بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

مطالعهٔ بسط‌هایی از ساختار جمعی اعداد صحیح با یک دنبالهٔ بیتی

رساله دکتری ریاضی محض

افشین زارعی

استادان راهنما

دکتر مجتبی آقایی

دکتر محسن خانی

۱۴۰۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری ریاضی محض آقای افشین زارعی

تحت عنوان

مطالعهٔ بسط‌هایی از ساختار جمعی اعداد صحیح با یک دنبالهٔ بیتی

در تاریخ ۲۸ شهریورماه ۱۴۰۲ توسط کمیتهٔ تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت

۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر مجتبی آقایی
۲ــ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر محسن خانی
۳ــ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر علی ولی‌زاده
۴ــ استاد داور ۱	دکتر مسعود پورمهدیان
۵ــ استاد داور ۲	دکتر نازنین روشندل توانا
۶ــ استاد داور ۳	دکتر محمدرضا کوشش
سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر اعظم اعتماد دهکردی

تقدیر و قدردانی:

بر خودم لازم می‌دانم که در ابتدا از خانواده‌ام تشکر کنم. حمایت‌ها و دلگرمی‌های آنها در طی این دوره به من در ادامه دادن این مسیر بسیار کمک کرد.
در مدتی که دانشجوی دکترا بودم، به مشکلات عدیده‌ای برخوردم که برخی بسیار نادر بودند، ازجمله اینکه فرآیند پذیرش مقاله ۴۰ ماه به‌طول انجامید. در طی این ۴۰ ماه از دانشگاه انواع و اقسام فشارها و استرس‌ها به من وارد شد و اگر دکتر محسن خانی نبودند، چه‌بسا در همان اوایل این مقطع را رها می‌کردم. به جرئت می‌توانم بگویم که بزرگترین دستاورد من در مقطع دکترا، آشنایی با ایشان بود. از ایشان علاوه بر درس، چیزهای زیادی فراگرفته‌ام. از ایشان کمال تشکر را دارم، هرچند که با تشکر کردن نمی‌توانم حتی قسمت کوچکی (بینهایت کوچک) از لطف‌های ایشان را جبران کنم.
در این دوره با دوستانی آشنا شدم که ازقضا، برخی از آنها بهترین دوستانم هستند. آشنایی با آنها، در گذراندن این دوره و همچنین زندگی کردن در اصفهان بسیار به من کمک کرد. از همهٔ آنها بسیار تشکر می‌کنم.
گفتنی‌ها و تجربیات زیادی از این دوره دارم، که در اینجا مجالی برای بیان آنها نیست. این مقوله را با این شعر زیبا از خیام که در بسیاری از لحظات زندگی‌ام آن را سرلوحهٔ کارم قرار داده‌ام، به پایان می‌رسانم.

از منزلِ کفر تا به دین، یک نفس است، وز عالم شک تا به یقین، یک نفس است،
این یک نفسِ عزیز را خوش می‌دار، کَز حاصلِ عمرِ ما همین یک نفس است.

افشین زارعی آبان‌ماه ۱۴۰۲

کلیه حقوق مالکیت مادی و معنوی مربوط به این رساله متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان و پدیدآورندگان است. این حقوق توسط دانشگاه صنعتی اصفهان و بر اساس خط مشی مالکیت فکری این دانشگاه، ارزش‌گذاری و سهم بندی خواهد شد.
هر گونه بهره برداری از محتوا، نتایج یا اقدام برای تجاری‌سازی دستاوردهای این رساله تنها با مجوز کتبی دانشگاه صنعتی اصفهان امکان‌پذیر است.

تقدیم به پدر و مادرم

فهرست مطالب

فهرست مطالب	**هفت**
مقدمه	**۱**
۱ پیش‌نیازها	**۵**
۱.۱ پیش‌نیازهای منطقی	۵
۲.۱ پیش‌نیازهای نظریهٔ اعدادی	۱۱
۱.۲.۱ دنبالهٔ بیتی	۱۱
۲.۲.۱ قضیهٔ کرونکر	۱۴
۲ تصمیم‌پذیری بسط ساختار جمعی اعداد صحیح با دنبالهٔ پایینی ویتهُف	**۱۶**
۱.۲ ویژگی‌های تابع f	۱۷
۲.۲ لم‌های کمکی برای اصول موضوعه	۲۴
۳.۲ اصول موضوعه	۳۱
۴.۲ حذف‌سور و تصمیم‌پذیری	۳۳
۵.۲ ملاحظات	۴۱
۳ تصمیم‌پذیری بسط ساختار جمعی‌ترتیبی اعداد صحیح با دنبالهٔ ویتهُف	**۴۲**
۱.۳ ساختار $\mathcal{Z}_\varphi$	۴۳
۱.۱.۳ پیچیدگی‌های حاصل از افزودن ترتیب به ساختار	۴۳
۲.۱.۳ اصول موضوعه و حذف‌سور	۴۵
۲.۳ تصمیم‌پذیری $\mathcal{S}_\varphi$	۵۴
۳.۳ نتایج نظریهٔ اعدادی	۶۵

۴ تصمیم‌پذیری بسط ساختار جمعی اعداد صحیح با یک دنبالهٔ بیتی ۷۱
۱.۴ اصول موضوعهٔ اولیه ۷۲
۲.۴ معادلات غیرجبری ۷۷
۳.۴ معادلات جبری ۸۱
۱.۳.۴ معادلات تک‌متغیره ۸۲
۲.۳.۴ معادلات دومتغیره ۸۴
۳.۳.۴ معادلات با بیش از دو متغیر ۹۵

۵ پژوهش‌های آتی ۹۹
۱.۵ اعداد صحیح و دنبالهٔ ویتهُف ۹۹
۲.۵ دنباله‌ی بیتی متناظر با عددی جبری ۹۹
۳.۵ مجموعه‌های تعریف‌پذیر ۱۰۰

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی ۱۰۳

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی ۱۰۵

نمایه ۱۰۷

منابع ۱۰۸

چکیده:

در این رساله ما تصمیم‌پذیری چهار ساختار مختلف را با استفاده از روش‌های متفاوت نظریهٔ مُدلی ثابت کرده‌ایم. ابتدا برای ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, ۰, ۱, \lfloor \varphi x \rfloor \rangle$، که در آن φ همان نسبت طلایی است، حذف‌سور ثابت کرده و تصمیم‌پذیری این ساختار را به‌عنوان نتیجه‌ای از حذف‌سور بیان کرده‌ایم. سپس به این ساختار ترتیب را افزوده‌ایم و با افزودن محمول‌هایی به ساختار قبلی، ثابت کرده‌ایم که این ساختار جدید حذف‌سور می‌پذیرد، نظریهٔ کامل دارد و درنتیجه تصمیم‌پذیر است. سپس با استفاده از ایده‌ای مشابه، حذف‌سور پذیرفتن، کامل بودن و در نتیجه تصمیم‌پذیری ساختار $\langle \mathbb{R}, +, <, \mathbb{Z}, ۰, ۱, \lfloor \varphi x \rfloor \rangle$ را نشان داده‌ایم. تصمیم‌پذیری این سه ساختار، قبلاً با روش‌های دشواری و با استفاده از نظریهٔ اتوماتا ثابت شده است ولی اثبات‌های ما مبتنی بر تکنیک‌های سادهٔ نظریهٔ مُدل است. در نهایت، نشان داده‌ایم که ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, ۰, ۱, \lfloor \alpha x \rfloor \rangle$ برای هر عدد غیرگویای α مدلْ‌کامل است و از مدلِ اول داشتن، کامل بودن و در نتیجه تصمیم‌پذیریِ آن را بیان کرده‌ایم. تصمیم‌پذیری این ساختار نتیجهٔ کاملاً جدیدی است.

رده‌بندی موضوعی: ۰۳B۲۵، ۰۳C۱۰، ۰۳C۹۸، ۱۱U۰۹، ۱۱U۰۵، ۱۱B۳۹

واژگان کلیدی: تصمیم‌پذیری، حذفِ‌سور، دنبالهٔ بیتی، نسبت طلایی، بسط ساختار جمعی اعداد صحیح با یک دنبالهٔ بیتی.

مقدمه

گودل [۱] در قضیهٔ معروف ناتمامیت اول نشان می‌دهد که حساب اعداد (ساختار $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$) تصمیم‌ناپذیر است ([۵]). از این قضیه نتیجه می‌شود که هر ساختاری که در آن $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ تعبیر شود، تصمیم‌ناپذیر است. به چنین ساختارهایی به بیان گروتندیک [۲]، *غیررام*[۳] می‌گویند.

تصمیم‌ناپذیری این ساختار به علت وجود همزمان توابع $+$ و $\cdot$ و همچنین وجود اعداد صحیح است. اما اگر در این ساختار تابع ضرب را حذف کنیم و به جای آن محمول‌هایی برای بخش‌پذیر بودن بر n بیافزاییم، به ساختار معروف *پرِسبِرگر*[۴] می‌رسیم که تصمیم‌پذیر است.

وجود همزمان تابع جمع و ضرب در ساختار همیشه باعث غیررام شدن ساختار نمی‌شود، برای مثال ساختار $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$، با اینکه این دو تابع همزمان در آن وجود دارند، با توجه به قضیهٔ تارسکی‌ـ‌سایدنبرگ [۵] تصمیم‌پذیر یا *رام*[۶] است.

ترکیب این دو ساختار با هم، یعنی ساختار $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{Z} \rangle$، غیررام است. حال اگر از این ساختار تابع ضرب را حذف کنیم، با توجه به نتایج اِسکولِم [۷] در [۱۶]، این ساختار رام می‌شود.

حال که حذف تابع ضرب باعث رام شدن ساختار می‌شود، طبیعی است به این سوال پرداخته شود که به چه میزان می‌توان «آثاری از ضرب» به ساختار $\bar{\mathbb{R}} := \langle \mathbb{R}, +, \mathbb{Z} \rangle$ افزود، به‌طوری که تصمیم‌پذیری ساختار حفظ شود. در راستای پاسخ به این سوال، هیرونیمی [۸] در [۸] نشان داد که تنها افزودن دو اثر ضرب به ساختار $\bar{\mathbb{R}}$، تصمیم‌پذیری ساختار از بین می‌رود:

قضیه (هیرونیمی، ۲۰۱۶). *اگر ۱ و α و β روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی باشند، آنگاه در ساختار $\langle \mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, \alpha\mathbb{Z}, \beta\mathbb{Z} \rangle$ عمل ضرب بر روی اعداد حقیقی تعریف می‌شود و بنابراین این ساختار تصمیم‌ناپذیر است.*

با توجه به این قضیهٔ هیرونیمی، بررسی تصمیم‌پذیری بسط ساختار $\bar{\mathbb{R}}$ همراه با یک اثر ضرب، سوال مهمی است که در این پژوهش ما به‌دنبال یافتن جوابی برای این سوال هستیم.

---
[۱] Gödel
[۲] Grothendieck
[۳] wild
[۴] Presberger
[۵] Tarski-Seidenberg
[۶] tame
[۷] Skolem
[۸] Hieronymi

به‌عنوان پاسخی برای این سوال، هیرونیمی در [۹] نشان داد که در یک حالت خاص این بسط تصمیم‌پذیر است:

قضیه (هیرونیمی، ۲۰۱۹)**.** *ساختار* $\langle \mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, \alpha\mathbb{Z} \rangle$ *تصمیم‌پذیر است هرگاه* α *عددی مربعی* [۹] (*ریشهٔ یک معادلهٔ درجه دو*) *باشد.*

هیرونیمی ثابت کرد که ساختار یاد شده در ساختار دو نوعی [۱۰] $\mathfrak{B} := \langle \mathbb{N}, P(\mathbb{N}), s_{\mathbb{N}}, \in \rangle$ تعبیر می‌شود، که در آن $s_{\mathbb{N}}$ همان تابع تالی در اعداد طبیعی و $\in$ رابطهٔ عضویت تعریف شده روی $\mathbb{N} \times P(\mathbb{N})$ است. برای تعبیر کردن این ساختار در ساختار $\mathfrak{B}$، از بسط کسر مسلسل و نمایش اُستروُفسکی [۱۱] اعداد حقیقی استفاده شده است. اما تصمیم‌پذیری ساختار $\mathfrak{B}$، قضیه‌ای معروف از بوخی [۱۲] است، که اثبات آن بر پایهٔ نظریهٔ اتوماتا است [۱].

قضیه (بوخی، ۱۹۶۱)**.** *ساختار* $\mathfrak{B}$ *تصمیم‌پذیر است.*

بنابراین همان‌طور که گفتیم، برای عدد مربعی α، ساختار $\langle \mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, \alpha\mathbb{Z} \rangle$ تصمیم‌پذیر است. اگر چه هیرونیمی ثابت کرد که این ساختار تصمیم‌پذیر است، اما روش وی برای تعبیر این ساختار در ساختار بوخی، پیچیدگی‌های نظریهٔ مدلی زیادی دارد. برای مشاهدهٔ این پیچیدگی‌ها صفحهٔ ۲۷ از [۱۵] را مشاهده کنید. این پایان‌نامه براساس مقالهٔ [۹] از هیرونیمی است و در این صفحه با کشیدن یک گراف، نحوهٔ این نشاندن را به‌صورت خلاصه و مفید بیان کرده است. طی مکاتباتی که ما با هیرونیمی داشتیم، ارائهٔ اثباتی روان‌تر و ساده‌تر از نظر ایشان، یک موضوع تحقیقاتی جالب به‌نظر آمد. در واقع سوال هیرونیمی این بود که آیا اثباتی براساس نظریه مدل برای تصمیم‌پذیری ساختار و یا حذف‌سور مناسبی برای این ساختار وجود دارد، که پاسخ به این سوال یکی از موضوع‌های پژوهش در این رساله است.

به منظور پاسخ دادن به این سوال به‌طور طبیعی، در ابتدا ساختار بدون ترتیب و در غیاب اعداد حقیقی، یعنی ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, f, ۰, ۱ \rangle$ را، که در آن f تابعی است که هر x را به $[\varphi x]$ می‌نگارد و φ همان نسبت طلایی است، مطالعه کردیم. تابع f درحقیقت یک دنبالهٔ بیتی [۱۳] است. بنابراین در قسمت اول این رساله، به مطالعهٔ بسط ساختار جمعی اعداد صحیح با دنبالهٔ بیتی متناظر با نسبت طلایی پرداختیم و نشان دادیم که این ساختار تصمیم‌پذیر است.

برای اثبات تصمیم‌پذیری، ابتدا اصول موضوعه‌ای کامل برای ساختار ارائه کردیم. سپس نشان دادیم که این نظریه حذف‌سور می‌پذیرد و درنهایت تصمیم‌پذیری ساختار را به‌عنوان نتیجه‌ای از حذف‌سور بیان کردیم.

[۹] quadratic number
[۱۰] two-sorted
[۱۱] Ostrowski representation
[۱۲] Büchi
[۱۳] Beatty sequence

در اثبات حذف‌سور، باید حل‌پذیری دستگاه معادلات را بررسی می‌کردیم. از آنجایی‌که ترتیب بین قسمت‌های اعشاری در این ساختار تعریف‌پذیر است، بنابراین برای بیان شرایط حل‌پذیری معادلات، ابتدا معادل آنها را برحسب قسمت اعشاری نوشتیم و سپس با کمک گرفتن از قضیهٔ کرونکر [۱۴]، حل‌پذیر بودن این دستگاه را به ضرایب و پارامترهای آن نسبت دادیم. بنابراین قضیهٔ کرونکر اصلی‌ترین قضیه‌ای است که از آن در اثبات حذف‌سور استفاده کرده‌ایم لذا این قضیه را به‌عنوان یکی از اصلی‌ترین اصول موضوعه بیان کردیم. هرچند که در ادامهٔ پژوهش دریافتیم که این اصل را می‌توان از بقیهٔ اصول دیگر نظریه، استنتاج کنیم.

افزودن ترتیب به ساختار، باعث شد که اثبات حذف‌سور برای ساختار جدید، دیگر کارآمد نباشد؛ زیرا قضیهٔ کرونکر در هر بازه‌ای برقرار نیست. بنابراین از ایدهٔ الگوهای عددی‌ـاعشاری برای اثبات حذف‌سور ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, f, <, ۰, ۱ \rangle$ استفاده کردیم. الگوی عددی‌ـاعشاری در واقع بیان می‌کند که در یک بازهٔ داده شده، تعداد متناهی عدد صحیح وجود دارند که علاوه‌بر اینکه این اعداد دارای ترتیبی خاصی هستند، قسمت اعشاری φ برابر آنها نیز نسبت به یکدیگر ترتیب خاصی دارند.

افزودن الگوها عددی‌ـاعشاری به زبان باعث شد که بتوانیم شرط حل‌پذیری دستگاه‌های معادلات را با فرمول‌های مرتبه اولی که وابسته به پارامترهای دستگاه هستند، بیان کنیم. در ادامه، با توجه به کامل بودن نظریه، تصمیم‌پذیری ساختار مورد نظر را استنتاج کردیم.

درنهایت و برای حمله به سوال اصلی، اعداد حقیقی را به ساختار افزودیم و با همان ایدهٔ الگوهای عددی‌ـاعشاری، حذف‌سور را برای ساختار $\langle \mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, \varphi\mathbb{Z} \rangle$ ثابت کردیم.

در این ساختار برخلاف دو ساختار قبلی، قسمت اعشاری اعداد در خودِ ساختار تعریف‌پذیر است، این درحالی است که ترتیب بین قسمت‌های اعشاری در آن دو ساختار تعریف‌پذیر بود. بنابراین در راستای اثبات حذف‌سور، ابتدا دستگاه معادلات را برحسب قسمت اعشاری بازنویسی کردیم و سپس با استفاده از الگوها، شرط حل‌پذیری دستگاه را فقط به ضرایب و پارامترهایش وابسته کردیم. همانند دو ساختار قبل، تصمیم‌پذیری این ساختار را از کامل بودن نظریه و حذف‌سور پذیرفتن آن نتیجه گرفتیم.

با اینکه در مورد اعداد مربعی، تصمیم‌پذیری ساختار ثابت شده است و حتی الگوریتم روند تصمیم‌گیری [۱۵] ([۴، ۱۴]) و علاوه بر آن نرم‌افزاری نیز توسط شَلیت [۱۶] و همکارانش (لینک نرم‌افزار) ارائه شده است، اما در مورد اعداد غیرمربعی هیچ نتیجهٔ قابل ملاحظه‌ای وجود ندارد. بنابراین هدف بعدی ما در این پژوهش مطالعهٔ بسط ساختار $\langle \mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z} \rangle$ با یک دنبالهٔ بیتی است.

مشابه با حالت مربعی، ابتدا نشان می‌دهیم که بسط ساختار جمعی اعداد صحیح به‌همراه یک دنبالهٔ بیتی، تصمیم‌پذیر است. رویکردمان در اثبات تصمیم‌پذیری این ساختار، با رویکردهای قبلی کاملاً

[۱۴] Kronecker's Theorem
[۱۵] decision procedure
[۱۶] Shallit

متفاوت است و تصمیم‌پذیری این ساختار را به‌عنوان نتیجه‌ای از مدل‌کاملیت ساختار بیان کردیم.

برای اثبات مدل‌کامل بودن ساختار، باید حل‌پذیری دستگاه‌های معادلات را بررسی کنیم. به‌منظور حل دستگاه‌های معادلات، ابتدا معادلات را به دو دستهٔ غیرجبری و جبری دسته‌بندی کردیم. سپس شرط حل‌پذیری هر کدام از این معادلات را به‌گونه‌ای به‌عنوان اصلی در نظریه قرار دادیم، که مدل‌کاملیت نظریه را تضمین کند. درنهایت، از مدل اول داشتن این نظریهٔ ارائه شده، کامل بودن و درنتیجه تصمیم‌پذیری آن را نتیجه گرفتیم.

در پژوهش‌های آتی نیز به مطالعهٔ این ساختار در حضور ترتیب و اعداد حقیقی خواهیم پرداخت.

فصل ۱

پیش‌نیازها

این فصل شامل دو زیربخش است. در زیر بخش اول پیش‌نیازهای منطقی و در زیربخش دوم، پیش‌نیازهای نظریهٔ اعدادی را بیان می‌کنیم.

۱.۱ پیش‌نیازهای منطقی

در این فصل به بیان مفاهیم مقدماتی منطق و نظریهٔ مدل که در این رساله از آنها استفاده کرده‌ایم، می‌پردازیم و تنها به تعاریف کوتاه بسنده می‌کنیم. برای تعاریف مفصل‌تر مرجع‌های [۱۳] و [۱۸] را مطالعه کنید.

مطالعهٔ هر ساختار جبری در منطق مرتبهٔ اول، نیازمند انتخاب یک زبان مناسب است. *زبان* مرتبهٔ اول، اجتماع سه مجموعهٔ مجزا، شامل مجموعهٔ نمادهای رابطه‌ای ($\mathcal{R}$)، مجموعهٔ نمادهای تابعی ($\mathcal{F}$) و مجموعهٔ نمادهای ثابتی ($\mathcal{C}$) است که آن را با $\mathcal{L} = \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ نشان می‌دهیم. زبان مجموعه‌ای از نمادها است و این نمادها هیچ معنا و مفهومی ندارد. برای تعبیر عناصر زبانی، به یک ساختار نیاز داریم.

یک $\mathcal{L}$ـساختار شامل یک جهان است که در آن جهان، عناصر زبان تعبیر می‌شوند. به بیانی دیگر، یک $\mathcal{L}$ـساختار $\mathcal{M}$ به صورت $(M, \{R^{\mathcal{M}}\}_{R\in\mathcal{R}}, \{F^{\mathcal{M}}\}_{F\in\mathcal{F}}, \{c^{\mathcal{M}}\}_{c\in\mathcal{C}})$ است که M جهان ساختار است و منظور از $z^{\mathcal{M}}$، تعبیر نماد زبانی z در ساختار $\mathcal{M}$ است. اگر $\mathcal{L}$ـجملهٔ $\phi(\bar{x})$ برای عنصر $\bar{a} \in M^{|a|}$ در ساختار $\mathcal{M}$ درست باشد، می‌نویسیم $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$. منظور از جمله، فرمول بدون متغیر آزاد است.

دو ساختار $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ را ایزومرف می‌نامیم و این حقیقت را با $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ نشان می‌دهیم، هرگاه نگاشت یک‌به‌یک و پوشای $F : M \to N$ موجود باشد که عناصر زبانی را حفظ کند. به این معنی که برای هر نماد ثابت c در زبان، $F(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$، برای هر نماد رابطه‌ای R در زبان و هر $\bar{a} \in M^{|a|}$، $\mathcal{M} \models R(\bar{a})$ اگر و فقط اگر $\mathcal{N} \models R(F(\bar{a}))$ و نیز برای هر نماد تابعی f در زبان و هر $\bar{a} \in M^{|a|}$ و $b \in M$، $\mathcal{M} \models f(\bar{a}) = b$ اگر و تنها اگر $\mathcal{N} \models f(F(\bar{a})) = F(b)$. به طور معادل، این دو ساختار را ایزومرف می‌گوییم هرگاه برای هر فرمول $\phi(\bar{x})$ و هر $\bar{a} \in M^{|a|}$ همواره داشته باشیم:

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \iff \mathcal{N} \models \phi(F(\bar{a})).$$

ایزومرفیسم یک مفهوم جبری است ولی در منطق مفهومی به نام ***هم‌ارزِ مقدماتی*** وجود دارد که شرطی ضعیف‌تر از ایزومرفیسم است. دو $\mathcal{L}$ـساختارِ $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ را هم‌ارز مقدماتی گوییم، هرگاه درستی هر *جمله* در دو ساختار با هم معادل باشد. به این معنی که برای هر جمله مانند ϕ، داشته باشیم:

$$\mathcal{M} \models \phi \iff \mathcal{N} \models \phi.$$

به هر مجموعه‌ای از $\mathcal{L}$ـجمله‌ها، یک $\mathcal{L}$ـنظریه گفته می‌شود. اما آن دسته از نظریه‌هایی حائز اهمیت هستند که سازگار باشند به این معنی که حداقل در یک ساختار، که به آن مُدل نظریه گفته می‌شود، تمامی جملات آنها درست باشد. نظریه‌ای را *کامل* می‌نامیم که برای هر جملهٔ ϕ، یا خود ϕ و یا نقیضِ آن از این نظریه استنتاج شود؛ به بیانی دیگر، هر دو مُدل از این نظریه با هم هم‌ارزِ مقدماتی باشند.

برای بیان دو ویژگی دیگر از نظریه‌ها، نیازمند به تعریف مفهوم *دستگاه معادلات* داریم. به ترکیب بولی از فرمول‌هایی مشابه فرمول‌های زیر یک دستگاه nـمجهولی می‌گوییم، که در آن هر t_i یک ترم زبانی است که متغیرهای آزاد آن در مجموعهٔ $\{x_۱, \dots, x_n\}$ قرار دارد و R یک نماد رابطه‌ای موجود در زبان است.

$$\begin{cases} t_۱(\bar{x}) = t_۲(\bar{x}) \\ R(t_۱(\bar{x}), \cdots, t_m(\bar{x})) \end{cases}$$

یک نظریه را *مدل‌کامل* می‌نامیم هرگاه برای هر دو مدل مانند $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ که $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$، هر دستگاهی از معادلات که پارامترهای آن در M قرار دارد، اگر در مدل $\mathcal{N}$ جواب داشته باشد، در مدل $\mathcal{M}$ نیز جواب داشته باشد.

به بیانی دیگر، مدل‌کامل بودن به این معنا است که هر مدلِ آن *بستهٔ وجودی* باشد. به عبارتی دیگر، اگر $\mathcal{M}$ یک مدل دلخواه برای نظریه باشد، آنگاه برای هر $\mathcal{N} \models T$ که $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ و هر فرمول $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ و هر $\bar{a}$ در M، اگر $\mathcal{N} \models \exists \bar{y}\ \phi(\bar{a}, \bar{y})$، آنگاه $\mathcal{M} \models \exists \bar{y}\ \phi(\bar{a}, \bar{y})$.

اما ویژگی قوی‌تر از این ویژگی برای نظریه‌ها، ویژگی **حذف‌سور** است؛ به این معنی که هر نظریه‌ای که حذف‌سور داشته باشد، مدل‌کامل نیز است.

تعریف ۱-۱ (حذف‌سور). نظریه T *حذف‌سور* می‌پذیرد، هرگاه برای هر دو مدلِ $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ از T و هر زیرساختار مشترک آنها مانند $\mathcal{A}$، اگر هر دستگاهِ معادلات که پارامترهای آن در A قرار دارند، در مدل $\mathcal{M}$ جواب داشته باشد، آنگاه در مدل $\mathcal{N}$ نیز جواب داشته باشد. به‌بیانی دیگر؛ جواب داشتن دستگاه‌های معادلات را نظریه تعیین کند و نه مدل‌های آن.

به‌طور معادل، نظریهٔ T دارای حذف‌سور در زبان $\mathcal{L}$ است، هرگاه برای هر $\mathcal{L}$ـفرمول $\phi(\bar{x})$، $\mathcal{L}$ـفرمول بدون‌سور $\psi(\bar{x})$ موجود باشد به‌طوری که

$$T \models \forall \bar{x} \ \big(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})\big).$$

برای اثبات حذف‌سور یک نظریه، باید برای هر فرمول در زبان، معادلی بدون‌سور ارائه کنیم. این کار دشوار و حتی غیرعملی به‌نظر می‌رسد. اما، محک‌های متفاوتی برای حذف‌سور وجود دارد، که برخی از آنها را بیان خواهیم کرد. به این منظور ابتدا چند تعریف مورد نیاز را بیان می‌کنیم.

برای بیان مرتبهٔ اول برخی ویژگی‌ها، نیازمندیم که نامتناهی فرمول را با هم به‌عنوان یک فرمول درنظر بگیریم. اما چنین عبارتی نمی‌تواند یک فرمول مرتبهٔ اول باشد. به چنین عبارتی یک ***تایپ*** گفته می‌شود. مثلا یک تایپ می‌تواند بیانگر تمام ویژگی‌های یک عنصر در ساختار باشد، که در زیر این مفهوم را به‌صورت دقیق تعریف کرده‌ایم.

فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ساختار باشد و $A \subseteq M$. همچنین فرض کنید $\bar{m} = (m_1, \dots, m_n) \in M^n$. در این صورت مجموعهٔ تمام $\mathcal{L}$ـفرمول‌هایی مانند $\phi(\bar{x}, \bar{a})$، به طوری که $\mathcal{M} \models \phi(\bar{m}, \bar{a})$، را تایپ عنصر $\bar{m}$ روی A در ساختار $\mathcal{M}$ می‌نامیم و با $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\frac{\bar{m}}{A})$ نمایش می‌دهیم. به‌طور خلاصه، تایپ این عنصر را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\frac{\bar{m}}{A}) = \{\phi(\bar{x}, \bar{a}) | \mathcal{M} \models (\bar{m}, \bar{a}), \bar{a} \in A\}$$

با توجه به تعریف یک تایپ، هر فرمول در زبان $\mathcal{L}_A$، همواره یا خودش در $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\frac{\bar{m}}{A})$ قرار دارد و یا نقیضش. که منظور از زبان $\mathcal{L}_A$ همان $\mathcal{L} \cup A$ است. درواقع $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\frac{\bar{m}}{A})$ مجموعهٔ همهٔ ویژگی‌های عنصر $\bar{m}$ نسبت به مجموعهٔ A در ساختار $\mathcal{M}$ است.

