدان برداری مورد نظر همواره بر بردار مکان عمود است و بدینسان از بردارهای مماس بر دوائر ایجاد می‌شود. □

مثال ۲۵۸. میدان برداری $F(x, y, z) = z\vec{k}$ را رسم کنید.

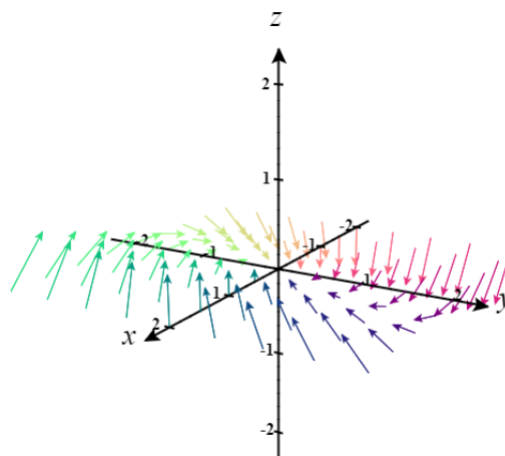
پاسخ.



□

مثال ۲۵۹. میدان برداری $F(x, y, z) = y\vec{i} - z\vec{j} + x\vec{k}$ را با استفاده از نرم‌افزارهای رایانه‌ای رسم کنید.

پاسخ.



□

مثال ۲۶۰. اگر $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع عددی باشد آنگاه

$$\nabla F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

یک میدان برداری است. همچنین اگر $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع عددی باشد آنگاه

$$\nabla f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$$

یک میدان برداری است.

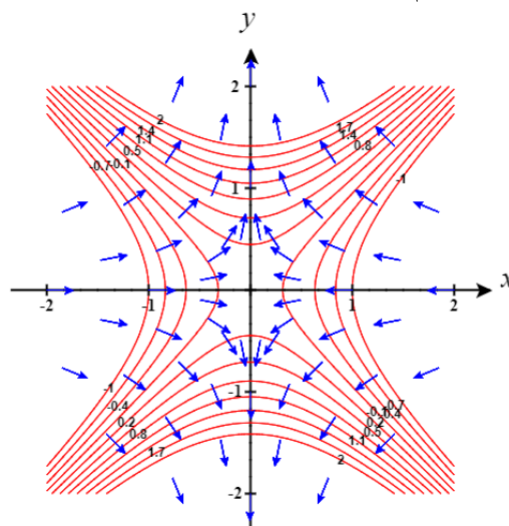
مثال ۲۶۱. فرض کنید $f(x, y) = y^2 - x^2$. میدان برداری ∇f را رسم کنید.

پاسخ.

$$\nabla f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (-2x, 2y)$$

قبلا گفته‌ایم که میدان گرادیان بر منحنی‌های تراز عمود است و در جهت افزایش تابع است:



□

برخی میدانهای برداری، برابر با گرادیان توابع عددی هستند:

تعریف ۲۶۲. فرض کنید F یک میدان برداری دلخواه روی $\mathbb{R}^3$ باشد. میدان F را پایستار می‌خوانیم هرگاه یک تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ موجود باشد به طوری که

$$\begin{array}{ccc} F & = & \nabla f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

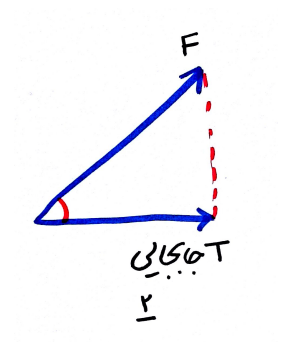
میدانهای پایستار روی فضای دو بعدی نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.

در درسهای آینده روشهایی معرفی خواهیم کرد که با استفاده از آنها به راحتی می‌توان تشخیص داد که یک میدان داده شده پایستار است یا خیر. همچنین خواهیم دید که **انتگرالهای میدانهای پایستار**، از مسیر مستقلند. بحث میدانهای برداری را فعلاً رها می‌کنیم ولی به زودی به آن بازخواهیم گشت.

۴.۸ انتگرالگیری روی خط (روی خم) از توابع برداری

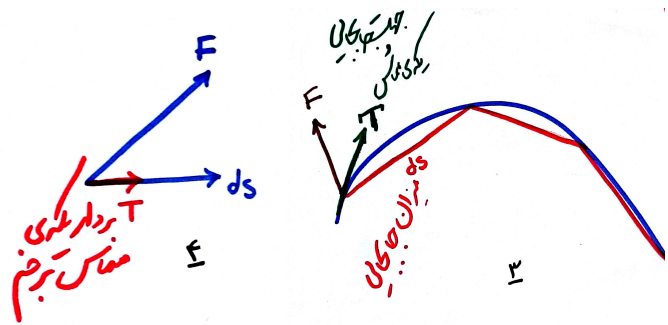
فرض کنید F یک بردار نیرو و T بردار جابجایی باشد. می‌دانیم که کار برابر است با حاصل ضرب نیروی در جهت حرکت در میزان جابجائی.

$$w = |F| \cos \theta |T| = F \cdot T \quad \text{کار=}$$



حال فرض کنید که میدان نیروی F جسمی را روی منحنی c جابجا کند. هدفمان محاسبه‌ی کار انجام شده، طی این جابجائی است.

$$c: \vec{r}(t) \quad a \leq t \leq b$$



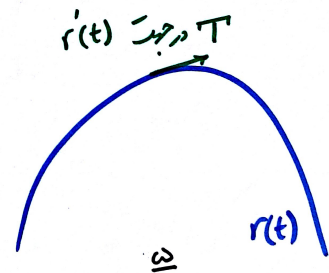
هدف ۲۶۳. محاسبه‌ی کار انجام شده.

منحنی مورد نظر را با طولهای ds تقسیم بندی می‌کنیم و فرض می‌کنیم که میزان جابجائی در هر قطعه برابر باشد با ds ولی جهت جابجائی برابر باشد با T ، که منظور از T بردار یکه‌ی مماس بر منحنی است. برای محاسبه‌ی کل کار انجام شده باید تمام این کارهای کوچک را با هم جمع بزنیم:

$$\int_c (F \cdot \underbrace{T}_{\text{بردار یکه‌ی مماس}}) ds = \text{کار انجام شده توسط میدان } F \text{ در مسیر منحنی } c$$

حال بیائید فرمول بالا را بر حسب پارامتر بندی منحنی بازنویسی کنیم؛ نخست توجه کنید که

$$T = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \quad \text{بردار یکه‌ی مماس}$$



همچنین:

$$ds = |\vec{r}'(t)| dt$$

پس:

$$\int_c (F \cdot T) ds = \int_a^b \frac{F \cdot \vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b F \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b F \cdot dr$$

به علامت ضرب داخلی در انتگرال بالا توجه کنید.

فرمول بالا را می‌توان به صورت گسترده‌ی زیر نیز نوشت: فرض کنید $F = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$ و $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ آنگاه

$$\int_a^b F \cdot dr = \int_a^b P \underbrace{dx}_{x'(t)dt} + Q \underbrace{dy}_{y'(t)dt}$$

در تمرین ابتدای همین جلسه، نحوه‌ی محاسبه‌ی انتگرال سمت راست بالا را دیده‌اید.

خلاصه ۲۶۴.

$$F = (P(x, y), Q(x, y)) \text{ میدان برداری}$$

$$c: \vec{r}(t) \quad a \leq t \leq b$$

$$\int_c F \cdot T ds = \int_c F \cdot dr = \int_c P dx + Q dy$$

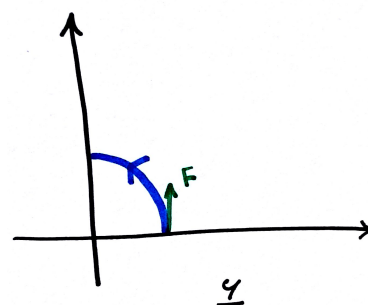
مثال ۲۶۵. کار انجام شده توسط میدان نیروی $F(x, y) = x^2 \vec{i} - xy \vec{j}$ که ذره‌ای را روی دایره‌ی $(\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ جابجا می‌کند، بیابید.

پاسخ.

$$P(x, y) = x^2$$

$$Q(x, y) = -xy$$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$$



$$dx = x'(t)dt = -\sin t dt$$

$$dy = y'(t)dt = \cos t dt$$

$$\int_c P dx = \int_c x^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(t) (-\sin t) dt = -\cos^3(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{3}$$

$$\int_c Q dy = \int_c -xy dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-\cos t)(\sin t)(\cos t) dt = -\cos^3(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{3}$$

$$\int_c F \cdot dr = \frac{2}{3}.$$

□

توجه ۲۶۶. برای توابع برداری روی $\mathbb{R}^3$ نیز به طور مشابه عمل می‌کنیم:

$$F = (P, Q) \Rightarrow \int_c F \cdot dr = \int_c P dx + Q dy$$

$$F = (P, Q, R) \Rightarrow \int_c F \cdot dr = \int_c P dx + Q dy + R dz \quad F = (P, Q, R)$$

مثال ۲۶۷. $\int_c F \cdot dr$ را حساب کنید که در آن $F(x, y, z) = xy \vec{i} + yz \vec{j} + zx \vec{k}$ و

$$c = \vec{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

پاسخ.

$$\int_c F \cdot dr = \int_c xy dx + yz dy + zx dx = \int_0^1 (t \times t^2) dt + \int_0^1 (t^2 \times t^3) 2t dt + \int_0^1 (t^3 \times t) 3t^2 dt = \dots$$

□

تمرین ۱۵۲. حاصل $\int_c F \cdot dr$ را محاسبه کنید که در آن $F(x, y, z) = xi + zj + yk$ و c مسیر خم زیر از $t = 0$ تا $t = \frac{\pi}{4}$ است:

$$r(t) = \cos(t)i + \sin(t)j + tk.$$

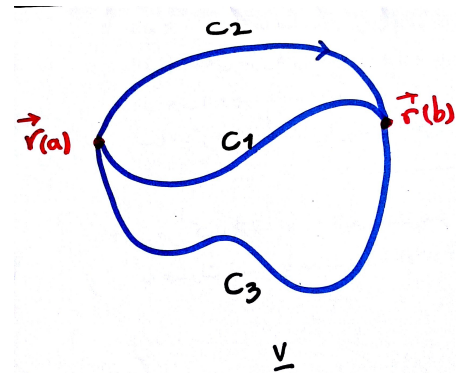
یادآوری ۲۶۸. در ریاضی ۱ دیده‌اید که:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

از فرمول بالا نتیجه می‌شود که:

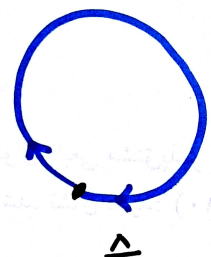
$$c: \vec{r}(t) \quad a \leq t \leq b$$

$$\begin{aligned} \int_c \nabla f \cdot dr &= \int_c f_x dx + f_y dy + f_z dz = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) \\ &= f(\text{نقطه‌ی ابتدائی خم}) - f(\text{نقطه‌ی انتهائی خم}) \end{aligned}$$



پس به نتیجه‌ی جالب زیر می‌رسیم:

توجه ۲۶۹. اگر F یک میدان برداری پایستار باشد آنگاه $\int_c F \cdot dr$ تنها به نقاط ابتدائی و انتهائی c بستگی دارد و انتگرال فوق روی مسیرهای بسته صفر است.



انتگرال توابع برداری پایستار از مسیر مستقل است (فقط به ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد). همچنین انتگرال توابع پایستار روی مسیرهای بسته برابر با صفر است.

