قضیه‌ی (p, q) در حالت تعریف‌پذیر

سخنرانی برای گروه منطق در پژوهشگاه دانشهای بنیادی، تهران

محسن خانی

۱ دی ۱۳۹۵

چکیده

فرض کنید $p \geq q$ دو عدد صحیح باشند. قضیه‌ی ترکیبیاتیِ (p, q) بیانگر این است، که عدد طبیعیِ $N(p, q)$ موجود است، به طوری که عبارت زیر برقرار باشد:

> در هر زوجِ (X, S) که در آن X یک مجموعه است و S گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های آن، اگر $vc^*(S) < q$ و از میان هر p مجموعه در S حداقل q عدد از آنها دارای اشتراک ناتهی باشند، آنگاه زیرمجموعه‌ای از X با اندازه‌ی N موجود است، که با هر عنصر از S اشتراک دارد.

منظور از vc^* بُعدِ دوگانِ وَپنیک ـ چِرنووینکیس است، که در سخنرانی بدان خواهیم پرداخت. هدف، بیان نسخه‌ای تعریف‌پذیر برای این قضیه است. در این نسخه همان‌گونه که انتظار می‌رود، قرار است که S گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های یک مدل مانند M باشد، که به طور یکنواخت با یک فرمولِ $\phi(x, y)$ تعریف شده‌اند، و داشتن ویژگیِ (p, q)، یعنی این ویژگی که از میان هر p مجموعه q عدد از آنها اشتراک ناتهی داشته باشند، معادل بخش شدن مصادیقِ $\phi(x, b)$ از فرمول یادشده به روی M است. نسخه‌ی موردنظر از قضیه‌ی (p, q) معادل حدسِ زیر است، که اثبات حالتی خاص از آن را در سخنرانی خواهیم دید.

حدس. گیریم T یک تئوری وابسته (نیپ) باشد در زبانی شمارا، و M مدلی شمارا برای آن. نیز فرض کنیم که $\phi(x, y)$ فرمولی دلخواه باشد و $q \in S_y(M)$. اگر به‌ازای هر $b \models q$ فرمول $\phi(x, b)$ روی M بخش نشود، آنگاه عنصری مانند a در مدل هیولا چنان یافت می‌شود، که برای هر شریکِ‌ارثِ $\tilde{q}$ از q داشته باشیم $\tilde{q} \models \phi(a, y)$.

توجه. در زیر، کمینه‌ی پیشنیازهای لازم را برای اثبات این قضیه آورده‌ام، و از اثبات کردن قضایایی که به طور مستقیم در قضیه دخیل نیستند خودداری کرده‌ام. فهم کامل اثبات نیازمند آشنا بودن با تکنیک‌هایی در نظریه‌ی مدل تئوری‌های وابسته است، که پرداختن به آنها در وقت یک جلسه سخنرانی نمی‌گنجد. اگر دوستان علاقه‌مند باشند، در جلسات مفصل‌تری بدانها خواهم پرداخت.

فهرست مطالب

۱ قراردادها

تئوری موردنظرِ T همواره کامل است، و بحثها در مدلی هیولا برای آن، به‌فرض $\mathbb{M}$، پی گرفته شده‌اند. از حروفِ x, y, a, b برای چندتایی‌هایی از متغیرها و پارامترها استفاده شده است، که ممکن است نامتناهی نیز باشند. درواقع، $|x|$ وابسته به فرمولِ $\phi(x)$ در نظر گرفته شده است.

۲ تئوری‌های وابسته

تعریف تئوریهای وابسته

فرمولِ $\phi(x,y)$ را *دارای ویژگی استقلال* می‌خوانیم هرگاه در مدلِ هیولا، دو دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ و $(b_j)_{j\subseteq\omega}$ یافت شوند، به طوری که

$$\models \phi(a_i, b_j) \Leftrightarrow i \in j;$$

و در غیر این صورت، آن را *وابسته* (یا نیپ) می‌خوانیم. با استفاده از لم فشردگی معلوم است که فرمول یادشده، وابسته است، اگروتنهااگر عدد طبیعیِ n موجود باشد، به طوری که هیچ دنباله‌ی (a_i) با طولِ بیشتر از n دارای ویژگی بالا یافت نشود. تئوریِ T را وابسته می‌خوانیم هرگاه همه‌ی فرمولها در آن وابسته باشند.

وابستگی و رمزی

با استفاده از لم استاندارد (رمزی) به‌آسانی می‌توان نشان داد که $\phi(x,y)$ دارای ویژگی استقلال است، اگروتنهااگر دنباله‌ای بازنشناختنی روی مجموعه‌ی تهی، مانند $(a_i)_{i\in\omega}$، و عنصری مانند b یافت شود، به طوری که داشته باشیم

$$\models \phi(a_i, b) \Leftrightarrow \text{زوج است } i$$

با استفاده از این می‌توان ثابت کرد، که تئوریِ T وابسته است، اگروتنهااگر در آن هیچ فرمولِ $\phi(x,y)$ با $|y| = ۱$ دارنده‌ی ویژگی استقلال یافت نشود. دوباره بنا به فشردگی، فرمول یادشده دارای ویژگی استقلال است، اگروتنهااگر هیچ دنباله‌ی سرانجام‌بازنشناختنی‌ای مانند $(a_i)_{i\in\omega}$ با ویژگی بالا یافت نشود. یک دنباله را سرانجام‌بازنشناختنی می‌خوانیم هرگاه روی هر مجموعه‌ی متناهیِ Δ از فرمولها، از جایی (وابسته به Δ) به‌بعد بازنشناختنی باشد.