مجموعهٔ همهٔ فرمول‌های بدون‌سور موجود در تایپ عنصر $\bar{m}$ روی مجموعهٔ A را تایپ بدون‌سور این عنصر می‌نامیم و با نماد $\mathrm{qftp}^{\mathcal{M}}(\frac{\bar{m}}{A})$ نمایش می‌دهیم. ساختارها می‌توانند برابری مجموعهٔ ویژگی‌هایی از دو عنصر که می‌توانیم آنها را با فرمول بدون‌سور بیان کنیم را نتیجه دهند.

گزاره ۱-۲. *برای هر دو ساختار $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ و هر $\bar{a} \in M^n$ و $\bar{b} \in N^n$، $\mathrm{qftp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{qftp}^{\mathcal{N}}(\bar{b})$ اگر و تنها اگر $\langle \bar{b} \rangle^{\mathcal{N}} \cong \langle \bar{a} \rangle^{\mathcal{M}}$. منظور از $\langle \bar{a} \rangle^{\mathcal{M}}$ زیرساختاری از $\mathcal{M}$ است که توسط $\bar{a}$ تولید شده است.*

اگر تمام فرمول‌های مرتبهٔ اولی که با استفاده از تعداد متناهی مجهول می‌توان ساخت را در یک مجموعه قرار دهیم، این مجموعه نیز تحت شرایطی یک تایپ است. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ساختار و A زیرمجموعه‌ای از M باشد. همچنین فرض کنید $p(x_1, \ldots, x_n)$ مجموعه‌ای از فرمول‌ها با پارامتر در مجموعهٔ A باشد به طوری که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱. برای هر تعداد متناهی فرمول $\phi_1(x_1, \ldots, x_n, \bar{a}_1)$، ...، $\phi_k(x_1, \ldots, x_n, \bar{a}_k)$ در مجموعهٔ $p(x_1, \ldots, x_n)$، عنصری مانند $(m_1, \ldots, m_n) \in M^n$ یافت شود که $\mathcal{M} \models \phi_1(m_1, \ldots, m_n, \bar{a}_1) \wedge \ldots \wedge \phi_n(m_1, \ldots, m_n, \bar{a}_1)$. به بیانی دیگر، هر تعداد متناهی فرمول در $p(\bar{x})$ توسط عنصری در M^n برآورده شود.

۲. برای هر $\mathcal{L}_A$ـفرمول $\phi(x_1, \ldots, x_n, \bar{a})$، یا $\phi \in p(\bar{x})$ یا $\neg\phi \in p(\bar{x})$.

در این صورت می‌گوییم $p(\bar{x})$ یک nـ*تایپ کامل* در $\mathcal{M}$ با پارامتر در مجموعهٔ A است. مجموعهٔ همهٔ nـتایپ‌های کامل در $\mathcal{M}$ با پارامتر در مجموعهٔ A را با $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ نشان می‌دهیم. همچنین nـتایپ $p(\bar{x})$ در ساختار $\mathcal{M}$ *برآورده می‌شود*، هرگاه $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{m})$ برای یک عنصر $\bar{m} \in M^n$.

اما ممکن است عنصری در ساختار $\mathcal{M}$ وجود نداشته باشد که این تایپ را برآورده کند، در این صورت می‌توان توسیعی از $\mathcal{M}$ یافت که در آن توسیع این تایپ برآورده شود.

قضیه ۱-۳. *فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ساختار باشد و $A \subseteq M$. همچنین فرض کنید $p(\bar{x}) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$. در این صورت توسیع مقدماتی $\mathcal{N}$ از $\mathcal{M}$ وجود دارد که $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\frac{\bar{c}}{A})$ برای یک $\bar{c} \in N^n$.*

مدل $\mathcal{M}$ از نظریهٔ T را برای یک کاردینال نامتناهی κ، κـ***اشباع*** می‌نامیم هرگاه برای هر عدد طبیعی n و هر $A \subseteq M$، که $|A| < \kappa$، تمام تایپ‌های موجود در مجموعهٔ $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ در همین مدل برآورده شود.

فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو ساختار باشند و Γ مجموعه‌ای ناتهی از ایزومرفیسم‌های میان برخی از زیرساختارهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ باشد به‌طوری که:

۱. اگر $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ و $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}$ و همچنین $f \in \Gamma$ یک ایزومرفیسم میان $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ باشد، آنگاه برای هر $x \in M - A$ یک ایزومرفیسم $g \in \Gamma$ یافت شود که $f \subset g$ و x در دامنهٔ تابع g قرار داشته باشد.

۲. اگر $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ و $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}$ و همچنین $f \in \Gamma$ یک ایزومرفیسم میان $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ باشد، آنگاه برای هر $x \in N - B$ یک ایزومرفیسم $g \in \Gamma$ یافت شود که $f \subset g$ و x در برد تابع g قرار داشته باشد.

در این صورت می‌گوییم که Γ یک ***سامانهٔ رفت و برگشتی*** از ایزومرفیسم‌ها میان $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ است.

نتیجه ۱-۴. *فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو ساختار باشند و $\bar{a} \in M^n$ و $\bar{b} \in N^n$. اگر یک سامانهٔ رفت و برگشتی از ایزومرفیسم‌ها میان زیرساختارهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ موجود باشد به‌طوری که یکی از این ایزومرفیسم‌ها $\bar{a}$ را به $\bar{b}$ بنگارد، آنگاه* $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b})$.

از آنجایی‌که یافتن معادلی بدون‌سور برای هر فرمول در ابتدا کاری غیرعملی به‌نظر می‌رسد، برای این منظور در اینجا چند محک خوب برای حذف‌سور را بیان می‌کنیم.

گزاره ۱-۵ (محک جبری حذف‌سور)**.** *فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو مدل برای نظریهٔ T باشند و $\mathcal{A}$ زیرساختار مشترک این دو مدل باشد. اگر برای فرمول $\phi(\bar{x})$ و هر $\bar{a} \in A$ داشته باشیم*

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \iff \mathcal{N} \models \phi(\bar{a})$$

در این صورت فرمول ϕ دارای معادل بدون‌سور است.

اما می‌توان به‌جای اینکه معادلی بدون‌سور برای همهٔ فرمول‌ها بیابیم، فقط نوع خاصی از فرمول‌ها را بررسی کنیم. در لم زیر این گفته را دقیق بیان می‌کنیم.

لم ۱-۶. *اگر فرمول‌های با تنها یک سور وجودی، دارای معادلی بدون‌سور باشند، آنگاه تمامی فرمول‌ها معادل بدون‌سور دارند.*

لم فوق بیان می‌کند که اگر $\phi(\bar{x}, y)$ یک فرمول بدون‌سور باشد و فرمول بدون‌سور $\psi(\bar{x})$ چنان موجود باشد که $T \models \forall \bar{x}(\exists y \phi(\bar{x}, y) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$، آنگاه نظریهٔ T حذف‌سور دارد. اما فرمول‌های بدون‌سور را می‌توان به‌صورت ترکیبِ نرمالِ عطفی نوشت. به‌عبارتی دیگر هر فرمول بدون‌سور $\phi(\bar{x}, y)$ به‌صورت $\bigvee \bigwedge \theta(\bar{x}, y)$ نوشت که در آن $\theta(\bar{x}, y)$ فرمول اتمی یا نقیض اتمی است. بنابراین کافی است فقط برای فرمول‌هایی که به‌صورت ترکیب عطفی از فرمول‌های اتمی و نقیض اتمی‌اند، معادلی بدون‌سور بیابیم. لذا محک فوق را می‌توان به‌صورت کاملاً جبری به‌صورت زیر بیان کرد.

گزاره ۱-۷. *فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو مدل برای نظریهٔ T و $\mathcal{A}$ یک زیرساختار مشترک این دو مدل باشد. در این صورت نظریهٔ T حذف‌سور دارد هرگاه جواب داشتن هر دستگاه معادلات یک‌متغیره‌ای که پارامترهای آن در A قرار دارد، در دو مدل معادل باشد.*

اما محکی دیگری که برای حذف‌سور وجود دارد، استفاده از سامانهٔ رفت و برگشتی است، که در قضیهٔ زیر آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱-۸. *فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو مدل به اندازهٔ کافی اشباع برای نظریهٔ T باشند. اگر برای هر $\bar{a} \in M^n$ و هر $\bar{b} \in N^n$ یک سامانهٔ رفت و برگشتی میان زیرساختارهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ شامل ایزومرفیسم $\langle \bar{a} \rangle^{\mathcal{M}} \cong \langle \bar{b} \rangle^{\mathcal{N}}$ موجود باشد، آنگاه نظریهٔ T سورها را حذف می‌کند.*

از این قضیه، نتایج جالب زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱-۹. *نظریهٔ T دارای خاصیت حذف‌سور است هرگاه برای هر دو مدل به‌اندازهٔ کافی اشباع آن مانند $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ و هر زیرساختار مشترک این دو مدل مانند A خاصیت زیر برقرار باشد:*
«برای هر $a \in M - A$ و هر دستگاهی که شامل تعداد متناهی از معادلات باشد که a جوابی برای این دستگاه در $\mathcal{M}$ باشد، آنگاه این دستگاه در $\mathcal{N}$ نیز دارای جوابی مانند b باشد.»

بنابراین شباهت خاصیت مدل‌کامل بودن و حذف‌سور داشتن، در حل کردن دستگاه‌های معادلات است. ضمن اینکه تفاوت آنها در مجموعهٔ پارامترهای دستگاه و تعداد متغیرها است.

نتیجه ۱-۱۰. *نظریهٔ T حذف‌سور دارد هرگاه هر تایپ کامل از بخش بدون‌سور خود نتیجه شود. به بیانی دیگر، فرض کنید $\mathcal{M}$ مدلی برای نظریهٔ T باشد و $\bar{a} \in M^n$ و $\bar{b} \in M^n$. در این صورت نظریهٔ T حذف‌سور دارد، هرگاه از $\mathrm{qftp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{qftp}^{\mathcal{M}}(\bar{b})$ نتیجه شود که $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b})$.*

یکی از مهمترین دلایل بررسی ساختارها و نظریه‌های ریاضی از دیدگاه منطق و نظریهٔ مدل، الگوریتمی کردن اثبات‌های موجود در ریاضیات است. بنابراین ارایهٔ یک نظریه برای یک ساختار ریاضی که با استفاده از آن نظریه بتوان اثبات و قضایای آن ساختار را به‌طریقی الگوریتمی بیان کرد، مسالهٔ بسیار مهمی در منطق و یا حتی ریاضیات است. این ویژگی را **تصمیم‌پذیری** می‌نامیم. تعریف دقیق این مفهوم، به‌صورت زیر است.

تعریف ۱-۱۱ (تصمیم‌پذیری)**.** نظریهٔ T را *تصمیم‌پذیر* گوییم هرگاه الگوریتمی موجود باشد که برای هر $\mathcal{L}$ـجملهٔ ϕ تصمیم بگیرد که $T \vdash \phi$. به‌عبارتی دیگر، این الگوریتم می‌تواند بگوید که آیا جملهٔ ϕ در نظریهٔ T اثبات می‌شود یا نه.

اگر یک نظریه حذف‌سور داشته باشد، برای تصمیم‌پذیری فقط کافی است تصمیم‌پذیری فرمول‌های اتمی بدون‌سور را بررسی کرد. اما لم‌هایی وجود دارند که برای اثبات تصمیم‌پذیری یک نظریه کاربردی هستند. برای این منظور ابتدا چند مفهوم را بیان می‌کنیم.

زبان مرتبهٔ اول $\mathcal{L}$ را ***بازگشتی*** گوییم هرگاه الگوریتمی موجود باشد که فرمول بودن دنباله‌ای از نمادهای متعلق به زبان را تعیین کند. همچنین یک نظریه را بازگشتی گوییم هرگاه الگوریتمی وجود داشته باشد که قرار داشتن جملهٔ داده شدهٔ ϕ در نظریه را تعیین کند. بنابراین با توجه به این دو تعریف، برای اثبات تصمیم‌پذیری از لم زیر می‌توانیم استفاده کنیم.

لم ۱-۱۲. *اگر $\mathcal{L}$ زبانی بازگشتی باشد، در این صورت هر $\mathcal{L}$ـنظریهٔ کاملِ بازگشتی و سازگار، تصمیم‌پذیر است.*

طبق این لم، برای اثبات تصمیم‌پذیری یک نظریهٔ بازگشتی و سازگار در یک زبان برگشتی، کافی است نشان دهیم که نظریه کامل است. توجه داشته باشید که نظریهٔ T کامل است، هرگاه برای هر جملهٔ ϕ، $T \models \phi$ یا $T \models \neg\phi$، این در حالی است که تصمیم‌پذیری به معنی وجود الگوریتمی است که بگوید $T \models \phi$ یا $T \not\models \phi$. پس اگر برای یک ساختار، زبانی مناسب (بازگشتی) و همچنین **اصل‌بندی** مناسبی (بازگشتی) انتخاب کنیم، آنگاه از آن می‌توان نتیجه گرفت که نظریهٔ کامل آن ساختار، تصمیم‌پذیر است. بنابراین انتخاب زبان و اصل‌بندی مناسب، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

۲.۱ پیش‌نیازهای نظریهٔ اعدادی

در این زیرفصل، به بیان ویژگی‌های نظریهٔ اعدادی ساختار مورد مطالعه می‌پردازیم. منبع اصلی این ویژگی‌ها مراجع [۷]، [۲] و [۳] است. در سراسر این رساله، جزءصحیح عدد a را با $\lfloor a \rfloor$ و قسمت اعشاری آن را با $[a]$ نمایش می‌دهیم.

۱.۲.۱ دنبالهٔ بیتی

تعریف ۱-۱۳. برای هر عدد غیرگویای مثبت α، دنبالهٔ $(\lfloor \alpha n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ را ***دنبالهٔ بیتی*** متناظر با α می‌نامیم و آن را با $\mathcal{B}_\alpha$ نمایش می‌دهیم. دوتایی $(\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta)$ تشکیل یک ***دنبالهٔ بیتی کامل*** می‌دهند، هرگاه این دو دنباله مجموعهٔ اعداد طبیعی را افراز کنند. به دنبالهٔ بیتی $\mathcal{B}_\beta$، دنبالهٔ بیتی مکمل $\mathcal{B}_\alpha$ می‌گوییم.

قضیه ۱-۱۴. *اگر $\alpha > ۱$ و $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-۱}$، آنگاه دوتایی $(\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta)$ یک دنبالهٔ بیتی کامل می‌سازند.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که این دو دنباله هیچ اشتراکی با یکدیگر ندارند. فرض کنید $n \in \mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{B}_\beta$. بنابراین اعداد طبیعی m و m' چنان موجودند که $n = \lfloor \alpha m \rfloor = \lfloor \beta m' \rfloor$. از $n = \lfloor \alpha m \rfloor$ نتیجه می‌شود $n \le \alpha m < n + ۱$. با تقسیم طرفین بر α، خواهیم داشت $\frac{n}{\alpha} \le m < \frac{n+۱}{\alpha}$. چون α عددی گویا نیست، پس تساوی رخ نمی‌دهد و نابرابری اول اکید است. پس

$$\frac{n}{\alpha} < m < \frac{n+۱}{\alpha}. \tag{۱}$$

به‌طور مشابه از $n = \lfloor \beta m' \rfloor$ نتیجه می‌شود که

$$\frac{n}{\beta} < m' < \frac{n+۱}{\beta}. \tag{۲}$$

حال اگر طرفین نابرابری‌های (۱) و (۲) را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{n}{\alpha}+\frac{n}{\beta}<m+m'<\frac{n+1}{\alpha}\frac{n+1}{\beta}.$$

از طرفی $1=\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha-1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$، پس $n<m+m'<n+1$، که تناقض است.

حال فرض کنید عدد طبیعی n در هیچ‌کدام از این دو دنباله قرار نداشته باشد. از اینکه $n\notin\mathcal{B}_\alpha$ نتیجه می‌شود عدد طبیعی m چنان موجود است که $\lfloor\alpha m\rfloor<n$ و $n+1\leq\lfloor\alpha(m+1)\rfloor$. با توجه به خواص تابع جزءصحیح، از این دو نابرابری به‌ترتیب نتیجه می‌شود $\alpha m<n$ و $n+1\leq\alpha(m+1)$. از تقسیم طرفین این دو نابرابری بر α خواهیم داشت $m<\frac{n}{\alpha}$ و $\frac{n+1}{\alpha}\leq m+1$. حال چون α عددی گنگ است، پس در نابرابری آخر تساوی نمی‌تواند رخ بدهد، پس روابط زیر نتیجه می‌شوند.

$$m<\frac{n}{\alpha}\quad,\quad\frac{n+1}{\alpha}<m+1$$

به‌طور مشابه، اگر $n\notin\mathcal{B}_\beta$، آنگاه عدد طبیعی m' موجود است که

$$m'<\frac{n}{\beta}\quad,\quad\frac{n+1}{\beta}<m'+1.$$

با جمع کردن طرفین این تساوی‌ها با هم و مشابه قسمت قبل، داریم

$$m+m'<n\quad,\quad n+1<m+m'+2.$$

از این دو نابرابری نتیجه می‌شود $m+m'<n<m+m'+1$، که این تناقض است زیرا همهٔ اعداد طبیعی هستند. □

جواب مثبت معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2=x+1$ را نسبت طلایی می‌نامیم و آن را با φ نشان می‌دهیم، بنابراین $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. دنبالهٔ بیتی متناظر با نسبت طلایی را **دنبالهٔ پایینی ویتهُف** می‌نامیم.

قضیه ۱-۱۵. *دنبالهٔ* $(\lfloor\varphi n\rfloor+n)_{n\in\mathbb{N}}$*، دنبالهٔ بیتی مکمل دنبالهٔ پایینی ویتهُف است. بنابراین هر عدد طبیعی یا به‌صورت* $\lfloor\varphi n\rfloor$ *و یا به‌صورت* $\lfloor\varphi n\rfloor+n$.

اثبات. از آنجایی‌که نسبت طلایی در رابطهٔ $\varphi+1=\frac{\varphi}{\varphi-1}$ صدق می‌کند، پس دنبالهٔ بیتی مکمل دنبالهٔ پایینی ویتهف را می‌توان با استفاده خود دنباله و به صورت زیر بدست آورد.

$$\lfloor(\varphi+1)n\rfloor=\lfloor\varphi n+n\rfloor=\lfloor\varphi n\rfloor+n$$

بنابراین هر عدد طبیعی مانند n را تنها می‌توان به یکی از دو صورت $\lfloor\varphi n\rfloor$ یا $\lfloor\varphi n\rfloor+n$ نوشت. □

از آنجا که هر دنباله را می‌توان به‌صورت یک تابع درنظر گرفت، در این رساله ما دنبالهٔ بیتی را به‌عنوان یک تابع درنظر می‌گیریم و سپس خواص آن را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱-۱۶. برای عدد غیرگویای مثبت α داده شده، تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(n) = \lfloor \alpha n \rfloor$$

توجه کنید که در واقع تابع f، همان دنبالهٔ بیتی متناظر با α است.

از خواص تابع جزءصحیح، ویژگی‌های زیر در مورد تابع f نتیجه می‌شود.

۱. برای هر x و y، همواره $f(x+y) = f(x) + f(y) + j$، که در آن $j = ۰$ هرگاه $[\alpha x] + [\alpha y] < ۱$ و در غیر این صورت $j = ۱$.

۲. تعمیم ویژگی فوق نیز از ویژگی‌های جالب تابع f است: برای اعداد طبیعی n و k عدد طبیعی $۰ \leq \ell < k$ چنان موجود است که $f(kn) = kf(n) + \ell$. که این تساوی دارای معادلی برحسب قسمت اعشاری به‌صورت $\frac{\ell}{k} < [\alpha n] < \frac{\ell+۱}{k}$ است.

۳. اگر $\alpha < ۱$، آنگاه تابع f پوشا است و بنابراین هر عدد طبیعی در برد تابع f قرار می‌گیرد. اما زمانی که α عددی بزرگتر از یک باشد، آنگاه همهٔ اعداد طبیعی در برد تابع f قرار نمی‌گیرند. در این حالت، شرط قرار گرفتن یک عدد طبیعی در برد تابع f را می‌توان با استفاده از قسمت‌های اعشاری بیان کرد. به بیان دقیق‌تر، برای هر عدد طبیعی n، عدد طبیعی m وجود دارد که $n = f(m) = \lfloor \alpha m \rfloor$ اگر و تنها اگر $n \leq \alpha m < n + ۱$. با تقسیم طرفین بر α، خواهیم داشت $\frac{n}{\alpha} \leq m < \frac{n+۱}{\alpha}$. چون طول این بازه، یعنی $(\frac{n}{\alpha}, \frac{n+۱}{\alpha})$، برابر با $\frac{۱}{\alpha} < ۱$ است، بنابراین در این بازه حداکثر یک عدد طبیعی می‌تواند باشد و تنها در صورتی یک عدد طبیعی در این بازه قرار می‌گیرد که $[\frac{n}{\alpha}] > ۱ - [\frac{۱}{\alpha}]$. همچنین عدد طبیعی‌ای که در این بازه قرار می‌گیرد برابر با $\lfloor \frac{n}{\alpha} \rfloor + ۱$ است.

۴. به‌عنوان تعمیمی از ویژگی بالا و با روشی کاملاً مشابه نتیجه می‌شود که برای هر $F(\alpha) \in \mathbb{Z}[\alpha]$، عدد n در برد تابع $\lfloor F(\alpha)x \rfloor$ قرار دارد اگر و تنها اگر $[\frac{n}{F(\alpha)}] > ۱ - [\frac{۱}{F(\alpha)}]$.

۵. برای نسبت طلایی، از آنجایی‌که $\frac{۱}{\varphi} = \varphi - ۱$، شرط قرار گرفتن یک عنصر در برد تابع را می‌توان ساده‌تر و به‌صورت زیر بیان کرد. برای اعداد طبیعی n و m، همواره:

$$n = f(m) \iff [\varphi n] > ۱ - [\varphi],$$

زیرا $[\frac{n}{\varphi}] = [n(\varphi - ۱)] = [\varphi n - n] = [\varphi n]$ و همچنین $[\frac{۱}{\varphi}] = [\varphi]$.

۶. از ویژگی ۴ نتیجه می‌شود که برای هر عدد طبیعی n، همواره $[\varphi] - ۱ < [\varphi f(n)]$؛ زیرا $f(n)$ همواره در برد تابع f است.

علاوه‌بر موارد بالا که در مورد تابع f بیان کردیم، در مورد قسمت‌های اعشاری نیز حقیقت زیر برقرار است.

حقیقت ۱-۱۷. *برای هر دو عدد حقیقی x و y، $[x-y] = [x] - [y]$، هرگاه $[x] > [y]$. همچنین اگر $[x] < [y]$، آنگاه $[x-y] = [x] - [y] + ۱$.*

۱.۲.۲ قضیهٔ کرونکر

مهمترین قضیه‌ای که در این رساله از آن کمک گرفته‌ایم، قضیهٔ کرونکر [۱] دربارهٔ توزیع قسمت‌های اعشاری یک دنبالهٔ بیتی در بازهٔ $(۰, ۱)$ است.

قضیه ۱-۱۸ (قضیهٔ کرونکر). *اگر α یک عدد حقیقی غیرگویا و مثبت باشد، آنگاه مجموعهٔ $\{[\alpha n] : n \in \mathbb{N}\}$ در بازهٔ $(۰, ۱)$ چگال است.*

اثبات. فرض کنید $\beta \in (۰, ۱)$ و $\epsilon > ۰$. می‌خواهیم نشان دهیم که عددی مانند k پیدا می‌شود به طوری که $|[\alpha k] - \beta| < \epsilon$.

نخست ادعا می‌کنیم که عددی صحیح مانند m یافت می‌شود که برای آن داریم $۰ < [\alpha m] < \epsilon$.

اثبات ادعای بالا. می‌دانیم که دنبالهٔ $[nx]$ در بازهٔ کراندارِ $(۰, ۱)$ دارای یک زیردنبالهٔ همگراست. پس این دنباله، دارای یک زیردنبالهٔ کُشی است. به طور خاص، اعداد طبیعیِ $n_۱, n_۲$، موجودند به طوری که $|[n_۲x] - [n_۱x]| < \epsilon$.

اگر $[n_۲x] > [n_۱x]$، قرار دهید $m = n_۲ - n_۱$، در این صورت

$$|[n_۲x] - [n_۱x]| = [n_۲x] - [n_۱x] = [n_۲x - n_۱x] = [mx].$$

حال اگر $[n_۲x] < [n_۱x]$، قرار دهید $m = n_۱ - n_۲$، که در این صورت

$$|[n_۲x] - [n_۱x]| = [n_۱x] - [n_۲x] = [n_۱x - n_۲x] = [mx].$$

بنابراین $۰ < [mx] < \epsilon$. □

[۱] Kronecker's theorem

ادامهٔ اثبات قضیه. با توجه به ادعای بالا، فرض کنید برای عدد صحیح m، $[\alpha m] < \epsilon$. بنا به ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی، عدد طبیعیِ k موجود است به طوری که $k\,[\alpha m] > 1$. فرض کنید که k کوچکترین عدد طبیعی با این ویژگی باشد؛ پس برای هر $i < k$ داریم $i\,[\alpha m] < 1$. دقت کنید که دنبالهٔ زیر یک افراز برای بازهٔ $(0, 1)$ است:

$$0 < 1\,[\alpha m] < 2\,[\alpha m] < \ldots < (k-1)\,[\alpha m] < 1$$

پس β بین دو عضو متوالی دنبالهٔ بالا واقع می‌شود. همچنین فاصلهٔ هر دو عنصر در دنبالهٔ بالا کمتر از ϵ است، پس β در فاصلهٔ کمتر از ϵ یکی از اعضای دنبالهٔ بالا، مثلا $i\,[\alpha m]$ واقع می‌شود. حال توجه کنید که $i\,[\alpha m] = [\alpha i m]$. □

این قضیه برای ابعاد بزرگ‌تر نیز برقرار است.

قضیه ۱-۱۹ (قضیهٔ چندبعدی کرونکر). *اگر α_1، ... و α_k و ۱ روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی باشند، آنگاه مجموعهٔ $\{([\alpha_1 n], \ldots, [\alpha_k n]) : n \in \mathbb{N}\}$ در بازهٔ kـ بعدی $(0, 1)^k$ چگال است. به‌این معنی که برای بازه‌های $(a_i, b_i) \subseteq (0, 1)$ داده شده، عدد طبیعی n چنان موجود است که برای هر $1 \leq i \leq k$، همواره $[\alpha_i n] \in (a_i, b_i)$.*

برای مشاهده اثبات حالت چندبعدی، مرجع [۷] را مشاهده کنید. این دو قضیه را در فصل‌های بعد به زبان مرتبه اول بیان خواهیم کرد.

فصل ۲

تصمیم‌پذیری بسط ساختار جمعی اعداد صحیح با دنبالهٔ پایینی ویتهُف

در این فصل تصمیم‌پذیری ساختار $\mathcal{Z}_\varphi = \langle \mathbb{Z}, +, f, \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, 0, 1\rangle$، که f تابع متناظر با دنبالهٔ پایینی ویتهُف است، را به‌عنوان نتیجه‌ای از حذف‌سور بیان می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا ویژگی‌های تابع f و لم‌های مورد نیاز برای بیان اصول موضوعه را بیان می‌کنیم. سپس اصول موضوعهٔ نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ را ارائه می‌کنیم. درنهایت، ثابت می‌کنیم که این نظریه حذف‌سور دارد. از حذف‌سور پذیرفتن نظریه، کامل بودن آن و در نتیجه با توجه به بازگشتی بودن اصول موضوعه، تصمیم‌پذیری ساختار را نتیجه می‌گیریم. بنابراین مهمترین قضیهٔ این فصل، قضیهٔ زیر است.

قضیه. *نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ حذف‌سور می‌پذیرد، همچنین کامل و تصمیم‌پذیر است.*

برای اثبات این قضیه، ابتدا دستگاه‌های معادلات را برحسب قسمت‌های اعشاری بازنویسی می‌کنیم. سپس با کمک گرفتن از قضیهٔ کرونکر، شرط حل‌پذیری دستگاه معادلات را به پارامترهای دستگاه ربط می‌دهیم.

نتایج این فصل در مقاله‌ای با همین نام در [۱۰] به چاپ رسیده است.

۱.۲ ویژگی‌های تابع f

در این زیرفصل برخی از ویژگی‌های دنبالهٔ پایینی ویتهف را بیان می‌کنیم. این دنباله را به‌عنوان یک تابع درنظر می‌گیریم و ویژگی‌های این تابع را بیان می‌کنیم. از این ویژگی‌ها در ارائهٔ اصول موضوعه و اثبات حذف‌سور استفاده می‌کنیم.

تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(n) = \lfloor \varphi n \rfloor$$

همانگونه که در فصل پیشنیازها بیان کردیم، از ویژگی‌های تابع جزءصحیح، نتیجه می‌شود که برای هر دو عدد طبیعی m و n، هموار $f(m+n) = f(m) + f(n)$ یا $f(m+n) = f(m) + f(n) + ۱$. این دو عبارت را می‌توان برحسب قسمت‌های اعشاری، به‌ترتیب به‌صورت $[\varphi m] + [\varphi n] < ۱$ و $۱ < [\varphi m] + [\varphi n]$ نیز نوشت. همچنین از این تساوی می‌توان نتیجه گرفت که برای هر عدد طبیعی k، عدد طبیعی یکتای $۰ \leq \ell < k$ چنان موجود است که $f(kn) = kf(n) + \ell$. واضح است که عدد طبیعی ℓ، همان باقیماندهٔ $f(kn)$ بر k است. این عبارت را نیز می‌توان برحسب $[\varphi n]$ نوشت، که در فصل قبل آن را بیان کردیم.