حال از کجا می‌توانیم تشخیص دهیم که یک میدان برداری داده شده پایستار است یا نه؟
فرض کنید $F = (P, Q)$ یک میدان برداری پایستار باشد.

$$\exists \underbrace{f}_{\text{تابع عددی}} \quad P = f_x \quad Q = f_y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

در واقع تحت شرایطی مشخص،^۱ میدان برداری $F = (P(x, y), Q(x, y))$ پایستار است اگر و تنها اگر

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

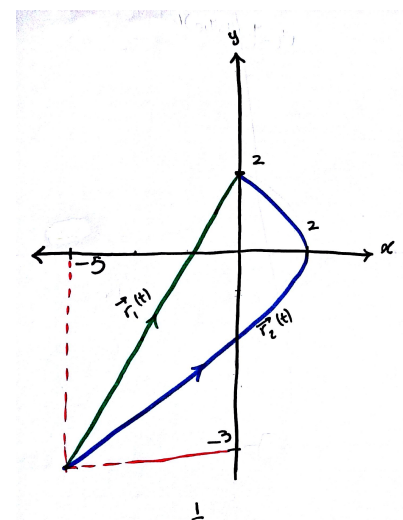
همچنین برای توابع برداری سه بعدی $F = (P, Q, R)$ برای پایستاری باید شرط زیر برقرار باشد:

$$P_y = Q_x \quad P_z = R_x \quad Q_z = R_y$$

تمرین ۱۵۳. $\int_c y^2 dx + x dy$ را محاسبه کنید که در آن c شامل یک پاره خط از $(-5, -3)$ تا $(0, 2)$ و سهمی $x = 4 - y^2$ از $(-5, -3)$ تا $(0, 2)$ است.

پاسخ.

$$\int_c \square = \int_{c_1} \square + \int_{c_2} \square$$



$$\vec{r}_1(t) : (-5, -3) + (5, 5)t = (\underbrace{-5 + 5t}_{x(t)}, \underbrace{-3 + 5t}_{y(t)}) \quad 0 \leq t \leq 1$$

^۱تابع برداری مورد نظر روی یک ناحیه‌ی همبند ساده تعریف شده باشد و در این ناحیه، P, Q دارای مشتقات جزئی اول پیوسته باشند.

$$\int_{c_1} y^x dx + x dy = \underbrace{\int_{c_1} y^x dx}_A + \underbrace{\int_{c_1} x dy}_B$$

$$x = -5 + 5t \Rightarrow dx = 5dt$$

$$A = \int_{c_1} y^x dx = \int_1^2 (-3 + 5t)^x 5dt = \frac{(-3 + 5t)^{x+1}}{x+1} \Big|_1^2 = \dots$$

$$B = \int_{c_1} x dy = \int_1^2 (-5 + 5t) 5dt = \dots$$

$$\vec{r}_x(t) : (4 - t^x, t)$$

$$\int_{c_2} y^x dx + x dy = \int_{-3}^x (t^x)(-xt)dt + (4 - t^x)dt = \dots$$

حاصل انتگرال $\int_c y^x dx + x dy$ برابر است با

$$\int_{c_1} y^x dx + x dy + \int_{c_2} y^x dx + x dy$$

□

تکمیل پاسخ بالا و انجام محاسبات را به عهده‌ی دانشجو می‌گذارم.

انتگرال سوال قبل دارای صورت برداری زیر است:

$$\int_c \overset{P}{\uparrow} (y^x, x) \cdot \overset{Q}{\uparrow} dr$$

گفتیم که اگر میدان برداری پایستار باشد،

$Q_x = P_y$. پس در سوال قبل میدان برداری مورد نظر پایستار نیست.

سوال ۲۷۰. ۱. تعیین کنید که آیا میدان $F(x, y) = \underbrace{(3 + 2xy)}_{P(x)} \vec{i} + \underbrace{(x^2 - 2y^2)}_{Q(x)} \vec{j}$ پایستار است؟

پاسخ.

$$Q_x = 2x \quad , \quad P_y = 2x \quad Q_x = P_y$$

□

بنابراین میدان F پایستار است.

۲. یک تابع $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ چنان بیابید که $\nabla f = F$.

پاسخ.

$$F(P, Q) = \nabla f = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

$$f_x(x, y) = 3 + 2xy \Rightarrow f(x, y) = 3x + x^2 y + g(y)$$

$$f_y(x, y) = x^2 - 2y^2$$

مشتق $f(x, y) = 3x + x^2 y + g(y)$ بر حسب y برابر است با

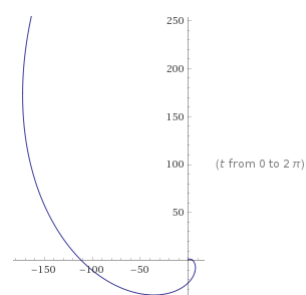
$$x^2 + g'(y) = x^2 - 2y^2 \Rightarrow g'(y) = -2y^2 \Rightarrow g(y) = -\frac{2}{3}y^3 + k$$

بنابراین

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + k$$

□

۳. حاصل $\int_c F \cdot dr$ را بیابید که در آن c توسط معادله‌ی برداری $\vec{r}(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t)$ برای $0 \leq t \leq \pi$ داده شده است.



پاسخ.

$$F(x, y) = (3 + 2xy)\vec{i} + (x^2 - 3y^2)\vec{j}$$

$$\int_c F \cdot dr = \int_c Pdx + Qdy = \int_0^\pi (3 + 2e^t \sin t e^t \cos t) dt + \dots$$

معلوم است که محاسبه‌ی انتگرال بالا دشوار است، اما در بالا مشاهده کردیم که میدان F پایستار است. یعنی می‌توانیم تابع f را به گونه‌ای پیدا کنیم که

$$\int_c F \cdot dr = \int_c \nabla f \cdot dr = f(\text{نقطه‌ی انتهایی}) - f(\text{نقطه‌ی شروع})$$

تابع f را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + k$$

نقطه‌ی شروع c برابر است با $(0, 1)$ و نقطه‌ی پایان برابر است با $(0, -e^\pi)$.

$$\int_c F \cdot dr = f(0, -e^\pi) - f(0, 1) = \dots$$

□

سوال ۲۷۱. حاصل $\int F \cdot dr$ را حساب کنید که در آن $F(x, y) = (x^2 - 2y)i + (x + y)j$ و

۱. C قسمتی از سهمی $y = x^2$ است که از نقطه $(0, 0)$ تا $(2, 4)$ کشیده شده است.

۲. C خط راستی است که از نقطه $(0, 0)$ تا $(2, 4)$ کشیده شده است.

۳. دقت کنید که جوابها متفاوت هستند. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

سوال ۲۷۲. حاصل $\int F \cdot dr$ را محاسبه کنید که در آن $F = (y + z, x + 2y, x - 4z)$ و

۱. C خم (t, t^2, t^3) از نقطه $(1, 1, 1)$ تا $(2, 4, 8)$ است.

۲. C خط راست بین همین دو نقطه است.

۳. نشان دهید که $F = \nabla G$ که $G(x, y, z) = xy + xz + y^2 - 2z^2$.

تمرین ۱۵۴. در مواد زیر، کار نیروی F برای جابه‌جایی در مسیر R را محاسبه کنید:

۱. $F(x, y, z) = xyi + yj - yzk$ و $R(t) = ti + t^2j + tk$ و $0 \leq t \leq 1$.

۲. $F(x, y, z) = 2yi + 3xj + (x + y)k$ و $R(t) = \cos(t)i + \sin(t)j + \frac{t}{\pi}k$ و $0 \leq t \leq 2\pi$.

تمرین ۱۵۵. نشان دهید که میدان برداری $F(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ پاستار است و تابع پتانسیل آن را پیدا کنید.

تمرین ۱۵۶. تمرین قبلی را در مورد میدان برداری $F(x, y, z) = (xy - \sin z)\mathbf{i} + (\frac{1}{y}x^2 - \frac{e^y}{z})\mathbf{j} + (\frac{e^y}{z^2} - x \cos(z))\mathbf{k}$ تکرار کنید.

تمرین ۱۵۷. حاصل $\int_C F \cdot dr$ را در دو مسیر زیر از نقطه $(1, 0)$ به نقطه $(0, -1)$ محاسبه کنید:

۱. پاره خط واصل

۲. دایره به شعاع یک به مرکز مبدأ، از نقطه اول تا نقطه دوم.

تمرین ۱۵۸. فرض کنید $F(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + (2xy + e^{xz})\mathbf{j} + 3ye^{xz}\mathbf{k}$. تابع f را به گونه‌ای پیدا کنید که $\nabla f = F$.

۵.۸ پایستگی انرژی

فرض کنید که F یک میدان نیرو باشد که جسمی را در مسیر $r(t)$ حرکت می‌دهد. بنا به قانون دوم نیوتن داریم:

$$F(r(t)) = ma = mr''(t).$$

کار انجام شده توسط F در مسیر r از $t = a$ تا $t = b$ برابر است با:

$$\int F \cdot dr = \frac{1}{2}m((v(b))^2 - (v(a))^2) = k(b) - k(a).$$

یعنی کار انجام شده توسط نیرو، برابر با میزان تغییر انرژی جنبشی است. انرژی جنبشی جسم در لحظه t را با $k(t)$ نشان داده‌ایم. حال اگر F پاستار باشد، یک تابع p وجود دارد به طوری که $-\nabla p = F$. در این صورت می‌گوییم p تابع پتانسیل F است. دوباره به راحتی می‌بینیم که

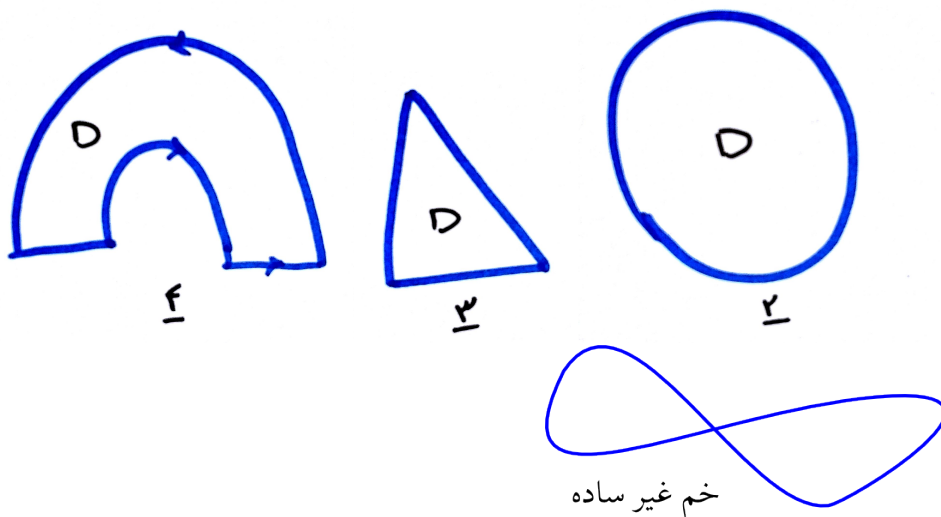
$$\int F \cdot dr = p(b) - p(a)$$

از این دو رابطه نتیجه می‌گیریم که

$$p(a) + k(a) = p(b) + k(b).$$

۱.۵.۸ قضیه‌ی گرین

قضیه ۲۷۳ (قضیه‌ی گرین^۲). فرض کنید C یک خم بسته‌ی به طور قطعه‌ای هموار، ساده و جهت‌دار در جهت مثبت باشد و D ناحیه‌ی احاطه شده توسط C باشد. دقت کنید که ساده بودن یعنی این که خم مورد نظر خودش را تنها در نقطه‌ی انتهائی قطع کند. جهت‌دار بودن در جهت مثبت یعنی وقتی در جهت خم به روی حرکت کنیم، ناحیه‌ی احاطه شده توسط آن در سمت چپمان قرار گیرد. عکسهای ۲ و ۳ و ۴ نمونه‌های مطلوب برای اینگونه خمها هستند.