فرمولِ $\phi(x,y)$ دارای ویژگی استقلال است، اگروتنهااگر فرمولِ $\phi(y,x)$ دارای ویژگی استقلال باشد (برای اثبات این گفته، نیاز به این آگاهی ترکیبیاتی است، که متناهی بودن بُعدِ vc معادل متناهی بودن بُعدِ دوگان، vc^*، است.)

رابطه‌ی نیپ با پایدار بودن

انحراف از بحث: تئوریِ T ناپایدار است، اگر و تنها اگر یا دارای ویژگی ترتیبی اکید باشد، یا در آن فرمولی دارای ویژگی استقلال یافت شود.

در بخشهای پیش‌رو فرمولبندی‌های دیگری نیز برای تئوریهای وابسته بر حسب شرکای‌ارث و بُعدِ vc خواهیم آورد.

۳ شرکای ارث و دنباله‌های مُرلی

تعریف شریک‌ارث

فرض کنید $p = \mathrm{tp}(a/M)$ تایپی کامل باشد و $B \supseteq M$. تایپِ $q \in S_B(x)$ را یک *شریک‌ارث* برای p می‌خوانیم، هرگاه هر فرمولِ $\phi(x,b) \in q$ در M برآورده شود. اگر $q = \mathrm{tp}(b/B)$، شریک‌ارث بودن q برای p را می‌توان با نمادِ

$$b \mathop{\downarrow}\limits_{M}^{\text{شریک‌ارث}} a$$

نشان داد. به‌آسانی، و تنها با بهره‌گیری از تعاریف، می‌توان نشان داد که

$$b \mathop{\downarrow}\limits_{M}^{\text{شریک‌ارث}} a \Rightarrow b \mathop{\downarrow}\limits_{M} a$$

که در عبارت سمت راست، استقلال غیرانشعابی، مُراد است. به بیان دیگر، هر شریک‌ارث برای p توسیعی غیرانشعابی از آن است.

وجود شریک‌ارث

هر تایپِ $p \in S(M)$ دارای حداقل یک شریک‌ارث $q \in S(\mathbb{M})$ است. برای توجیه، توجه کنید که مجموعه‌ی $F = \{\phi(\mathbb{M},b) | \phi(x,b) \in p\}$ پایه‌ای برای یک فیلتر روی $\mathbb{M}$ است (که می‌توان آن را به یک فیلترِ F گستراند). فرض کنید فرافیلترِ F' توسیعی از فیلتر یادشده باشد. آنگاه، $q = \{\phi(x,b) | \phi(\mathbb{M},b) \in F'\}$ یک تایپ جهانی و شریک‌ارثی برای p است.

تعداد شرکای ارث

تعداد شرکای ارث بر روی یک مدل، از ویژگی‌های نظریه‌ی مدلیِ مورد مطالعه برای یک تئوری داده شده است. برای مثال، تئوریِ T پایدار است، اگروتنهااگر روی هر مدل تنها یک شریک‌ارث داشته باشد. نیز تئوریِ T نیپ است، اگروتنهااگر تعداد شرکای ارث روی هر مدلِ M حداکثر $2^{|M|+|T|}$ باشد. این گفته را در ادامه ثابت کرده‌ایم.

دنباله‌های مُرلی

فرض کنید q تایپی جهانی و شریک‌ارثی برای $q|_M$ باشد. دنباله‌ی $(b_i)_{i\in\omega}$ را که در آن $b_i \models q|_{Mb_{<i}}$ دنباله‌ای *مُرلی* در q روی M می‌خوانند. به راحتی می‌توان دید که دنباله‌ی یادشده، روی M بازنشناختنی است، و در آن همواره داریم $b_i \mathop{\downarrow}_M b_{<i}$، برای هر i (در نوشتارگان، گاهی دنباله‌ای که دوشرط یادشده را برآورده کند مُرلی می‌خوانند).

استفاده از دنباله‌های مُرلی به عنوان شاهدی برای بخش شدن، ایده‌ی بسیاری از اثباتهای برابری بخش شدن با منشعب شدن است. مصداقی از این سخن، برای مثال نکته‌ی زیر است: نخست این که در یک تئوریِ ساده، فرمولِ $\phi(x,b)$ روی A بخش **نمی‌شود،** اگروتنهااگر یک

دنباله‌ی مُرلی $(b_i)_{i\in\omega}$ روی A یافت شود، به طوری که $\{\phi(x,b_i)|i\in\omega\}$ سازگار باشد. از این رو در یک تئوری ساده، بخش شدن با منشعب شدن معادل است.