اما همانطور که در فصل قبل بیان شد، تابع f در واقع یک دنبالهٔ بیتی است که مکمل آن تابع $f + id$ است، که id همان تابع همانی است.

لم ۲-۱. *برای هر عدد طبیعی m، عدد طبیعی n چنان موجود است که $m = f(n)$ یا $m = f(n) + n$.*

اثبات. تابع f، در واقع دنبالهٔ بیتی متناظر با نسبت طلایی (φ) است. از طرفی دیگر، مکمل این دنباله متناظر با $\frac{\varphi}{\varphi - ۱} = \varphi + ۱$ است. بنابراین دنباله‌های $\mathcal{B}_\varphi$ و $\mathcal{B}_{\varphi+۱}$ اعداد طبیعی را افراز می‌کنند. اما برای هر عدد طبیعی n، همواره $\lfloor \varphi n \rfloor + n = \lfloor (\varphi + ۱)n \rfloor$. بنابراین هر عدد طبیعی یا در برد تابع f قرار می‌گیرد یا در برد تابع $f + id$. □

با توجه به قضیهٔ ۱-۱۵ در فصل قبل، می‌دانیم که برد توابع f و $f + id$ یک دنبالهٔ بیتی کامل می‌سازند، بنابراین با توجه به ویژگی ۵ و ۶ تابع f در فصل قبل، برای هر عدد طبیعی n روابط زیر برقرار هستند.

$$[\varphi f(n)] > ۱ - [\varphi]$$

$$[\varphi (f(n) + n)] < ۱ - [\varphi]$$

روابط فوق را می‌توان با توجه به ویژگی ۱ تابع f در فصل قبل، برحسب این تابع نیز بیان کرد.

لم ۲-۲. *برای هر عدد طبیعی n همواره:*

$$f(f(n)+1) = f(f(n)) + f(1) + 1, \tag{1}$$

$$f(f(n)+n+1) = f(f(n)+n) + f(1). \tag{2}$$

از خواص تابع جزءصحیح می‌دانیم که برای هر عدد حقیقی x، همواره $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$. بنابراین برای هر عدد طبیعی n، $f(-n) = -f(n) - 1$؛ زیرا

$$f(-n) = \lfloor \varphi(-n) \rfloor = -\lfloor \varphi n \rfloor - 1 = -f(n) - 1.$$

از این تساوی نتیجه می‌شود که همهٔ اعداد صحیح به‌جز ۱−، در برد تابع f یا $f + id$ قرار دارند؛ زیرا اگر $n < -1$ یک عدد صحیح باشد، آنگاه $n = m - 1$، برای عدد صحیح و منفی m. قرینهٔ عدد m، یک عدد طبیعی است که در برد تابع f قرار دارد یا در برد تابع $f + id$. اگر برای عدد طبیعی m'، $-m = f(m')$، آنگاه $f(-m') = -f(m') - 1 = m - 1 = n$. حال اگر $-m = f(m') + m'$، آنگاه $f(-m') - m' = -f(m') - m' - 1 = m - 1 = n$.

با توجه به لم ۲-۱، می‌توان تعریفی بازگشتی نیز برای تابع f، بیان کرد. برای این منظور، ابتدا قضیهٔ زیر را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۲-۳. *برای هر عدد طبیعی n، همواره $f(f(n)+n) = 2f(n) + n$.*

اثبات. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. با توجه به ویژگی تابع f، داریم $f(f(n)+n) = f(f(n)) + f(n) + i$، که $i = 1$ یا $i = 0$. ادعا می‌کنیم که i نمی‌تواند صفر باشد؛ زیرا اگر i برابر با صفر باشد، آنگاه عدد $f(f(n)+n)$ هم در برد تابع f قرار دارد و هم در برد تابع $f + id$، که تناقض است. بنابراین همواره $f(f(n)+n) = f(f(n)) + f(n) + 1$.

از طرفی دیگر، با توجه به تعریف تابع f و همچنین این حقیقت که $\varphi^2 = \varphi + 1$، داریم:

$$\begin{aligned} f(f(n)) &= \lfloor \varphi \lfloor \varphi n \rfloor \rfloor = \lfloor \varphi(\varphi n - [\varphi n]) \rfloor = \lfloor \varphi^2 n - \varphi\, [\varphi n] \rfloor \\ &= \lfloor \varphi n + n - \varphi\, [\varphi n] \rfloor = \lfloor \varphi n - \varphi\, [\varphi n] \rfloor + n. \end{aligned}$$

ادعا می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی n، همواره $\lfloor \varphi n - \varphi\, [\varphi n] \rfloor = \lfloor \varphi n \rfloor - 1$. که این ادعا، اثبات را تمام می‌کند؛ زیرا در این صورت $f(f(n)) = \lfloor \varphi n \rfloor + n - 1 = f(n) + n - 1$ و بنابراین $f(f(n)+n) = 2f(n) + n$.

برای اثبات این ادعا دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنید $[\varphi n] < \frac{1}{\varphi}$. در این صورت $\varphi\, [\varphi n] < 1$، لذا $[\varphi\, [\varphi n]] = \varphi\, [\varphi n]$ و همچنین

$\lfloor \varphi [\varphi n] \rfloor = ۰$. حال از آنجایی‌که $[\varphi n] < \varphi [\varphi n] = [\varphi [\varphi n]]$ و با توجه به خواص تابع جزءصحیح و قسمت اعشاری داریم:

$$\lfloor \varphi n - \varphi [\varphi n] \rfloor = \lfloor \varphi n \rfloor - \lfloor \varphi [\varphi n] \rfloor - ۱ = \lfloor \varphi n \rfloor - ۱.$$

حالت دوم: فرض کنید $\frac{۱}{\varphi - ۱} > [\varphi n] > \frac{۱}{\varphi}$. از نابرابری $[\varphi n] > \frac{۱}{\varphi}$ استنتاج می‌شود که $\lfloor \varphi [\varphi n] \rfloor = ۱$ و لذا $[\varphi [\varphi n]] = \varphi [\varphi n] - ۱$. از نابرابری $\frac{۱}{\varphi - ۱} > [\varphi n]$ نتیجه می‌شود که $\varphi [\varphi n] - ۱ < [\varphi n]$، پس $[\varphi [\varphi n]] < [\varphi n]$. بنابراین

$$\lfloor \varphi n - \varphi [\varphi n] \rfloor = \lfloor \varphi n \rfloor - \lfloor \varphi [\varphi n] \rfloor = \lfloor \varphi n \rfloor - ۱.$$

حالت سوم نیز هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد؛ زیرا اگر برای عدد طبیعی n داشته باشیم $[\varphi n] > \frac{۱}{\varphi - ۱}$، آنگاه از آنجایی‌که $\varphi = \frac{۱}{\varphi - ۱}$ و $۱ > \varphi$، نتیجه می‌شود $۱ > [\varphi n]$، که تناقضی آشکار است. □

لم ۲-۴. ۱. *برای هر عدد طبیعی* $n > ۱$*، همواره* $f(f(n)+n) = ۲f(n)+n$ *و* $f(f(n)) = f(n)+n-۱$ *و همچنین* $f(۰) = ۰$ *و* $f(۱) = ۱$.

۲. *برای اعداد صحیح منفی نیز این حکم برقرار است، یعنی برای هر عدد طبیعی* $n > ۱$*، همواره* $f(f(-n)) = f(-n) - n - ۱$ *و* $f(f(-n) - n) = ۲f(-n) - n$ *و علاوه بر آن* $f(-۱) = -۲$.

اثبات. اثبات قسمت اول این لم در قضیهٔ بالا و اثبات آن آورده شده است.
برای اثبات قسمت دوم، فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد، از آنجایی‌که $f(-n) = -f(n) - ۱$، پس

$$f(f(-n)) = f(-f(n) - ۱) = f(-(f(n) + ۱)) = -f(f(n) + ۱) - ۱.$$

با توجه به رابطهٔ (۵)، $f(f(n) + ۱) = f(f(n)) + f(۱) + ۱ = f(f(n)) + ۲$. چون n عددی طبیعی است، پس طبق قسمت ۱.، $f(f(n)) = f(n) + n - ۱$. بنابراین

$$\begin{aligned} f(f(-n)) &= -f(f(n) + ۱) - ۱ = -(f(n) + n + ۱) - ۱ = (-f(n) - ۱) - n - ۱ \\ &= f(-n) - n - ۱. \end{aligned}$$

همچنین به‌طور مشابه، برای هر عدد طبیعی n،

$$f(f(-n) - n) = f(-f(n) - n - ۱) = f(-(f(n) + n + ۱)) = -f(f(n) + n + ۱) - ۱.$$

حال با توجه به قسمت ۱. و رابطهٔ (۷)، داریم $f(f(n)+n+۱) = f(f(n)+n)+f(۱) = ۲f(n)+n+۱$. بنابراین

$$f(f(-n) - n) = -f(f(n) + n + ۱) - ۱ = -۲f(n) - n - ۲ = ۲f(-n) - n.$$

□

از لم بالا نتیجه می‌شود که تابع f را می‌توان به‌صورت بازگشتی روی اعداد صحیح تعریف کرد. برای این منظور کافی است قرار دهیم $f(0) = 0$، $f(1) = 1$ و $f(-1) = -2$ و برای دیگر اعداد صحیح، تابع را به‌صورت زیر تعریف کنیم.

$$\begin{cases} f(f(x)) = f(x) + x - 1 \\ f(f(x) + x) = 2f(x) + x \end{cases}$$

از آنجایی‌که تابع f و $f + id$ اعداد طبیعی را افراز می‌کنند و هر دو توابعی صعودی هستند، بنابراین می‌توان تابع f بر روی اعداد طبیعی را به‌صورت زیر نیز تعریف کرد. برای هر عدد طبیعی n،

$$f(n) = \min \mathbb{N} \setminus \{f(i), f(i) + i : i < n\}.$$

حال از آنجا که $f(-n) = -f(n) - 1$، بنابراین از رابطهٔ بالا می‌توان برای تعریف کردن تابع f برروی اعداد صحیح نیز استفاده کرد.

نسبت طلایی و **دنبالهٔ فیبوناتچی** ارتباطی بسیار نزدیک با یکدیگر دارند. ما نیز برای شناختن برد تابع f در اعداد طبیعی، از دنبالهٔ فیبوناتچی $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ با $F_0 = F_1 = 1$، کمک می‌گیریم. برای راحتی، به هر عنصر دنبالهٔ فیبوناتچی، *عدد فیبوناتچی* می‌گوییم.

برای بهتر شناختن برد تابع f، از دنبالهٔ مشخصهٔ این تابع کمک می‌گیریم. دنبالهٔ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ که در آن $c_n = 1$ اگر n در برد تابع f باشد و در غیر این صورت $c_n = 0$، را درنظر بگیرید. با توجه به ویژگی‌های تابع جزءصحیح و چون $\varphi > 1$، نتیجه می‌شود که در این دنباله، هیچگاه دو صفر متوالی ظاهر نمی‌شود. زیرا، از آنجایی‌که تابع f صعودی اکید است، بنابراین برای هر عدد طبیعی n، $f(n+1) - f(n) \geq 1$، پس $f(n+1) + (n+1) - (f(n) + n) \geq 2$. به این معنی که فاصلهٔ هر دو عنصری که در برد تابع f قرار نمی‌گیرد، حداقل ۲ است.

با توجه به قضیهٔ زیر دنبالهٔ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را می‌توان با استفاده از روشی مولد نیز ساخت.

قضیه ۲-۵. [۱۷، *قضیهٔ ۱*] *برای هر عدد طبیعی* n، $c_n = 1$ *اگر و تنها اگر* n *در برد تابع* f *باشد.*

با توجه به این قضیه و برای ساختن دنبالهٔ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$، از دنبالهٔ متناهی ۱۰ شروع می‌کنیم و سپس در هر مرحله، هر عدد ۱ را با ۱۰ و هر عدد صفر را با عدد ۱ جایگزین می‌کنیم تا دنبالهٔ متناهی دیگری بدست آید. با اعمال این عمل جایگزینی، می‌توانیم دنبالهٔ (c_n) از هر طول متناهی را تولید کنیم. در زیر چند

مرحله از این عمل را مشاهده می‌کنید.

$$\begin{array}{l} 10 \\ 101 \\ 10110 \\ 10110101 \\ \vdots \end{array}$$

با توجه نحوهٔ ساخت این دنباله، می‌توان در هر مرحله، تعداد یک‌ها و صفرهای ظاهر شده در دنباله را بدست آورد و بنابراین اندیس ظاهر شدن nـاُمین یک در دنباله را برای هر عدد طبیعی n یافت. این اندیس در واقع بیانگر $f(n)$ است؛ زیرا این دنباله، دنبالهٔ مشخصهٔ تابع f است.

مشاهده ۲-۶. *برای هر عدد طبیعی $k \geq 3$، تعداد یک‌های ظاهر شده در مرحلهٔ F_k برابر با F_{k-1} است و بنابراین تعداد صفرها نیز برابر با F_{k-2} است.*

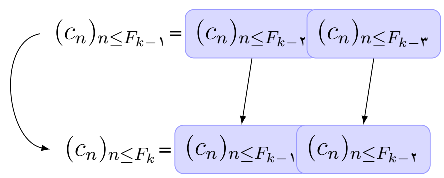
اثبات. از آنجایی‌که در هر مرحله، ۱ را با ۱۰ و ۰ را با ۱، جایگزین می‌کنیم، پس در مرحلهٔ kـاُم به‌ازای هر عضو در مرحلهٔ $k-1$ـاُم، یک تولید شده است. بنابراین تعداد یک‌ها برابر با F_{k-1} است و لذا تعداد صفرها برابر با F_{k-2} است. $\square$

می‌دانیم که هر جملهٔ دنبالهٔ فیبوناتچی برابر با حاصلجمع دو جملهٔ قبلی است. دنبالهٔ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نیز رفتار مشابهی دارد. به این صورت که از کنار هم قرار دادن دنباله‌های دو مرحلهٔ متوالی، دنبالهٔ متناهی مرحلهٔ بعد ساخته می‌شود. این روش ساخت به ما در شناختن عناصری که در برد تابع f قرار می‌گیرند، کمک می‌کند (حقیقت ۲-۱۰)، این درحالی است که از روش قبلی می‌توان برای محاسبهٔ تابع f و همچنین معکوس آن استفاده کرد (حقیقت ۲-۹).

مشاهده ۲-۷. *برای هر عدد طبیعی $k \geq 3$، دنبالهٔ متناهی $(c_n)_{n\leq F_k}$، از الحاق دنبالهٔ $(c_n)_{n\leq F_{k-2}}$ به انتهای دنبالهٔ $(c_n)_{n\leq F_{k-1}}$ حاصل می‌شود.*

اثبات. برای اثبات از استقرا کمک می‌گیریم. واضح است که حکم برای $k = 3$ برقرار است. برای ساختن دنبالهٔ $(c_n)_{n\leq F_k}$، باید عمل جایگزینی ۱ به ۱۰ و ۰ به ۱ را روی دنبالهٔ $(c_n)_{n\leq F_{k-1}}$ اعمال کنیم. طبق فرض استقرا، دنبالهٔ $(c_n)_{n\leq F_{k-1}}$ از الحاق دنبالهٔ $(c_n)_{n\leq F_{k-3}}$ به انتهای دنبالهٔ $(c_n)_{n\leq F_{k-2}}$ حاصل می‌شود. از طرفی دیگر، دنبالهٔ $(c_n)_{n\leq F_{k-1}}$ از اعمال عمل جایگزینی روی دنبالهٔ $(c_n)_{n\leq F_{k-2}}$ بدست می‌آید. اما اعمال همین عمل روی دنبالهٔ $(c_n)_{n\leq F_{k-3}}$ دنبالهٔ $(c_n)_{n\leq F_{k-2}}$ را ایجاد می‌کند. بنابراین حاصل

اعمال این عمل روی دنبالهٔ $(c_n)_{n\leq F_{k-۱}}$، دنباله‌ای است که از الحاق دنبالهٔ $(c_n)_{n\leq F_{k-۲}}$ به انتهای دنبالهٔ $(c_n)_{n\leq F_{k-۱}}$ حاصل می‌شود (شکل ۲-۱ را مشاهده کنید).



شکل ۲-۱: نحوه تولید دنبالهٔ c_n

$\square$

با توجه به نحوهٔ تولید این دنباله و مشاهدهٔ بالا، چون در هر مرحله دنباله از کنار هم قرار دادن دنباله‌های دو مرحلهٔ قبل ایجاد می‌شود، پس طول این دنباله نیز برابر با مجموع طول دو دنبالهٔ قبلی است، بنابراین در هر مرحله طول دنباله یک عدد فیبوناتچی است. علاوه‌بر این، در هر مرحله آخرین رقم همواره بین ۰ و ۱ جابجا می‌شود. بنابراین آخرین رقم هر دنبالهٔ متناهی با طول فیبوناتچی با اندیس فرد برابر با ۱ است و اگر اندیس آن زوج باشد، برابر با ۰. به این معنی که برای هر عدد طبیعی n، همواره $c_{F_{۲n+۱}} = ۱$ و $c_{F_{۲n}} = ۰$.

از مشاهده بالا نیز استنتاج می‌شود که دنبالهٔ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رفتاری *شبه متناوب* دارد؛ به این معنی که بعد از هر فیبوناتچی، *الگوی* صفر و یک‌ها دوباره از ابتدا تکرار می‌شود. بنابراین برای هر عدد طبیعی n و هر $۱ \leq i \leq F_{n-۱}$، همواره $c_{F_n+i} = c_i$. لذا می‌توان با استفاده از *نمایش فیبوناتچی* یکتای اعداد، دنبالهٔ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و بنابراین برد تابع f را به‌خوبی شناسایی کرد. برای این منظور ابتدا، نمایش فیبوناتچی اعداد را بیان می‌کنیم.

حقیقت ۲-۸. *هر عدد طبیعی n، دارای نمایش یکتایی به‌صورت مجموع اعداد فیبوناتچی به‌صورت $n = F_{i_۱} + F_{i_۲} + \ldots + F_{i_\ell}$ است، که در آن $i_j > i_{j+۱} + ۱$ برای هر $۱ \leq j < \ell$.*

اثبات. برای بدست آوردن چنین نمایشی، کافی است ابتدا بزرگترین عدد فیبوناتچی کوچکتر از عدد n را بیابیم، آن را $F_{i_۱}$ می‌نامیم. در این صورت $n = F_{i_۱} + G_۱$. حال بزرگترین عدد فیبوناتچی کمتر از $G_۱$ را می‌یابیم. این عدد فیبوناتچی نمی‌تواند $F_{i_۱-۱}$ باشد؛ زیرا در غیر این صورت بزرگترین عدد فیبوناتچی کوچکتر از n برابر با $F_{i_۱+۱} = F_{i_۱} + F_{i_۱-۱}$ است، که تناقض با انتخاب $F_{i_۱}$ دارد.

بزرگترین عدد فیبوناتچی کوچکتر از $G_۱$ را $F_{i_۲}$ می‌نامیم. با ادامهٔ این روند، نمایشی برای عدد طبیعی n برحسب اعداد فیبوناتچی بدست می‌آید. یکتایی این نمایش از ویژگی دنبالهٔ فیبوناتچی، یعنی $F_n = F_{n-۱} + F_{n-۲}$ نتیجه می‌شود. □

نمایش فیبوناتچی در واقع همان نمایش زِکِندرُف [1] اعداد است (برای مطالعهٔ بیشتر در مورد نمایش زکندرف اعداد طبیعی، مرجع [۱۹] را مشاهده کنید).

از نمایش فیبوناتچی اعداد و مشاهدات بالا، حقیقت‌های زیر در مورد دنبالهٔ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و متعاقباً برد تابع f نتیجه می‌شود.

حقیقت ۲-۹.

۱. *برای هر عدد طبیعی i، اگر i زوج باشد، $f(F_i) = F_{i+۱}$ و در غیر این صورت، $f(F_i) = F_{i+۱} - ۱$.*

۲. *اگر عدد طبیعی m دارای نمایش فیبوناتچی $m = F_{i_۱} + F_{i_۲} + \ldots + F_{i_\ell}$ باشد، آنگاه در صورتی که i_ℓ زوج باشد، $f(m) = F_{i_۱+۱} + F_{i_۲+۱} + \ldots + F_{i_\ell+۱}$ و در غیر این صورت $f(m) = F_{i_۱+۱} + F_{i_۲+۱} + \ldots + F_{i_\ell+۱} - ۱$.*

اثبات. با توجه به اینکه دنبالهٔ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنبالهٔ مشخصهٔ تابع f است، بنابراین $f(m)$ در واقع اندیس mــاُمین وقوع عدد ۱ در دنبالهٔ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ است. از آنجایی‌که دنبالهٔ متناهی $(c_n)_{n\le F_{i+۱}}$ از اعمال عمل جایگزینی ۱ با ۱۰ و ۰ با ۱ بدست می‌آید، لذا این دنبالهٔ متناهی دارای دقیقا F_i عدد ۱ است. بنابراین $f(F_i) = F_{i+۱}$ اگر i زوج باشد و در غیر این صورت $f(F_i) = F_{i+۱} - ۱$. به‌طور مشابه، تعداد یک‌های دنبالهٔ $(c_n)_{n\le N}$ که $N = F_{i_۱+۱} + F_{i_۲+۱} + \ldots + F_{i_\ell+۱}$، برابر با $F_{i_۱} + F_{i_۲} + \ldots + F_{i_\ell}$ است، که این مشاهده قسمت دوم حقیقت را اثبات می‌کند. □

از حقیقت بالا، حقیقت زیر نتیجه می‌شود.

حقیقت ۲-۱۰. *برای هر عدد طبیعی n، کوچکترین اندیسی که در نمایش فیبوناتچی عدد n ظاهر می‌شود، c_n را مشخص می‌کند. به این معنی که $c_n = ۱$ اگر و تنها اگر آن اندیس فرد باشد.*

نکته ۲-۱۱. توجه کنید که دنبالهٔ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ که ما در اینجا معرفی کردیم، درحقیقت مکمل دنباله‌ای است که به آن *کلمهٔ فیبوناتچی*[2] می‌گویند و با $\lfloor\varphi(n+۱)\rfloor - \lfloor\varphi n\rfloor + ۲$ تعریف می‌شود.

دنبالهٔ فیبوناتچی ویژگی‌های زیادی دارد، اما یکی از مهمترین ویژگی‌های این دنباله، حقیقت زیر است که در زیرفصل بعدی از آن استفاده می‌کنیم.

[1] Zeckendorf representation
[2] Fibonacci word

حقیقت ۲-۱۲. *برای هر عدد طبیعی $k > 1$، دنبالهٔ $(F_i \mod k)_{i\in\mathbb{N}}$ دوری است و با ۰ و ۱ شروع می‌شود.*

اثبات. با توجه به نحوهٔ تولید دنبالهٔ فیبوناتچی، کافی است نشان دهیم که اگر دنبالهٔ باقیمانده‌های اعداد فیبوناتچی بر k را بنویسیم، آنگاه در جایی صفر و یک به‌صورت متوالی ظاهر می‌شود. لذا بعد از این صفر و یکِ متوالی، دنبالهٔ باقیمانده‌ها از ابتدا تکرار می‌شوند.

مجموعهٔ $\{(F_i \mod k, F_{i+1} \mod k) : i\in\mathbb{N}\}$ حداکثر دارای k^2 عضو است. از آنجایی‌که دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی نامتناهی هستند، پس طبق اصل لانهٔ کبوتری اعداد n و m چنان موجودند به‌طوری که $F_n \overset{k}{\equiv} F_m$ و $F_{n+1} \overset{k}{\equiv} F_{m+1}$. بدون کاسته شدن از کلیت مساله، فرض کنید $m < n$. در این صورت از آنجایی‌که برای هر عدد طبیعی i، $F_{i-1} = F_{i+1} - F_i$ بنابراین رابطهٔ زیر برقرار است.

$$F_{n-1} \overset{k}{\equiv} F_{m-1},\ F_{n-2} \overset{k}{\equiv} F_{m-2}, \cdots, F_{n-m+1} \overset{k}{\equiv} F_1 = 1,\ F_{n-m} \overset{k}{\equiv} F_0 = 0$$

□

۲.۲ لم‌های کمکی برای اصول موضوعه

در این زیربخش، لم‌هایی را در مورد اعداد طبیعی بیان و اثبات می‌کنیم. از این لم‌ها در اصل‌بندی ساختار استفاده می‌کنیم. برای این منظور، زبان این ساختار را به‌صورت $\mathcal{L} := \{f, +, \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, 0, 1\}$ درنظر می‌گیریم.

در ابتدا نشان می‌دهیم که برد تابع f، همهٔ کلاس‌های همنهشتی را قطع می‌کند.

لم ۲-۱۳. *برای هر عدد طبیعی k و m، عدد طبیعی n چنان موجود است که $f(n) \overset{k}{\equiv} m$.*

اثبات. فرض کنید $m = F_{i_1} + \ldots + F_{i_\ell}$ نمایش فیبوناتچی یکتای عدد m باشد. با توجه به حقیقت ۲-۱۰، اگر i_ℓ عددی فرد باشد، آنگاه m در برد تابع f قرار دارد و بنابراین عدد طبیعی n که $f(n) = m$، جواب این معادله است، یعنی $f(n) \overset{k}{\equiv} m$. بنابراین فرض کنید i_ℓ عددی زوج باشد.

از آنجایی‌که با توجه به حقیقت ۲-۱۲، باقیماندهٔ دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی بر عدد k دوری است و با ۰ و ۱ شروع می‌شود، بنابراین عدد فیبوناتچی F_i چنان موجود است که $i > i_1 + 1$ و همچنین $F_i \overset{k}{\equiv} 1$. به این معنی که عدد طبیعی u چنان موجود است که $F_i - 1 = ku$. از طرفی دیگر، $m - 1$ در برد تابع f قرار دارد؛ زیرا m در برد تابع قرار ندارد و هیچ دو عنصر متوالی وجود ندارند که همزمان در برد تابع f نباشند. بنابراین $F_i + m - 1$ در برد تابع f قرار دارد و علاوه‌بر این $F_i + m - 1 \overset{k}{\equiv} m$. □

اما علاوه‌بر اینکه برد تابع f می‌تواند در هر کلاس همنهشتی قرار گیرد، پیش‌تصویرِ تابع نیز می‌تواند در هر کلاس همنهشتی قرار گیرد.

لم ۲-۱۴. *برای تمام اعداد طبیعی k، m، k' و m'، دستگاه معادلات زیر در اعداد طبیعی دارای جواب است.*

$$\begin{cases} x \overset{k}{\equiv} m \\ f(x) \overset{k'}{\equiv} m' \end{cases} \tag{۳}$$

اثبات. واضح است که m جوابی برای معادلهٔ $x \overset{k}{\equiv} m$ است. فرض کنید $F_{i_1} + \ldots + F_{i_\ell}$ نمایش فیبوناتچی عدد m باشد. همچنین فرض کنید باقیماندهٔ $f(m)$ بر k' برابر با m'' باشد. اگر $m'' = m$، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند، زیرا خود m جوابی برای دستگاه است. پس فرض کنید که $m'' \neq m$. در این صورت با توجه به ۲-۱۲، می‌توان عدد فیبوناتچی F_j را طوری یافت که $F_j \overset{k}{\equiv} 0$، $F_j \overset{k'}{\equiv} 0$، $f(F_j) = F_{j+1} \overset{k'}{\equiv} 1$ و همچنین j عددی زوج و بزرگتر از $i_1 + 1$ باشد (علت این شرط این است که با افزودن این عدد فیبوناتچی به نمایش فیبوناتچی عدد m، حاصلجمع فیبوناتچی‌ها، خود یک نمایش فیبوناتچی باشد، یعنی در این حاصل هیچ دو فیبوناتچی متوالی ظاهر نشده باشد). در این صورت با توجه به حقیقت ۲-۹، $f(m + F_j) = f(m) + f(F_j)$. اما $f(m) + f(F_j) \overset{k'}{\equiv} m'' + 1$.

با تکرار این روش، هر بار می‌توانیم عددی بیابیم که باقیماندهٔ آن عدد بر k تغییری نکند ولی باقیماندهٔ تصویر آن عدد بر k' یک واحد بیشتر شود. بنابراین با افزودن چند عدد فیبوناتچی مناسب، می‌توانیم عدد طبیعی مانند n را طوری بیابیم که $n \overset{k}{\equiv} m$ و $f(n) \overset{k'}{\equiv} m'$. □

لم بالا ارتباط نزدیکی با حقیقت زیر دربارهٔ توزیع $[\varphi n]$، برای همهٔ اعداد طبیعی n، در بازهٔ $(0, 1)$ دارد.

حقیقت ۲-۱۵ (قضیهٔ کْرونِکِر). *(قضیهٔ ۱-۱۸) دنبالهٔ $([\varphi n])_{n\in\mathbb{N}}$ در بازهٔ $(0, 1)$ چگال است.*

لم زیر به ما کمک می‌کند تا ارتباط بین لم ۲-۱۴ و قضیهٔ کرونکر را بیان کنیم.