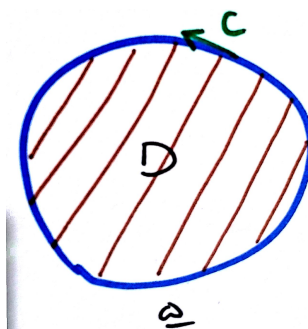


فرض کنید P و Q مشتقات جزئی پیوسته در یک مجموعه‌ی باز شامل D داشته باشند. آنگاه

$$\underbrace{\int_C F \cdot dr}_{\text{انتگرال از یک تابع برداری روی خم مرزی}} = \underbrace{\iint_D (Q_x(x, y) - P_x(x, y)) dx dy}_{\text{انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ی احاطه شده توسط خم}}$$

به بیان دیگر:

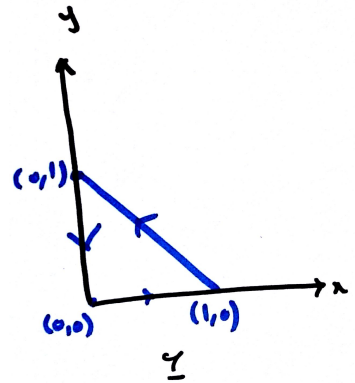
$$\oint_C \underbrace{P dx + Q dy}_{F \cdot dr} = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$



مثال ۲۷۴. انتگرال زیر را با توجه به مسیر کشیده شده بیابید.

$$\oint_C x^2 dx + xy dy$$

²Green's theorem



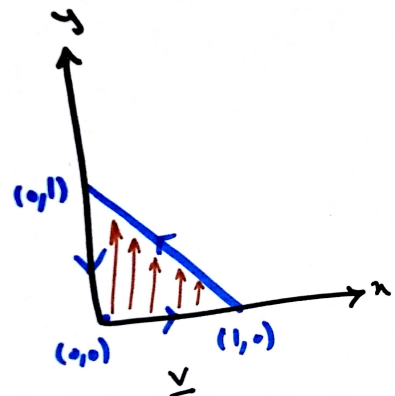
پاسخ.

$$P(x, y) = x^2, Q(x, y) = xy$$

$$P_y(x, y) = 0, Q_x(x, y) = y$$

$$\int_c Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

$$\iint_D y dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} y dy dx =$$



$$\int_0^{1-x} y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = -\frac{(1-x)^3}{6} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

□

مثال ۲۷۵. انتگرال $\oint_C (\Re y - e^{\sin x}) dx + (\Im x + \sqrt{y^2 + 1}) dy$ را روی مسیر دایره‌ای $x^2 + y^2 = 9$ محاسبه کنید.

$$P(x, y) = \Re y - e^{\sin x}$$

$$Q(x, y) = \Im x + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$P_y(x, y) = \Re \quad , \quad Q_x(x, y) = \Im$$

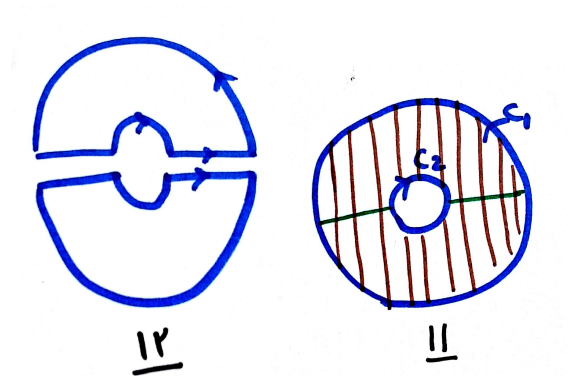
$$\oint Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

$$\iint_D \varphi dA = \varphi \underbrace{\iint_D dA}_{\text{مساحت دایره}} =$$

$$\varphi \int_0^{2\pi} \int_0^3 r dr d\theta = \varphi \pi \times 3^2$$

تمرین ۱۵۹. نشان دهید قضیه‌ی گرین برای نواحی دارای حفره مانند ناحیه‌ی زیر درست است (به جهت خمها توجه کنید)

$$\int_{c_1 \cup c_2} F \cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$



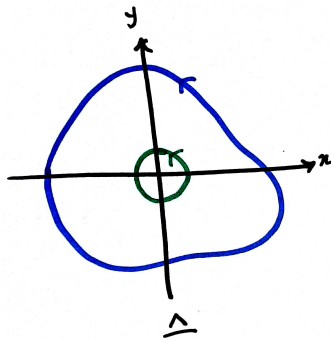
مثال ۲۷۶. فرض کنید $F(x, y) = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{x^2 + y^2}$ نشان دهید که روی هر منحنی ساده‌ی بسته در جهت مثبت که مبدأ را احاطه کند داریم:

$$\int_c F \cdot dr = 2\pi$$

پاسخ. دقت کنید که تابع تحت انتگرال در مبدأ تعریف نشده است. پس نمی‌توان روی هر منحنی دلخواه به راحتی از قضیه‌ی گرین استفاده کرد. منحنی دلخواه c را در نظر بگیرید که در شکل زیر به رنگ آبی نشان داده شده است. یک منحنی کوچکتر جهتدار در داخل آن به رنگ سبز رسم کرده‌ایم که آن را c_1 می‌نامیم. هدفمان نشان دادن این است که انتگرال برداری تابع مورد نظر، روی دو منحنی رسم شده با هم برابر است. برای این کار انتگرال زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{c \cup (-c_1)} P dx + Q dy$$

از آنجا که تابع F در ناحیه‌ی بین دو خم تعریف شده است و در این ناحیه در شرایط قضیه‌ی گرین صدق می‌کند، برای



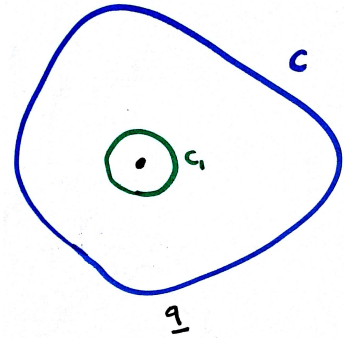
محاسبه‌ی انتگرال بالا از قضیه‌ی گرین، روی ناحیه‌ی بین خمها استفاده می‌کنیم:

$$Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow Q_x(x, y) = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \Rightarrow P_y(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$Q_x = P_y \Rightarrow \int_{c \cup (-c_1)} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_c F \cdot dr = \int_{c_1} F \cdot dr$$



توجه ۲۷۷. از آنچه در بالا گفتیم نتیجه می‌شود که برای هر خم c_1 و c_2 دلخواه شامل مبدأ

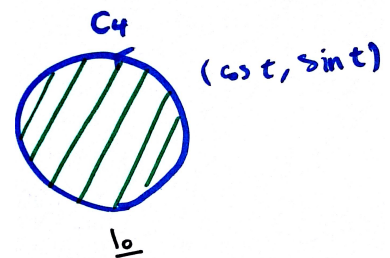
$$\int_{c_1} F dr = \int_{c_2} F dr$$

کافی است که یک خم c_3 کوچکتر از c_1, c_2 در نظر بگیریم. آنگاه بنا بر آنچه در بالا ثابت کردیم انتگرال روی هر دوی این خمها برابر با انتگرال روی c_3 است. حال از آنجا که انتگرال مورد نظر روی تمام خمها با هم برابر است، برای دانستن مقدار این انتگرال، کافی است

$$\int_c F \cdot dr$$

را روی خم ساده‌ی $0 \leq t \leq 2\pi$ $(\cos t, \sin t)$ محاسبه کنیم.

دقت کنید که در اینجا نیز باز نمی‌توان از قضیه‌ی گرین استفاده کرد زیرا تابع در مبدأ تعریف نشده است. پس انتگرال مورد نظر را با استفاده از تعریف حساب می‌کنیم.



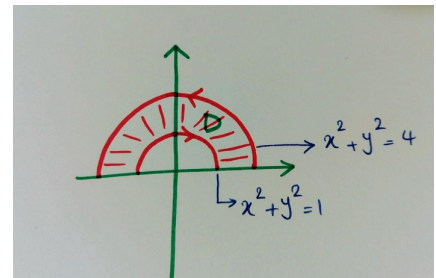
$$\int_{c_4} F \cdot dr = \int_{c_4} P dx + Q dy = \int_{c_4} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy =$$

$$\int_0^{2\pi} -\sin t(-\sin t) dt + \cos t(\cos t) dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + \cos^2 t dt = 2\pi$$

□

در مثال بالا از قضیه‌ی گرین برای نواحی حفره‌دار استفاده کردیم:

مثال ۲۷۸. $\oint_C y^2 dx + 3xy dy$ را محاسبه کنید که C مرز ناحیه D و در جهت خلاف عقربه‌های ساعت است.



پاسخ. بنا به قضیه‌ی گرین:

$$\begin{aligned} \oint_C \underbrace{y^2}_P dx + \underbrace{3xy}_Q dy &= \iint_D \underbrace{(3y - 2y)}_y dA = \int_0^\pi \int_1^2 r(\sin \theta) r dr d\theta = \int_0^\pi \sin \theta \times \int_1^2 r^2 dr \\ &= -\cos(\theta) \Big|_0^\pi \times \frac{r^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

□

۶.۸ استفاده‌ی برعکس از قضیه‌ی گرین

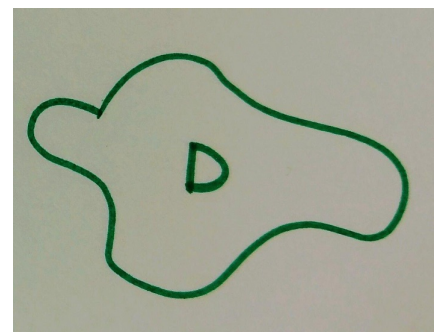
محاسبه‌ی مساحت ناحیه‌ی D :

می‌دانیم که مساحت یک ناحیه‌ی D در فضای دو بعدی توسط انتگرال $\iint_D dA$ محاسبه می‌شود. فرض کنید ناحیه‌ی D توسط یک خم C احاطه شده باشد. بنا به قضیه‌ی گرین برای هر تابع برداری F داریم

$$\iint_D (Q_x - P_y) dA = \int_C F \cdot dr$$

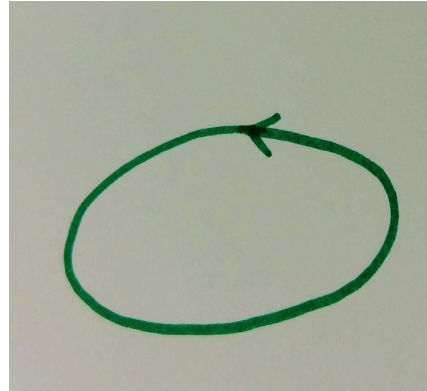
حال اگر یک تابع برداری $F = (P, Q)$ چنان بیابیم که $Q_x - P_y = 1$ می‌توانیم مساحت ناحیه‌ی D را به آسانی با به دست آوردن مقدار $\int_C F \cdot dr$ حساب کنیم. تابع F می‌تواند به عنوان مثال یکی از توابع زیر باشد:

$$F(x, y) = (0, x) \quad F(x, y) = (-y, 0), \quad F(x, y) = \left(-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x\right)$$



$$\iint_D 1 dA = \iint_D (Q_x - P_y) dA = \oint_C x dy = - \oint_C y dx = \oint_C \underbrace{-\frac{1}{2}y}_P dx + \underbrace{\frac{1}{2}x}_Q dy$$

مثال ۲۷۹. مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را محاسبه کنید.



پاسخ.