برابری شرکای‌ارثِ بادنباله‌هایِ مُرلی‌یکسان

لم ۱. فرض کنید T وابسته باشد و p,q دو تایپ جهانی باشند که هر دو در M به‌طورمتناهی برآورده می‌شوند (یعنی هر یک شریک‌ارث تحدیدِ خود به M است). اگر p و q دنباله‌های مُرلیِ یکسانی روی M داشته باشند، آنگاه $p=q$. (در نتیجه، همانگونه که در بالا گفته‌ایم، اگر تئوریِ T وابسته باشد، تعداد شریک‌ارثها روی هر مدل M حداکثر برابر است با $۲^{|M|+|T|}$.)

دنباله‌های اکیداًمُرلی

نقشی مشابه با نقش دنباله‌های مرُلی در تئوری‌های ساده را دنباله‌های *اکیداً مُرلی* در تئوری‌های وابسته بازی می‌کنند. این دنباله‌ها، با روندی مشابه، با تحدید تایپهای جهانی‌ای به دست می‌آیند که همزمان روی M هم شریک‌ارثد و هم وارث. تایپِ q را وارثی برای تایپ $q|_M$ می‌خوانند، هرگاه برای هر $\phi(x,b)\in q$ عنصری مانند $b'\in M$ موجود باشد، به طوری که $\phi(x,b')\in q|_M$. مفهوم وارث، دوگان مفهوم شریک‌ارث است؛ در واقع $\mathrm{tp}(a/Mb)$ شریک‌ارثی برای $\mathrm{tp}(a/M)$ است، اگروتنهااگر $\mathrm{tp}(b/aM)$ شریک‌ارثی برای $\mathrm{tp}(b/M)$ باشد. در تئوریِ وابسته‌ی T فرمول $\phi(x,b)$ روی مدل M بخش می‌شود، اگروتنهااگر دنباله‌ای اکیداً مُرلی این بخش شدن را شاهد باشد. از این رو، در تئوری‌های وابسته نیز بخش شدن و منشعب شدن، **روی مدلها** با هم معادلند.

۴ بُعدِ وپنیک چرنووینکیس و قضیه‌ی (p,q)

بُعدِ vc

فرض کنید X یک مجموعه باشد و S گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های آن. گوییم زیرمجموعه‌ی $Y\subseteq X$ توسط S متلاشی می‌شود، هرگاه هر $Y'\subseteq Y$ را بتوان به صورت $Y\cap s$ برای یک مجموعه‌ی $s\in S$ نوشت؛ به بیان دیگر هرگاه $P(Y)=\{Y\cap s|s\in S\}$. می‌نویسیم $vc(S)\geq n$ هرگاه یک زیرمجموعه‌ی n عضوی از X توسط S متلاشی شود. تعریف می‌کنیم $vc(S)=n$ هرگاه $vc(S)\geq n$ و هیچ زیرمجموعه‌ای از X با اندازه‌ی $n+۱$ پیدا نشود که S بتواند آن را متلاشی کند.

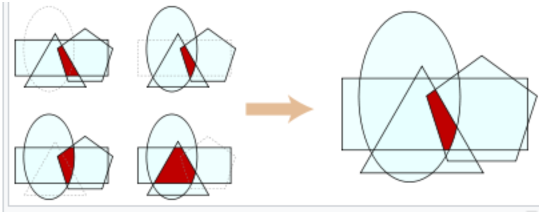
زوج (X^*,S^*) را در نظر بگیرید که در آن $X^*=S$ و $S^*=\{s_a|a\in X\}$، آنجا که $s_a=\{s\in S|a\in s\}$. تعریف می‌کنیم $vc^*(S)=vc(S^*)$. با دستکاری تعاریف می‌توان ثابت کرد که vc متناهی است اگروتنهااگر vc^* متناهی باشد. به بیان دقیقتر، همواره داریم

$$vc(S)\leq ۲^{vc^*(S)+۱} \quad \text{و} \quad vc^*(S)\leq ۲^{vc(S)+۱}.$$

رابطه‌ی vc با ویژگی استقلال

برای یک فرمولِ $\phi(x,y)$، با $vc(\phi(x,y))$ بُعدِ گردایه‌ی $S=\{\phi(\mathbb{M},a)|a\in\mathbb{M}\}$ را نشان می‌دهیم. توجه کنید که هر مدل دیگری نیز می‌تواند در این تعریف جایگزین مدل هیولا شود. بنابراین فرمولِ $\phi(x,y)$ وابسته است، اگروتنهااگر $vc(\phi(x,y))$ متناهی باشد، اگروتنهااگر $vc^*(\phi(x,y))$ متناهی باشد (که در آن $vc^*(\phi(x,y)):=vc^*(S)$). نیز، با کمی دقت می‌توانید دید که $vc^*(\phi(x,y))=vc(\phi(y,x))$؛ به بیان دیگر، $vc^*(\phi(x,y)$ بُعدِ گردایه‌ی زیر از مجموعه‌هاست:

$$S^*=\{\phi(a,\mathbb{M})|a\in\mathbb{M}\}.$$



شکل ۱: قضیه‌ی هِلی، عکس از ویکی‌پدیا!