لم ۲-۱۶. *برای هر عدد طبیعی k و هر $0 \leq i < k$، $f(n) \overset{k}{\equiv} i$ اگر و تنها اگر $[\frac{\varphi}{k}n] \in (\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k})$.*

اثبات. برای اعداد طبیعی داده شدهٔ n و k، فرض کنید $f(n) \overset{k}{\equiv} i$. با توجه به تعریف تابع f، $\varphi n = f(n) + [\varphi n]$. اگر طرفین تساوی را بر k تقسیم کنیم، خواهیم داشت.

$$\frac{\varphi}{k}n = \frac{f(n)}{k} + \frac{[\varphi n]}{k} = \frac{f(n) - i}{k} + \frac{[\varphi n] + i}{k}$$

از آنجایی‌که $f(n)-i$ بر k بخشپذیر است، پس $\left[\frac{[\varphi n]+i}{k}\right] = \left[\frac{\varphi}{k}n\right]$. از طرفی دیگر، چون $۰ < [\varphi n] < ۱$، پس $\frac{i}{k} < \frac{[\varphi n]+i}{k} < \frac{i+۱}{k}$. بنابراین $۱ > \frac{[\varphi n]+i}{k}$؛ زیرا $۱ \leq \frac{i+۱}{k}$. پس قسمت اعشاری $\frac{[\varphi n]+i}{k}$ با خودش برابر است. لذا $\left[\frac{\varphi}{k}n\right] \in (\frac{i}{k}, \frac{i+۱}{k})$.

حال فرض کنید $\left[\frac{\varphi}{k}n\right] \in (\frac{i}{k}, \frac{i+۱}{k})$. با توجه به تعریف تابع جزءصحیح داریم $\frac{\varphi}{k}n = \lfloor\frac{\varphi}{k}n\rfloor + \left[\frac{\varphi}{k}n\right]$. اگر طرفین در k ضرب کنیم، خواهیم داشت $\varphi n = k\lfloor\frac{\varphi}{k}n\rfloor + k\left[\frac{\varphi}{k}n\right]$. با توجه به فرض $i < k\left[\frac{\varphi}{k}n\right] < i+۱$، بنابراین $f(n) = k\lfloor\frac{\varphi}{k}n\rfloor + i$. پس $f(n) \overset{k}{\equiv} i$. $\square$

حال با توجه به این لم، می‌توانیم معادلی برای قضیه کرونکر بیان کنیم.

ملاحظه ۲-۱۷. با توجه به لم بالا، $[\varphi n] \in (\frac{i}{k}, \frac{i+۱}{k})$ اگر و تنها اگر $f(kn) \overset{k}{\equiv} i$. بنابراین برای یافتن عدد طبیعی n به‌طوری که $[\varphi n]$ در زیربازهٔ مطلوب بسیار کوچک $(\frac{i}{k}, \frac{i+۱}{k})$ از بازهٔ $(۰, ۱)$ قرار بگیرد، کافی است که دستگاه معادلات همنهشتی زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} x \overset{k}{\equiv} ۰ \\ f(x) \overset{k}{\equiv} i. \end{cases}$$

حال اگر m جوابی برای دستگاه بالا باشد، آنگاه $n = \frac{m}{k}$ عنصری است که $[\varphi n]$ در بازهٔ مطلوب قرار دارد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که لم ۲-۱۴ در واقع بیانی معادل برای قضیهٔ کرونکر است.

از آنجایی‌که در زبان $\mathcal{L}$ نمادی برای $[\varphi x]$ نداریم و حتی قسمت اعشاری نیز در این ساختار قابل تعریف نیست، ملاحظهٔ بالا از این جهت بسیار جالب است که ما را قادر می‌سازد تا برخی از ویژگی‌های قسمت‌های اعشاری را بیان کنیم. در واقع، با استفاده از ویژگی‌های تابع f، می‌توانیم ترتیب را بین قسمت‌های اعشاری تعریف کنیم. برای مثال، در ابتدای فصل بیان کردیم که برای هر دو عدد طبیعی n و m، همواره $f(n+m) = f(n) + f(m)$ یا $f(n+m) = f(n) + f(m) + ۱$. که حالت اول زمانی رخ می‌دهد که $[\varphi n] + [\varphi m] < ۱$ و در غیر این صورت حالت دوم رخ می‌دهد.

با توجه به بیان‌پذیر بودن ترتیب بین قسمت‌های اعشاری، می‌توان قضیهٔ کرونکر را به‌صورت زیر بیان کرد.

$$\forall x, y \left([\varphi x] < [\varphi y] \to \exists z \ [\varphi x] < [\varphi z] < [\varphi y] \right)$$

اما عنصر z را می‌توان با استفاده از تابع f ساخت.

لم ۲-۱۸. *برای هر دو عدد طبیعی m و n، اگر $[\varphi m] < [\varphi n]$، آنگاه*

$$[\varphi m] < \left[\varphi\Big(m + \big(f(n-m) + (n-m)\big)\Big)\right] < [\varphi n].$$

اثبات. در ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر عدد صحیح n رابطهٔ زیر برقرار است.

$$[\varphi(f(n)+n)] < [\varphi n]$$

با توجه به تعریف تابع f، چون برای هر عدد صحیح n، $f(f(n)+n) = f(f(n)) + f(n) + ۱$، پس $[\varphi f(n)] + [\varphi n] > ۱$ و لذا $[\varphi(f(n)+n)] = [\varphi f(n)] + [\varphi n] - ۱$. از طرفی دیگر، چون $[\varphi f(n)] + [\varphi n] - ۱ < [\varphi n]$، بنابراین $[\varphi(f(n)+n)] < [\varphi n]$.

حال فرض کنید m و n دو عدد طبیعی دلخواه باشند که $[\varphi m] < [\varphi n]$. در این صورت واضح است که $[\varphi(n-m)] = [\varphi n] - [\varphi m]$. از طرفی با توجه به استدلال فوق، داریم:

$$\big[\varphi\big(f(n-m)+(n-m)\big)\big] < [\varphi(n-m)] = [\varphi n] - [\varphi m].$$

حال اگر به طرفین رابطهٔ بالا $[\varphi m]$ را بیافزاییم، خواهیم داشت:

$$[\varphi m] + \big[\varphi\big(f(n-m)+(n-m)\big)\big] < [\varphi n].$$

حال چون سمت راست رابطهٔ بالا کمتر از یک است، نتیجه می‌شود که

$$\left[\varphi\Big(m + \big(f(n-m)+(n-m)\big)\Big)\right] = [\varphi m] + \big[\varphi\big(f(n-m)+(n-m)\big)\big]\,.$$

بنابراین $\left[\varphi\Big(m + \big(f(n-m)+(n-m)\big)\Big)\right] < [\varphi n]$ و علاوه بر آن، واضح است که سمت راست تساوی بالا از $[\varphi m]$ بیشتر است. □

رابطهٔ ترتیبی که بین قسمت‌های اعشاری تعریف کردیم، یک رابطهٔ ترتیب خطی است، زیرا از اصم بودن φ نتیجه می‌شود که برای هر دو عدد طبیعی m و n، $[\varphi m] = [\varphi n]$ اگر و تنها اگر $n = m$.

برای بیان‌پذیر کردن ویژگی‌های مهم قسمت‌های اعشاری که در این فصل از آنها استفاده می‌کنیم، لم زیر بسیار مفید است.

لم ۲-۱۹. *$\mathcal{L}$ـفرمولی مانند $R(x,y)$ به‌گونه‌ای موجود است که برای هر دو عدد طبیعی و متمایز n و m، همواره $\langle \mathbb{N}, +, f, ۰, ۱\rangle \models R(n,m)$ اگر و تنها اگر $[\varphi m] < [\varphi n]$.*

اثبات. فرمول $R(x,y)$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$\forall z\Big(f(x+z) = f(x) + f(z) + ۱ \to f(y+z) = f(y) + f(z) + ۱\Big). \qquad (۴)$$

در حقیقت فرمول $R(x,y)$ بیان می‌کند که برای هر عدد z، اگر مجموع قسمت‌های اعشاری φx و φz از یک بیشتر شود، آنگاه همین اتفاق برای مجموع قسمت‌های اعشاری φy و φz نیز رخ می‌دهد.

فرض کنید $[\varphi m] < [\varphi n]$، بنابراین برای هر عدد طبیعی r، همواره $[\varphi m] + [\varphi r] < [\varphi n] + [\varphi r]$. پس اگر ۱ $> [\varphi n] + [\varphi r]$، آنگاه ۱ $> [\varphi m] + [\varphi r]$. که این عبارت، دقیقا بیان فرمول $R(m,n)$ است.

برای اثبات طرف دیگر، فرض کنید m و n دو عدد طبیعی متمایز باشند که $[\varphi m] \not< [\varphi n]$. با توجه به اینکه m و n متمایز هستند، نتیجه می‌شود $[\varphi m] > [\varphi n]$. بنابراین با توجه به خطی بودن ترتیب، ۱ $- [\varphi m] <$ ۱ $- [\varphi n]$. حال بنابه قضیهٔ کرونکر (۲-۱۵)، عدد طبیعی مانند r وجود دارد به‌طوری که $[\varphi r]$ بین این دو عدد قرار می‌گیرد. حال، از ۱ $- [\varphi n] < [\varphi r]$، نتیجه می‌شود ۱ $+ f(n+r) = f(n) + f(r)$. اما از آنجایی‌که $[\varphi r] <$ ۱ $- [\varphi m]$، پس نتیجه می‌شود $f(m+r) = f(m) + f(r)$. که این عبارت نقیض فرمول $R(n,m)$ است. □

زیبایی لم بالا در تعریف‌پذیری رابطهٔ ترتیب خطی بین قسمت‌های اعشاری در ساختار $\langle \mathbb{N}, +, f, ۰, ۱\rangle$ است. بنابراین، زبان ساختار را با یک محمول دوموضعی $R(x,y)$، که با فرمول (۴) تعبیر می‌شود، توسیع می‌دهیم.

نمادگذاری ۲-۲۰. قرار دهید $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{R\}$.

ملاحظه ۲-۲۱. در لم ۲-۱۹، محمول R را تعبیر کردیم. این محمول، یک رابطهٔ ترتیب خطی روی قسمت‌های اعشاری اعداد به‌صورت φn است، پس این ویژگی محمول R باید در اصول موضوعه گنجانده شود.

اما اغناء زبان با این نماد رابطه‌ای دوموضعی، باعث می‌شود که در این زبان فرمول‌های زیر نیز تعریف‌پذیر باشند. در مسیر حل دستگاه‌های معادلات خواهیم دید که فرمول‌های به‌صورت زیر، شرط حل‌پذیری برخی دستگاه‌ها هستند. بنابراین بیان‌پذیری این فرمول‌ها در زبان، در اثبات حذف‌سور نقشی اساسی ایفا می‌کند.

$$[\varphi x] + [\varphi y] < [\varphi z]$$
$$m_۱ [\varphi x_۱] + \cdots + m_k [\varphi x_k] < n_۱ [\varphi y_۱] + \cdots + n_k [\varphi y_k] + \ell$$

در فرمول‌های بالا، ضرایب m_i و n_i همگی اعداد طبیعی هستند و ℓ عددی صحیح است. این دو فرمول معادل با فرمول‌هایی مرتبه اول در زبان $\mathcal{L}^*$ هستند، که در دو لم زیر این فرمول‌های معادل را معرفی می‌کنیم.

لم ۲-۲۲. *معادلهٔ زیر در زبان $\mathcal{L}^*$ بیان‌پذیر است.*

$$[\varphi x] + [\varphi y] < [\varphi z] \qquad (۵)$$

اثبات. نشان می‌دهیم که این معادله با فرمول بدون‌سور زیر معادل است.

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \wedge R(x+y, z) \tag{۶}$$

ابتدا فرض کنید $f(x+y) = f(x) + f(y) \wedge R(x+y,z)$. در این صورت، با توجه به ویژگی‌های تابع f که در فصل قبل بیان کردیم و از آنجا که $f(x+y) = f(x) + f(y)$، نتیجه می‌گیریم $[\varphi(x+y)] = [\varphi x] + [\varphi y]$. از طرفی دیگر، چون $R(x+y,z)$ برقرار است، پس $[\varphi(x+y)] < [\varphi z]$، معادلاً $[\varphi x] + [\varphi y] < [\varphi z]$.

حال فرض کنید $[\varphi x] + [\varphi y] < [\varphi z]$. اگر $f(x+y) = f(x) + f(y) + ۱$، آنگاه $[\varphi x] + [\varphi y] > ۱$ و بنابراین $[\varphi z] > ۱$، که تناقض است. پس همواره $f(x+y) = f(x) + f(y)$ یا $[\varphi(x+y)] = [\varphi x] + [\varphi y]$. طبق فرض، سمت راست عبارت بالا کمتر از $[\varphi z]$ است، یعنی $R(x+y,z)$ برقرار است. □

لم ۲–۲۳. *برای اعداد طبیعی m_i و n_i، k، $۱ \leq i \leq k$ و همچنین عدد صحیح ℓ، فرمول زیر در زبان $\mathcal{L}^*$ قابل بیان است.*

$$m_۱ [\varphi x_۱] + \cdots + m_k [\varphi x_k] < n_۱ [\varphi y_۱] + \cdots + n_k [\varphi y_k] + \ell \tag{۷}$$

اثبات. با توجه به خواص تابع جزءصحیح و قسمت اعشاری، رابطهٔ زیر برای هر $x_۱$، …، x_k برقرار است:

$$\bigvee_{۰ \leq \ell_۱ < m+k-۱} [\varphi(m_۱ x_۱ + \cdots + m_k x_k)] = m_۱[\varphi x_۱] + \cdots + m_k[\varphi x_k] + \ell_۱,$$

که $m = m_۱ + \ldots + m_k$. همچنین به‌طور مشابه رابطهٔ زیر نیز برای هر $y_۱$، …، y_k برقرار است، که در این رابطه $n = n_۱ + \ldots + n_k$.

$$\bigvee_{۰ \leq \ell_۲ < n+k-۱} [\varphi(n_۱ y_۱ + \cdots + n_k y_k)] = n_۱[\varphi y_۱] + \cdots + n_k[\varphi y_k] + \ell_۲$$

بنابراین نامساوی (۷) معادل با ترکیبی بولی از فرمول‌های بالا و فرمولی به‌صورت زیر است:

$$[\varphi(m_۱ x_۱ + \cdots + m_k x_k)] < [\varphi(n_۱ y_۱ + \cdots + n_k y_k)] + \ell',$$

که ℓ' یک عدد صحیح مناسب و وابسته به ℓ، $\ell_۱$ و $\ell_۲$ است. اما چنین فرمول‌هایی در زبان $\mathcal{L}^*$ قابل بیان هستند. □

همان‌گونه که در فصل مقدمه بیان شد، برای اثبات حذف‌سور باید بتوانیم حل‌پذیری دستگاه‌های معادلات تولید شده توسط عناصر زبانی را از نظریه استنتاج کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که یک دستگاه معادلات می‌تواند شامل چه فرمول‌هایی باشد.

در فصل پیش‌نیازها بیان کردیم که یک دستگاه معادلات یک‌متغیره به‌صورت ترکیبی عطفی از فرمول‌هایی به‌صورت $R(t_1, \cdots, t_n)$ است که R یا یک رابطهٔ موجود در زبان یا رابطهٔ تساوی است و همهٔ t_iها ترم‌های زبانی هستند.

اما ترم‌های زبانی با استفاده از متغیرها، ثابت‌های زبان و با بکار بردن تابع‌های موجود در زبان بدست می‌آید. در زبان دو تابع + و تابع f وجود دارد. ترم‌هایی که با استفاده از تابع جمع ساخته می‌شوند، چندجمله‌ای‌های چندمتغیره هستند که درجهٔ این چندجمله‌ای نسبت به هر یک از متغیرها، حداکثر یک است.

از آنجا که $f(f(x)) = ۲f(x) + x - ۱$، در ترم‌هایی که با استفاده از تابع f ساخته می‌شوند، می‌توان توان‌های بالاتر تابع f را به توان‌های پایین‌تر و درنهایت به توان یک کاهش داد، که منظورمان از توان‌های مختلف f، ترکیب‌های تابع f با خودش است، برای مثال $f^۳ = f \circ f \circ f$ و $f^۱ = f$. بنابراین با استقرا برروی نحوهٔ ساخت ترم‌ها می‌توان فرض کرد که ترم‌های تک‌متغیره‌ای که با استفاده از عناصر زبانی ساخته می‌شوند و در دستگاه‌های معادلات از آنها استفاده می‌شود، به‌صورت $rx + sf(x) + t$ است که r و s اعداد طبیعی و t عدد صحیح است.

اما علاوه‌بر رابطه‌هایی که در زبان برای بخش‌پذیری وجود دارد، با توجه به اینکه رابطهٔ ترتیب بین قسمت‌های اعشاری اعداد به‌صورت φx نیز تعریف‌پذیر است (همان رابطهٔ $R(x, y)$)، بنابراین در دستگاه‌های معادلات، معادلاتی در مورد قسمت‌های اعشاری نیز وجود دارد. در این دستگاه معادلات، علاوه‌بر $[\varphi x]$، $[\varphi f(x)]$ نیز ممکن است وجود داشته باشد. در لم زیر نشان می‌دهیم که این دو قسمت اعشاری از یکدیگر مستقل نیستند. بنابراین، دستگاه‌های معادلات را می‌توان فقط برحسب $[\varphi x]$ درنظر گرفت، که تمامی روابط نیز در زبان $\mathcal{L}^*$ قابل بیان است. در اثبات لم زیر از ملاحظهٔ زیر استفاده کرده‌ایم.

ملاحظه ۲-۲۴. برای هر x و y، اگر $[\varphi x] < [\varphi y]$، آنگاه $[\varphi(x - y)] = [\varphi x] - [\varphi y] - ۱$. همچنین اگر $[\varphi x] > [\varphi y]$، آنگاه $[\varphi(x - y)] = [\varphi x] - [\varphi y]$.

لم ۲-۲۵. *برای هر عدد طبیعی n، $[\varphi f(n)]$ را می‌توان با داشتن $[\varphi n]$ و با استفاده از رابطهٔ زیر محاسبه کرد.*

$$[\varphi f(n)] = (۱ - \varphi)[\varphi n] + ۱ \qquad (۸)$$

اثبات. فرض کنید n یک عدد طبیعی داده شده باشد، در این صورت از آنجایی‌که $f(n) = \varphi n - [\varphi n]$، پس $\varphi f(n) = \varphi(\varphi n - [\varphi n]) = \varphi n + n - \varphi[\varphi n]$. تساوی آخر نیز از $\varphi^۲ = \varphi + ۱$ نتیجه می‌شود. حال چون n عددی طبیعی است، بنابراین $[\varphi f(n)] = [\varphi n - \varphi[\varphi n]]$. با مقایسهٔ $[\varphi n]$ و $\frac{۱}{\varphi}$، حاصل عبارت بالا را می‌توان محاسبه کرد.

اگر $\frac{۱}{\varphi} < [\varphi n]$ یا به‌طور معادل $۱ < \varphi[\varphi n]$، آنگاه $\varphi\,[\varphi n] = [\varphi\,[\varphi n]]$. از طرفی $\varphi[\varphi n] < [\varphi n]$، بنابراین

$$[\varphi f(n)] = [\varphi n - \varphi\,[\varphi n]] = [\varphi n] - \varphi\,[\varphi n] + ۱.$$

حال اگر $\frac{۱}{\varphi-۱} > [\varphi n] > \frac{۱}{\varphi}$، آنگاه از $\frac{۱}{\varphi} < [\varphi n]$ نتیجه می‌شود که $۱ = [\varphi[\varphi n]]$؛ زیرا $۲ > \varphi[\varphi n] > ۱$، بنابراین $[\varphi[\varphi n]] = \varphi[\varphi n] - ۱$. علاوه‌بر آن، چون $\frac{۱}{\varphi-۱} > [\varphi n]$، پس $\varphi[\varphi n] - ۱ < [\varphi n]$، یعنی $[\varphi[\varphi n]] < [\varphi n]$. بنابراین

$$[\varphi f(n)] = [\varphi n - \varphi\,[\varphi n]] = [\varphi n] - [\varphi\,[\varphi n]] = [\varphi n] - \varphi[\varphi n] + ۱.$$

حالت $[\varphi n] > \frac{۱}{\varphi-۱}$ نیز هیچگاه رخ نمی‌دهد؛ زیرا $۱ > \frac{۱}{\varphi-۱}$. □

لم بالا ما را قادر می‌سازد تا فرمول‌های بیشتری در مورد قسمت‌های اعشاری را بیان کنیم. برای مثال در این زبان جدید، می‌توان در نابرابری (۷)، ضریب صحیحی از φ را به دو طرف معادله افزود. حتی از خود φ نیز می‌توان به‌عنوان ضریب استفاده کرد.

نتیجه ۲-۲۶. *برای مضارب طبیعی m_i و n_i و مضارب صحیح ℓ و s، رابطهٔ زیر در زبان $\mathcal{L}^*$ قابل بیان است.*

$$m_۱\varphi[\varphi x_۱] + m_۲[\varphi x_۲] \cdots + m_k[\varphi x_k] < n_۱\varphi[\varphi y_۱] + n_۲[\varphi y_۲] + \cdots + n_k[\varphi y_k] + \ell + \varphi s \quad (۹)$$

اثبات. با توجه به لم بالا، اگر عبارت‌های $\varphi[\varphi x]$ و $\varphi[\varphi y]$ را به‌ترتیب با عبارت‌های $[\varphi x] - [\varphi f(x)] + ۱$ و $[\varphi y] - [\varphi f(y)] + ۱$ و همچنین عبارت φs را با عبارت $f(s) + [\varphi s]$ جایگزین کنیم، به عبارتی شبیه به عبارت نابرابری (۷) می‌رسیم که در این زبان بیان‌پذیر است. □

۳.۲ اصول موضوعه

هدفمان در این زیربخش، بیان اصول موضوعهٔ نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ در زبان $\mathcal{L}^*$، برای ساختار مورد نظر است. این اصول را بر اساس آنچه در دو زیربخش قبلی بیان کردیم، ارائه می‌کنیم.

در یک دید کوتاه، اصول نظریه را می‌توان به‌این صورت بیان کرد: شمای اصول $(T۱)$ خواص پایه‌ای ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, ۰, ۱\rangle$ را به‌عنوان مدلی برای نظریهٔ $\mathbb{Z}$ـگروه‌ها بیان می‌کند. اصول $(T۲)$ و $(T۳)$ خواص اصلی تابع f را براساس لم‌های ۲-۱ و ۲-۴ بیان می‌کند. ترتیب خطی بودن رابطهٔ $R(x,y)$ را اصل $(T۴)$ بیان می‌کند، که براساس ملاحظهٔ ۲-۲۱ است. به این معنی که رابطهٔ R را به‌عنوان ترتیب خطی طبیعی روی قسمت‌های اعشاری اعداد در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲–۲۷ (اصول موضوعه)**.** نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

(T۱) اصول نظریهٔ $\mathbb{Z}$ـگروه‌ها،

$$(T۲)\ \forall x\Big(x \neq -۱ \to \exists y\big((x = f(y)) \vee (x = f(y)+y)\big)\Big) \wedge \forall x,y\Big(f(x+y) = f(x)+f(y) \vee f(x+y) = f(x)+f(y)+۱\Big)،$$

$$(T۳)\ (f(۰) = ۰) \ \wedge\ (f(۱) = ۱) \ \wedge\ (f(-۱) = -۲) \ \wedge\ \forall x\Big(f(f(x)) = f(x)+x-۱ \ \wedge\ f(f(x)+x) = ۲f(x)+x\Big)،$$

(T۴)

- $\forall x\ \neg R(x,x)$،
- $\forall x,y\ \big(R(x,y) \to \neg R(y,x)\big)$،
- $\forall x,y,z\ \big(R(x,z) \wedge R(z,y) \to R(x,y)\big)$،
- $\forall x,y\ \big(R(x,y) \vee R(y,x)\big)$،

توجه داشته باشید که اصل (T۱) در واقع شمایی از اصول است.

اما این نظریه با توجه به توضیحات قبل از تعریف، سازگار است.

قضیه ۲–۲۸. *ساختار* $\langle \mathbb{Z}, +, f, R, \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, ۰, ۱\rangle$ *مدلی برای نظریهٔ* $\mathcal{T}_\varphi$ *است.*

همچنین توجه داشته باشید که اصولی که برای نظریه بیان شد، شمارش‌پذیر بازگشتی هستند. در زیربخش بعدی، نشان می‌دهیم که این نظریه سورها را حذف می‌کند، که با استفاده از آن نتیجه می‌گیریم که نظریه کامل و تصمیم‌پذیر است.

یکی از نتیجه‌های ساده و در عین‌حال جذابی که می‌توان از این اصول گرفت این است که قرار گرفتن یک عنصر در برد تابع f، دارای معادلی بدون‌سور در زبان $\mathcal{L}$ است.

مشاهده ۲–۲۹. *عنصر* a *در برد تابع* f *قرار دارد اگر و تنها اگر* $a = f(f(a)-a+۱)$.

اثبات. فرض کنید $a = f(b)$، برای یک b. در این صورت $f(a) = f(f(b))$. حال با توجه به اصل (T۳)، $f(f(b)) = f(b)+b-۱ = a+b-۱$. بنابراین $b = f(a)-a+۱$ و در نتیجه $f(b) = a = f(f(a)-a+۱)$. □

نتیجهٔ زیبای دیگری که از این اصول می‌توان گرفت این است که قضیهٔ کرونکر از این اصول نتیجه می‌شوند و درنتیجه در هر مدل این نظریه درست است، که این نتیجه را در لم ۲–۱۸ اثبات کرده‌ایم.

نتیجه ۲–۳۰. *ترتیب خطی بیان‌شده در اصل* (T۴) *ترتیبی چگال است. به‌بیانی دیگر،*

$$\mathcal{T}_\varphi \models \forall x,y\Big([\varphi x] < [\varphi y] \to [\varphi(x+f(y-x)+y-x)] < [\varphi y]\Big).$$

۴.۲ حذف‌سور و تصمیم‌پذیری

در این بخش فرض کنید $\mathcal{M}_۱$ و $\mathcal{M}_۲$ دو مدل برای نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ باشند و علاوه‌بر این فرض کنید که $\mathcal{M}_۲$ یک مدل $\aleph_۰$ـ اشباع باشد. همچنین فرض کنید که $\mathcal{M}$ یک زیرساختار مشترک این دو مدل باشد. توجه داشته باشید که با توجه به زبان، هر مدل این نظریه همواره ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, f, \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, ۰, ۱\rangle$ را دربردارد. به منظور اثبات حذف سور، نشان می‌دهیم که هر دستگاه شامل تعداد متناهی معادله در زبان $\mathcal{L}^*$ که پارامترهای آن در M هستند، اگر در $M_۱$ جواب داشته باشند، در $M_۲$ نیز جواب دارند. برای نیل به این هدف، ابتدا نشان می‌دهیم که زیرساختار $\mathcal{M}$ را می‌توان به‌نحوی یکتا و جالب توسیع داد، به‌طوری که مدلی از این نظریه باشد.

لم ۲-۳۱. *ساختار $\mathcal{M}'$ شامل $\mathcal{M}$ چنان موجود است که $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}_۱ \cap \mathcal{M}_۲$ و نیز $\mathcal{M}' \models \mathcal{T}_\varphi$.*

اثبات. قرار دهید

$$\mathcal{M}' = \left\{ \frac{x}{n} | x \in M, \mathcal{M}_۱, \mathcal{M}_۲ \models p_n(x) \right\}.$$

به‌عبارتی دیگر، $\mathcal{M}'$ را یک مدل اول جبری حاوی مجموعهٔ M برای نظریهٔ $\mathbb{Z}$ـ گروه‌ها (اصل $(T۱)$) درنظر بگیرید.

ابتدا ادعا می‌کنیم که ساختار $\mathcal{M}'$ تحت تابع f بسته است. بنابراین یک $\mathcal{L}$ـ ساختار است.

فرض کنید $t \in M'$. بنابراین $a \in M$ و عدد طبیعی n موجودند به طوری که $p_n(a)$ و نیز $t = \frac{a}{n}$. بنابراین $a = nt$. حال چون $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ـ ساختار است و $a \in M$، پس $f(a) \in M$، یعنی $f(nt) \in M$. با توجه به ویژگی‌های تابع f، داریم $\mathcal{M}_۱ \models f(a) = nf(t) + \ell$، که ℓ باقیماندهٔ تقسیم $f(a)$ بر n است. بنابراین $\mathcal{M}_۱ \models p_n(f(a) - \ell)$. حال از آنجایی‌که $f(a) - \ell \in M$، پس $f(t) = \frac{f(a)-\ell}{n} \in M'$. درنتیجه $\mathcal{M}'$ تحت تابع f بسته است.

حال نشان می‌دهیم که اصل $(T۲)$ در ساختار $\mathcal{M}'$ برقرار است. برای این منظور، فرض کنید $a \in M'$ و $a \neq -۱$. چون $\mathcal{M}_۱$ مدلی برای نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ است، بنابراین طبق اصل $(T۲)$، عنصری مانند $b \in M_۱$ چنان موجود است که $\mathcal{M}_۱ \models a = f(b) \vee a = f(b) + b$. نشان می‌دهیم $b \in M'$.

اگر $\mathcal{M}_۱ \models a = f(b)$، در این صورت بنابر اصل $(T۳)$ داریم $\mathcal{M}_۱ \models f(a) = a + b - ۱$. چون $a \in M'$، پس $f(a) \in M'$. بنابراین از $\mathcal{M}_۱ \models b = f(a) - a + ۱$، نتیجه می‌شود $b \in M'$.