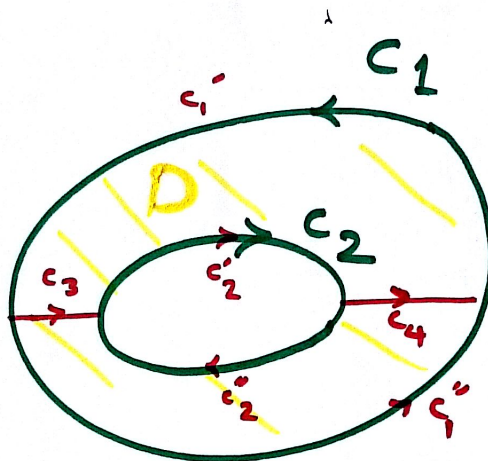
$$\iint_D 1 dA = \frac{1}{2\pi} \oint_c -y dx + x dy$$

$$c: \vec{r}(t) : (a \cos \theta, b \sin \theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\iint_D 1 dA = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (b \sin \theta) a \sin \theta + a \cos \theta b \cos \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ab d\theta = \frac{1}{2\pi} ab \times 2\pi = \pi ab$$

□

از قضیه‌ی گرین می‌توان برای محاسبه‌ی انتگرال روی نواحی حفره‌دار نیز به صورت زیر استفاده کرد:



$$c_2 = c_2' \cup c_2''$$

$$c_1 = c_1' \cup c_1''$$

$$\int_{c_1 \cup c_2} P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

اثبات.

$$D_1 \cup D_2 = D, \quad c_1' \cup c_2'' = c_1, \quad c_1'' \cup c_2' = c_2$$

$$D : \oint_{c_1 \cup c_2} Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

$$D_1 : \oint_{c'_1 \cup c'_2 \cup c_2 \cup c_1} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} (Q_x - P_y) dA$$

$$D_2 : \oint_{c''_1 \cup c''_2 \cup (-c_2) \cup (-c_1)} Pdx + Qdy = \iint_{D_2} (Q_x - P_y) dA$$

با جمع دو طرف تساوی‌های بالا:

$$\iint_D (Q_x - P_y) dA = \oint_c Pdx + Qdy$$

□

تمرین ۱۶۰. فرض کنید $F(x, y) = (xy + x)\mathbf{i} + (xy - y)\mathbf{j}$ و c مربع محدود به خط‌های $x = 0, x = 1, y = 0$ و $y = 1$ باشد. حاصل $\oint_c F \cdot dr$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱۶۱. حاصل $\int_c (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos(y^2))dy$ را حساب کنید که در آن c مرز ناحیه احاطه شده توسط سهمی‌های $y = x^2$ و $x = y^2$ است.

تمرین ۱۶۲. فرض کنید $F(x, y) = (e^{-x} + y^2, e^{-y} + x^2)$. حاصل انتگرال $\int_c F \cdot dr$ را محاسبه کنید که در آن c بخشی از منحنی $y = \cos(x)$ از نقطه $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ به نقطه $(\frac{\pi}{4}, 0)$ اجتماع پاره‌خط واصل این دو نقطه است.

تمرین ۱۶۳. حاصل انتگرال

$$\int_c (3x^2 e^y)dx + (x^3 e^y + 1)dy$$

را محاسبه کنید که در آن c قسمتی از دایره $x^2 + y^2 = 2x$ است که از نقطه $(1, 1)$ به نقطه $(0, 0)$ با $y \geq 0$ کشیده شده است. (راهنمایی: مسیر را ببندید!)

فصل ۹

انتگرالهای روی رویه

تا کنون با انتگرالهای روی خم آشنا شده‌ایم و دیدیم که دو نوع انتگرالگیری روی خم داریم:

(۱) انتگرال توابع عددی روی خم

$$\int_c f ds = \int f(r(t)) |r'(t)| dt$$

(۲) انتگرال توابع برداری روی خم

$$\int_c F \cdot T ds = \int_c F \cdot r'(t) dt = \int P dx + Q dy + R dz$$

همچنین بررسی کردیم که

$$\begin{aligned} \int_c f ds &= \int_{-c} f ds \\ \int_c F \cdot dr &= - \int_{-c} F \cdot dr \end{aligned}$$

در ادامه‌ی درس قرار است با دو نوع انتگرالگیری روی رویه‌ها آشنا شویم:

(۱) انتگرالگیری از توابع عددی روی رویه‌ها

(۲) انتگرالگیری از توابع برداری روی رویه‌ها

پیش از آن لازم است با رویه‌های پارامتری آشنا شویم:

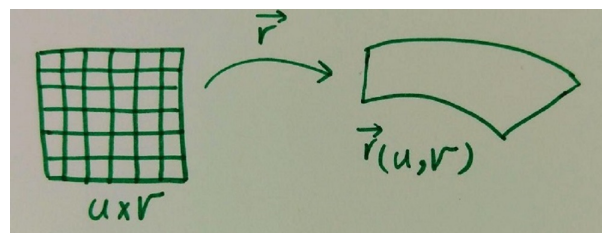
۱.۹ رویه‌های پارامتری

یادآوری ۲۸۰. گفتیم که خمها را می‌توان به صورت زیر پارامتر بندی کرد:

$$c : r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad a \leq t \leq b$$

برای پارامتر بندی رویه ها به دو متغیر نیازمندیم. یک رویه ی پارامتری توسط معادله ای برداری مانند معادله ی زیر داده می شود:

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d$$



مثال ۲۸۱. معادله ی پارامتری رویه ی $z = f(x, y)$ را بنویسید. (فرض کنید $a \leq x \leq b$ و $c \leq y \leq d$ رویه ی یاد شده را می توان بدین صورت پارامتر بندی کرد:

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)) \quad a \leq x \leq b \quad c \leq y \leq d$$

مثال ۲۸۲. کره به شعاع ۱ به مرکز مبدأ مختصات را پارامتر بندی کنید.

پاسخ.

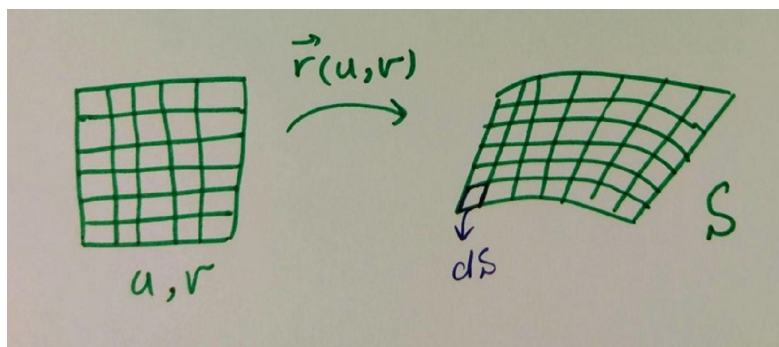
$$\rho = 1$$

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

□

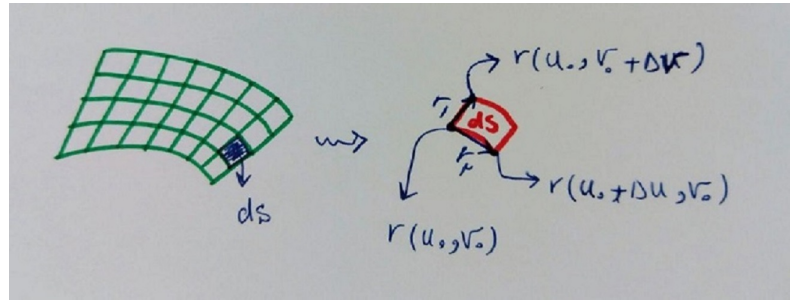
۲.۹ انتگرال توابع عددی روی رویه ها



فرض کنید $f(x, y, z) : R^3 \rightarrow R$ یک تابع باشد.

هدف: تعریف $\iint_S f(x, y, z) dS$.

دقت کنید که از حالت بزرگ حرف S استفاده کرده ایم تا با انتگرال روی خمها اشتباه گرفته نشود.



$$\vec{r}_v : \vec{r}(u, v + \Delta v) - \vec{r}(u, v) \approx \Delta v r_v$$

$$\vec{r}_u : \vec{r}(u + \Delta u, v) - \vec{r}(u, v) \approx \Delta u r_u$$

$$dS = |r_u \times r_v| = |r_u \times r_v| du dv$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\text{دامنه‌ی متغیرهای } u, v} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |r_u \times r_v| du dv$$

نتیجه ۲۸۳. مساحت رویه ی S برابر است با:

$$\iint_S dS = \iint_D |r_u \times r_v| du dv$$

مثال ۲۸۴. حاصل $\iint_S x^2 dS$ را محاسبه کنید که در آن S کره ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است.

پاسخ. نخست باید کره ی مورد نظر را پارامتر بندی کنیم.

$$r(\theta, \varphi) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi) \quad \bullet \leq \theta \leq 2\pi, \quad \bullet \leq \varphi \leq \pi$$

$$dS = |r_\varphi \times r_\theta| d\varphi d\theta$$

$$r_\varphi(\theta, \varphi) = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi)$$

$$r_\theta(\theta, \varphi) = (-\sin \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \theta, \bullet)$$

$$r_\varphi \times r_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi \\ -\sin \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \bullet \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} (+\sin^2 \varphi \cos \theta) - \vec{j} (-\sin^2 \varphi \sin \theta) + \underbrace{\vec{k} (\sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta + \cos \varphi \sin \varphi \sin^2 \theta)}_{\cos \varphi \sin \varphi}$$

$$|r_\varphi \times r_\theta| = \sqrt{\sin^4 \varphi \cos^2 \theta + \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} =$$

$$\sqrt{\sin^4 \varphi (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1) + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = \sqrt{\sin^4 \varphi (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} = \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \iint_S x^2 dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\sin \varphi \cos \theta)^2 \sin \varphi d\theta d\varphi = \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi}_A \times \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_B$$

$$A = \int \sin^3 \varphi (\sin \varphi) d\varphi = \int \underbrace{(1 - \cos^2 \varphi)}_{1-u^2} \underbrace{(\sin \varphi) d\varphi}_{du} = \dots$$

$$B = \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \dots$$

□

۳.۹ اِلمان سطح برای رویه‌های $z = f(x, y)$

فرض کنید رویه‌ی مورد نظر دارای معادله‌ی صریح $z = f(x, y)$ باشد. آنگاه داریم:

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

$$r_x(x, y) = (1, 0, f_x) \quad r_y(x, y) = (0, 1, f_y)$$

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = i(-f_x) - j(f_y) + k(1) = (-f_x, -f_y, 1)$$

$$dS = \underbrace{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}_{\text{اندازه‌ی بردارگرادیان}} dx dy$$

تمرین ۱۶۴. مساحت کره‌ی واحد را محاسبه کنید.

مثال ۲۸۵. $\iint_S y dS$ را حساب کنید که در آن S رویه‌ی زیر است:

$$z = x + y^2 \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

پاسخ.

$$dS = \sqrt{1 + (1)^2 + (2y)^2} dx dy$$

$$\iint_S y dS = \int_0^2 \int_0^1 y \sqrt{2 + 4y^2} dx dy = \int_0^2 y \sqrt{2 + 4y^2} dy = \int \frac{\sqrt{u}}{4} du = \frac{2}{3} \frac{u^{3/2}}{4} \Big|_0^2 = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

□

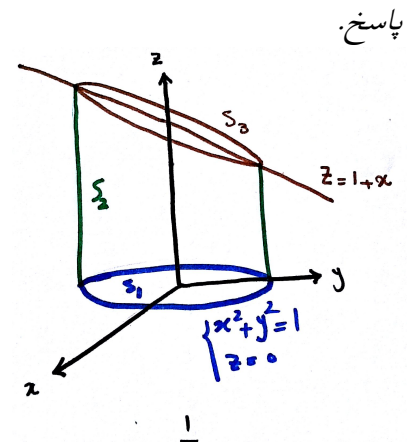
از خانم شیرجری بابت تاپ جزوه‌ی این جلسه سپاسگزاری می‌کنم.