بنابراین، فرمولِ $\phi(x,y)$ دارای ویژگی استقلال است، اگروتنها اگر فرمولِ $\phi(y,x)$ چنین باشد.

قضیه‌ی (p,q)

قضیه ۲ (قضیه‌ی (p,q))**.** فرض کنید $p \geq q$ دو عدد طبیعی باشند. بنا به قضیه‌ی (p,q)، عدد طبیعیِ $N(p,q)$ موجود است، به طوری که عبارت زیر برقرار باشد:

فرض کنید S گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های متناهی مجموعه‌ای مانند X باشد، به طوری که $vc^*(S) < q$، و از میان هر p مجموعه در S، تعداد q تا از آنها دارای اشتراک ناتهی باشند. آنگاه زیرمجموعه‌ای از X با اندازه‌ی $N(p,q)$ موجود است، که با همه‌ی اعضای S اشتراک ناتهی دارد.

تاریخ

قضیه‌ی هِلی نخستین قضیه از این دست است: اگر S خانواده‌ای از مجموعه‌های محدب در فضای اقلیدسی باشد، به طوری که هر سه مجموعه‌ی دلخواه از اعضای آن، دارای اشتراک ناتهی باشند، آنگاه اشتراک همه‌ی اعضای این خانواده با هم، ناتهی است. عکسِ ؟؟ را ببینید. آلون و کلایتمن، در [۱]، این قضیه به قضیه‌ی (p,q) برای زیرمجموعه‌های محدبِ $\mathbb{R}^n$ تعمیم داده‌اند، و ماتوچک، در [۲]، آن را برای همه‌ی خانواده‌هایی که در آنها بُعدِ vc متناهی است ثابت کرده‌است.

۵ نتیجه‌ای از قضیه‌ی (p,q) در نظریه‌ی مدل

بخش شدن، باز است

لم ۳.

- فرض کنید $\phi(x,y)$ فرمولی با $vc^*(\phi(x,y)) = q$ باشد و $(b_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای باشد بازنشناختنی روی تهی. آنگاه $\{\phi(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ سازگار است، اگروتنهااگر $\{\phi(x,b_i)\}_{i<q+1}$ سازگار باشد.
- فرض کنید $\phi(x,y)$ فرمولی وابسته باشد و $\phi(x,b)$ روی M بخش نشود. در این صورت، فرمولِ $\psi(y) \in \mathrm{tp}(b/M)$ چنان یافت می‌شود، که برای هر $b' \models \psi(y)$، فرمولِ $\phi(x,b')$ روی M بخش نشود؛ به بیان دیگر، مجموعه‌ی زیر، روی M باز است:

$\{b \in \mathbb{M} |$ $\phi(x,b)$ روی M بخش نمی‌شود$\}.$

اثبات قسمت اول. فرض کنید $\{\phi(x,b_i)\}_{i\leq q}$ سازگار است، ولی $\{\phi(x,b_i)\}_{i\leq q+1}$ ناسازگار؛ در ادامه ثابت خواهیم کرد که در این صورت، مجموعه‌ی $B = \{b_0,\dots,b_q\}$

توسط خانواده‌ی $\{\phi(a,\mathbb{M})\}_{a\in\mathbb{M}}$ متلاشی می‌شود، که این با $vc^*(\phi)=q$ در تناقض است. کافی است برای هر $B'\subseteq B$ عنصر $a\in\mathbb{M}$ را چنان بیابیم، که عبارت زیر برقرار باشد:

$$b\in B'\Leftrightarrow\models\phi(a,b).$$

فرض کنید $a^*\models\{\phi(x,b_i)\}_{i\leq q}$. در ادامه، عنصر a را به عنوان تصویر a^* تحت اتومرفیسمی از $\mathbb{M}$ خواهیم یافت.

با استفاده از فشردگی (و با اعمال اتومرفیسم مناسب) میان هر عنصر b_i و $b_{i+۱}$ در B، بیش از $q+۱$ عنصر به گونه‌ای می‌افزاییم که دنباله‌ی حاصل همچنان بازنشناختنی باقی بماند. حال، بنا به $q+۱$ ـ ناسازگاری دنباله، یقین داریم که در میان هر b_i و $b_{i+۱}$ عنصری مانند c یافت می شود، به طوری که داشته باشیم $\models\neg\phi(a^*,c)$. فرض کنید B' زیرمجموعه‌ی دلخواهی از B باشد. نگاشت $\mu:B\to\mathbb{M}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu(b_i)=\begin{cases}b_i & b_i\in B'\\ \text{یک انتخاب از } c \text{ میان } b_i \text{ و } b_{i+۱} \text{ به طوری که } \models\neg\phi(a^*,c) & b_i\notin B'\end{cases}$$