اگر $\mathcal{M}_۱ \models a = f(b) + b$، در این صورت از اصل $(T۳)$ نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{M}_۱ \models f(a) = f(f(b) + b) = ۲f(b) + b = f(b) + a.$$

بنابراین $\mathcal{M}_۱ \models f(b) = f(a) - a$. از طرفی دیگر، چون a و $f(a)$ در M' هستند، بنابراین $f(b) = f(a) - a \in M'$. حال چون $f(b) \in M'$ و $\mathcal{M}_۱ \models b = a - f(b)$، پس $b \in M'$.

از آنجایی‌که قسمت دوم از اصل $(T۲)$ عمومی است، بنابراین از مدل‌های $\mathcal{M}_۱$ و $\mathcal{M}_۲$ به زیرساختار مشترک آنها به ارث می‌رسد.

توجه داشته باشید که اصول $(T۳)$ و $(T۴)$ نیز چون عمومی هستند، از مدل‌ها به زیرساختار مشترک و به‌ویژه به $\mathcal{M}'$ به ارث می‌رسند. □

این زیرساختار جدید، تحت وارون هر ترکیب خطی از $f(x)$ و x بسته است.

لم ۲-۳۲. *برای هر عدد صحیح m و n و برای هر $d \in M'$، اگر $\mathcal{M}_۱ \models \exists x\ nf(x) = mx + d$، در $\mathcal{M}'$ نیز این معادله جواب دارد.*

اثبات. فرض کنید $\mathcal{M}_۱ \models f(a) = \frac{m}{n}a + d$ برای یک $a \in M_۱$. حال اگر f را بر طرفین این تساوی اعمال کنیم، در این صورت $\mathcal{M}_۱ \models f(f(a)) = f(\frac{m}{n}a + d)$. بنابر اصل $(T۳)$، $\mathcal{M}_۱ \models f(f(a)) = f(a) + a - ۱$، بنابراین با استدلالی مشابه با لم ۲-۳۱، عدد صحیح ℓ و همچنین عدد طبیعی j چنان موجودند که

$$\mathcal{M}_۱ \models f(a) + a - ۱ = \frac{mf(a) + \ell}{n} + f(d) + j.$$

حال اگر در طرفین این تساوی $f(a)$ را با $\frac{m}{n}a + d$ جایگزین کنیم، در این صورت به یک معادلهٔ خطی برحسب a با پارامترهای d و $f(d)$ و ضرایب صحیح می‌رسیم، که در زبان نظریهٔ $\mathbb{Z}$ـگروه‌ها است. از آنجایی که M' مدلی برای نظریهٔ $\mathbb{Z}$ـ گروه‌ها است و پارامترهای این دستگاه در M' قرار دارند و همچنین هر معادلهٔ خطی دارای دقیقاً یک جواب است و a جوابی برای این معادله است، پس a در M' قرار دارد. □

همان‌گونه که در ابتدای این زیرفصل بیان کردیم، باید شرط حل‌پذیری دستگاه‌های تک‌متغیره را بیان کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که یک دستگاه معادلات، شامل چه معادلاتی است.

از آنجایی‌که زبان شامل فقط دو نماد تابعی است، بنابراین ترم‌ها یک‌متغیرهٔ زبانی تنها با استفاده از این دو نماد تابعی، یعنی f و $+$ ساخته می‌شوند. از طرفی بنابر اصل $(T۲)$ تابع f روی خاصیتی پخشی دارد، به این معنی که $f(rx + sf(x) + n) = rf(x) + sf(f(x)) + f(n) + \ell$، برای یک عدد طبیعی و مناسب ℓ. از طرفی دیگر، بنابر اصل $(T۳)$، $f(f(x)) = f(x) + x - ۱$. بنابراین با استفاده از این دو اصل نتیجه می‌شود که ترم‌های تک‌متغیرهٔ زبانی تنها به‌صورت ترکیب‌های خطی از x و $f(x)$ هستند.

تنها نماد رابطه‌ای که در زبان وجود دارد، رابطهٔ R است. بنابراین فرمول‌های اتمی تک‌مغیره به‌صورت $r_۱x + s_۱f(x) + n_۱ = r_۲x + s_۲f(x) + n_۲$، $f(r_۱x + s_۱f(x) + n_۱) = r_۲f(x) + s_۲f(f(x)) + n_۲$ یا $R(r_۱x + s_۱f(x) + n_۱, r_۲x + s_۲f(x) + n_۲)$ هستند. در فرمول‌های اتمی نوع اول، با مرتب کردن فرمول،

به فرمول‌هایی به‌صورت $rx + sf(x) = n$ می‌رسیم. در فرمول‌های اتمی نوع دوم، با استفاده از اصل $(T۲)$ و افزودن یک معادله‌ای به‌صورت $f(r_۱x+s_۱f(x)+n_۱) = r_۱f(x)+s_۱f(f(x))+f(n_۱)+\ell$، عبارت سمت راست را ساده می‌کنیم، که معادلهٔ جدید به دستگاه افزوده می‌شود، ضمن اینکه خود این نوع فرمول اتمی، به فرمولی اتمی مشابه با نوع اول تبدیل می‌شود. بنویسیم، که در این صورت مشابه با فرمول‌های اتمی نوع اول می‌شود. دقت کنید که در این حالت معادله‌ای برحسب قسمت‌های اعشاری نیز به دستگاه افزوده می‌شود. در مورد فرمول‌های اتمی از نوع سوم نیز، در پاراگراف پس از اثبات لم ۲-۳۳، بیان می‌کنیم که چرا تنها کافی است که حالت سادهٔ $R(x,n)$ و $R(f(x),n)$ را درنظر گرفت.

بنابراین هر دستگاه معادلات، شامل معادلاتی به‌صورت زیر است، که می‌تواند از هر نوع تعدادی متناهی را دربر داشته باشد. از آنجایی‌که در ساختار محمول‌هایی برای همنهشتی‌ها نیز قرار دارند، بنابراین معادلات همنهشتی نیز در این دستگاه قرار داده شده است.

$$\begin{cases} f(r_۱x+s_۱f(x)+n_۱) = r_۱f(x)+s_۱f^۲(x)+f(n_۱)+j_۱ \\ r_۲x+s_۲f(x) = n_۲ \\ R(x,n_۳) \\ R(n_۴,x) \\ R(f(x),n_۵) \\ R(n_۶,f(x)) \\ f(x) \overset{r_۳}{\equiv} j_۳ \\ x \overset{r_۲}{\equiv} j_۲ \end{cases} \tag{۱۰}$$

در ادامه و در نتیجهٔ ۲-۳۴ نشان خواهیم داد که حل‌پذیری این دستگاه از معادلات در $\mathbb{Z}$ با یک $\mathcal{L}^*$ـ فرمول بدون‌سور قابل بیان است. این نتیجه، اصلی‌ترین گام در حذف‌سور است. برای سادگی، ابتدا در لم زیر نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان معادلاتی به‌صورت معادلات خط اول دستگاه فوق را برحسب قسمت‌های اعشاری بازنویسی کرد و درنتیجه شرط حل‌پذیری چنین دستگاه‌های معادلاتی را فقط برحسب ضرایب دستگاه بیان کرد.

لم ۲-۳۳. *فرمول بدون‌سوری مانند $\Phi(y_۱,y_۲)$ در زبان $\mathcal{L}^*$ چنان موجود است به‌طوری که برای هر دو عدد صحیح $n_۱$ و $n_۲$، همواره $\langle \mathbb{Z},+,f,R,۰,۱\rangle \models \Phi(n_۱,n_۲)$ اگر و تنها اگر دستگاه معادلات زیر در*

$\mathbb{Z}$ دارای جواب باشد.

$$\begin{cases} f(r_1x+s_1f(x)+n_1)=r_1f(x)+s_1f^2(x)+f(n_1)+j_1 \\ f(r_2x+s_2f(x)+n_2)=r_2f(x)+s_2f^2(x)+f(n_2)+j_2 \end{cases} \tag{11}$$

جایی‌که ضرایب r_1، s_1، j_1، r_2، s_2 و j_2 همگی اعداد طبیعی هستند.

فرمول بدون‌سوری که در لم بالا ذکر شد، به تمامی ضرایب نیز بستگی دارد، اما فقط برای زیبایی در نمایش، این وابستگی را در نمادگذاری استفاده نکرده‌ایم.

اثبات. دستگاه معادلات (۱۱) را می‌توانیم برحسب قسمت‌های اعشاری به‌صورت زیر بیان کنیم.

$$\begin{cases} j_1-[\varphi n_1]<r_1[\varphi x]+s_1[\varphi f(x)]<j_1-[\varphi n_1]+1 \\ j_2-[\varphi n_2]<r_2[\varphi x]+s_2[\varphi f(x)]<j_2-[\varphi n_2]+1 \end{cases}$$

اما با توجه به لم ۲-۲۵، $[\varphi f(x)]=(1-\varphi)[\varphi x]+1$. اگر این عبارت را در دستگاه بالا جایگذاری کنیم، به دستگاه زیر می‌رسیم.

$$\begin{cases} j_1-[\varphi n_1]<(r_1+s_1)[\varphi x]-s_1\varphi[\varphi x]+s_1<j_1-[\varphi n_1]+1 \\ j_2-[\varphi n_2]<(r_2+s_2)[\varphi x]-s_2\varphi[\varphi x]+s_2<j_2-[\varphi n_2]+1 \end{cases}$$

دستگاه بالا را می‌توان به‌صورت زیر ساده‌سازی کرد.

$$\begin{cases} (\alpha_1-s_1\varphi)[\varphi x]\in(\beta_1-[\varphi n_1],\beta_1-[\varphi n_1]+1) \\ (\alpha_2-s_2\varphi)[\varphi x]\in(\beta_2-[\varphi n_2],\beta_2-[\varphi n_2]+1) \end{cases}$$

که در آن برای $i=1,2$، $\alpha_i=r_i+s_i$ و $\beta_i=j_i-s_i$. دستگاه معادلات بالا را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت.

$$\begin{cases} [\varphi x]\in\left(\dfrac{\beta_1-[\varphi n_1]}{\alpha_1-s_1\varphi},\dfrac{\beta_1-[\varphi n_1]+1}{\alpha_1-s_1\varphi}\right) \\ [\varphi x]\in\left(\dfrac{\beta_2-[\varphi n_2]}{\alpha_2-s_2\varphi},\dfrac{\beta_2-[\varphi n_2]+1}{\alpha_2-s_2\varphi}\right) \end{cases} \tag{12}$$

از آنجایی‌که $\varphi^2=\varphi+1$، لذا برای هر دو عدد صحیح α و β، که همزمان صفر نیستند، اعداد $\frac{1}{\alpha+\beta\varphi}$، φ و ۱ روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی نیستند، بنابراین اعداد گویای p و q چنان موجودند که $\frac{1}{\alpha+\beta\varphi}=p+q\varphi$.

بنابر پاراگراف بالا، دستگاه معادلات (۱۲) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد، که در آن p_i و q_i اعداد گویای مناسبی هستند (توجه داشته باشید که برای $i = ۱, ۲$، $\alpha_i - \beta_i\varphi \neq ۰$، زیرا در غیر این صورت دستگاه معادلات همواره جواب دارد).

$$\begin{cases} [\varphi x] \in (p_۱\beta_۱ + q_۱\beta_۱\varphi - p_۱[\varphi n_۱] - q_۱\varphi[\varphi n_۱], p_۱\beta_۱ + q_۱\beta_۱\varphi - p_۱[\varphi n_۱] - q_۱\varphi[\varphi n_۱] + ۱) \\ [\varphi x] \in (p_۲\beta_۲ + q_۲\beta_۲\varphi - p_۲[\varphi n_۲] - q_۲\varphi[\varphi n_۲], p_۲\beta_۲ + q_۲\beta_۲\varphi - p_۲[\varphi n_۲] - q_۲\varphi[\varphi n_۲] + ۱) \end{cases}$$

بنابراین با توجه به قضیهٔ کرونکر، دستگاه معادلات (۱۱) دارای جواب است هرگاه بازه‌های بالا اشتراک داشته باشند. اما برای بررسی ناتهی بودن اشتراک این بازه‌ها، کافی است نقاط ابتدایی و انتهایی آنها را مقایسه کنیم و چنین کاری در زبان قابل بیان است؛ زیرا مقایسهٔ نقاط ابتدایی این بازه‌ها، معادله‌ای به‌صورت معادلهٔ (۹) است، که در زبان $\mathcal{L}^*$ با فرمولی بدون‌سور بیان‌پذیر است.

□

از لم بالا می‌توان نتیجه گرفت که فرمول‌هایی به‌صورت $[\varphi(rx+sf(x)+n)] < [\varphi(r'x+s'f(x)+n')]$ برای اعداد طبیعی r، s، n، r'، s' و n'، در زبان قابل بیان است.

اثبات بیان‌پذیری. فرض کنید r، s، n، r'، s' و n' همگی اعداد طبیعی باشند. با توجه به خواص تابع f، اعداد طبیعی j و j' چنان موجودند که $f(rx + sf(x) + n) = rf(x) + sf^۲(x) + f(n) + j$ و $f(r'x + s'f(x) + n') = r'f(x) + s'f^۲(x) + f(n') + j'$. معادلا برحسب قسمت‌های اعشاری خواهیم داشت.

$$[\varphi(rx + sf(x)n)] = r\,[\varphi x] + s\,[\varphi f(x)] + [\varphi n] - j$$

و

$$[\varphi(r'x + s'f(x) + n')] = r'\,[\varphi x] + s'\,[\varphi f(x)] + [\varphi n'] - j'.$$

حال طبق تعریف، رابطهٔ $R(rx + sf(x) + n, r'x + s'f(x) + n')$ برقرار است اگر و تنها اگر

$$[\varphi(rx + sf(x)n)] < [\varphi(r'x + s'f(x) + n')]\,.$$

اگر روابط بالا را در این عبارت جایگزین کنیم، خواهیم داشت.

$$r\,[\varphi x] + s\,[\varphi f(x)] + [\varphi n] - j < r'\,[\varphi x] + s'\,[\varphi f(x)] + [\varphi n'] - j'$$

با ساده‌سازی رابطهٔ بالا به رابطهٔ زیر می‌رسیم.

$$(r - r')\,[\varphi x] + (s - s')\,[\varphi f(x)] < [\varphi n'] - [\varphi n] + j - j'$$

از طرفی $[\varphi f(x)] = (1-\varphi)[\varphi x] + 1$، که با جایگذاری این تساوی در رابطهٔ بالا، رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$(r'' + s''\varphi)\,[\varphi x] < [\varphi n'] - [\varphi n] + j''$$

که $r'' = r - r' + s - s'$، $s'' = s - s'$ و $j'' = j - j' + s' - s$. مشابه استدلال لم قبل، این رابطه معادل با $[\varphi x] \in (0, a)$، برای یک a مناسب است. □

حال با استفاده از روش لم قبل (لم ۲-۳۳)، یعنی نوشتن دستگاه معادلات برحسب قسمت‌های اعشاری و بررسی اشتراک داشتن بازه‌های متناظر با هر معادله، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود. مشاهده می‌کنیم که در این حالت نیز تغییری در نحوهٔ حل کردن معادلات ایجاد نمی‌شود. زیرا با توجه به ملاحظهٔ ۲-۱۷، معادلات همنهشتی به‌صورت $x \overset{r}{\equiv} j$ و $f(x) \overset{r'}{\equiv} j'$ معادل با $[\varphi x] \in (a', b')$، برای a' و b' مناسب، است. بنابراین تمام معادلات، به‌نحوی قرار گرفتن $[\varphi x]$ در یک بازهٔ خاص را بیان می‌کنند.

نتیجه ۲-۳۴. *یک $\mathcal{L}^*$ـ فرمول بدون‌سور مانند $\theta(y_1, \ldots, y_k)$ موجود است به‌طوری که برای اعداد صحیح $n_1, \ldots, n_k$ همواره $\langle \mathbb{Z}, +, f, R, 0, 1\rangle \models \theta(n_1, \ldots, n_k)$ اگر و تنها اگر دستگاه معادلات زیر در $\mathbb{Z}$ دارای جواب باشد.*

$$\begin{cases} f(r_1 x + s_1 f(x) + n_1) = r_1 f(x) + s_1 f^2(x) + f(n_1) + j_1 \\ \quad \vdots \\ f(r_{k-4} x + s_{k-4} f(x) + n_{k-4}) = r_{k-4} f(x) + s_{k-4} f^2(x) + f(n_{k-4}) + j_{k-4} \\ R(x, n_{k-3}) \\ R(n_{k-2}, x) \\ R(f(x), n_{k-1}) \\ R(n_k, f(x)) \\ f(x) \overset{r_{k-3}}{\equiv} j_{k-3} \\ x \overset{r_{k-2}}{\equiv} j_{k-2} \end{cases} \tag{13}$$

جایی‌که r_i، s_i و j_i همگی اعداد طبیعی هستند.

اثبات. توجه داشته باشید که معادلهٔ آخر را می‌توانیم از دستگاه حذف کنیم، زیرا به‌راحتی می‌توان x را با عبارت $r_{k-2}x' + j_{k-2}$ در تمامی معادلات دیگر جایگزین کرد و معادلاتی براساس x' بدست آورد. همچنین معادلهٔ $f(x) \overset{r_{k-3}}{\equiv} j_{k-3}$ را می‌توان با معادل آن که بر اساس قسمت‌های اعشاری

به‌صورت $[\varphi x] \in (a,b)$، برای اعداد گویای مناسب a و b، جایگزین کرد. همچنین معادلات به‌صورت $R(f(x), n_{k-1})$ را می‌توان با معادل آن به‌صورت $1 - [\varphi n_{k-1}] < [\varphi x](\varphi - 1)$ نوشت. بنابراین دستگاه معادلات (۱۳) را می‌توان به‌صورت زیر درنظر گرفت.

$$\begin{cases} (r_1 + s_1 - s_1\varphi)[\varphi x] \in (j_1 - [\varphi n_1] - s_1, j_1 - [\varphi n_1] - s_1 + 1) \\ \quad\vdots \\ (r_{k-4} + s_{k-4} - s_{k-4}\varphi)[\varphi x] \in (j_{k-4} - [\varphi n_{k-4}] - s_{k-4}, j_{k-4} - [\varphi n_{k-4}] - s_{k-4} + 1) \\ [\varphi x] \in ([\varphi n_{k-2}], [\varphi n_{k-3}]) \\ (1 - \varphi)[\varphi x] \in ([\varphi n_k], [\varphi n_{k-1}]). \end{cases}$$

برای حل کردن چنین دستگاهی، فقط کافی است ناتهی بودن اشتراک بازه‌های متناظر با معادلات را بررسی کنیم، که همانند لم ۲-۳۳، ناتهی بودن این اشتراک‌ها معادل با یک فرمول بدون‌سور در زبان $\mathcal{L}^*$ است. □

حال شرایط برای ارائهٔ مهمترین قضیهٔ این فصل فراهم شده است.

قضیه ۲-۳۵. *نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ در زبان $\mathcal{L}^*$ سورها را حذف می‌کند.*

اثبات. با فرض فرضیات این بخش و با توجه به لم ۲-۳۱، می‌توان فرض کرد $\mathcal{M} \models \mathcal{T}_\varphi$. نشان می‌دهیم که اگر عنصر $a \in M_1 - M$ پاسخ دستگاه شامل تعداد متناهی معادله در زبان $\mathcal{L}^*$ باشد (مشابه با دستگاه معادلات (۱۳)) عنصر $a' \in M_2 - M$ چنان موجود است که زیرساختاری از $\mathcal{M}_1$ که شامل a و $f(a)$ است با زیرساختاری از $\mathcal{M}_2$ که شامل a' و $f(a')$ است، ایزومرف است که این ایزومرفیسم a را به a' و $f(a)$ را به $f(a')$ می‌نگارد.

به این منظور، با توجه به اشباع بودن $\mathcal{M}_2$، کافی است که نشان دهیم برای هر دستگاه داده شده که شامل تعداد متناهی معادله با پارامتر در M است، اگر a جوابی برای این دستگاه باشد، آنگاه در M_2 نیز دارای جوابی مانند b است.

کلی‌ترین حالت یک دستگاه معادلات شامل تعداد متناهی معادله است که هر کدام از آنها به‌صورت یکی از اشکال زیر است، که در آنها پارامترهای c, d, e, e', g و g' در M قرار دارند و ضرایب m, n, m', n', r, s, t, u و j اعداد طبیعی هستند. همچنین توجه کنید که نقیض هر کدام از این معادلات، به‌شکل خود آن معادله است.

هدف ما این است که نشان دهیم اگر a جوابی برای این دستگاه در M_1 باشد، آنگاه این دستگاه در M_2 نیز جواب دارد.

$$\begin{cases} f(rx+sf(x)+c)=rf(x)+sf^{2}(x)+f(c)+j \\ tf(x)=ux+d \\ R(x,e) \\ R(e',x) \\ R(f(x),g) \\ R(g',f(x)) \\ x\overset{n}{\equiv}m \\ f(x)\overset{n'}{\equiv}m' \end{cases} \tag{۱۴}$$

اگر در دستگاه، معادله‌ای به شکل $tf(x)=ux+d$، باشد، آنگاه طبق لم ۲-۳۲، جواب دستگاه در $\mathcal{M}_1$ در خود M قرار دارد و می‌توان جواب دستگاه در $\mathcal{M}_2$ را همان جواب درنظر گرفت. بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت مساله، می‌توان فرض کرد که در دستگاه معادلات، چنین معادله‌ای قرار ندارد. به‌عبارتی دیگر، دستگاهی که شامل چنین معادله‌ای باشد، *ماهیت جبری* دارد، به این معنی که دارای جوابی یکتا است. در ادامه خواهیم دید که مابقی معادلات، که اطلاعاتی در مورد قسمت‌های اعشاری بیان می‌کنند، چنین رفتاری ندارند یا به‌عبارتی *ماهیتی غیرجبری* دارند.

از آنجایی‌که قضیهٔ باقیماندهٔ چینی در نظریهٔ $\mathbb{Z}$ـگروه‌ها ثابت می‌شود، بنابراین در نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ نیز برقرار است. در نتیجه، با بهره بردن از قضیهٔ باقیماندهٔ چینی، می‌توان تمام معادلات همنهشتی برای x و $f(x)$ را به یک معادله برای x و یک معادله برای $f(x)$ تبدیل کرد. به‌طور مشابه و با توجه به رابطهٔ ترتیب خطی R، می‌توان فرض کرد که تنها یک معادله از هر کدام از شکل‌های $R(x,e)$، $R(e',x)$، $R(f(x),g)$ و $R(g',f(x))$ در دستگاه وجود دارد.

مشابه با لم ۲-۳۴، چون این دستگاه در $\mathcal{M}_1$ دارای جواب است، بنابراین اشتراک بازه‌های اعشاری ناتهی بوده است (فرمولی بدون‌سور ناتهی بودن را بیان می‌کند)، لذا دستگاه با توجه به قضیهٔ کرونکر، در $\mathcal{M}_2$ نیز دارای جواب است. □

مهم‌ترین نتیجه‌ای که از این قضیه می‌توان گرفت، کامل بودن نظریه است.

نتیجه ۲-۳۶. *نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ کامل است و بنابراین با* $\mathrm{Th}\langle\mathbb{Z},+,f,R,\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}},0,1\rangle$ *معادل است.*

اثبات. چون نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ حذف‌سور دارد، پس مدل‌کامل است. از طرفی دیگر ساختار $\langle\mathbb{Z},+,f,R,\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}},0,1\rangle$ یک مدل اول برای این نظریه است. پس این نظریه کامل است. □

حال نتیجه نهایی از قضیه بالا و اینکه اصول نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ شمارش‌پذیر بازگشتی است، حاصل می‌شود.

نتیجه ۲-۳۷. *نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ تصمیم‌پذیر است.*

اثبات. از آنجایی که اصول نوشته شده برای نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ شمارش‌پذیر بازگشتی و کامل است، پس این نظریه تصمیم‌پذیر است. □

۵.۲ ملاحظات

اگر تابع دوموضعی تفاضل و یا تابع تک‌موضعی قرینه‌ساز $(-)$ را به ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, f, \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, ۰, ۱\rangle$ بیافزاییم، آنگاه در این ساختار رابطهٔ R با توجه به فرمول زیر تعریف می‌شود.

$$R(x,y) \iff f(y-x) = f(y) - f(x)$$

بنابراین می‌توان رابطهٔ R را از زبان حذف کرد و به‌جای آن این تابع را به زبان افزود. لذا ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, -, f, \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, ۰, ۱\rangle$ حذف‌سور می‌پذیرد و به‌طور مشابه تصمیم‌پذیر است.

فصل ۳

تصمیم‌پذیری بسط ساختار جمعی‌ترتیبی اعداد صحیح با دنبالهٔ ویتهُف

در راستای پاسخ به سوالی که در مقدمه هم آن را بیان کردیم، یعنی افزودن چه اثرهایی از ضرب به ساختار $\langle \mathbb{R}, +, -, <, ۰, ۱, \mathbb{Z} \rangle$ باعث از دست نرفتن تصمیم‌پذیری می‌شود، هدفمان در این فصل این است که با استفاده از ابزارهای مقدماتی نظریهٔ مدل، نشان دهیم توسیع این ساختار با استفاده از یک اثر ضرب، آن هم ضرب در یک عدد مربعی، تصمیم‌پذیر است.

برای نیل به این هدف، در ابتدا از این ساختار، $\mathbb{R}$ را حذف می‌کنیم و به بررسی تصمیم‌پذیری ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, f, <, ۰, ۱ \rangle$، که در آن f تابعی است که هر x را به $\lfloor \varphi x \rfloor$ می‌نگارد، می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا نظریهٔ کاملی برای این ساختار ارائه می‌دهیم به‌طوری که سورها را در یک زبانی مناسب حذف کند. سپس مشابه فصل قبل، تصمیم‌پذیری این ساختار را به عنوان نتیجه‌ای از حذف‌سور بیان می‌کنیم. توجه کنید که در فصل قبل همین ساختار را، لیکن *بدون ترتیب*، مطالعه کردیم.

نخستین قضیهٔ اساسی این فصل، قضیهٔ زیر است.

قضیه. *ساختار $\mathcal{Z}_\varphi = \langle \mathbb{Z}, +, -, f, <, \{p_n\}, ۰, ۱ \rangle$، که در آن منظور از محمول p_n همان بخش‌پذیری بر n است، دارای یک نظریهٔ بازگشتی است که سورها را در زبانی مناسب، حذف می‌کند. همچنین این ساختار تصمیم‌پذیر است.*

برای اثبات حذف‌سور مشابه فصل قبل، معادلات را برحسب قسمت اعشاری می‌نویسیم. اما برخلاف

فصل قبل، از آنجایی‌که در هر بازه قضیهٔ کرونکر برقرار نیست، بنابراین به زبان محمول‌هایی برای بیان *الگوهای عددی‑اعشاری* می‌افزاییم. یک الگو در حقیقت بیان می‌کند که در یک بازه تعداد متناهی عدد وجود دارد به‌گونه‌ای که این اعداد ترتیب خاصی نسبت به یکدیگر دارند و قسمت اعشاری φ برابر آنها نیز ترتیب خاصی نسبت به یکدیگر دارند. از این محمول‌ها برای وابسته کردن شرط حل‌پذیری معادلات به پارامترهای معادلات استفاده می‌کنیم.

سپس و در ادامهٔ این فصل، با ایده‌ای مشابه، نشان می‌دهیم که ساختار $\mathcal{R}_\varphi := \langle \mathbb{R}, +, -, <, 0, 1, \mathbb{Z}, \lambda_\varphi \rangle$، که در آن λ_φ تابعی است که هر عنصر x را به φx می‌نگارد، نیز حذف‌سور می‌پذیرد و لذا تصمیم‌پذیر است. بنابراین دومین قضیهٔ اساسی این فصل، قضیهٔ زیر است.

قضیه. *ساختار $\mathcal{R}_\varphi$ دارای حذف‌سور است و علاوه‌بر آن تصمیم‌پذیر است.*

بیان شرط حل‌پذیری معادلات در این ساختار آسان‌تر از دو ساختار قبلی است؛ زیرا در این ساختار تابع $[\varphi x]$ تعریف‌پذیر است، این در حالی است که در دو ساختار قبلی، ترتیب بین قسمت‌های اعشاری تعریف‌پذیر است. مشابه ساختار $\mathcal{Z}_\varphi$، در این ساختار نیز همان الگوهای عددی‑اعشاری را به‌عنوان محمول به زبان می‌افزاییم تا نظریه شرط حل‌پذیری دستگاه‌های معادلات را تعیین کند و نه مدل‌ها.

از آنجایی که ترتیب بین قسمت‌های اعشاری در این دو ساختار تعریف‌پذیر است، بنابراین ابتدا مشابه فصل قبل، نمادگذاری زیر را در نظر می‌گیریم.

نمادگذاری ۳‑۱. همان‌گونه که در فصل قبل نیز بیان شد، فرمول $[\varphi y] < [\varphi x]$ یک فرمول مرتبه اول در زبان $\{+, -, f, 0, 1\}$ است، بنابراین در ادامهٔ این فصل، بدون هیچ ابهامی از این فرمول استفاده خواهیم کرد.

نتایج بیان شده در این فصل، تا به‌حال در جایی ارائه نشده است و نسخهٔ نهایی این مقاله ([۱۲]) در حال آماده‌سازی است.