مثال ۲۸۶. $\iint_S z dS$ را بیابید که در آن S شامل سه رویه زیر است:

$$۱. \text{ از بغل، استوانه‌ی } x^2 + y^2 = 1$$

۲. از زیر، دیسک محدود به دایره‌ی $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه‌ی $z = 0$

۳. از بالا، صفحه‌ی $z = 1 + x$



پارامتر بندی S_2 :

$$r(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1 + x = 1 + \cos \theta$$

$$r_\theta(\theta, z) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

$$r_z(\theta, z) = (0, 0, 1)$$

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(\cos \theta) + \vec{j}(\sin \theta) + 0\vec{k}$$

$$|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z| = 1$$

$$\iint_{S_2} f dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \theta} z dz d\theta = \dots$$

حال به سطح S_1 می‌پردازیم. این سطح دارای معادله‌ی $z = 0$ است. گفتیم که اگر سطحی با معادله‌ی $z = g(x, y)$ داده شده باشد، آنگاه $dS = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} du dv$

$$\iint_{S_1} f dS = \iint_{u,v} z \frac{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}} du dv \iint_{S_1} 0 \times 1 dA = 0$$

دقت کنید که در سطح S_1 مقدار z برابر با صفر است.

حال به سطح S_3 می‌پردازیم. این سطح هم دارای معادله‌ای به صورت $z = g(x, y)$ است.

$$S_3 : (x, y, 1 + x)$$

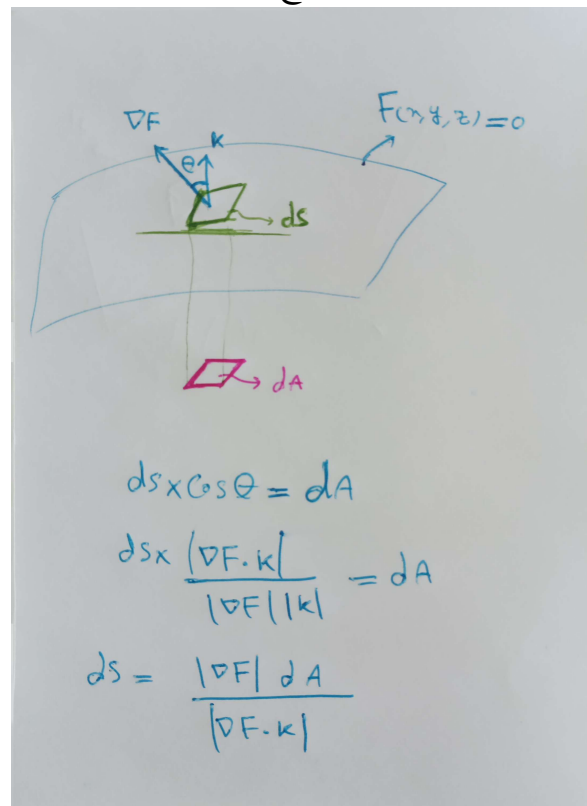
$$z = g(x, y) \rightarrow |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\iint_{S_3} z dS = \iint (1 + x) \sqrt{2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + \cos \theta) \sqrt{2} r dr d\theta = \dots$$

□

۴.۹ ایمان سطح برای رویه‌های ضمنی

در این بخش می‌خواهیم نحوه محاسبه مساحت یک رویه با معادله $F(x, y, z) = 0$ را مطالعه کنیم. مطابق شکل زیر، تصویر المان متوازی الاضلاع، روی صفحه xy برابر با dA است:



بنابراین محاسبات زیر را داریم:

$$dS \cos(\theta) = dA$$

$$dS \frac{|\nabla F \cdot k|}{|\nabla F| |k|} = dA$$

$$dS = \frac{|\nabla F|}{|F_z|} dA.$$

واضح است که فرمول بالا در صورتی کار می‌کند که $F_z \neq 0$.

تمرین ۱۶۵. با استفاده از روش فوق:

۱. مساحت قسمتی از سهمی‌گون $x^2 + y^2 - z = 0$ را محاسبه کنید که زیر صفحه $z = 1$ قرار دارد.

۲. مساحت عرقچینی را پیدا کنید که بر اثر گذر کردن استوانه $x^2 + y^2 = 1$ از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ در $z \geq 0$ ایجاد می‌شود.

تمرین ۱۶۶. آیا می‌توانید روش فوق را کمی تنظیم کنید تا بتوان آن را برای محاسبه مساحت جانبی استوانه هم استفاده کرد؟ به عنوان مثال، با استفاده از روش فوق، مساحت یک استوانه $x^2 + y^2 = 1$ از $z = 0$ تا $z = x + 1$ را محاسبه کنید.

۵.۹ تمرین

تمرین ۱۶۷. حاصل انتگرال $\iint_S (xy - 2z) dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از صفحه $2x + y + z = 2$ است که یک هشتم اول مختصات واقع شده است.

تمرین ۱۶۸. حاصل انتگرال $\iint_S (y^2 + xz) dS$ را محاسبه کنید که در آن S قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ است که بین صفحات $y = 1$ و $y = 2$ واقع شده است.

تمرین ۱۶۹. مساحت قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را محاسبه کنید که درون کره $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ واقع شده است.

تمرین ۱۷۰. مساحت قسمتی از هذلولی گون یکپارچه $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ را محاسبه کنید که بین صفحات $z = 1$ و $z = 2$ واقع شده است.

تمرین ۱۷۱. حاصل انتگرال $\iint_S x dS$ را محاسبه کنید که در آن S ناحیه مثلثی با رئوس $(1, 0, 0)$ و $(0, -2, 0)$ و $(0, 0, 4)$ است.

تمرین ۱۷۲. حاصل انتگرال $\iint_S z^2 dS$ را محاسبه کنید که در آن S بخشی از سهمی وار $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ است که در آن $0 \leq y \leq 5$.

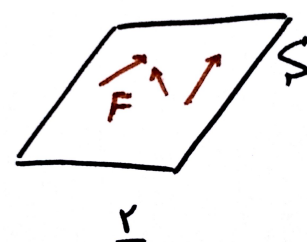
تمرین ۱۷۳. حاصل $\iint_S y^2 dS$ را محاسبه کنید که در آن S بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ است که بالای مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ واقع شده است.

تمرین ۱۷۴. حاصل انتگرال $\iint_S xz dS$ را محاسبه کنید که در آن مرز ناحیه احاطه شده توسط استوانه $y^2 + z^2 = 9$ و صفحات $x = 0$ و $x + y = 5$ است.

تمرین ۱۷۵. مساحت قسمتی از صفحه $z = xy$ را محاسبه کنید که در استوانه $x^2 + y^2 = 1$ واقع شده است.

تمرین ۱۷۶. مساحت قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ را محاسبه کنید که داخل سهمی وار $z = x^2 + y^2$ واقع شده است.

۶.۹ انتگرالگیری از توابع برداری روی رویه‌ها = محاسبه شار



فرض کنید S یک رویه‌ی جهتدار باشد. یعنی فرض کنید که این رویه، دارای زیر و روی مشخص باشد: برای مثال یک

توپ پلاستیکی که از وسط دو نیم شده باشد. به طور دقیق‌تر، فرض کنید S یک رویه باشد و در هر نقطه (x, y, z) روی آن یک بردار نرمال $n(x, y, z)$ داشته باشیم. تعریف رویه جهت‌دار کار چندان آسانی نیست اما سعی می‌کنم توضیحی برای آن فراهم کنم: زمانی می‌گوییم یک رویه جهت‌دار است که بردارهای نرمال روی آن (به جهت بیرون از رویه فکر کنید) به صورت پیوسته تغییر بکنند. در اینجا قرار است تابع:

$$n: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

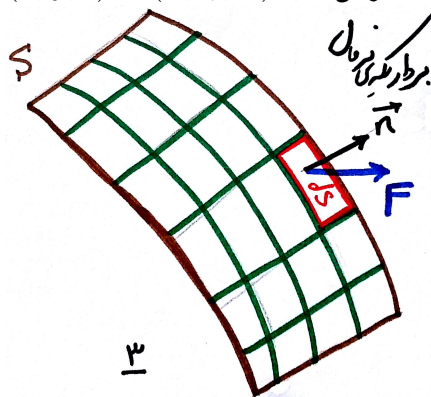
پیوسته باشد. یعنی از هر جهتی که به یک نقطه (x_0, y_0, z_0) نزدیک شوید، بردارهای نرمال به بردار $n(x_0, y_0, z_0)$ نزدیک شوند.

در مثال توپ، بردارهای نرمال به سمت خارج به صورت پیوسته در حال تغییر هستند. فرض کنید در یک نقطه روی توپ ایستاده‌اید و شما همان بردار به سمت بیرون هستید! حال روی توپ حرکت کنید تا جایی که به «لبه‌های توپ» برسید و پس از آن داخل توپ شوید و به همان نقطه‌ای که بودید برسید ولی این بار سرتان به سمت داخل توپ باشد. چنین حرکتی نمی‌تواند پیوسته باشد. وقتی به لبه توپ می‌رسید باید یک تغییر ناگهانی چپ شدن اتفاق بیفتد. جهت‌داری به همین معنی است. وقتی در جهت به سمت بیرون توپ هستید نمی‌تواند به صورت پیوسته حرکت کنید و به همان نقطه ولی در جهت داخل توپ برسید.

بر عکس، یک «نوار موبیوس» را در نظر بگیرید. یک مورچه می‌تواند روی نوار موبیوس حرکت کند و بی‌آنکه حرکتی ناگهانی داشته باشد دوباره به همان نقطه‌ای که بود برسد ولی چپ شده باشد! نوار موبیوس مثالی از یک رویه است که نمی‌توان آن را به صورت جهت‌دار پارامتر بندی کرد. این مسئله را می‌توان بدین صورت دید که ما از یک جهت به نقطه (x_0, y_0, z_0) نزدیک شده‌ایم و بردار نرمال، n بوده است اما از جهت دیگری نزدیک شده‌ایم و بردار نرمال تبدیل به $-n$ شده است.

حال

فرض کنید $F(x, y, z) = (P, Q, R)$ یک میدان برداری باشد.



هدف ۲۸۷. محاسبه‌ی شار میدان F گذرنده از رویه‌ی S .

دقت کنید که شار گذرنده از واحد سطح به صورت زیر محاسبه می‌شود (منظور از واحد سطح، سطحی به مساحت ۱ است):

$$F \cdot \vec{n}$$

در بالا منظور از $\vec{n}$ بردار یکه‌ی عمود است. پس شار گذرنده از سطح کوچک dS برابر است با

$$(F \cdot \vec{n})dS.$$

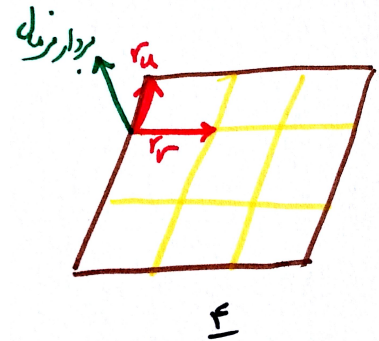
پس برای محاسبه شار گذرنده از سطح S باید تمام این شارهای کوچک را با هم جمع کنیم. تعریف می‌کنیم:

$$\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iint_S (F \cdot \vec{n}) \overset{\text{مقدار عددی}}{dS}$$

فرض کنید رویه‌ی S با معادله‌ی زیر داده شده باشد.