نگاشت بالا را می توان به اتومرفیسمی از $\mathbb{M}$ گستراند. اکنون داریم

$$b\in B\Leftrightarrow\models\phi(a^*,\mu(b))\Leftrightarrow\models\phi(\mu^{-۱}(a^*),b)\Leftrightarrow b\in B\cap\phi(\mu^{-۱}(a^*,\mathbb{M})).$$

□

نتیجه‌ای مدل‌تئوریک از قضیه‌ی (p,q)

گزاره ۴. فرض کنید $\phi(x,y)$ فرمولی وابسته باشد، و $\psi(y)$ فرمولی چنان، که برای هر $b\in\psi(\mathbb{M})$ فرمول $\phi(x,b)$ روی M بخش نشود. در این صورت، تایپهای جهانی $p_۱,\ldots,p_n$ چنان موجودند که

$$\forall b\in\psi(\mathbb{M})\quad(\phi(x,b)\in p_۱)\vee\ldots\vee(\phi(x,b)\in p_n).$$

اثبات. نخست توجه می کنیم که تحت ملزومات قضیه، عدد $p\geq q=vc^*(\phi)$ موجود است، به طوری که گردایه‌ی $\{\phi(\mathbb{M},b)|b\in\psi(\mathbb{M})\}$ دارای ویژگی (p,q) است؛ یعنی در میان هر p مجموعه در این گردایه، q تا از آنها دارای اشتراک نامتناهیند. برای اثبات این گفته، به برهان خلف فر ض می‌کنیم که برای هر عدد $p\geq q$ دنباله‌ی q ـ ناسازگار $(b_i)_{i\leq p}$ در $\psi(\mathbb{M})$ یافت شود. آنگاه، بنا به فشردگی، یک دنباله‌ی q ـ ناسازگار نامتناهی در $\psi(\mathbb{M})$ موجود است، که بنا به رمزی می توان آن را بازنشناختنی فرض کرد. از این رو، این فرض که برای هر $b\in\psi(\mathbb{M})$ فرمول $\phi(x,b)$ روی M بخش نمی شود، نقض می‌شود.

در نتیجه‌ی قضیه‌ی (p,q)، عدد طبیعی n موجود است، به طوری که تایپ جزئی زیر متناهیاًبرآورده‌شدنی باشد:

$$q(x_۱,\ldots,x_n)=\{\phi(x_۱,b)\vee\ldots\vee\phi(x_n,b)|b\in\psi(\mathbb{M})\}.$$

قرار می‌دهیم $p_i=\mathrm{tp}(a_i/\mathbb{M})$ که در آن $a_۱\ldots a_n$ کامل شده‌ی تایپ بالا را برآورده می‌کنند. □

معادل گزاره‌ی بالا: $\forall q \sqsupset_{\text{شریک ارث جهانی}} \mathrm{tp}(b/M)\ \exists a \quad q \models \phi(a,y)$

گزاره ۵. موارد زیر با هم معادلند:

- گزاره‌ی ۳؛
- فرض کنید فرمول $\phi(x,y)$ وابسته باشد و $\phi(x,b)$ روی M بخش نشود. آنگاه برای هر شریک جهانی ارث q از $\mathrm{tp}(b/M)$، عنصر $a \in \mathbb{M}$ چنان یافت می‌شود که $q \vdash \phi(a,y)$.

اثبات. ۲ $\rightarrow$ ۱. پیروِ این که $\phi(x,b)$ روی M بخش نمی‌شود، بنا بر لم **??** (قسمت دوم) فرمولی مانند $\psi(y) \in \mathrm{tp}(b/M)$ موجود است، به طوری که برای هر $b' \in \psi(\mathbb{M})$ فرمول $\phi(x,b')$ روی M بخش نمی‌شود. در نتیجه، گردایه‌ی $\{\phi(x,b') | b' \in \psi(\mathbb{M})\}$ دارای ویژگی (p,q) است، برای یک انتخاب مناسب از $p \geq q = vc^*(\phi)$. از این رو گردایه‌ی $\{\phi(x,b') | b' \in \psi(M)\}$ نیز همین ویژگی را دارد. بنا بر ۱، تایپهای جهانی کامل $p_۱, \ldots, p_n$ و از این رو عناصر $a_۱, \ldots, a_n \in \mathbb{M}$ چنان موجودند که

$$\forall b \in \psi(M) \quad \models \bigvee_{i=۱,\ldots,n} \phi(a_i,b).$$

از آنجا که q شریک ارث است، داریم $q \vdash \bigvee \phi(a_i,y)$، و از آنجا که q یک تایپ جهانی کامل است، نتیجه می‌گیریم که $q \models \phi(a,y)$ برای یک $a \in \{a_۱, \ldots, a_n\}$.

۱ $\rightarrow$ ۲. فرض کنید برای هر $b \in \psi(\mathbb{M})$ فرمولِ $\phi(x,b)$ روی M بخش نمی‌شود. نخست توجه کنید که فرمولِ $\psi(y)$ در تایپی جهانی مانند q جای می‌گیرد که در M متناهیاًبرآورده‌شدنی است.