۱.۳ ساختار $\mathcal{Z}_\varphi$

۱.۱.۳ پیچیدگی‌های حاصل از افزودن ترتیب به ساختار

افزودن ترتیب به ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, f, 0, 1 \rangle$، باعث می‌شود اثبات حذف‌سوری که برای این ساختار در فصل قبل ارائه داده‌ایم، در مورد ساختار با ترتیب کار نکند. در این فصل رویکردمان برای اثبات حذف‌سور با رویکرد فصل قبل کاملاً متفاوت است. ایدهٔ اصلی اثبات حذف‌سور برای این ساختار، استفاده از

الگوهای عددی‌ـ‌اعشاری است که بیانگر این است که در یک بازهٔ داده شده، تعداد متناهی عدد وجود دارد که قسمت‌های اعشاری φ برابر آنها، الگوی خاصی در بازهٔ $[۰, ۱)$ دارند.

شباهت اثبات حذف‌سور این ساختار و ساختار فصل قبل، استفاده از قضیهٔ کرونکر برای بیان شرط حل‌پذیری برخی از دستگاه‌های معادلات است. لذا قضیهٔ کرونکر باید به‌عنوان اصلی در نظریه قرار داشته باشد. بنابراین باید بتوانیم این اصل را در زبان بیان کنیم. برای بیان کردن قضیهٔ کرونکر و الگوهای عددی‌ـ‌اعشاری، نیاز است که ترتیب بین قسمت‌های اعشاری بیان‌پذیر باشد. اما همان‌طور که در فصل قبل بیان کردیم، در زبان نه‌تنها نمادی برای قسمت‌های اعشاری وجود ندارد، بلکه قسمت‌های اعشاری نیز در زبان تعریف‌پذیر نیستند. ولی ترتیب بین قسمت‌های اعشاری، تعریف‌پذیر است. در فصل قبل، برای بیان این رابطهٔ ترتیب، به زبان یک محمول تک‌موضعی R افزودیم که درحقیقت همان ترتیب معمولی بر روی قسمت‌های اعشاری φx را، برای اعداد مختلف x، تعریف می‌کرد. در انتهای فصل قبل همچنین بیان کردیم که به‌جای این محمول، می‌توانیم به زبان تابع دوموضعی تفاضل را بیافزاییم، که در این زبان جدید نیز این ترتیب با توجه به رابطهٔ زیر تعریف‌پذیر است.

$$f(y-x)=f(y)-f(x) \iff [\varphi x]<[\varphi y]$$

اما افزودن ترتیب به ساختار باعث می‌شود که حل کردن دستگاه‌های معادلات ساده نباشد؛ درحقیقت، چون در هر بازهٔ دلخواه قضیهٔ کرونکر برقرار نیست، بنابراین نمی‌توانیم برای یافتن شرط معادل برای حل‌پذیری دستگاه‌های معادلات، از قضیهٔ کرونکر کمک بگیریم، به‌ویژه وقتی که نقاط انتهایی بازه، اعداد نااستاندارد باشند. بنابراین برای اثبات حذف‌سور، به سراغ ایدهٔ دیگری، یعنی استفاده از الگوهای عددی‌ـ‌اعشاری، می‌رویم.

ایدهٔ استفاده از الگوهای عددی‌ـ‌اعشاری برای حذف‌سور، از آنجا نشأت می‌گیرید که در مدل استاندارد توزیع قسمت‌های اعشاری آن‌چنان هم که قضیهٔ کرونکر بیان می‌کند، تصادفی نیست و اتفاقا در برخی وضعیت‌ها کاملاً قابل پیش‌بینی است. به‌عنوان مثال، با توجه به فصل قبل، می‌توان نشان داد که $F_{۲n+۱}$ کوچکترین عدد طبیعی است که در معادلهٔ زیر صدق می‌کند.

$$f(F_{۲n}+x)=f(F_{۲n})+f(x)+۱$$

همچنین به‌طور مشابه، $F_{۲n+۲}$ کوچکترین عدد طبیعی است که جواب معادلهٔ زیر است.

$$f(F_{۲n+۱}+x)=f(F_{۲n+۱})+f(x)$$

بنابراین برای هر $x\in(۰, F_{۲n-۱})$، همواره $f(F_{۲n}+x)=f(F_{۲n})+f(x)$. یا به‌بیانی دیگر، برای هر $x\in(۰, F_{۲n-۱})$، همواره $[\varphi(F_{۲n}+x)]=[\varphi F_{۲n}]+[\varphi x]$. به‌عبارتی دیگر، اگر نمودار تابع $x\mapsto[\varphi x]$

را رسم کنیم، نموار تابع در بازهٔ (F_{2n}, F_{2n+1}) دقیقا همان نمودار تابع در بازهٔ $(0, F_{2n-1})$ است که تمام نقاط را به اندازهٔ $[\varphi F_{2n}]$ انتقال داده‌ایم.

علاوه‌بر این، الگوهای دیگری نیز با استفاده از نمایش یکتای فیبوناتچی اعداد وجود دارد. برای مثال اگر x دارای نمایش فیبوناتچی یکتای $F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots + F_{i_\ell}$ باشد و علاوه‌برآن i_1 عددی زوج باشد، آنگاه $F_{i_2} + \ldots + F_{i_\ell} < F_{i_1}$ و بنابراین

$$f(x) = f(F_{i_1} + (F_{i_2} + \ldots + F_{i_\ell})) = f(F_{i_1}) + f(F_{i_2} + \ldots + F_{i_\ell}).$$

همچنین اگر i_1 عددی فرد باشد، آنگاه تصویر عنصر x تحت تابع f، برابر با همین مقدار به‌اضافهٔ یک است. به‌طور مشابه می‌توان با توجه به زوج و یا فرد بودن i_2، مقدار $f(F_{i_2} + (F_{i_3} + \ldots + F_{i_\ell}))$ را نیز محاسبه کرد.

بنابراین در مدل استاندارد، اعداد فیبوناتچی، نقاطی هستند که (تکرار) الگوها از آن نقاط شروع می‌شود. همچنین می‌توان نشان داد که قسمت اعشاری اعداد φF_{2n} و φF_{2n+1} به‌ترتیب برابر با $[\varphi](\varphi - 1)^{n-1}$ و $[\varphi](\varphi - 1)^{n} - 1$ است (نتیجهٔ ۳-۲۵ را مشاهده کنید).

در نتیجهٔ ۳-۲۷ خواهیم دید که مجموعهٔ اعداد فیبوناتچی در ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, f, <, 0, 1 \rangle$ تعریف‌پذیر است و بنابراین در هر مدل نظریهٔ $\langle \mathbb{Z}, +, f, <, 0, 1 \rangle$ می‌توان اعداد فیبوناتچی را شناسایی کرد. علاوه‌بر این، می‌توانیم الگوهای تکرارشونده مابین دو عدد فیبوناتچی نااستاندرد متوالی را توصیف کنیم. اگر چه این نتیجه باعث می‌شود که الگوها را شناسایی کنیم، اما چون برخی از عناصر یک مدل نااستاندارد دارای نمایش فیبوناتچی متناهی نیستند، بنابراین الگوی قسمت‌های اعشاری آنها، به‌سادگی الگوهای آنها در مدل استاندارد که در بالا توضیح دادیم، نیست.

برای اینکه با مفهوم یک الگوی عددی_اعشاری آشنا شویم، در زیر تعریف نادقیق آن را بیان می‌کنیم. «فرض کنید $\mathcal{M}$ مدلی برای نظریهٔ کامل ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, f, <, 0, 1 \rangle$ باشد. منظور از وجود یک الگوی عددی_اعشاری از طول n در بازهٔ (a, b) این است که در این بازه n عنصر $e_1 < e_2 < \ldots < e_n$ چنان موجودند که هر e_i در یک زیربازهٔ (a_i, b_i) از (a, b) قرار دارد و نیز $[\varphi e_i]$ علاوه بر اینکه هر یک در یک بازهٔ $([\varphi c_i], [\varphi d_i])$ قرار دارند، نسبت به یکدیگر نیز ترتیب خاصی دارند.»

۳.۱.۲ اصول موضوعه و حذف‌سور

قرار دهید $\mathcal{L}_0 = \{+, -, f, <, 0, 1\}$ و $\mathcal{M}$ را یک $\mathcal{L}_0$_ساختار در نظر بگیرید.

با توجه به فصل قبل، در نبود رابطهٔ ترتیب $<$ در زبان، حالت کلی فرمول‌های بدون‌سور به‌صورت زیر

است. در این فرمول ضرایب $r_۱$، $r_۲$ و j عدد صحیح هستند و $c \in \mathcal{M}$.

$$f(r_۱x + r_۲f(x) + c) = r_۱f(x) + r_۲f^۲(x) + f(c) + j. \tag{۱}$$

این فرمول را می‌توان برحسب قسمت‌های اعشاری به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(r - s\varphi)\,[\varphi x] \in (j' - [\varphi c_۱]\,, j' - [\varphi c_۱] + ۱), \tag{۲}$$

که r، s و j' اعداد صحیح مناسبی هستند. بنابراین چون فرمول (۱) دارای معادلی بر حسب قسمت‌های اعشاری است، معادل آن را به‌عنوان یک فرمول مرتبهٔ اول درنظر می‌گیریم. حال با توجه به مطالب گفته شده، شرایط برای تعریف الگو فراهم شده است.

تعریف ۳-۲. فرض کنید $\bar{a}$، $\bar{b}$، $\bar{c}$، $\bar{d}$ و $\bar{e}$ همگی nـتایی‌هایی در M باشند و $\bar{j}$، $\bar{j}'$، $\bar{r}$ و $\bar{s}$ نیز nـتایی‌های صحیح باشند. برای جایگشت [۱] داده شدهٔ $\sigma \in S_n$، منظور از یک *الگوی عددی‌ـاعشاری مرتبط به این جایگشت و از طول* n *در بازهٔ* $[a, b]$، *که* a *کمترین مقدار* a_i *و* b *بیشترین مقدار* b_i *است، ترکیبی عطفی از فرمول‌های زیر است.*

$$\begin{cases} e_i \in [a_i, b_i] & ۱ \leq i \leq n \\ (r_i - s_i\varphi)\,[\varphi e_i] \in (j_i - [\varphi c_i]\,, j'_i - [\varphi d_i]) & ۱ \leq i \leq n \\ e_۱ < \cdots < e_n & \\ [\varphi e_{\sigma(۱)}] < \cdots < [\varphi e_{\sigma(n)}] & \end{cases} \tag{۳}$$

این الگو را با نماد $\Delta_{\sigma,n}(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}, \bar{d}; \bar{e})$ *نمایش می‌دهیم. در نوشتن این نماد، برخی پارامترها مانند* $\bar{r}$، $\bar{s}$ *و* $\bar{j}$، *را فقط بدلیل زیبانویسی، حذف کرده‌ایم. در برخی جاها که جزئیات الگو مشخص است، برای ساده‌تر نوشتن و پرهیز از پیچیدگی، به‌سادگی می‌نویسیم* Δ. *همچنین توجه داشته باشید که در یک الگو، هر پارامتر می‌تواند بیش‌از یک بار استفاده شده باشد و لزومی ندارد که پارامترها متمایز باشند.*

نمادگذاری ۳-۳. برای هر الگوی $\Delta_{\sigma,n}(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}, \bar{d}; \bar{e})$ که با توجه به دستگاه معادلات (۳) تعریف می‌شود، یک نماد محمولی جدید $R_\Delta(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}, \bar{d})$ به زبان می‌افزاییم. برخی جاها نیز برای تاکید بر طول این الگو از نماد $R_{\Delta,n}(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}, \bar{d})$ استفاده می‌کنیم. در این محمول از نماد «؛» برای جدا کردن پارامترهای مربوط به قسمت عددی و پارامترهای قسمت اعشاری استفاده می‌کنیم. همچنین مشابه فصل قبل، محمول تک‌موضعی p_n که بیانگر بخش‌پذیر بودن بر n است، را نیز به زبان می‌افزاییم و این زبان جدید را

[۱] permutation

با نماد $\mathcal{L}$ نشان می‌دهیم، که برابر با اجتماع $\mathcal{L}_0 \cup \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ با مجموعهٔ همهٔ R_Δ برای همهٔ الگوهای ممکن Δ است. در حقیقت، در ادامه خواهیم دید که $R_\Delta(\bar{a},\bar{b};\bar{c},\bar{d})$ معادل با برقراری فرمول زیر است.

$$\exists \bar{x}\ \Delta_{\sigma,n}(\bar{a},\bar{b};\bar{c},\bar{d};\bar{x})$$

تعریف ۳-۴. نظریهٔ $\mathcal{T}$ در زبان $\mathcal{L}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. در اینجا برای پرهیز از پیچیدگی در نوشتن و خواندن، از نماد $\bar{f}(x)$ به‌جای ترم $f(x)+x$ استفاده می‌کنیم.

(Z۱) تمام اصول حساب پرسبرگر، به‌بیانی دیگر نظریهٔ ساختار $\langle \mathbb{Z},+,-,<,\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}},0,1\rangle$.

(Z۲)
- $\forall x\,\big(x\neq -1 \rightarrow \exists y\,\big((x=f(y))\,\underline{\vee}\,\big(x=\bar{f}(y)=f(y)+y\big)\big)\big)$،
- $\forall x,y\,(f(x+y)=f(x)+f(y)\,\underline{\vee}\,f(x+y)=f(x)+f(y)+1)$.

(Z۳)
- $f(0)=0\wedge f(1)=1\wedge f(-1)=-2$،
- $\forall x\,(f(f(x))=f(x)+x-1\wedge f(f(x)+x)=2f(x)+x)$،
- $\forall x\ f(-x)=-f(x)-1$.

(Z۴)
- $\forall x\ \neg([\varphi x]<[\varphi x])$،
- $\forall x,y\ \big(([\varphi x]<[\varphi y])\rightarrow\neg([\varphi y]<[\varphi x])\big)$،
- $\forall x,y,z\ \big(([\varphi x]<[\varphi z])\wedge([\varphi z]<[\varphi y])\rightarrow([\varphi x]<[\varphi y])\big)$،
- $\forall x,y\ \big(([\varphi x]<[\varphi y])\,\underline{\vee}\,([\varphi y]<[\varphi x])\big)$،
- $\forall x,y,z\ \big([\varphi x]<[\varphi y]\rightarrow[\varphi x]+[\varphi z]<[\varphi y]+[\varphi z]\big)$.
- $\forall x,y,z_1,z_2\,([\varphi x]<[\varphi y]\rightarrow([\varphi z_1]<[\varphi y]<[\varphi z_2]\leftrightarrow[\varphi z_1]<[\varphi(y-x)]+[\varphi x]<[\varphi z_2])$.
- $\forall x,y,z_1,z_2\,([\varphi z_1]<[\varphi x]+[\varphi y]<[\varphi z_2]\rightarrow[\varphi z_1]<[\varphi(x+y)]<[z_2])$.

(Z۵) برای هر R_Δ در نمادگذاری ۳-۳:

$$\forall \bar{y}_1,\bar{y}_2,\bar{z}_1,\bar{z}_2\big(R_\Delta(\bar{y}_1,\bar{y}_2;\bar{z}_1,\bar{z}_2)\leftrightarrow\exists\bar{x}\ \Delta_{\sigma,n}(\bar{y}_1,\bar{y}_2;\bar{z}_1,\bar{z}_2;\bar{x})\big).$$

(Z۶) تمامی فرمول‌های به‌صورت

$$\forall x,y\Big([\varphi(r_1x+r_2f(x))]<[\varphi y]\ \leftrightarrow\ (r'_1-r'_2\varphi)[\varphi x]<[\varphi y]+\ell-r_2\Big),$$

که در آن اعداد صحیح r'_1، r'_2 و ℓ وابسته به اعداد r_1 و r_2 هستند که با توجه به لم ۲-۲۵ در فصل قبل، می‌توان آنها را تعیین کرد.

ملاحظه ۳-۵. در اعداد حقیقی می‌دانیم که اگر $[\varphi y] > [\varphi x]$، آنگاه $[\varphi(y-x)] = [\varphi y] - [\varphi x]$. بنابراین مورد پنجم اصل (Z۴)، ما را قادر می‌سازد که در نابرابری‌هایی که به‌وسیلهٔ عناصر زبانی یا با توجه به نمادگذاری داریم، عبارت $[\varphi x] + [\varphi(y-x)]$ را با عبارت $[\varphi y]$ جایگزین کنیم.

همان‌گونه که در فصل قبل مشاهده کردیم، یکی از مهمترین اصول نظریه، قضیهٔ کرونکر یک‌بعدی (اصل (T۵)) بود، که در زبان $\mathcal{L}$ نیز به‌صورت زیر بیان‌پذیر است.

$$\forall x, y \left([\varphi x] < [\varphi y] \rightarrow \exists z \, [\varphi x] < [\varphi z] < [\varphi y]\right) \qquad (\text{Z۷})$$

حال در اینجا با توجه به لم زیر و به‌روشی جالب، می‌توانیم این اصل را از مجموعهٔ اصول حذف کنیم. برای این منظور، معادل دیگر این قضیه، یعنی (′Z۷) را با استفاده از اصول (Z۲) و (Z۴) ثابت می‌کنیم. علاوه‌بر این، همانطور که در لم بعد مشاهده می‌کنید، در این نسخهٔ معادل قضیهٔ کرونکر، از سور وجودی استفاده نشده است، که این مساله به ما در یافتن مدل اول جبری برای بخش قابل توجهی از نظریه، کمک می‌کند. بنابراین در این فصل، فرمول‌های (Z۷) و (′Z۷) را به‌عنوان قضیه در نظر می‌گیریم.

لم ۳-۶. *با استفاده از اصول (Z۲) و (Z۴) می‌توان نسخهٔ ساختنی قضیهٔ کرونکر را اثبات کرد، به بیانی دیگر، این دو اصل عبارت زیر را نتیجه می‌دهند.*

$$\forall x, y \left([\varphi x] < [\varphi y] \rightarrow \; [\varphi x] < [\varphi(x + \bar{f}(y-x))] < [\varphi y]\right) \qquad (\text{Z۷}')$$

اثبات. در ابتدا نشان می‌دهیم که از اصل (Z۲) می‌توان عبارت زیر را استنتاج کرد:

$$\forall x \left(\left[\varphi \bar{f}(x)\right] < [\varphi x]\right).$$

با توجه به قسمت دوم اصل (Z۲)، برای هر x، $f(\bar{f}(x)) = f(f(x)) + f(x) + i = \bar{f}(f(x)) + i$، که $i = ۰$ یا $i = ۱$. اما از آنجایی‌که برد توابع f و $\bar{f}$، اعداد طبیعی را افراز می‌کنند. بنابراین i نمی‌تواند صفر باشد، پس $f(f(x) + x) = f(f(x)) + f(x) + ۱$. که این رابطه، با توجه به نمادگذاری ۳-۱، بیان مرتبه اول فرمول $[\varphi \bar{f}(x)] < [\varphi x]$ است.

حال فرض کنید c و d دو عنصر دلخواه باشند که $[\varphi c] < [\varphi d]$. از پاراگراف بالا نتیجه می‌شود $[\varphi(d-c)] > \left[\varphi \bar{f}(d-c)\right] > ۰$. با توجه به اصل (Z۴)، اگر طرفین این نابرابری را با $[\varphi c]$ جمع کنیم، به نابرابری زیر می‌رسیم.

$$[\varphi c] < \left[\varphi \bar{f}(d-c)\right] + [\varphi c] < [\varphi(d-c)] + [\varphi c]$$

همان اصل نتیجه می‌دهد که می‌توانیم $[\varphi c] + [\varphi(d-c)]$ را با $[\varphi d]$ جایگزین کنیم، بنابراین نابرابری زیر حاصل می‌شود.

$$[\varphi c] < \left[\varphi \bar{f}(d-c)\right] + [\varphi c] < [\varphi d]$$

حال از آخرین مورد همین اصل نتیجه می‌شود $[\varphi d] < \left[\varphi(c+\bar{f}(d-c))\right] < [\varphi c]$.

□

در ادامه نشان می‌دهیم که بخش زیادی از این نظریه، یعنی $\mathcal{T} \setminus$ (Z۵) دارای مدل اول جبری است.

قضیه ۳-۷. *فرض کنید $\mathcal{M}$ مدلی برای نظریهٔ $\mathcal{T}$ و $A \subseteq M$ یک زیرساختار باشد. در این صورت $\mathcal{L}$ـساختار $\mathcal{M}_0$ شامل A چنان موجود است که $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ و همچنین مدلی برای تمام اصول نظریه، به‌جز اصل (Z۵) است. بنابراین قضیهٔ کرونکر یعنی (Z۷′) و (Z۷) نیز در این ساختار برقرار است.*

اثبات. مدل اول جبری حساب پرسبرگر تحت تابع f بسته است. بنابراین مدلی برای اصول (Z۲)، (Z۳) و (Z۴) است. از آنجایی که بقیه اصول نیز عمومی هستند، آنها نیز در این زیرساختار برقرار هستند. □

قضیهٔ بالا نشان می‌دهد که می دهد که وجود الگو در زبان، اثبات حذف‌سور را مشکل نمی‌کند، زیرا می‌توان فرض کرد که در زیرساختار مشترک دو مدل از نظریه، اصل (Z۵) برقرار است.

در ادمه مسیر اثبات حذف‌سور این نظریه، نشان می‌دهیم که می‌توان در توصیف الگو از پارامترهایی به‌صورت $r_1a + r_2f(a)$ که در آن r_1 و r_2 اعدادی صحیح هستند، نیز استفاده کرد. ابتدا در لم زیر نشان می‌دهیم که از این عبارت‌ها می‌توان در پارامترهایی که برای بازه‌های عددی هستند، استفاده کرد.

لم ۳-۸. *فرض کنید $\mathcal{T} \models \mathcal{M}$ و $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ مدلی برای حساب پرسبرگر، $a \in M_0$ و r_1 و r_2 اعدادی صحیح باشند. در این صورت موارد زیر برقرار هستند.*

الف) *معادلهٔ $r_1x + r_2f(x) = a$ معادل است با $\bigvee_{i=1}^{k} x = b_i$، برای $b_1, \ldots, b_k \in M_0$.*

ب) *نابرابری $r_1x + r_2f(x) < a$، وابسته به ضرایب r_1 و r_2، با فرمول $(\bigvee_{i=1}^{k} x = b_i \vee x < b)$ یا با فرمول $(\bigvee_{i=1}^{k} x = b_i \vee x > b)$، برای $b, b_1, \ldots, b_k \in M_0$ معادل است.*

اثبات. **الف)** اگر f را در هر دو طرف تساوی $r_1x + r_2f(x) = a$ اثر دهیم، در این صورت با استفاده از اصل (Z۲) به معادلهٔ $r_1f(x) + r_2f^2(x) + \ell = f(a)$ می‌رسیم، که در این معادله ℓ عددی صحیحی است که $|\ell| \leq |r_1| + |r_2|$. حال از اصل (Z۳) می‌دانیم که $f^2(x) = f(x) + x - 1$. با جایگذاری این عبارت، به معادلهٔ زیر می‌رسیم.

$$r_1f(x) + r_2f(x) + r_2x - r_2 + \ell = f(a)$$

حال با ضرب کردن طرفین معادلهٔ بالا در r_2 به معادلهٔ زیر می‌رسیم.

$$(r_1 + r_2)r_2f(x) + r_2^2x - r_2^2 + r_2\ell = r_2f(a)$$

اگر در این معادله $r_2 f(x)$ را با $a - r_1 x$ جایگزین کنیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم که معادله‌ای خطی و در زبان پرسبرگر است.

$$(r_1 + r_2)(a - r_1 x) + r_2^2 x - r_2^2 + r_2 \ell = r_2 f(a)$$

چون $\mathcal{M}_0$ مدلی برای پرسبرگر است، این دستگاه دارای جوابی یکتا در M_0 است. توجه کنید این جواب یکتا وابسته به ℓ است و با تغییر ℓ، جواب دیگری بدست می‌آید. در حالتی که ترم $r_1 x + r_2 f(x)$ به‌عنوان یک تابع، یک‌به‌یک نباشد، معادله دارای متناهی جواب در M_0 است.

ب) قرار دهید $H(x) := r_1 x + r_2 f(x)$. در این صورت با توجه به اصل (Z۲) عدد طبیعی K چنان موجود است که از هر K عددی متوالی، دقیقاً یک عدد در برد ترم H قرار می‌گیرد. مشابه فصل قبل، این عدد K برابر است با بیشترین مقدار تفاضل $H(x+1) - H(x)$، لذا تنها به ضرایب r_1 و r_2 بستگی دارد.

حال فرض کنید $i \in \{1, \ldots, K\}$ کوچکترین عددی باشد که $a - i$ در برد ترم $H(x)$ باشد. بنابراین فرض کنید برای $c \in M_0$، $H(c) = a - i$.

با استفاده مجدد از اصل (Z۲)، نتیجه می‌دهد که عدد طبیعی K' (وابسته به r_2) چنان موجود است که موارد زیر برقرار هستند.

۱) برای هر $x < c - K'$ داریم $H(x) < a - i$ و برای هر $x > c + K'$، $H(x) > a - i$.

۲) برای هر $x > c + K'$، $H(x) < a - i$ و برای هر $x > c - K'$ داریم $H(x) > a - i$.

توجه کنید که با توجه به انتخاب i، هیچ عنصری در بازهٔ $(a - i, a]$ در برد ترم $H(x)$ قرار نمی‌گیرد، بنابراین $H(x) > a - i$ نتیجه می‌دهد $H(x) > a$. علاوه‌براین، در هر دو حالت بالا، حداکثر تعداد $2K$ عنصر x در بازهٔ $(c - K', c + K')$ ممکن است وجود داشته باشد که $H(x) \leq a$. بنابراین در حالت ۱) قرار می‌دهیم $b = c - K'$ و در حالت ۲) نیز $b = c + K'$.

اگر $H(x)$ یک‌به‌یک نباشد، آنگاه تعداد اعضای مجموعهٔ $H^{-1}(a - i)$ دارای کران بالایی برحسب r_1 و r_2 است. قرار دهید $c_{\min} = \min H^{-1}(a - i)$ و $c_{\max} = \max H^{-1}(a - i)$. در این صورت کافی است در اثبات بالا و در حالت‌های ۱) و ۲)، شرط $x < c - K'$ را با $x < c_{\min} - K'$ و $x > c + K'$ را با $x > c_{\max} + K'$ جایگزین کنیم. زیرا تعداد متناهی از عناصر موجود در بازهٔ $(c_{\min} - K', c_{\max} + K')$ ممکن است جواب معادله باشند ولی تمامی اعداد x که $x < c_{\min} - K'$ یا جواب معادله هستند و یا نیستند. برای تمام اعداد بزرگتر از $c_{\max} + K'$ نیز این ویژگی برقرار است.

علت اینکه مجموعه جواب‌های معادله یا $x < c - K'$ و یا $x > c + K'$ این است عبارت $r_1 x + r_2 f(x)$ برابر است با $\lfloor (r_1 + r_2 \varphi) x \rfloor + j$، که j عدد صحیح مناسبی است با شرط $|j| \leq |r_2|$. حال تابع $\lfloor (r_1 + r_2 \varphi) x \rfloor$ با توجه به r_1 و r_2 یا صعودی و یا نزولی است. حال اگر این تابع را با j

جمع کنیم، ممکن است برخی جاها یکنوایی تابع بر هم بخورد. بنابراین اگر بخواهیم شرط $\lfloor(r_۱ + r_۲\varphi)x\rfloor + j < H(c)$ برقرار باشد، تنها در یک بازهٔ متناهی $(c - K', c + K')$ ممکن است برای برخی از اعداد نابرابری برقرار نباشد و در دو بازهٔ نامتناهی دیگر، یا برای کل اعداد نامساوی برقرار است و یا نامساوی برقرار نیست. □

از این لم، دو ملاحظهٔ زیر استنتاج می‌شود.

ملاحظه ۳-۹.

۱. فرض کنید $\mathcal{M}$ مدلی برای نظریهٔ $\mathcal{T}$ و $A \subseteq M$. از قضیهٔ ۳-۷ نتیجه می‌شود که اگر $\mathcal{M}_۰$ مدلی برای حساب پرسبرگر باشد که به‌وسیلهٔ A تولید شده است، در این صورت تحت تابع f بسته است. قسمت اول لم بالا نیز نشان می‌دهد که $\mathcal{M}_۰$ حتی تحت وارون هر ترمی که در زبان باشد نیز بسته است.

۲. قسمت دوم لم بالا نشان می‌دهد که هر ترم $r_۱x + r_۲f(x)$، به‌طور خاص، رفتاری *تقریباً* یکنوا دارد. یعنی این تابع یکنوا است به‌جز در برخی بازه‌های خاص از طول متناهی که این طول متناهی از کران بالای آن، $|r_۲|$، بیشتر نیست.

حال نشان می‌دهیم که الگوهایی که در پارامترهای آنها از ترکیبات خطی تابع f و تابع همانی استفاده شده باشد، تبدیل‌پذیر به الگوهای معمولی بیان شده در رابطهٔ (۳) هستند.

لم ۳-۱۰. *فرض کنید $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$ و $\mathcal{M}_۰ \subseteq \mathcal{M}$ و مدلی برای حساب پرسبرگر باشد. همچنین فرض کنید Δ یک الگوی داده شده و $r_۱$، $r_۲$، $r'_۱$ و $r'_۲$ اعداد صحیح باشند. در این صورت برای هر $\bar{a}$، $\bar{b}$، $\bar{c}$ و $\bar{d}$ در $M_۰$، عنصر $\bar{a}' \in M_۰$ و الگوی Δ' چنان موجودند که برای هر $x \in M$، فرمول $R_\Delta(r_۱x + r_۲f(x), \bar{a}, \bar{b}; r'_۱x + r'_۲f(x), \bar{c}, \bar{d})$ معادل با فرمول $R_{\Delta'}(x, \bar{a}', \bar{a}, \bar{b}; x, \bar{c}, \bar{d})$ است.*

اثبات. ابتدا توجه کنید که همهٔ معادلات به‌صورت $r_۱x + r_۲f(x) < a$ که در R_Δ قرار دارند، با توجه به لم قبل، معادل با معادلاتی به‌صورت $x \leq a'$، برای یک $a' \in M_۰$، هستند.