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$



$$\iint_S F \cdot d\vec{S} = \iint_{(u,v)} \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv = \iint_{(u,v)} F \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$

توجه ۲۸۸. برای انتگرالگیری از توابع برداری روی یک رویه، نخست یک جهت مشخص را برای رویه انتخاب می‌کنیم و سپس نسبت به آن جهت، شار گذرنده از رویه را حساب می‌کنیم. منظور، جهتی است که روی رویه به صورت پیوسته عوض شود و به صورت ناگهانی تغییر نکند. وقتی از فرمول $n = r_u \times r_v$ استفاده می‌کنیم، این فرمول، به صورت خود به خود یک جهت مشخص را برای رویه به دست می‌دهد، زیرا فرض کرده‌ایم که توابع r_u, r_v پیوسته‌اند.

مثال ۲۸۹. شار میدان $F(x, y, z) = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$ را از سطح کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ بیابید.

پاسخ.

$$\vec{r}(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

$$r_\theta \times r_\phi = (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi)$$

$$\iint_S (z, y, x) \cdot (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi) d\phi d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\cos \phi, \sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta) \cdot (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi) d\phi d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\sin^2 \phi \cos \theta \cos \phi) + (\sin^3 \phi \sin^2 \theta) + (\sin^3 \phi \cos \theta \cos \phi) d\phi d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \phi \cos \theta \cos \phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \times \int_0^\pi \underbrace{\sin^3 \phi}_{u^3} \underbrace{\cos \phi}_{du} d\phi$$

محاسبه‌ی انتگرالهای سوال بالا به عهده‌ی شما.

توجه ۲۹۰. برای ادامه‌ی حل سوال بالا، از درس ریاضی ۱ نحوه‌ی محاسبه‌ی دو انتگرال را یادآوری می‌کنم

$$\int \sin^2 \phi d\phi = \int \sin^2 \phi \sin \phi d\phi = \int (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi d\phi = \int -(1 - u^2) du = \dots$$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{(1 - \cos(2x))}{2} dx = \dots$$

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{(1 + \cos(2x))}{2} dx = \dots$$

□

۷.۹ شار برای رویه‌های $z = f(x, y)$

فرض کنید $F = (P, Q, R)$. اگر $S : z = g(x, y)$ در این صورت داریم:

$$r_u \times r_v = (-g_x, -g_y, 1)$$

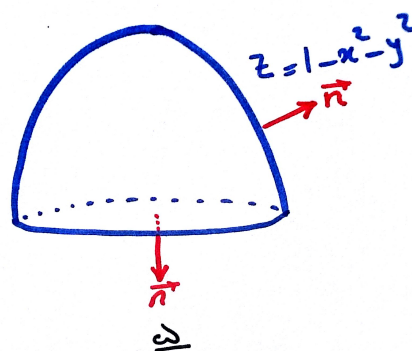
و

$$\iint_S F \cdot \vec{dS} = \iint_{(x,y)} (-Pg_x - Qg_y + R) dx dy$$

مثال ۲۹۱. انتگرال $\iint_S F \cdot \vec{dS}$ را بیابید که در آن S مرز ناحیه‌ی صلب E باشد که توسط سهمی‌وار $z = 1 - x^2 - y^2$ و صفحه‌ی $z = 0$ احاطه شده است.

$$F(x, y, z) = y \vec{i} + x \vec{j} + z \vec{k}$$

پاسخ.



□

انتگرالهایی که اخیراً با آنها آشنا شده‌ایم:

$$\iint_S F \cdot n dS = \iint F \cdot \vec{dS}$$

به هر دو نمادگذاری بالا دقت داشته باشید. تعریف هر یک از انتگرالهای زیر را برای خود مرور کنید:

$$\int_c f dr \quad \int_c F \cdot dr$$

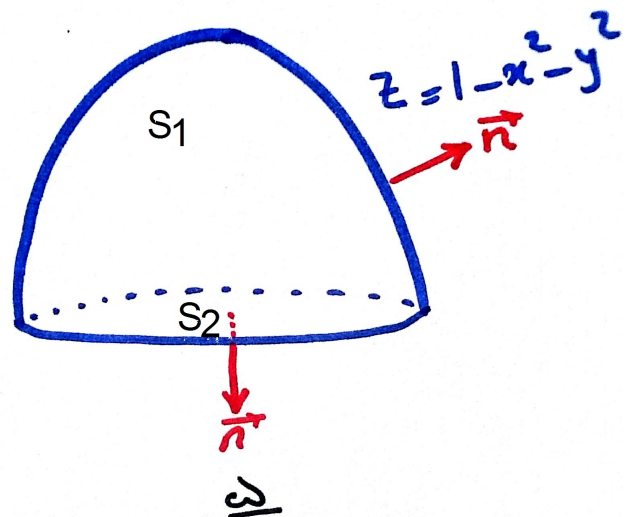
$$\iint_S f dS \quad \iint_S F \cdot n dS$$

نامهای این انتگرالها بدین صورت هستند: تابع عددی روی خم، تابع برداری روی خم، تابع عددی روی رویه، تابع برداری روی رویه.

مثال ۲۹۲. انتگرال $\iint_S F \cdot \vec{dS}$ را بیابید که در آن S مرز ناحیه‌ی صُلب E باشد که توسط سهمی وار $z = 1 - x^2 - y^2$ و صفحه‌ی $z = 0$ احاطه شده است و

$$F(x, y, z) = y \vec{i} + x \vec{j} + z \vec{k}$$

پاسخ.



$$S_1 : z = 1 - x^2 - y^2$$

$$r_x \times r_y = (2x, 2y, 1)$$

دایره‌ی $x^2 + y^2 = 1$

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS =$$

$$\begin{aligned} \iint_{(x,y) \in x^2+y^2 \leq 1} (x, y, z) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy &= \iint_{(x,y) \in x^2+y^2 \leq 1} (2xy + 2xy + z) dx dy = \\ \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r^2 \cos \theta \sin \theta + (1 - r^2) r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 4r^2 \cos \theta \sin \theta dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r dr d\theta = \\ \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin \theta}_u \underbrace{\cos \theta d\theta}_{du} \times \int_0^1 4r^2 dr + 2\pi \int_0^1 (r - r^3) dr &= \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\sin^2 \theta}{2}\right) \big|_{\pi}^{\pi} \times r^4 \big|_1^1 + 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right) \big|_1^1 = \pi$$

$$S_2 : z = 0$$

$$r_x \times r_y = (0, 0, 1)$$

چون جهت به سمت پایین است پس می‌نویسیم:

$$r_x \times r_y = (0, 0, -1)$$

دقت کنید که جهت پائین را به این علت در نظر گرفته‌ایم که جهتگیری کلی به سمت خارج از جسم احاطه‌شده باشد.

$$\iint_{(x,y) \in x^2+y^2 \leq 1} (x, y, z) \cdot (0, 0, -1) dx dy = \iint_{(x,y) \in x^2+y^2 \leq 1} (-z) dx dy = 0$$

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = \pi + 0 = \pi$$

□

تمرین ۱۷۷. مثال بالا را با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس حل کنید (این تمرین را وقتی جلسه‌ی آخر درس تمام شد، حل کنید!)

توجه ۲۹۳. فرض کنید E یک میدان الکتریکی باشد. بنا به قانون گاوس بار احاطه شده در درون یک رویه‌ی بسته‌ی S برابر است با

$$Q = \epsilon_0 \iint_S E \cdot \vec{n} dS$$

که در آن

$$\epsilon_0 \simeq 8.8542 \times 10^{-12}$$

ضریب گذردهی خلأ است.

۸.۹ تمرین

تمرین ۱۷۸. فرض کنید S رویه‌ی بسته‌ی متشکل از نیم‌کره‌ی $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ و قسمت زیرین صفحه‌ی $z = 0$ باشد که به سمت بیرون جهتدار در نظر گرفته شده است. شار میدان برداری

$$F = (x + y + z)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$$

را از این رویه محاسبه کنید.

تمرین ۱۷۹. فرض کنید که S قسمتی از استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ باشد که بین صفحات $z = 1$ و $z = 2$ واقع شده و جهت آن به سمت بیرون است. شار میدان برداری

$$F = (x + z)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (x^2 + yz)\mathbf{k}$$

از S را محاسبه کنید.

تمرین ۱۸۰. حاصل $\iint F.dS$ را محاسبه کنید که در آن $F = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ و S بخشی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که بین صفحات $z = 1$ و $z = 3$ واقع شده است و جهت آن به سمت بیرون است.

تمرین ۱۸۱. همان تمرین بالا برای وقتی که $F = y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ و S متشکل از سهمی‌گون $y = x^2 + z^2$ برای $0 \leq y \leq 1$ و دیسک $x^2 + z^2 \leq 1$ در $y = 1$ است.

تمرین ۱۸۲. تمرین قبل برای وقتی که $F = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ و S رویه $z = x \sin y$ است که در آن $0 \leq x \leq 2$ و $0 \leq y \leq \pi$.

تمرین ۱۸۳. $\iint F.dS$ را محاسبه کنید که در آن $F = y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ و S شامل سهمی‌وار $y = x^2 + z^2$ برای $0 \leq y \leq 1$ و دیسک $x^2 + z^2 \leq 1$ در $y = 1$ است.

فصل ۱۰

قضایای استوکس و دیورژانس

۱۰.۱.۱ کرل

کلمه‌ی کرل^۱ به معنی پیچش است. فرض کنید $F(x, y, z)$ یک میدان برداری باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{curl} F := \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\nabla} \times F$$

فرمول بالا تنها یک نمایش ساده‌تر برای فرمول دقیقی است که در ادامه درباره‌ی آن گفته‌ایم. دقت کنید که

$$\operatorname{curl} F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

خود یک میدان برداری است. اگر F میدان سرعت یک مایع باشد، آنگاه جهت $\operatorname{curl} F$ با استفاده از قانون دست راست تعیین می‌شود و اندازه‌ی $\operatorname{curl} F$ میزان تمایل این مایع را به چرخش حول یک نقطه نشان می‌دهد. بیایید فرمول دقیق کرل را بنویسیم:

$$F = (P, Q, R) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(-\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

توجه ۲۹۴. به دلایلی که بعداً خواهیم دید (یعنی به دلیل قضیه‌ی استوکس) اگر F یک میدان برداری باشد آنگاه $\operatorname{curl} F(x, y, z)$ تمایل F به چرخش حول (x, y, z) را نشان می‌دهد. (نادقیق).

مثال ۲۹۵. فرض کنید $F = xz\vec{i} + xyz\vec{j} - y^2\vec{k}$. آنگاه $\operatorname{curl} F$ را حساب کنید.

^۱curl

پاسخ.

$$\text{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2y - xy) + \vec{j}(x) + \vec{k}(yz)$$

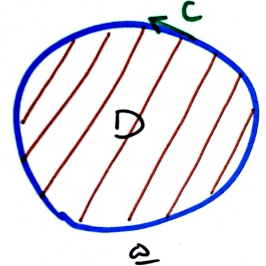
□

توجه ۲۹۶. (در صورتی که اجزاء میدان برداری F دارای مشتقات جزئی اول پیوسته باشند) میدان F پایستار است اگر و تنها اگر $\text{curl} F = (0, 0, 0)$

برای تحقیق کردن بخشی از اثبات، دقت کنید که به آسانی می‌توان دید که اگر $F = (g_x, g_y, g_z)$ آنگاه $\nabla \times F = (0, 0, 0)$.

حال همه چیز برای بیان قضیه‌ی استوکس مهیا است. قضیه‌ی استوکس در واقع تعمیمی از قضیه‌ی گرین است. بیایید قضیه‌ی گرین را دوباره با هم مرور کنیم.

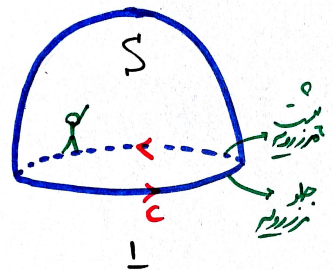
یادآوری ۲۹۷ (قضیه‌ی گرین).