با K مجموعه‌ی همه‌ی تایپهای جهانی‌ای را نشان دهید که ψ را شاملند و در M متناهیاً برآورده می‌شوند. توجه کنید که K بسته، و از این رو فشرده است. تایپ دلخواهِ $q \in K$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $q|_M = \mathrm{tp}(b/M)$. از آنجا که $\psi \in q$، معلوم می‌شود که $b \in \psi(\mathbb{M})$؛ و از این رو، بنا به فرض $\phi(x,b)$ روی M بخش نمی‌شود. نیز بنا به فرضِ ۲، عنصری مانندِ $a \in \mathbb{M}$ چنان موجود است که $q \vdash \phi(a,y)$. بنابراین همسایگیِ بازِ $[\phi(a,y)]$، متشکل از همه‌ی تایپهای کاملِ شاملِ $\phi(a,y)$، شامل q است. از آنجا که K فشرده است، فرمولهای $\phi(a_۱,y), \ldots, \phi(a_n,y)$ چنان یافت می‌شوند که

$$K \subseteq \bigcup_{i=۱,\ldots,n} [\phi(a_i,y)].$$

حال اگر $b' \in \psi(\mathbb{M})$، داریم $\models \bigvee_{i=۱,\ldots,n} \phi(a_i,b)$. قرار می‌دهیم $p_i = \mathrm{tp}(a_i/\mathbb{M})$.
$\square$

در بخش بعدی، قسمت دوم گزاره‌ی بالا را بدون کمک گرفتن از قضیه‌ی (p,q) ثابت خواهیم کرد.

۶ اثبات نظریه‌ی مدلی نتیجه‌ی قضیه‌ی (p,q)

قضیه‌ی اصلی

قضیه ۶. فرض کنید $\phi(x,y)$ فرمولی وابسته باشد و $\phi(x,b)$ روی M بخش نشود. آنگاه برای هر شریک‌ارثِ q از $\mathrm{tp}(b/M)$ عنصری مانند $a\in\mathbb{M}$ یافت می‌شود، به طوری که $q\models\phi(a,y)$.

در زیر، قضیه‌ی بالا را تنها برای حالتی که مدل M و زبانِ L شمارایند، ثابت خواهیم کرد. قضیه در حالت کلی نیز با تکنیکهای مشابهی ثابت می‌شود.

لم ۷. فرض کنید $\Delta=\{\phi_i(x,y_i)\}_{i\in\omega}$ خانواده‌ای شمارا از فرمولهای وابسته باشد و q یک Δ ـ تایپ جهانی باشد که در مدل **شمارای** M متناهیاً برآورده می‌شود. آنگاه q حد دنباله‌ای از اعضای M است (یعنی دنباله‌ی $(b_i)_{i\in\omega}$ از عناصرِ M چنان یافت می‌شود، که با توپولوژیِ استون، $\{\mathrm{tp}_\Delta(b_i/\mathbb{M})\}_{i\in\omega}$ به q همگراست).

هرشریک‌ارث حددنباله‌ای ازاعضای مدل‌است.

اثبات. فرض می‌کنیم L زبانی شمارا شامل Δ باشد، و نخست q را به تایپ جهانی کامل $\tilde{q}$ در زبان L می‌گسترانیم. فرض می‌کنیم که $I'=(b'_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای مُرلی در $\tilde{q}$ باشد. از آنجا که زبانْ شماراست، می‌توان $\tilde{q}$ را به صورت $\bigcup_{i\in\omega} q_i$ در نظر گرفت، که در آن q_i ها متناهیند و $q_i\subseteq q_{i+1}$. نظر به این که q در M متناهیاً برآورده می‌شود، دنباله‌ی $I=(b_i)_{i\in\omega}$ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $b_i\in q_i(\mathbb{M})$. بنا به روش ساخت این دنباله، برای هر $\phi(x,b)\in\tilde{q}|_{MI}$، برای i های به اندازه‌ی کافی بزرگ داریم $\models\phi(b_i,b)$.

ادعا می‌کنیم که $q=\lim\mathrm{tp}_\Delta(b_i/\mathbb{M})$. بنا به فشردگیِ فضای تایپها، دنباله‌ی $\{\mathrm{tp}(b_i/\mathbb{M})\}$ دارای زیر دنباله‌ای همگرا به تایپ جهانیِ q' است. ادعا می‌کنیم که $q=q'|_\Delta$. (بر خواننده است که تحقیق کند که چرا در این صورت، خود دنباله‌ی I به q همگراست.)

بنا به روش ساخت دنباله، داریم $q'|_{MI}=\tilde{q}|_{MI}$. با کمکِ این نکته، و با استقراء می‌توان دید که دو دنباله‌ی $\tilde{q}$ و q' دنباله‌های مُرلی یکسان روی M دارند، از این رو خود، و تحدیدشان به Δ با هم برابرند (بنا به لم ۱). □

نتیجه‌ی اثبات

در خلال اثبات بالا، به ویژه حکم پیش‌رو ثابت شد: گیریم در زبان شمارای L، تایپ q شریک‌ارثی جهانی برای تحدیدش به مدل M باشد، و I دنباله‌ای مُرلی باشد در q روی M. با گرفتنِ $q=\bigcup_{i\in\omega} q_i$ که در آن q_i ها متناهیند و $q_i\subseteq q_{i+1}$، برای هر دنباله‌ی $(b_i)_{i\in\omega}$ در M به طوری که $b_i\in q_i(\mathbb{M})$، داریم $\lim(\mathrm{tp}(b_i/\mathbb{M}))=q$.