علاوه‌براین، نابرابری‌های به‌صورت $[\varphi(r_۱x + r_۲f(x))] < [\varphi d]$ نیز معادل با فرمول زیر است.

$$f(d - (r_۱x + r_۲f(x)) = f(d) - f(r_۱x + r_۲f(x))$$

که به‌صورت معادلهٔ (۱) است. بنابراین اعداد صحیح r و s چنان موجودند که معادلهٔ بالا با نابرابری زیر معادل است.

$$(r - s\varphi)[\varphi x] \in (j - [\varphi d], j - [\varphi d] + ۱$$

که مشابه با صورت‌هایی است که در تعریف الگو گفته شده است و مطلوب این لم است. □

با توجه به لم‌های گفته شده، به استقبال اثبات حذف‌سور می‌رویم.

قضیه ۳-۱۱. *نظریهٔ $\mathcal{T}$ در زبان $\mathcal{L}$ حذف‌سور می‌پذیرد.*

این اثبات ناقص است، در انتهای اثبات علت ناقص بودن اثبات را بیان می‌کنیم و حدسی را بیان می‌کنیم که با استفاده از آن حدس، می‌توانیم اثبات را کامل کنیم.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{M}_۱$ و $\mathcal{M}_۲$ دو مدل نظریهٔ $\mathcal{T}$ و $\mathcal{M}_۰$ زیرساختار مشترک این دو مدل باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مساله و با توجه به قضیهٔ ۳-۷، می‌توان فرض کرد که در $\mathcal{M}$ اصول (Z۱) تا (Z۴) و بنابراین اصل (Z۷) برقرار است.

به‌منظور اثبات حذف‌سور، دستگاه معادلاتی را درنظر می‌گیریم که شامل ترکیب‌های عطفی از فرمول‌های اتمی و نقیض اتمی با پارامتر در $M_۰$ باشند. همچنین فرض می‌کنیم که این دستگاه در مدل $\mathcal{M}_۱$ دارای جواب است. نشان می‌دهیم که این دستگاه در $M_۲$ نیز جواب دارد.

ابتدا دستگاه معادلات سادهٔ زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} x \in (a,b) \\ [\varphi x] \in ([\varphi c],[\varphi d]) \\ f(r_۱ x + r_۲ f(x) + e) = r_۱ f(x) + r_۲ f^۲(x) + f(e) + j \\ s_۱ x + s_۲ f(x) < u \\ R_{\Delta,n}(x,\bar{a},\bar{b};x,\bar{c},\bar{d}) \end{cases} \tag{۴}$$

که در آن، e، u، $\bar{a}$، $\bar{b}$، $\bar{c}$ و $\bar{d}$ همگی عناصری در $M_۰$ هستند و $r_۱$، $r_۲$، j، $s_۱$ و $s_۲$ نیز اعداد صحیح هستند. همچنین توجه کنید که متغیر x در محمول R_Δ هم می‌تواند در قسمت عددی و هم در قسمت اعشاری ظاهر شود. در ادامه نشان می‌دهیم که کل این دستگاه از معادلات را می‌توان به فقط یک محمول برای الگو تبدیل کرد. در ادامه نیز با ذکر چند نکته، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان یک دستگاه معادلات پیچیده‌تر را مشابه با این حالت ساده حل کرد.

توجه کنید که معادله‌های خطوط دوم و سوم دستگاه معادلات (۴) را می‌توان با یکدیگر ادغام کرد و به یک معادله به‌صورت $(r - s\varphi)[\varphi x] \in ([\varphi c'] + j, [\varphi d'] + j')$، برای اعداد صحیح مناسب j و j' تبدیل کرد. همچنین با توجه به لم ۳-۸، معادلات خط‌های اول و چهارم را نیز می‌توان با هم ادغام کرد و آنها را به یک معادله به‌صورت $a' \leq x \leq b'$ تبدیل کرد. بنابراین دستگاه معادلات (۴) تبدیل به دستگاه

معادلات زیر می‌شود.

$$\begin{cases} x \in [a', b'] \\ (r - s\varphi)[\varphi x] \in ([\varphi c'] + j, [\varphi d'] + j') \\ R_{\Delta,n}(x, \bar{a}, \bar{b}; x, \bar{c}, \bar{d}) \end{cases}$$

اما با استدلالی مشابه می‌توان در دستگاه بالا دو نابرابری اول را با $R_{\Delta,n}$ ادغام کرد و آن را به یک الگوی بزرگ‌تر $R_{\Delta',n}(x, \bar{a}a', \bar{b}b'; x, \bar{c}c', \bar{d}d')$ گسترش داد. سپس با توجه به بازه‌هایی که برای x و قسمت اعشاری φx در الگو وجود دارد، الگوی جدیدی مانند Δ'' یافت به‌طوری که بیانگر محمول $R_{\Delta'',n+1}(\bar{a}a', \bar{b}b'; \bar{c}c', \bar{d}d')$ باشد. توجه کنید که در این الگو از متغیر x استفاده نشده است. حال چون تمام پارامترهای استفاده شده در این الگو، در زیرساختار مشترک M قرار دارد، همچنین از آنجایی‌که دستگاه در $\mathcal{M}_1$ دارای جواب است، پس این الگو در $\mathcal{M}_1$ برقرار است. لذا در $\mathcal{M}_2$ نیز برقرار است .
حال با توجه به اصل (Z۵)، نتیجه می‌شود که دستگاه معادلات (۴) در $\mathcal{M}_2$ نیز دارای جواب است.

حال برای کامل کردن اثبات حذف‌سور، با توجه به موارد زیر، نشان می‌دهیم که هر دستگاه پیچیده‌تری از معادلات را نیز می‌توان به‌صورت دستگاه (۴) درنظر گرفت.

۱. واضح است که ترکیب عطفی هر تعداد متناهی از الگوها را می‌توان به یک الگو تبدیل کرد. بنابراین می‌توان فرض کرد که در دستگاه معادلات (۴)، تنها یک محمول برای الگو وجود دارد.

۲. با توجه به اصل (Z۲)، از آنجایی که $f^2(x) = f(x) + x - 1$، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در دستگاه‌های معادلات فقط ترکیب‌های خطی با ضرایب صحیح از تابع f و x وجود دارد و توان‌های بیشتر تابع f وجود ندارد. پس حالت کلی این معادلات نیز به همان صورتی است که در دستگاه معادلات (۴) بیان شده است.

۳. با توجه به لم ۳-۱۰، اگر ترکیبات خطی x و $f(x)$ در الگوی R_Δ قرار داشته باشد، می‌توان الگوی جدیدی معادل با این الگو نوشت که در آن فقط از x استفاده شده باشد.

۴. اگر در دستگاه معادلات (۴)، تعدادی متناهی از هر نوع از معادلات داشته باشیم، اثبات هیچ تغییری نمی‌کند؛ زیرا هر تعداد متناهی از نابرابری‌های مشابه، قابل تبدیل به یک نابرابری هستند.

۵. اگر دستگاهی شامل معادله‌ای به‌صورت $r_1 x + r_2 f(x) = e'$ باشد، در این صورت اثبات لم ۳-۸ نشان می‌دهد که یگانه جواب این دستگاه در زیرساختار مشترک دو مدل قرار دارد.

۶. حال با توجه به اینکه زبان حاوی محمول p_n است، بنابراین معادلات همنهشتی نیز در دستگاه می‌توانند قرار داشته باشد. حال از آنجایی‌که هر تعداد متناهی از این معادلات (در صورت سازگاری) را می‌توان به کمک قضیهٔ باقی‌ماندهٔ چینی، به یک معادله به‌صورت $x \overset{n}{\equiv} m$ تبدیل کرد، هر تعداد متناهی معادلات همنهشتی در مورد تابع f را نیز می‌توان به یک معادلهٔ همنهشتی تبدیل کرد. در این صورت، با توجه به معادلهٔ همنهشتی $x \overset{n}{\equiv} m$، می‌توان در دستگاه معادلات متغیر x را با $mx + n$ جایگزین کرد. در این صورت با توجه به اصل (Z۱)، می‌توان $f(mx + n)$ را به $mf(x) + f(n) + \ell$، برای یک عدد صحیح ℓ، بدل کرد. بنابراین می‌توان فرض کرد که تنها معادلهٔ همنهشتی که در دستگاه وجود دارد، به‌صورت $f(x) \overset{n'}{\equiv} m'$ است. با توجه به فصل قبل، این معادله همنهشتی با نابرابری $\left[\frac{\varphi}{n'}x\right] \in (\frac{m'}{n'}, \frac{m'+۱}{n'})$ معادل است. بنابراین معادل با ترکیب فصلی تعداد متناهی نابرابری به‌صورت $[\varphi x] \in (a', b')$ است.

تمامی مواردی که در بالا بیان شد، نشان می‌دهد که ترکیبات عطفی الگوها، خود یک الگوی جدیدی هستند، اما ترکیب عطفی یک الگو و نقیض الگویی دیگر، دیگر یک الگو نیست. بنابراین این اثبات برای حذف‌سور،ناقص است. ما حدس می‌زنیم که با تغییر دادن تعریف الگوها، اثبات حذف‌سور کامل می‌شود. □

با فرض درست بودن حدسی که در انتهای اثبات قبل بیان کردیم، نتیجهٔ زیر مهمترین نتیجه از قضیهٔ بالا است.

نتیجه ۳-۱۲. *نظریهٔ $\mathcal{T}$ کامل و تصمیم‌پذیر است.*

اثبات. چون نظریهٔ $\mathcal{T}$ حذف سور دارد و از آنجایی‌که مدل $\langle \mathbb{Z}, +, f, <, ۰, ۱ \rangle$، یک مدل اول برای نظریهٔ $\mathcal{T}$ است، نتیجه می‌شود که نظریهٔ $\mathcal{T}$ یک نظریهٔ کامل است. از طرفی‌دیگر، به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که اصول نظریه شمارش‌پذیر بازگشتی است. بنابراین نظریهٔ $\mathcal{T}$ و در نتیجه ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, f, <, ۰, ۱ \rangle$ تصمیم‌پذیر است. □

۲.۳ تصمیم‌پذیری $\mathcal{S}_\varphi$

در این قسمت نشان می‌دهیم که چگونه ابزار الگوهای عددی_اعشاری را می‌توان برای اثبات تصمیم‌پذیری ساختار $\mathcal{S}_\varphi = \langle \mathbb{R}, +, -, <, ۰, ۱, \mathbb{Z}, \lambda_\varphi \rangle$ نیز بکار برد.

همانگونه که در مقدمه بیان کردیم، هیرونیمی در [۸] با استفاده از قضیه‌های دشوار نظریهٔ اتوماتا، تصمیم‌پذیری این ساختار را ثابت کرده است. اما رویکرد ما، همانند فصل قبل و بخش اول این فصل، استفاده از ابزارهای مقدماتی نظریهٔ مدلی برای اثبات تصمیم‌پذیری است.

در ادامهٔ این فصل به‌سادگی، از S_φ فقط برای نشان دادن ساختار $\langle \mathbb{R}, +, -, ۰, ۱, \mathbb{Z}, \lfloor\cdot\rfloor, [\cdot], \lambda_\varphi, < \rangle$ استفاده می‌کنیم. هر دو تابع جدید موجود، یعنی تابع جزءصحیح و قسمت اعشاری در ساختار اولیه تعریف‌پذیر هستند.

برخلاف فصل قبل و قسمت قبل این فصل، تابع $[\varphi x]$ در این ساختار تعریف‌پذیر است. از آنجایی‌که در ترم‌ها و فرمول‌های اتمی، ترکیبات این تابع و تابع $\lfloor \varphi x\rfloor$، ظاهر می‌شود، در لم زیر چگونگی محاسبهٔ این ترکیبات را بیان می‌کنیم.

لم ۳-۱۳. *در اعداد حقیقی، موارد زیر برقرار هستند.*

۱. *یک* $i \in \{۰, ۱\}$ *موجود است که* $[\varphi\lfloor\varphi x\rfloor] = (۱-\varphi)\,[\varphi x]+[x]+i$ *و* $\lfloor\varphi\lfloor\varphi x\rfloor\rfloor = \lfloor x\rfloor+\lfloor x\rfloor-i$.
به‌طور خاص، اگر $x \in \mathbb{Z}$*، آنگاه* $[\varphi\lfloor\varphi x\rfloor] = (۱-\varphi)[\varphi x] + ۱$ *و* $\lfloor\varphi\lfloor\varphi x\rfloor\rfloor = \lfloor\varphi x\rfloor + x - ۱$.

۲. *عدد صحیح* $j \in \{۰, ۱, ۲\}$ *چنان موجود است که* $[\varphi\lfloor x\rfloor] = [\varphi x] - \varphi[x] + j$ *و* $\lfloor\varphi\lfloor x\rfloor\rfloor = \lfloor\varphi x\rfloor - j$.

۳. $[\varphi\,[\varphi x]] = \varphi\,[\varphi x] - k$، که $k \in \{۰, ۱\}$.

۴. $[\varphi[x]] = \varphi[x] - \ell$، که $\ell \in \{۰, ۱\}$.

۵. *با توجه به بازه‌ای که* $[\varphi x]$ *در آن قرار می‌گیرد، مقدار* $\lfloor\varphi[\varphi x]\rfloor$ *برابر با صفر یا یک است.*

۶. *با توجه به بازه‌ای که* $[x]$ *در آن قرار می‌گیرد، حاصل عبارت* $\lfloor\varphi[x]\rfloor$ *نیز برابر با صفر یا یک می‌شود.*

اثبات. ۱. از آنجایی‌که $\varphi\lfloor\varphi x\rfloor = \varphi(\varphi x - [\varphi x]) = \varphi^۲ x - \varphi\,[\varphi x]$ و $\varphi^۲ = \varphi + ۱$، بنابراین برای هر عدد حقیقی x رابطه‌های زیر برقرار هستند:

$$[\varphi\lfloor\varphi x\rfloor] = [(\varphi + ۱)x - \varphi\,[\varphi x]] \qquad (۵)$$

$$\lfloor\varphi\lfloor\varphi x\rfloor\rfloor = \lfloor(\varphi + ۱)x - \varphi\,[\varphi x]\rfloor \qquad (۶)$$

برای محاسبهٔ این عبارت‌ها، با توجه به رابطهٔ بین $[(\varphi + ۱)x]$ و $[\varphi\,[\varphi x]]$ دو حالت را درنظر می‌گیریم.

حالت ۱. فرض کنید $[(\varphi + ۱)x] > [\varphi\,[\varphi x]]$. در این صورت $[\varphi\lfloor\varphi x\rfloor] = [(\varphi + ۱)x] - [\varphi\,[\varphi x]]$ و $\lfloor\varphi\lfloor\varphi x\rfloor\rfloor = \lfloor(\varphi + ۱)x\rfloor - \lfloor\varphi\,[\varphi x]\rfloor$. برای محاسبهٔ هر کدام از اجزای این عبارت‌ها دو حالت وجود دارد، بنابراین چهار حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱ـ۱: فرض کنید روابط زیر برای x برقرار باشند:

$$\begin{cases} [\varphi x] + [x] < 1, \\ [\varphi x] < \frac{1}{\varphi}. \end{cases} \tag{7}$$

از نابرابری اول نتیجه می‌شود $[\varphi x + x] = [\varphi x] + [x]$ و $\lfloor \varphi x + x \rfloor = \lfloor \varphi x \rfloor + \lfloor x \rfloor$. به‌طور مشابه از نابرابری دوم نیز ، $[\varphi[\varphi x]] = \varphi[\varphi x]$ و $\lfloor \varphi \, [\varphi x] \rfloor = 0$ نتیجه می‌شود. بنابراین شرط حالت ۱ به‌صورت $[\varphi x] + [x] > \varphi[\varphi x]$ یا معادلاً $[x] > (\varphi - 1) \, [\varphi x]$ تبدیل می‌شود. از مقایسهٔ این شرط با رابطهٔ (۷) و همچنین با توجه به اینکه در این حالت $(\varphi - 1)[\varphi x] < 1 - [\varphi x]$، شرط معادل زیر را داریم.

$$(\varphi - 1)[\varphi x] < [x] < 1 - [\varphi x]$$

همچنین اگر عبارات نتیجه شده از این حالت را در معادلهٔ (۵) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$[\varphi[\varphi x]] = [\varphi x] + [x] - [\varphi \, [\varphi x]] = [\varphi x] + [x] - \varphi \, [\varphi x] = (1 - \varphi)[\varphi x] + [x] \, .$$

با جایگذاری مقادیر مرتبط در (۶) نیز به رابطهٔ زیر می‌رسیم.

$$\lfloor \varphi \lfloor \varphi x \rfloor \rfloor = \lfloor \varphi x \rfloor + \lfloor x \rfloor - \lfloor \varphi \, [\varphi x] \rfloor = \lfloor \varphi x \rfloor + \lfloor x \rfloor$$

حالت ۱ـ۲ . فرض کنید شرایط زیر برای x برقرار باشند:

$$\begin{cases} [\varphi x] + [x] < 1 \\ [\varphi x] > \frac{1}{\varphi} \end{cases}$$

از قسمت دوم این شرط نتیجه می‌شود که $[\varphi[\varphi x]] = \varphi[\varphi x] - 1$ و $\lfloor \varphi[\varphi x] \rfloor = 1$. قسمت اول نیز که نسبت به حالت قبل تغییری نکرده است. مشابه حالت قبل، در این صورت شرط حالت ۱ و پس از نوشتن معادل‌ها، به‌صورت زیر است:

$$(\varphi - 1)[\varphi x] - 1 < [x] < 1 - [\varphi x].$$

همچنین با جایگذاری در فرمول (۵) خواهیم داشت:

$$[\varphi[\varphi x]] = [\varphi x] + [x] - [\varphi \, [\varphi x]] = [\varphi x] + [x] - (\varphi \, [\varphi x] - 1) = (1 - \varphi)[\varphi x] + [x] + 1.$$

علاوه‌براین، معادلهٔ (۶) نیز به‌صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\lfloor \varphi \lfloor \varphi x \rfloor \rfloor = \lfloor \varphi x \rfloor + \lfloor x \rfloor - \lfloor \varphi \, [\varphi x] \rfloor = \lfloor \varphi x \rfloor + \lfloor x \rfloor - 1$$

حالت ۱ـ۳. فرض کنید x دارای شرط زیر باشد:

$$\begin{cases} [\varphi x] + [x] > ۱, \\ [\varphi x] < \frac{۱}{\varphi}. \end{cases}$$

از قسمت اول نتیجه می‌شود $[\varphi x + x] = [\varphi x] + [x] - ۱$ و $\lfloor \varphi x + x \rfloor = \lfloor \varphi x \rfloor + \lfloor x \rfloor + ۱$. قسمت دوم این شرط هم همان قسمت اول حالت ۱ـ۱ است. بنابراین با استدلالی مشابه آن حالت، شرط معادل زیر بدست می‌آید.

$$[x] > (\varphi - ۱)[\varphi x] + ۱$$

چنین حالتی زخ نمی‌دهد، زیرا عبارت سمت راست نامساوی فوق عددی بزرگتر از یک است و قسمت اعشاری هیچ عددی نمی‌تواند از یک بیشتر باشد.
حالت ۱ـ۴: فرض کنید x در روابط زیر صدق کند.

$$\begin{cases} [\varphi x] + [x] > ۱ \\ [\varphi x] > \frac{۱}{\varphi} \end{cases}$$

از رابطهٔ اول نتیجه می‌شود $[\varphi x + x] = [\varphi x] + [x] - ۱$ و $\lfloor \varphi x + x \rfloor = \lfloor \varphi x \rfloor + \lfloor x \rfloor + ۱$. از رابطهٔ دوم نیز $[\varphi[\varphi x]] = \varphi[\varphi x] - ۱$ و $\lfloor \varphi[\varphi x] \rfloor = ۱$ نتیجه می‌شود. با قرار دادن این روابط در شرط حالت ۱، شرط معادل زیر بدست می‌آید.

$$[x] > (\varphi - ۱)\,[\varphi x]$$

از آنجایی‌که $(\varphi - ۱)\,[\varphi x] > [\varphi x] - ۱$، شرط بالا دربردارندهٔ رابطهٔ $[x] > [\varphi x] - ۱$ نیز است. حال با جایگذاری این روابط در معادلهٔ (۵) خواهیم داشت:

$$[\varphi \lfloor \varphi x \rfloor] = [\varphi x] + [x] - ۱ - [\varphi\,[\varphi x]] = [\varphi x] + [x] - ۱ - (\varphi[\varphi x] - ۱) = (۱ - \varphi)[\varphi x] + [x].$$

همچنین رابطهٔ (۶) نیز در این حالت به‌صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\lfloor \varphi \lfloor \varphi x \rfloor \rfloor = \lfloor \varphi x \rfloor + \lfloor x \rfloor + ۱ - \lfloor \varphi\,[\varphi x] \rfloor = \lfloor \varphi x \rfloor + \lfloor x \rfloor + ۱ - ۱ = \lfloor \varphi x \rfloor + \lfloor x \rfloor.$$

حالت ۲. فرض کنید $[\varphi x + x] < [\varphi[\varphi x]]$. از این شرط نتیجه می‌شود $[\varphi \lfloor \varphi x \rfloor] = [\varphi x + x] - [\varphi\,[\varphi x]] + ۱$ و همچنین $\lfloor \varphi \lfloor \varphi x \rfloor \rfloor = \lfloor \varphi x + x \rfloor - \lfloor \varphi\,[\varphi x] \rfloor - ۱$. مشابه حالت قبلی، باید ۴ حالت مختلف را درنظر بگیریم و چون استدلال‌ها مشابه هستند، هر حالت را به‌طور خلاصه بیان

می‌کنیم.
حالت ۲ـ۱: فرض کنید روابط زیر برای x برقرار باشد.

$$\begin{cases} [\varphi x] + [x] < ۱ \\ [\varphi x] < \frac{۱}{\varphi} \end{cases}$$

در این حالت در مورد قسمت‌های اعشاری رابطهٔ زیر برقرار است.

$$[\varphi\lfloor\varphi x\rfloor] = [\varphi x + x] - [\varphi\,[\varphi x]] + ۱ = [\varphi x] + [x] - \varphi\,[\varphi x] + ۱ = (۱ - \varphi)\,[\varphi x] + [x] + ۱.$$

در مورد جزءصحیح نیز رابطهٔ زیر برقرار است.

$$\lfloor\varphi\lfloor\varphi x\rfloor\rfloor = \lfloor\varphi x + x\rfloor - \lfloor\varphi\,[\varphi x]\rfloor - ۱ = \lfloor\varphi x\rfloor + \lfloor x\rfloor - ۱.$$

همچنین با جایگذاری این عبارات در شرط حالت ۲، شرط معادل $[x] < (\varphi - ۱)[\varphi x]$ بدست می‌آید. این رابطه، شرط $[x] < ۱ - [\varphi x]$ را نیز دربردارد؛ زیرا $(\varphi - ۱)[\varphi x] < ۱ - [\varphi x]$.
حالت ۲ـ۲ . فرض کنید شرایط زیر برای x برقرار باشد.

$$\begin{cases} [\varphi x] + [x] < ۱ \\ [\varphi x] > \frac{۱}{\varphi} \end{cases}$$

اگر این روابط را در شرط حالت ۲ جایگزین کنیم، به‌رابطهٔ زیر می‌رسیم.

$$[\varphi x] + [x] < \varphi\,[\varphi x] - ۱$$

اما این رابطه هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد؛ زیرا در این صورت $[x] < (\varphi - ۱)[\varphi x] - ۱$ و از آنجایی‌که $(\varphi - ۱)[\varphi x] < ۱$، عبارت سمت راست، منفی است و قسمت اعشاری هیچ عددی منفی نمی‌تواند باشد.
حالت ۲ـ۳. فرض کنید x دارای شرط زیر باشد:

$$\begin{cases} [\varphi x] + [x] > ۱, \\ [\varphi x] < \frac{۱}{\varphi}. \end{cases}$$

با جایگذاری این روابط در شرط حالت ۲، به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$۱ - [\varphi x] < [x] < (\varphi - ۱)\,[\varphi x] + ۱.$$

همچنین با اعمال این شرایط در رابطهٔ (۵) خواهیم داشت:

$$[\varphi\lfloor\varphi x\rfloor] = [\varphi x + x] - [\varphi\,[\varphi x]] + 1 = [\varphi x] + [x] - 1 - \varphi\,[\varphi x] + 1 = (1-\varphi)\,[\varphi x] + [x].$$

معادلهٔ (۶) نیز به‌صورت زیر در می‌آید.

$$\lfloor\varphi\lfloor\varphi x\rfloor\rfloor = \lfloor\varphi x + x\rfloor - \lfloor\varphi\,[\varphi x]\rfloor - 1 = \lfloor\varphi x\rfloor + \lfloor x\rfloor + 1 - 1 = \lfloor\varphi x\rfloor + \lfloor x\rfloor.$$

حالت ۲ـ۴: فرض کنید x در روابط زیر صدق کند.

$$\begin{cases}[\varphi x] + [x] > 1\\ [\varphi x] > \frac{1}{\varphi}\end{cases}$$

در این حالت نیز به تساوی زیر می‌رسیم.

$$[\varphi\lfloor\varphi x\rfloor] = [\varphi x + x] - [\varphi\,[\varphi x]] + 1 = [\varphi x] + [x] - 1 - (\varphi\,[\varphi x] - 1) + 1 = (1-\varphi)\,[\varphi x] + [x] + 1$$

همچنین با جایگذاری در معادلهٔ (۶)، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود.

$$\lfloor\varphi\lfloor\varphi x\rfloor\rfloor = \lfloor\varphi x + x\rfloor - \lfloor\varphi\,[\varphi x]\rfloor - 1 = \lfloor\varphi x\rfloor + \lfloor x\rfloor + 1 - 1 - 1 = \lfloor\varphi x\rfloor + \lfloor x\rfloor - 1$$

از ادغام شرایط این حالت و حالت ۲، شرط معادل زیر حاصل می‌شود:

$$1 - [\varphi x] < [x] < (\varphi - 1)\,[\varphi x]\,.$$

۲. با استفاده از خواص توابع جزءصحیح و قسمت‌های اعشاری داریم $[\varphi\lfloor x\rfloor] = [\varphi x - \varphi[x]]$ و همچنین $\lfloor\varphi\lfloor x\rfloor\rfloor = \lfloor\varphi x - \varphi[x]\rfloor$.

حالت اول: **فرض کنید** $[\varphi x] \geq [\varphi[x]]$. **در این صورت** $[\varphi\lfloor x\rfloor] = [\varphi x] - [\varphi[x]]$ و $\lfloor\varphi\lfloor x\rfloor\rfloor = \lfloor\varphi x\rfloor - \lfloor\varphi[x]\rfloor$. **حال اگر** $[x] < \frac{1}{\varphi}$، **آنگاه** $[\varphi[x]] = \varphi[x]$ و $\lfloor\varphi[x]\rfloor = 0$. **بنابراین** $[\varphi\lfloor x\rfloor] = [\varphi x] - \varphi[x]$ و $\lfloor\varphi\lfloor x\rfloor\rfloor = \lfloor\varphi x\rfloor$. **اگر** $[x] > \frac{1}{\varphi}$، **آنگاه** $[\varphi[x]] = \varphi[x] - 1$ **و نیز** $\lfloor\varphi[x]\rfloor = 1$. **لذا** $[\varphi\lfloor x\rfloor] = [\varphi x] - \varphi[x] + 1$ و $\lfloor\varphi\lfloor x\rfloor\rfloor = \lfloor\varphi x\rfloor - 1$.

حالت دوم: **فرض کنید** $[\varphi x] < [\varphi[x]]$. **در این صورت** $[\varphi\lfloor x\rfloor] = [\varphi x] - [\varphi[x]] + 1$ و $\lfloor\varphi\lfloor x\rfloor\rfloor = \lfloor\varphi x\rfloor - \lfloor\varphi[x]\rfloor - 1$. **مشابه حالت قبل، اگر** $[x] < \frac{1}{\varphi}$، **آنگاه** $[\varphi\lfloor x\rfloor] = [\varphi x] - \varphi[x] + 1$ **و نیز** $\lfloor\varphi\lfloor x\rfloor\rfloor = \lfloor\varphi x\rfloor - 1$. **همچنین اگر** $[x] > \frac{1}{\varphi}$، **آنگاه** $[\varphi\lfloor x\rfloor] = [\varphi x] - (\varphi[x] - 1) + 1 = [\varphi x] - \varphi[x] + 2$ و $\lfloor\varphi\lfloor x\rfloor\rfloor = \lfloor\varphi x\rfloor - \lfloor\varphi[x]\rfloor - 1 = \lfloor\varphi x\rfloor - 2$.