$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

$$\oint_C F \cdot \vec{dr} = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$

۲۰۰۱۰ قضیه‌ی استوکس



$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

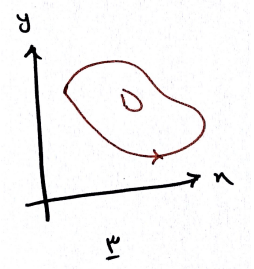
شرایط قضیه: اجزای F مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند. S یک رویه‌ی جهت‌دار هموار است. C منحنی ساده‌ی بسته به طور قطعه‌ای هموار در جهت مثبت است و در واقع مرز رویه است. پس C می‌تواند اجتماعی از چند منحنی باشد که هر کدام هموارند. جهت مثبت یعنی وقتی روی منحنی حرکت می‌کنیم و سرمان به سمت بردار نرمال رویه است، آنگاه رویه در سمت چپ ما قرار می‌گیرد.

تمرین ۱۸۴. نشان دهید که قضیه گرین از قضیه استوکس نتیجه می‌شود.

اثبات. قضیه گرین در واقع حالت خاصی از قضیه استوکس است.

$$\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y, \cdot))$$

$$\vec{n} = (\cdot, \cdot, 1) \text{ یکه‌ی عمود}$$



بنا به قضیه استوکس:

$$\oint_c F \cdot dr = \int P dx + Q dy = \iint_D \text{curl} F \cdot \vec{n} dA$$

محاسبه‌ی $\text{curl} F$:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & \cdot \end{vmatrix} = \vec{i}(\cdot) + \vec{j}(Q_x - P_y)$$

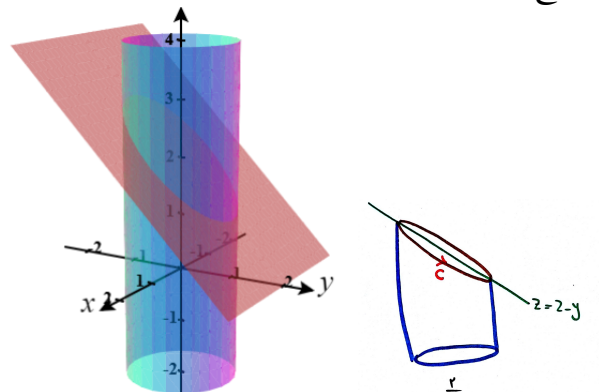
جایگذاری در فرمول بالا:

$$\oint F \cdot dr = \iint_D (Q_x - P_y) dA$$

□

مثال ۲۹۸. حاصل $\int_c F \cdot dr$ را بیابید که در آن $F = (-y^2, x, z^2)$ و c منحنی محل اشتراک صفحه‌ی $y + z = 2$ و استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ است که با نگاه از بالا در جهت عکس عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود.

پاسخ.



پاسخ اول. بدون قضیه‌ی استوکس:

$$c: \vec{r}(t): (\cos t, \sin t, 2 - \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$F = (-y^2, x, z^2)$$

$$\int_c F \cdot dr = \int_0^{2\pi} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin^2 t)(-\sin t)dt + \cos t \cos t dt + (2 - \sin t)^2(-\cos t)dt = \dots$$

پاسخ دوم. با استفاده از قضیه‌ی استوکس:

$$\int_c F \cdot dr = \iint_S \text{curl} F \cdot n dS$$

که S را سطحی در نظر گرفته‌ایم که دور آن محل تماس استوانه با رویه است.

$$\text{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = \vec{i}(\cdot) + \vec{j}(\cdot) + \vec{k}(1 + 2y)$$

$$S: z = 2 - y$$

$$n = (\cdot, 1, 1)$$

$$\iint_{(x,y) \in x^2+y^2 \leq 1} (\cdot, \cdot, 1 + 2y) \cdot (\cdot, 1, 1) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \sin \theta) r dr d\theta = \dots$$

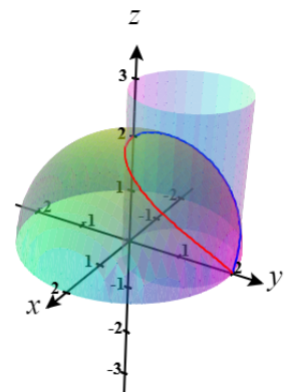
□

سوال ۲۹۹. فرض کنید رویه‌ی S بخشی از نیم کره‌ی $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ باشد که توسط استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 2y$ محصور شده است.

آ. حاصل $\iint_S z dS$ را محاسبه کنید.

ب. اگر $F = (-y, x, z)$ و c مرز رویه‌ی بالا باشد (در جهت مثبت نسبت به قائم کره) آنگاه $\int_c F \cdot dr$ را بیابید.

پاسخ. آ.



$$\iint_S f dS = \iint_S f |r_u \times r_v| du dv$$

در اینجا ضابطه‌ی صریحی به صورت

$$z = g(x, y)$$

داریم. پس انتگرال بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} & \iint_{(x,y)} f \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} dx dy \\ g_x &= \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad g_y = \frac{-2y}{2\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ dS &= \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} dx dy = \sqrt{\frac{4x^2 + 4y^2}{4(4-x^2-y^2)} + 1} dx dy = \\ & \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2}{(4-x^2-y^2)}} dx dy = \sqrt{\frac{4}{4-x^2-y^2}} dx dy \\ \iint_{(x,y)} z dS &= \iint \sqrt{4-x^2-y^2} \sqrt{\frac{4}{4-x^2-y^2}} dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin \theta} 2r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 \theta d\theta = \\ & 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \dots \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned} \int F \cdot dr &= \iint_S \text{curl} F \cdot \vec{n} dS \\ \text{curl} F &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix} = \vec{i}(\cdot) + \vec{j}(\cdot) + \vec{k}(1+1) = 2\vec{k} \\ \iint_S \text{curl} F \cdot n dS &= \iint_S (-g_x, -g_y, 1) \cdot (\cdot, \cdot, 2) dS = \iint_S 2 dS = \dots \end{aligned}$$

انتگرال بالا را در قسمت قبلی سوال حساب کرده‌ایم.

□

۱.۱۰ تمرین

تمرین ۱۸۵. با استفاده از قضیه استوکس حاصل $\iint \text{curl} F \cdot dS$ را محاسبه کنید که در آن $F = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ و S قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ است که داخل استوانه $x^2 + y^2 = 1$ بالای صفحه xy قرار می‌گیرد.

تمرین ۱۸۶. در موارد زیر، حاصل $\int_C F \cdot dr$ را با استفاده از قضیه استوکس محاسبه کنید:

۱. $F = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$ و C مثلث دارای رئوس $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ است.

۲. $F = \mathbf{i} + (x + yz)\mathbf{j} + (xy - \sqrt{z})\mathbf{k}$ و C مرز قسمتی از صفحه $x + 2y + z = 1$ در یک هشتم اول مختصات است.

۳. $F = 2y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ و C منحنی محل اشتراک صفحه $z = y + 2$ و استوانه $x^2 + y^2 = 1$ است.

۴. $F = x^2z\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ و C منحنی محل اشتراک صفحه $x + y + z = 1$ و استوانه $x^2 + y^2 = 9$ در جهت مثبت است.

۵. $F = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + (y^2 - z^2)\mathbf{j} + (z^2 - x^2)\mathbf{k}$ و C خم محل تلاقی صفحه $x + y + z = 1$ با صفحات مختصات در یک هشتم اول، در جهت مثبت.

۶. $F = (xz)\mathbf{i} + (3yz + x^2)\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ و C خم محل تلاقی نیم کره $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ با سهمی گون $z = x^2 + y^2$ در جهت مثبت.

۲.۱۰ قضیه دیورژانس

در ادامه‌ی درس با قضیه‌ی دیورژانس آشنا خواهیم شد. شهود پشت این قضیه بدین صورت است: فرض کنید که جسمی کروی در معرض میدان سرعت یک سیال گذاشته شود. شار گذرنده از سطح این جسم، بستگی به میزان مایع احاطه شده در درون آن دارد. بنابراین یک انتگرال برداری روی یک سطح را باید بتوان با یک انتگرال عددی روی حجم درون آن محاسبه کرد.

تعریف ۳.۰۰. فرض کنید $F = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ یک میدان برداری باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{div} F := \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = P_x + Q_y + R_z$$

مثال ۳.۰۱. فرض کنید $F = xz\vec{i} + xyz\vec{j} - y\vec{k}$ دیورژانس F را بدست آورید.

پاسخ.

$$\operatorname{div} F = z + xz + 0 = z + zx$$

□

توجه ۳.۰۲. اگر $F = (P, Q, R)$ یک تابع برداری از $\mathbf{R}^3$ به $\mathbf{R}^3$ باشد آنگاه

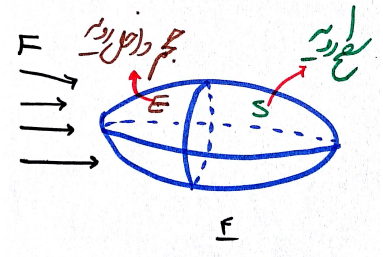
$$\operatorname{curl} F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\operatorname{div} F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$$

قضیه ۳.۰۳ (دیورژانس).

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \operatorname{div} F dv$$

شکل زیر یک رویه‌ی بسته است.



شرایط قضیه:

۱. جهت S به سمت بیرون از جسم احاطه شده توسط رویه است.
۲. اجزای F دارای مشتقات جزئی پیوسته‌اند. (در یک ناحیه‌ی باز شامل کل سیستم)
۳. رویه‌ی S به طور قطعه‌ای هموار (یعنی اجتماعی متناهی از رویه‌های هموار) و بسته است. (به بسته بودن رویه دقت داشته باشید. این رویه در واقع یک جسم صلب را به طور کامل احاطه کرده است).

قضیه‌ی دیورژانس را به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \nabla \cdot F dv$$

مثال ۳۰۴. شار میدان $F(x, y, z) = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$ را از سطح کُره‌ی واحد $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ بیابید.

پاسخ. راه اول. با محاسبه‌ی مستقیم

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS$$

راه دوم. با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس

$$\operatorname{div} F = 1$$

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \operatorname{div} F dv = \underbrace{\iiint_E 1 dv}_{\text{حجم کُره}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

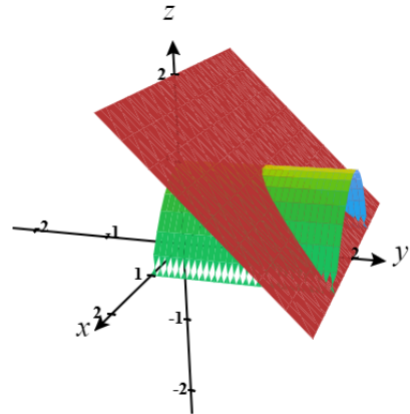
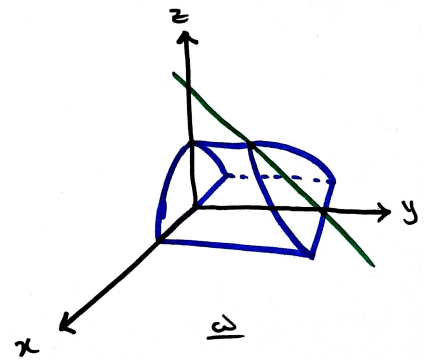
□

مثال ۳۰۵. فرض کنید $F(x, y, z) = xy\vec{i} + (y^2 + e^{xz})\vec{j} + \sin(x, y)\vec{k}$ و فرض کنید S سطح احاطه کننده‌ی ناحیه‌ی محصور به استوانه‌ی $1 - x^2$ و صفحات $z = 0$ ، $y = 0$ و $y + z = 2$ باشد. $\iint_S F \cdot \vec{n} dS$ را بیابید.

پاسخ.