اثبات قضیه‌ی ۳. فرض کنید $(b'_i)_{i\in\omega}$ یک دنباله‌ی مُرلی در q روی M باشد. از آنجا که $q|_{M(b'_i)_{i\in\omega}}$ شماراست، آن را به صورت $\bigcup_{i\in\omega} q_i$ در نظر می‌گیریم، که در آن $q_{i+1}\vdash q_i$ و هر q_i متناهی است. نخست توجه کنید که q در M، و از این رو در هر $q_i(M)$، به طور متناهی برآورده می‌شود، ازاین‌رو، برای هر $a\in\mathbb{M}$ داریم

$$[\forall b_0\in q_0(M) \quad \models\phi(a,b_0)(t)] \quad \Rightarrow \phi(a,y)\in q. \quad (*)$$

(توجه کنید، که ادعا نکرده‌ایم که عبارت سمت چپ برقرار است.) از آنجا که $\phi(x,b)$ روی M بخش نمی‌شود، مجموعه‌ی $\{\phi(x,b'_i)\}_{i\in\omega}$ سازگار است. حال اگر برای هر $b_0\in q_0(M)$ داشته باشیم $\{\phi(x,b'_i)\}_{i\in\omega}\models\phi(x,b_0)$، آنگاه بنا بر $(*)$ برای هر $a^*\models\{\phi(x,b'_i)\}_{i\in\omega}$ خواهیم داشت $\phi(a^*,y)\in q$، و حکم ثابت می‌شود.

پس فرض می‌کنیم که $b_۰ \in q_۰(M)$ چنان موجود است، که مجموعه‌ی زیر سازگار باشد:

$$\{\phi(x,b'_i)\}_{i\in\omega} \cup \{\neg\phi(x,b_۰)\}.$$

در این صورت، برای هر $b^* \models q|_{M(b'_i)_{i\in\omega}}$ مجموعه‌ی زیر سازگار است:

$$\{\phi(x,b'_i)\}_{i\in\omega} \cup \{\neg\phi(x,b_۰)\} \cup \{\phi(x,b^*)\}.$$

این گفته، از سه نکته‌ی زیر نتیجه شده است:

- همانگونه که ثابت کرده‌ایم، برای فرمولِ وابسته‌ی $\phi'(x,y)$ و دنباله‌ی بازنشناختنیِ $(b'_i)_{i\in\omega}$ اگر مجموعه‌ی $\{\phi'(x,b'_i)\}_{i<vc^*\phi}$ سازگار باشد، آنگاه مجموعه‌ی $\{\phi'(x,b'_i)\}_{i<\omega}$ سازگار است. در این جا، این حکم را به فرمولِ $\phi'(x,y)=\phi(x,y)\wedge\neg\phi(x,b_۰)$ اعمال می‌کنیم.
- داریم $vc^*(\phi'(x,y)) = vc^*(\phi(x,y)\wedge\neg\phi(x,b_۰)) \leq vc^*\phi$، زیرا در فرمولِ $\neg\phi(x,b_۰)$ تنها متغیرِ x درگیر است.
- دنباله‌ی $(b'_i)_{i\in\omega}+b^*$ روی M بازنشناختنی است.

پس داریم (برای $I=(b'_i)_{i<\omega}$)،

$$\underbrace{\mathrm{tp}(b^*/MI)}_{\text{با متغیرِ } y} \vdash (\exists x \models)\left(\{\phi(x,b'_i)\}_{i<vc^*(\phi)+۱} \cup \{\neg\phi(x,b_۰)\} \cup \{\phi(x,y)\}\right).$$

از آنجا که $\mathrm{tp}(b^*/MI)$ در M، و از این رو در $q_۱(M)$، به طور متناهی برآورده می‌شود، نتیجه می‌گیریم که عنصر $b_۱ \in q_۱(M)$ موجود است، به طوری که مجموعه‌ی زیر سازگار باشد:

$$\{\phi(x,b'_i)\}_{i<vc^*(\phi)+۱} \cup \{\neg\phi(x,b_۰)\} \cup \{\phi(x,b_۱)\}.$$

همانطور که مشاهده می‌کنید، در بالا با فرض این که $b_۰ \in q_۰(M)$ چنان موجود باشد، که $\{\phi(x,b'_i)\}_{i\in\omega} \cup \{\neg\phi(x,b_۰)\}$ سازگار باشد، به تناوبِ سازگارِ $\neg\phi(x,b_۰)\wedge\phi(x,b_۱)$ برای فرمولِ ϕ رسیدیم. این فراروند را می‌توان ادامه داد: اگر برای هر $b_۲ \in q_۲(M)$ مجموعه‌ی

$$\{\phi(x,b'_i)\}_{i\in\omega} \cup \{\neg\phi(x,b_۰)\} \cup \{\phi(x,b_۱)\} \cup \{\neg\phi(x,b_۲)\}$$

سازگار باشد، به تناوبِ سازگارِ

$$\neg\phi(x,b_۰)\wedge\phi(x,b_۱)\wedge\neg\phi(x,b_۲)\wedge\phi(x,b_۳)$$

خواهیم رسید، که در آن $b_۳ \in q_۳(M)$. این فراروند را نمی‌توان تا بی‌نهایت ادامه داد، زیرا بنا بر نتیجه‌ی اثباتِ لم قبل، دنباله‌ی $(b_i)_{i\in\omega}$ همگراست، و از این رو فرمول $\phi(x,y)$ حداکثر تعداد متناهی تناوب می‌تواند داشت.

بنا بر آنچه گفته شد، با ادامه‌ی این روند، در نهایت به یک $n\in\omega$ و مجموعه‌ی سازگار زیر می‌رسیم:

$$A(x)=\{\phi(x,b'_i)\}_{i<vc^*(\phi)+۱} \cup \{\neg\phi(x,b_۰)\} \cup \{\phi(x,b_۱)\} \cup \{\neg\phi(x,b_۲)\} \cup \ldots \cup \{\neg\phi(x,b_{n-۱})\} \cup \{\phi(x,b_n)\},$$

به طوری که روند بالا قابل تکرار نباشد. پس به اجبار، عنصرِ $b_{n+1} \in q_{n+1}(M)$ موجود است، به طوری که

$$A(x) \models \phi(x, b_{n+1}).$$

پس برای هر $a^* \models A(x)$ خواهیم داشت $q \models \phi(a^*, y)$. $\square$

۷ مسئله در حالت تعریف‌پذیر

دیدیم که اگر فرمول $\phi(x, y)$ وابسته باشد و $\phi(x, b)$ روی M بخش نشود، آنگاه فرمول $\psi(y) \in \mathrm{tp}(b/M)$ موجود است، به طوری که برای هر $b' \in \psi(\mathbb{M})$ فرمول $\psi(x, b')$ روی M بخش نشود. این عبارت دوم نیز، معادل ویژگی (p, q) برای گردایه‌ی $\{\phi(x, b') | b' \in \psi(\mathbb{M})\}$ است، برای $q = vc^*(\phi)$ و انتخاب مناسبی از p. نیز، از قضیه‌ی (p, q) وجود تایپهایی جهانی مانند $p_1, \ldots, p_n$ نتیجه می‌شود، به طوری که هر $\phi(x, b')$ برای $b' \in \psi(\mathbb{M})$ در یکی از آنها بیفتد. حکمی کلی‌تر از این، پیش از توجه به قضیه‌ی (p, q) در [۳] حدس زده شده بود.

حدس. فرض کنید $\phi(x, y)$ وابسته باشد و $\phi(x, b)$ روی M بخش نشود. آنگاه فرمولی چون $\psi(y) \in \mathrm{tp}(b/M)$ موجود است، به طوری که $\{\phi(x, b') | b' \in \psi(\mathbb{M})\}$ سازگار باشد.

نیز دیدیم که بندِ پیش از حدس، دارای معادل نظریه‌ی مدلی پیش‌رو است: اگر $\phi(x, y)$ فرمولی وابسته باشد و $\phi(x, b)$ روی M بخش نشود، آنگاه

$$\forall q \sqsupset_{\text{شریک‌ارث‌جهانی}} \mathrm{tp}(b/M) \quad \exists a \in \mathbb{M} \quad q \models \phi(a, y).$$

این بیان از قضیه‌ی (p, q) را در فصل قبل، با روشی کاملاً مدل‌تئوریک ثابت کردیم. می‌توان ثابت کرد که حدس بالا، معادل قضیه‌ای مشابه است، که با تعویض جای سورها در بالا حاصل می‌شود:

گزاره ۸. در تئوریِ وابسته‌ی T موارد زیر با هم معادلند:

- حدس بالا.
- اگر $\phi(x, b)$ روی M بخش نشود، آنگاه

$$\exists a \in \mathbb{M} \quad \forall q \sqsupset_{\text{شریک‌ارث‌جهانی}} \mathrm{tp}(b/M) \quad q \models \phi(a, y).$$

مراجع

[1] N. Alon and D.J. Kleitman. Piercing convex sets and the hadwiger-debrunner (p, q) problem. Advances in Math., 96:103–112, 1992.

[2] Jirí Matousek. Bounded VC-dimension implies a fractional helly theorem. Discrete & Computational Geometry, 31:251–255, 2004. 10.1007/s00454-003-2859-z.

[3] Artem Chernikov and Pierre Simon. Externally definable sets and dependent pairs II. Transactions of the American Mathematical Society, 367(7):5217–5235, 2015.

[4] Pierre Simon, Invariant types in NIP theories, J. Math. Log., 15, 1550006 (2015)

[5] Pierre Simon, A Guide to NIP Theories, Cambridge University Press.