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iiint_E \operatorname{div} F dv$$

$$\operatorname{div} F = y + 2y + 0 = 3y$$



$$E = \{-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - z, 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$$

$$\iiint_E \operatorname{div} F \, dv = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} 3y \, dy \, dz \, dx$$

$$\int_0^{2-z} 3y \, dy = \frac{3}{2} y^2 \Big|_0^{2-z} = \frac{3}{2} (2-z)^2 = \frac{3}{2} (4 - 4z + z^2)$$

$$\frac{3}{2} \int_0^{1-x^2} (4 - 4z + z^2) \, dz = \frac{3}{2} \left(4z - 2z^2 + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x^2} =$$

$$\frac{3}{2} \left(4(1-x^2) - 2(1-x^2)^2 + \frac{(1-x^2)^3}{3} \right) = 6(1-x^2) - \frac{3(1-x^2)^2}{2} + \frac{(1-x^2)^3}{2}$$

حاصل نهایی برابر است با

$$\int_{-1}^1 \left(6(1-x^2) - \frac{3(1-x^2)^2}{2} + \frac{(1-x^2)^3}{2} \right) dx = \dots$$

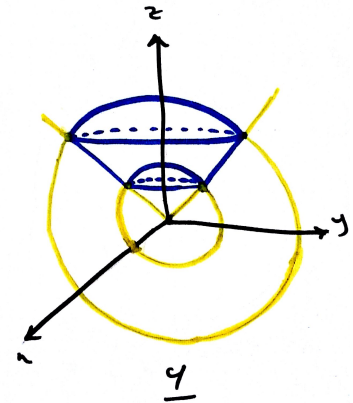
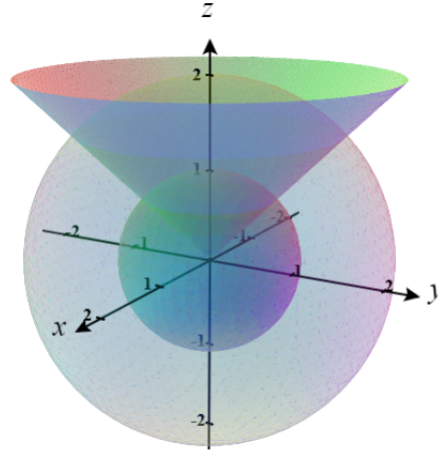
□

مثال ۳۰۶. فرض کنید T ناحیه‌ی محدود بین کُرّه‌های $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد.

۱. حجم ناحیه‌ی T را بیابید.

۲. فرض کنید $F = (x + z^2 e^y, y - x \sin(xz^2), z + \frac{y}{1+x^2})$ آنگاه $\iint_S F \cdot n \, dS$ را بیابید که در آن S سطح احاطه کننده‌ی ناحیه‌ی بالا است.

پاسخ.



۱.

$$1 \leq \rho \leq 2 \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$T \text{ حجم} = \iiint_E dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \phi d\phi \int_1^2 \rho^2 d\rho = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{7}{3}$$

۲.

$$\operatorname{div} F = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iint_S F \cdot \vec{n} dS = \iiint_T \operatorname{div} F dv = 3 \times T \text{ حجم} = 14\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

□

تمرین ۱۸۷. در موارد زیر $\iint F \cdot dS$ را محاسبه کنید:

۱. $F = (3xy^2)\mathbf{i} + xez\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ و S سطح جسم صلبی که توسط استوانه $y^2 + z^2 = 1$ و صفحات $x = -1$ و $x = 2$ احاطه شده است.

۲. $F = (x^3 + y^3)\mathbf{i} + (y^3 + z^3)\mathbf{j} + (z^3 + x^3)\mathbf{k}$ و S کره به مرکز مبدا و شعاع ۲.

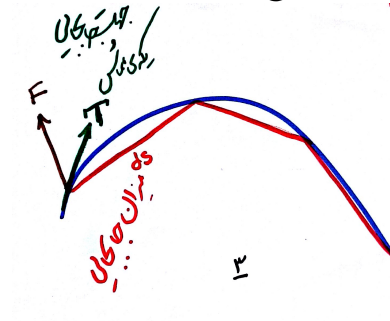
۳. $F = (xe^y)\mathbf{i} + (z - e^y)\mathbf{j} + (-xy)\mathbf{k}$ و S بیضی وار $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$.

۴. $F = (2x^3 + y^3)\mathbf{i} + (y^3 + z^3)\mathbf{j} + (3y^2z)\mathbf{k}$ و S سطح احاطه کننده سهمی وار $z = 1 - x^2 - y^2$ و صفحه xy .

۵. $F = (xy + 2xz)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j} + (xy - z^2)\mathbf{k}$ و S سطح جسمی که توسط استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و صفحات $z = 0$ و $z = y - 2$ احاطه شده است.

۳.۱۰ مرور درس

۱. انتگرال تابع $f(x, y, z)$ روی یک خم c به معادله $\vec{r}(t)$ $a \leq t \leq b$.



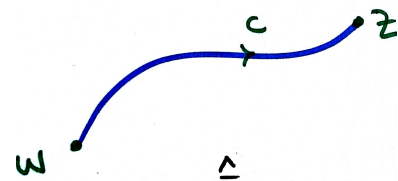
$$\int_c f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |r'(t)| dt$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = |r'(t)| dt$$

۲. طول خم از نقطه $t = a$ تا $t = b$:

$$\int_a^b ds = \int_a^b |r'(t)| dt$$

۳. انتگرال تابع برداری $F(x, y, z) = (P, Q, R)$ روی خم $\vec{r}(t)$.



$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c P dx + Q dy + R dz =$$

$$\int_a^b P(\vec{r}(t)) x'(t) dt + Q(\vec{r}(t)) y'(t) dt + R(\vec{r}(t)) z'(t) dt$$

۴. انتگرال تابع عددی روی رویه

$$S : r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\iint_S f dS = \iint_{u,v} f(r(u, v)) |r_u \times r_v| du dv$$

$$dS = |r_u \times r_v| du dv$$

اگر معادله صریح رویه را داشته باشیم:

$$S : z = g(x, y)$$

$$dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}$$

$$\iint_S f dS = \iint_{x,y} f \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy$$

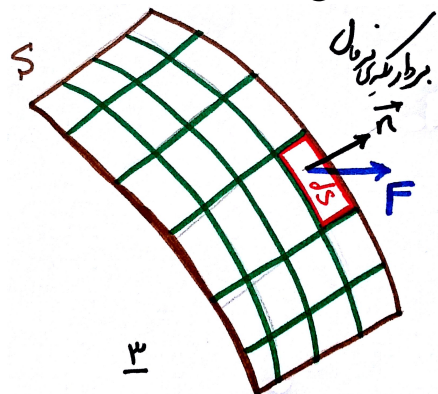
۵. مساحت یک رویه با معادله پارامتری $r(u, v)$:

$$\iint_S dS = \iint_{u,v} |r_u \times r_v| dy dv$$

۶. مساحت یک رویه با معادله صریح $z = g(x, y)$

$$\iint_S dS = \iint_{x,y} \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy$$

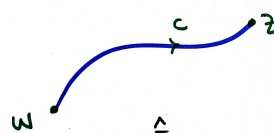
۷. انتگرال توابع برداری روی رویه‌ها



$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \begin{cases} \text{رویه پارامتری } r(u, v) & \iint_{u,v} F \cdot (r_u \times r_v) du dv \\ \text{رویه صریح } z = g(x, y) & \iint_{(x,y)} F \cdot (-g_x, -g_y, 1) dx dy = \iint (-Pg_x - Qg_y + R) dx dy \end{cases}$$

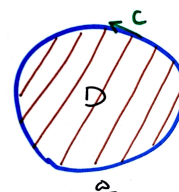
۸.

$$\int_c \nabla f dr = f(Z) - f(W)$$



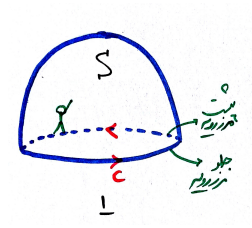
۹. قضیه گرین (Green's theorem)

$$\underbrace{\oint_c F \cdot dr}_{= \oint_c Pdx + Qdy} = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy$$



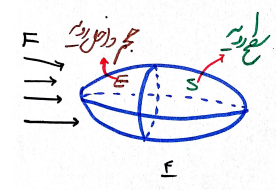
۱۰. قضیه استوکس (Stokes' theorem)

$$\oint_c F \cdot dr = \iint_S \text{curl} F \cdot \vec{n} dS$$



۱۱. (قضیه دیورژانس)

$$\iint_S F \cdot n dS = \iiint_E \operatorname{div} F dv$$



۴.۱۰ تمرین

تمرین ۱۸۸. فرض کنید $F(x, y) = (\sin x, \sin y + xy^2 + \frac{1}{3}x^3)$ یک میدان نیرو باشد که ذره‌ای را با شروع از مبدأ ابتدا در راستای محور x تا نقطه‌ی $(5, 0)$ می‌برد و سپس روی دایره‌ی $x^2 + y^2 = 25$ و در ربع اول، به نقطه‌ی $(0, 5)$ می‌برد و سپس در راستای محور y به مبدأ بازمی‌گرداند. کار انجام شده توسط این میدان نیرو، در طی این مسیر را بیابید.

تمرین ۱۸۹. فرض کنید $F(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ و نیز فرض کنید رویه‌ی S بخشی از کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ باشد که در بالای صفحه‌ی xy توسط استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 1$ احاطه شده است. حاصل $\iint_S \text{curl} F \cdot d\mathbf{S}$ را بیابید.

تمرین ۱۹۰. فرض کنید C یک منحنی بسته‌ی هموار باشد که در صفحه‌ی $x + y + z = 1$ واقع شده است. نشان دهید که حاصل انتگرال خطی

$$\int_C z dx - 2x dy + 3y dz$$

تنها به مساحت ناحیه‌ی احاطه‌شده توسط C بستگی دارد و به شکل C و محل آن در صفحه بستگی ندارد.

تمرین ۱۹۱. با استفاده از قضیه‌ی استوکس، حاصل

$$\int_C (y + \sin x) dx + (z^2 + \cos(y)) dy + x^2 dz$$

را بیابید که در آن C منحنی داده شده توسط معادله‌ی برداری زیر است:

$$\vec{r}(t) = (\sin(t), \cos(t), \sin(2t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(راهنمایی: توجه کنید که C روی رویه‌ی $z = 2xy$ واقع شده است).

تمرین ۱۹۲. فرض کنید $F(x, y, z) = (xy + 2xz)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j} + (xy - z^2)\mathbf{k}$. نیز فرض کنید که S سطح دور جسمی باشد که توسط استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 4$ و صفحه‌های $z = 0$ و $z = y - 2$ احاطه شده است. حاصل $\int_S F \cdot d\mathbf{S}$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱۹۳. فرض کنید $F(x, y, z) = (2x^3 + y^3)\mathbf{i} + (y^3 + z^3)\mathbf{j} + 3y^2z\mathbf{k}$ و فرض کنید که S سطح سهمی‌وار $z = 1 - x^2 - y^2$ در بالای محور z باشد. حاصل $\int_S F \cdot d\mathbf{S}$ را بیابید. (راهنمایی: برای استفاده از قضیه‌ی استوکس باید سطح رویه‌ی $z = 0$ را نیز به رویه‌ی S اضافه کنید تا به یک سطح بسته برسید).

تمرین ۱۹۴. حاصل انتگرال $\iiint_E y^2 z^2$ را بیابید که در آن E ناحیه‌ی واقع در بالای مخروط $\phi = \frac{\pi}{3}$ و زیر کره‌ی $\rho = 1$ است.

تمرین ۱۹۵. حاصل $\iiint_E x e^{x^2 + y^2 + z^2} dv$ را بیابید که در آن E بخشی از کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ است که در یک‌هشتم اول مختصات واقع شده است.