۳. با توجه به رابطهٔ زیر می‌توان k را تعیین کرد.

$$[\varphi\,[\varphi x]] = \begin{cases} \varphi[\varphi x], & [\varphi x] < \frac{1}{\varphi} \\ \varphi[\varphi x] - 1, & [\varphi x] > \frac{1}{\varphi} \end{cases}$$

۴. مشابه مورد قبل، در این مورد نیز با توجه به رابطهٔ بین قسمت اعشاری می‌توان ℓ را تعیین کرد.

$$[\varphi\,[x]] = \begin{cases} \varphi\,[x]\,, & [x] < \dfrac{1}{\varphi} \\ \varphi\,[x] - 1, & [x] > \dfrac{1}{\varphi} \end{cases}$$

۵. مقدار این عبارت با توجه به رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$\lfloor\varphi\,[\varphi x]\rfloor = \begin{cases} 1, & [\varphi x] \leq \dfrac{1}{\varphi} \\ 0, & [\varphi x] > \dfrac{1}{\varphi} \end{cases}$$

۶. مشابه مورد قبل، تنها کافی است در رابطهٔ بالا به‌جای $[\varphi x]$، $[x]$ قرار دهیم. □

در نظریه‌ای که برای ساختار S_φ ارائه می‌دهیم، باید اصولی باشد که تمام حقایق بالا را بیان کند. بنابراین با توجه به محاسبات بالا، کلی‌ترین حالت ترم تک‌متغیرهٔ $t(x)$ در زبان که به‌صورت زیر است، را در نظر می‌گیریم.

$$(r_1 + s_1\varphi)\lfloor\varphi x\rfloor + (r_2 + s_2\varphi)\,[\varphi x] + (r_3 + s_3\varphi)\lfloor x\rfloor + (r_4 + s_4\varphi)\,[\varphi x] \tag{8}$$

توجه کنید که تمامی ضرایب اعداد صحیح هستند. درنتیجه، معادلات و نابرابری‌هایی که در فرمول‌های اتمی و نقیض اتمی ظاهر می‌شوند، به یکی از صورت‌های زیر هستند.

$$t(x) \leq a$$
$$t(x) \in \mathbb{Z}$$
$$t(x) \notin \mathbb{Z}$$

توجه داشته باشید که فرمول اتمی $t(x) \in \mathbb{Z}$ در زبان قابل بیان است، زیرا معادل با فرمول $\lfloor t(x)\rfloor = t(x)$ است. بنابراین با اعمال لم ۳-۱۳ بر روی $\lfloor t(x)\rfloor$ و استفاده از اصول مربوطه، نتیجه می‌شود که کلی‌ترین حالت فرمول‌های اتمی یا نقیض اتمی به‌صورت $t(x) \leq a$ است.

حال اگر در فرمول (۸)، عبارت $\lfloor \varphi x \rfloor$ را با $\varphi x - [\varphi x]$ جایگزین کنیم، کلی‌ترین صورت یک فرمول اتمی به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$(r_1 + s_1\varphi)\,[\varphi x] + (r_2 + s_2\varphi)\lfloor x \rfloor + (r_3 + s_3\varphi)[x] \leq a. \tag{۹}$$

این عمل جایگزینی باعث می‌شود برخی ضرایب تغییر کنند ولی ما به‌منظور پیچیدگی کمتر در خواندن و نوشتن از همان ضرایب فرمول (۸) در این فرمول نیز استفاده کرده‌ایم. در ادامهٔ این فصل این ترم را با فرمول $t(x) \leq a$ نشان می‌دهیم.

به‌منظور یافتن عنصری مانند x که تعدادی متناهی از فرمول‌های مشابه با فرمول (۹) را همزمان با هم برآورده کند، به‌طور جداگانه، $\lfloor x \rfloor$ و $[x]$ را می‌یابیم. در لم‌های زیر چگونگی حل‌پذیری دستگاه در حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم. این لم‌ها و اثبات آنها در هر ساختاری مانند $\mathcal{M}$ که $\mathcal{M} \equiv \mathcal{S}_\varphi$ درست است. بنابراین در لم‌های زیر و اثبات آنها منظور از عدد صحیح، عنصری در $\mathbf{Z}^{\mathcal{M}}$ است.

لم ۳-۱۴. *فرض کنید در فرمول (۹)، $r_2 + s_2\varphi \neq 0$. در این صورت عدد طبیعی K و عناصر $\{b_i \mid |i| \leq K\}$ چنان موجود است که معادلهٔ (۹) معادل با ترکیبی فصلی از فرمول‌هایی به‌صورت $x \leq b_i$ است. علاوه‌بر این، برای هر b_i ترم $t_i(x)$ چنان موجود است که $b_i = t_i(x)$.*

اثبات. در ابتدا توضیح می‌دهیم که معادلهٔ (۹) در حالت تساوی، یعنی $t(x) = a$، را چگونه حل می‌کنیم.

از آنجایی‌که $[x]$ و $[\varphi x]$ هر دو در بازهٔ $(0, 1)$ قرار دارند، لذا اعداد صحیح n_1 و n_2 چنان موجودند که $n_1 < (r_1 + s_1\varphi)[\varphi x] + (r_3 + s_\varphi)[x] < n_2$. بنابراین معادلهٔ (۹) را می‌توان به معادلهٔ زیر تبدیل کرد.

$$a - n_2 < (r_2 + s_2\varphi)\lfloor x \rfloor < a - n_2$$

که این عبارت معادل با نابرابری زیر است.

$$\frac{a - n_2}{r_2 + s_2\varphi} < \lfloor x \rfloor < \frac{a - n_1}{r_2 + s_2\varphi}$$

حال چون $\varphi^2 = \varphi + 1$، می‌توان اعداد صحیح r'_2 و s'_2 را چنان یافت که $\frac{1}{r_2+s_2\varphi} = r'_2 + s'_2\varphi$. بنابراین نابرابری بالا معادل با نابرابری زیر است.

$$\lfloor (r'_2 + s'_2\varphi)(a - n_2) \rfloor + 1 \leq x < \lfloor (r'_2 + s'_2\varphi)(a - n_1) \rfloor + 1 \tag{۱۰}$$

با توجه به اینکه ضرایب نابرابری بالا همگی اعداد صحیح هستند، حداکثر تعداد متناهی عدد صحیح نابرابری بالا را برآورده می‌کنند. به این معنی که $\lfloor x \rfloor$ حداکثر تعداد متناهی عدد صحیح می‌تواند باشد. بنابراین عدد طبیعی K وابسته به r'_2، s'_2، n_1 و n_2 چنان موجود است که $\lfloor x \rfloor = \lfloor a' \rfloor + i$ برای یک عدد

صحیح $|i| \leq K$، جایی که $a' = (r'_۲ + s'_۲\varphi)a$. برای چنین عدد صحیحی مانند i، می‌توان در رابطهٔ (۹)، عبارت $[x]$ را با $x - \lfloor x \rfloor$ جایگزین کرد، یا به‌عبارتی دیگر با $x - \lfloor a' \rfloor - i$ جایگزین کرد.

حال با استفاده از رابطهٔ $\lfloor x \rfloor = \lfloor a' \rfloor + i$، یا به‌طور معادل $\lfloor a' \rfloor + i \leq x < \lfloor a' \rfloor + i + ۱$، می‌توان مقدار $\lfloor \varphi x \rfloor$ را محاسبه کرد. برای محاسبهٔ این مقدار، از آنجایی‌که $۲ > \varphi > ۱$، اگر مقدار $\lfloor \varphi \lfloor a' \rfloor + \varphi i \rfloor$ را با a'' نمایش دهیم، در این صورت $\lfloor \varphi x \rfloor = a'' + j$، برای یک عدد طبیعی $j \in \{۰, ۱, ۲\}$. بنابراین می‌توانیم در معادلهٔ (۹) عبارت $\varphi x - a'' - j$ را جایگزین عبارت $[\varphi x]$ کنیم. $\square$

لم ۳-۱۵. *فرض کنید $r_۲ + s_۲\varphi = ۰$. در این صورت هر دستگاه معادلاتی که شامل معادله‌ای به‌صورت معادلهٔ (۹) باشد به‌شرطی که $x \notin \mathbf{Z}^{\mathcal{M}}$، معادل با ترکیب فصلیِ متناهی نابرابری‌هایی به‌صورت $[\varphi[x]] \leq (r + s\varphi)[x] + a'$ است که در آن $a' = t'(a)$ برای یک ترم $t'(x)$ در زبان $\mathcal{L}$.*

اثبات. از آنجایی‌که $r_۲ + s_۲\varphi = ۰$، نابرابری (۹) تبدیل به نابرابری زیر می‌شود، که براساس فقط قسمت‌های اعشاری است.

$$(r_۱ s_۱ \varphi)[\varphi x] + (r_۳ + s_۳\varphi)[x] \leq a$$

حال اگر در این نابرابری به‌جای x، قراردهیم $\lfloor x \rfloor + [x]$، در این صورت با توجه به لم ۳-۱۳ عبارت $[\varphi[x]]$ را می‌توانیم برحسب $[x]$ بیان کنیم. بنابراین نابرابری فوق با نابرابری زیر معادل می‌شود.

$$[\varphi[x]] \leq (r' + s'\varphi)[x] + a' \tag{۱۱}$$

که در این نابرابری ضرایب r' و s' اعداد صحیح هستند و $a' = t'(a)$ برای یک $\mathcal{L}$ـترم $t'(x)$. $\square$

ملاحظه ۳-۱۶. برای یافتن عنصری مانند x که در نابرابری‌هایی به‌صورت (۱۱) صدق کند، با توجه به شرط $x \notin \mathbb{Z}$، کافی است عدد صحیح z و عدد حقیقی $y \in (۰, ۱)$ را به‌گونه‌ای بیابیم که $[\varphi z] < (r' + s'\varphi)y + a'$. اما اگر $(r' + s'\varphi)y + a'$ عددی مثبت باشد، آنگاه وجود چنین عدد صحیحی را قضیهٔ کرونکر تضمین می‌کند. روش حل این سیستم را می‌توان به سیستم‌هایی که در آن تعداد متناهی نابرابری به‌شکل (۱۱) باشد، تعمیم داد.

لم ۳-۱۷. *فرض کنید $r_۲ + s_۲\varphi = ۰$. در این صورت یافتن عددی صحیح مانند x که جواب معادلهٔ (۹) باشد، معادل با یافتن عددی صحیح مانند x است که $[\varphi x] \leq t(a)$، به‌طوری که $t(x)$ یک $\mathcal{L}$ـترم مناسب است.*

اثبات. از آنجایی‌که می‌خواهیم جواب معادله عددی صحیح باشد، بنابراین اگر x جواب معادله باشد، آنگاه قسمت اعشاری ندارد. بنابراین معادلهٔ (۹) معادل با نابرابری زیر است.

$$[\varphi x] \leq \frac{a}{(r_۱ + s_۱\varphi)}$$

اما سمت راست نابرابری فوق برابر با یک $\mathcal{L}$ـترم است. □

از سه لم بالا نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۳-۱۸. *حل‌کردن یک دستگاه که حاوی تعدادی متناهی نابرابری به‌صورت (۹) باشد، معادل با یافتن عددی صحیح مانند z و عنصر $y \in [\circ, ۱)$ است که در رابطهٔ زیر صدق کنند*

$$\begin{cases} y \in (c, d) \\ \begin{cases} z \in (e, f) \\ [\varphi z] < (r + s\varphi)y + a' \end{cases} \end{cases},$$

برای عناصر مناسب c, d, e, f, r, s و a'.

با توجه به این نتیجه، برای حل دستگاه معادلات نیاز است تا عددی صحیح مانند z بیابیم که علاوه بر اینکه در یک بازهٔ داده شده قرار داشته باشد، قسمت اعشاری φz نیز در یک بازهٔ مطلوب قرار گیرد. بنابراین باید دوباره از همان ایدهٔ الگوهای عددی‌ـاعشاری بهره ببریم. برای این منظور، ابتدا *الگوی عددی‌ـاعشاری تعمیم‌یافته* را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳-۱۹. یک الگوی عددی‌ـاعشاری تعمیم‌یافته از طول n که آن را با $\Delta_{\sigma,n}(\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}, \bar{d}; \bar{x})$ نشان می‌دهیم، که در آن تمام پارامترهای $\bar{a}$ و $\bar{b}$ و همچنین متغیر $\bar{x}$ آرایه‌هایی nـتایی و پارامترهای $\bar{c}$ و $\bar{d}$ آرایه‌هایی $۲n$ـتایی هستند و به این معنی هستند که این متغیرها و پارامترها در نابرابری‌های زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} \lfloor x_i \rfloor \in [a_i, b_i] \\ X_i \in [c_i, d_i] \\ (r_۱ + s_۱\varphi)X_{\sigma(۱)} \leq \cdots (r_{۲n} + s_{۲n}\varphi)X_{\sigma(۲n)} \end{cases} \tag{۱۲}$$

در این فرمول مجموعهٔ $\{[\varphi\lfloor x_۱\rfloor], \ldots, [\varphi\lfloor x_n\rfloor], [x_۱], \ldots, [x_n]\}$ را با متغیر جدید $X_۱, \cdots, X_{۲n}$ نام‌گذاری کرده‌ایم و همچنین σ یک جایگشت روی مجموعهٔ $\{۱, \ldots, ۲n\}$ و ضرایب r_i و s_i اعداد صحیح هستند.

مشابه با قسمت قبل این فصل، محمولی برای نمایش هر الگوی عددی‌ـاعشاری ارائه می‌کنیم و آن را به زبان می‌افزاییم.

نمادگذاری ۳-۲۰. برای هر الگوی Δ، محمول R_Δ را به زبان می‌افزاییم. در واقع این محمول با توجه به رابطهٔ زیر تعریف می‌شود.

$$\forall \bar{y}_1 \bar{y}_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 \left(R_\Delta(\bar{y}_1, \bar{y}_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2) \iff \exists \bar{x}\ \Delta_{\sigma,n}(\bar{y}_1, \bar{y}_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)\right) \qquad (13)$$

حال تمامی شرایط برای تعریف نظریه فراهم آمده است.

تعریف ۳-۲۱. نظریهٔ $\mathcal{T}^*$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$(A1)$ همهٔ اصول نظریهٔ $\mathcal{T}$. به این معنی که $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0, 1, \lfloor \varphi x \rfloor, < \rangle \models \mathcal{T}$،

$(A2)$ $\forall x\big(\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \wedge \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1\big)$،

$(A3)$ $\forall x\ (x = \lfloor x \rfloor + [x])$،

$(A4)$ ساختار $\langle \mathbb{R}, +, -, < \rangle$ مدلی برای نظریهٔ گروه‌های آبلی مرتب باشد،

$(A5)$ $\forall x (x > 0 \to \lambda_\varphi(x) > 0)$،

$(A6)$ $\forall x, y \Big(\lambda_\varphi(x + y) = \lambda_\varphi(x) + \lambda_\varphi(y)\Big)$،

$(A7)$ $\forall x \Big(\lambda_\varphi(\lambda_\varphi(x)) = \lambda_\varphi(x) + x\Big)$،

$(A8)$ همهٔ الگوهای ممکن، به این معنی که رابطهٔ (۱۳) برای تمام الگوهای عددی‌ـاعشاری تعمیم‌یافتهٔ ممکن Δ برقرار باشد.

ملاحظه ۳-۲۲. توجه کنید که مورد $(A1)$ اصول موضوعه بالا را می‌توان با شمای اصول زیر جایگزین کرد.

$(A'1)$ برای هر x دقیقا یکی از عناصر مجموعهٔ $\{\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1, \ldots, \lfloor x \rfloor + n - 1\}$ به n بخشپذیر است.

اثبات. توجه کنید که از $(A'1)$ نتیجه می‌شود که جزءصحیح اعداد، مدلی برای حساب پِرِسبِرگِر است. همچنین از اصول $(A4)$ و $(A5)$ نتیجه می‌شود که عدد صحیح x در برد تابع f قرار دارد اگر و تنها اگر $\varphi - 2 > [\varphi x]$، که در این صورت $x = f(\lfloor \varphi x \rfloor - x + 1)$. بنابراین اصل $(T2)$ را می‌توان نتیجه گرفت. بقیهٔ اصول نظریهٔ $\mathcal{T}$ را نیز می‌توان به‌راحتی نتیجه گرفت. $\square$

مشابه با قسمت قبل و نظریهٔ $\mathcal{T}$، از اینکه این نظریه نیز حذف‌سور می‌پذیرد، کامل بودن و تصمیم‌پذیری آن نتیجه می‌شود.

قضیه ۳-۲۳. *نظریهٔ $\mathcal{T}^*$ سورها را حذف می‌کند و همچنین کامل و تصمیم‌پذیر است.*

اثبات. با توجه به نتیجهٔ ۳-۱۸ هر دستگاهی از معادلات که شامل یک الگو و تعداد متناهی نابرابری باشد، در نهایت تبدیل به یک الگو می‌شود که پارامترهای این الگوی جدید با توجه به لم‌هایی که بیان کردیم، با استفاده از ترم‌ها مناسبی در زبان که بر پارامترهای موجود اثر می‌کنند، بدست می‌آیند. حال مشابه با ساختار $\mathcal{Z}_\varphi$، محمول‌های متناظر با الگوها به ما کمک می‌کنند تا حل‌پذیر بودن یک دستگاه را تنها به ضرایب و پارامترها وابسته کنیم و این چیزی نیست بجز حذف‌سور داشتن.

حال از آنجایی که ساختار $\langle \mathbb{Q}[\varphi], +, -, ۰, ۱, \mathbb{Z}, \lfloor \cdot \rfloor, [\cdot], \lambda_\varphi, < \rangle$، جایی که $\mathbb{Q}[\varphi]$ فضای برداری تولید شده توسط $\{۱, \varphi\}$ روی $\mathbb{Q}$ است، مدل اول این نظریه است، بنابراین این نظریه کامل است. علاوه‌بر این، به‌سادگی می‌توان مشاهده کرد که تمام اصولی که برای نظریه ارائه کردیم، شمارش‌پذیر بازگشتی هستند، بنابراین این نظریه تصمیم‌پذیر است. $\square$

۳.۳ نتایج نظریهٔ اعدادی

در این زیربخش بدون استفاده از محمول‌هایی که برای الگوها استفاده کردیم، نشان می‌دهیم که دنبالهٔ فیبوناتچی در ساختار $\mathcal{Z}_\varphi$ تعریف‌پذیر است. علاوه‌بر این، برخی از رفتارهای تابع f را بیان می‌کنیم و همچنین لزوم وجود محمول برای الگوها را نیز بیان می‌کنیم.

فرض کنید $g : \mathbb{N} \to (۰, ۱)$ تابعی باشد که هر عدد طبیعی n را به $[\varphi x]$ (قسمت اعشاری φx) می‌نگارد. حقایق زیر در مورد اعداد طبیعی برقرار است.

حقیقت ۳-۲۴. *کمترین مقدار تابع g در بازهٔ $(۰, F_{۲n+۲})$ در $F_{۲n}$ رخ می‌دهد.*

اثبات. با توجه به فصل قبل، برای هر $x < F_{۲n+۱}$، همواره داریم $f(F_{۲n} + x) = f(F_{۲n}) + f(x)$ (در مشاهدهٔ ۲-۷ فصل قبل به تفصیل این حقیقت شرح داده شده است). $\square$

نتیجه‌های جالب زیر را می‌توان از این حقیقت ساده استنتاج کرد.

نتیجه ۳-۲۵. *تابع g بر روی فیبوناتچی‌های با اندیس زوج، تابعی نزولی اکید است.*

نتیجه ۳-۲۶. *کمترین مقدار تابع g در بازهٔ $(۰, a)$ در بزرگترین عددِ فیبوناتچیِ با اندیسِ زوجِ کمتر از a رخ می‌دهد.*

همانگونه که در ابتدای فصل بیان کردیم، رابطهٔ $[\varphi y] < [\varphi x]$ با فرمول سادهٔ $f(y - x) = f(y) - f(x)$ تعریف‌پذیر است. بنابراین با توجه به نتایج بالا، تعریف‌پذیری مجموعهٔ اعداد فیبوناتچی را می‌توان نتیجه گرفت.

نتیجه ۳-۲۷. *مجموعهٔ اعداد فیبوناتچی در ساختار* $\langle \mathbb{Z}, +, -, f, <, ۰, ۱\rangle$ *تعریف‌پذیر است.*

اثبات. فرض کنید Fib و $\mathrm{Fib}_{\mathrm{even}}$ به‌ترتیب بیان‌گر مجموعهٔ اعداد فیبوناتچی و مجموعهٔ اعداد فیبوناتچی با اندیس زوج باشند. در این صورت با توجه به نتیجهٔ ۳-۲۶، $x \in \mathrm{Fib}_{\mathrm{even}}$ اگر و تنها اگر مثبت باشد و در فرمول زیر صادق باشد:

$$\forall y\Big(۰ < y < x \to [\varphi x] < [\varphi y]\Big).$$

بنابراین $x \in \mathrm{Fib}$ اگر و تنها اگر $x \in \mathrm{Fib}_{\mathrm{even}}$ یا $x = f(y)$ برای یک $y \in \mathrm{Fib}_{\mathrm{even}}$، زیرا با توجه به فصل قبل (حقیقت ۲-۹)، $f(F_{۲n}) = F_{۲n+۱}$، به این معنی که فیبوناتچی‌های با اندیس فرد، تصویر فیبوناتچی‌های با اندیس زوج هستند. □

تعریف‌پذیری مجموعهٔ اعداد فیبوناتچی، نتیجهٔ دیگری نیز دارد.

ملاحظه ۳-۲۸. از تصمیم‌پذیری ساختار $\mathcal{Z}_\varphi$ می‌توان استنتاج کرد که ساختار $\langle \mathbb{N}, \mathrm{Fib}, +, -, ۰, ۱, <\rangle$، تصمیم‌پذیر است؛ زیرا این ساختار در ساختار $\mathcal{Z}_\varphi$ تعبیر می‌شود. علاوه‌بر این، انتظار می‌رود که تابع f در این ساختار تعریف نشود. مطالعهٔ این موضوع نیز سوال جالبی است.

مشاهدهٔ سادهٔ دیگری نیز می‌توان از نتایج بالا داشت و آن هم این است که فیبوناتچی‌های زوج را می‌توان با استفادهٔ از تابع f تعریف کرد.

مشاهده ۳-۲۹. *برای هر عدد طبیعی* n*، همواره* $F_{۲n}$ *برابر است با* $(f + id)^n(۱)$.

اثبات. با استفاده از استقرا به‌راحتی ثابت می‌شود. □

به‌طور مشابه نتیجه می‌شود که بیشترین مقدار تابع g در فیبوناتچی‌های با اندیس فرد اتفاق می‌افتد.

حقیقت ۳-۳۰. *در هر بازهٔ* $(۰, a)$*، بیشترین مقدار تابع* g *در بزرگترین فیبوناتچیِ با اندیسِ فردِ کوچکتر از* a *رخ می‌دهد. بنابراین تابع* g *بر روی فیبوناتچی‌های با اندیس فرد، صعودی اکید است.*

اثبات. ابتدا توجه کنید که از لم ۲-۴ فصل قبل نتیجه می‌شود که برای هر عدد طبیعی n، همواره $f(n + f(n)) = f(n) + f(f(n)) + ۱$، بنابراین $[\varphi n] + [\varphi f(n)] > ۱$. پس $[\varphi n]$ هر چه که به صفر نزدیک‌تر شود، $[\varphi f(n)]$ نیز به ۱ نزدیک‌تر می‌شود. حال از آنجایی‌که $f(F_{۲n}) = F_{۲n+۱}$، نتیجه می‌شود که بیشترین مقدار تابع g در اندیس‌های فرد رخ می‌دهد. صعودی بودن تابع g روی فیبوناتچی‌های با اندیس فرد نیز بدیهی است. □

از حقایق و نتایجی که در بالا گفته شد، نتیجه می‌گیریم که تابع g در هر بازهٔ داده شدهٔ $(\circ, a)$، کمترین مقدار (بیشترین مقدار) خود را در بزرگترین عدد فیبوناتچی با اندیس زوج (فرد) می‌گیرد. به‌بیانی دیگر، تابعی که هر a داده شده را به بیشترین و یا کمترین مقدار تابع g در بازهٔ $(\circ, a)$ می‌نگارد، تابعی تعریف‌پذیر است. این توابع را به‌ترتیب G و H می‌نامیم. به‌عبارتی دیگر، $G(\circ, a) = c$ اگر و تنها اگر $g(c) = \min\{g(x)|x \in (\circ, a)\}$ باشد و به‌طور مشابه $H(\circ, a) = d$ اگر و تنها اگر $g(d)$ بیشترین مقدار مجموعهٔ $\{g(x)|x \in (\circ, a)\}$ باشد. اما چه اتفاقی می‌افتد اگر به‌جای بازهٔ خاص $(\circ, a)$ هر بازهٔ دلخواهی مانند (a, b) را درنظر بگیریم؟ آیا باز هم می‌توان این توابع را به‌صورت تعریف‌پذیر بیان کرد؟

ملاحظه ۳-۳۱. برای هر بازهٔ داده شده $[a, b]$ در اعداد طبیعی ($a \neq b$)، از روش زیر برای یافتن عدد n که $g(n)$ کمترین مقدار مجموعهٔ $\{g(x)|x \in [a, b]\}$ باشد، می‌توان استفاده کرد.
اگر در بازهٔ $[a, b]$ فیبوناتچی با اندیس زوجی قرار داشته باشد، در این صورت بزرگترین فیبوناتچی با اندیس زوج همان n مطلوب است. حال اگر هیچ فیبوناتچی با اندیس زوجی در این بازه قرار نداشته باشد، آنگاه $[a, b] \subseteq (F_{۲k_۱}, F_{۲k_۱+۲})$ برای یک عدد طبیعی k. در این صورت بازهٔ $[a - F_{۲k_۱}, b - F_{۲k_۱}]$ را جایگزین بازهٔ اصلی کنید. حال اگر $F_{۲\ell}$ بزرگترین فیبوناتچی با اندیس زوج در این بازه باشد، آنگاه $F_{۲k_۱} + F_{۲\ell}$ همان عددی است که بدنبال آن بوده‌ایم. در غیر این صورت، $[a - F_{۲k_۱}, b - F_{۲k_۱}] \subseteq [F_{۲k_۲}, F_{۲k_۲+۲}]$ برای یک عدد طبیعی $k_۲ \leq k_۱$ و این بار بازهٔ اصلی را با بازهٔ $[a - F_{۲k_۱} - F_{۲k_۲}, b - F_{۲k_۱} - F_{۲k_۲}]$ جایگزین می‌کنیم. با انجام این روند، با توجه به اینکه a و b دو عدد طبیعی هستند و بین آنها تعداد متناهی عدد طبیعی وجود دارد، این روند پس از چند مرحلهٔ متناهی متوقف می‌شود و عدد حاصل نیز به‌صورت $F_{۲k_۱} + F_{۲k_۲} + \ldots + F_{۲k_m}$ است که همان عدد مطلوب است.

با روشی مشابه البته با استفاده از فیبوناتچی‌های با اندیس فرد، می‌توان در هر بازه از اعداد طبیعی، عددی یافت که تابع g در آن بیشترین مقدار خود را در بازهٔ داده شده، اخذ می‌کند.

ملاحظه ۳-۳۲. فرض کنی $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, -, f, <, \circ, ۱)$ و $F \in \mathrm{Fib}(M)$. در این صورت اینکه کمترین مقدار تابع g در بازهٔ $[\circ, F]$، در F اتفاق می‌افتد، در $\mathcal{M}$ بیان‌پذیر است. همچنین یکسان بودن الگوی قسمت‌های اعشاری اعداد در دو بازهٔ $(\circ, F)$ و $(F, f(F))$ برای هر $F \in \mathrm{Fib}_e(M)$ نیز در $\mathcal{M}$ بیان‌پذیر است. توجه کنید که $f(F)$ کوچکترین عنصر بزرگتر از F (تالی بلافصل F) در مجموعهٔ $\mathrm{Fib}(M)$ است. بنابراین روشی که در ملاحظهٔ بالا توضیح داده شد، را می‌توان در این مدل نیز برای بدست آوردن کمترین و یا بیشترین مقدار تابع g در یک بازهٔ داده شده (حتی بازهٔ غیراستاندارد)، بکار برد. اما ممکن است این روش در بازه‌های غیراستاندارد، بعد از متناهی مرحله متوقف نشود، زیرا اعداد غیراستاندارد نمایش فیبوناتچی متناهی ندارند. لذا این روش را نمی‌توان در حالت کلی و به هر مدلی تعمیم داد.

در ادامهٔ این زیر بخش، به‌دنبال یافتن جوابی برای دستگاه زیر هستیم.

$$\begin{cases} x \in (a, b) \\ g(x) \in (g(c), g(d)) \end{cases}$$

توجه داشته باشید که در این دستگاه اگر برای x محدودیتی وجود نداشته باشد، آنگاه این مساله به سادگی و با استفاده از حقیقت زیر قابل حل است.

حقیقت ۳-۳۳. *قسمت اعشاری عدد* $\varphi(c + \bar{f}(d - c))$ *در بازهٔ* $([\varphi c], [\varphi d])$ *قرار دارد.*

اثبات. ابتدا توجه کنید که برای هر x دلخواه همواره $[\varphi \bar{f}(x)] = (۲ - \varphi)[\varphi x]$. حال از آنجایی‌که $[\varphi c] < [\varphi d]$، بنابراین $[\varphi \bar{f}(d - c)] = (۲ - \varphi)([\varphi d] - [\varphi c])$. همچنین $(۱ - \varphi)[\varphi c] > (۱ - \varphi)[\varphi d]$، که نتیجه می‌شود $[\varphi c] + (۲ - \varphi)([\varphi d] - [\varphi c]) < [\varphi d]$. از این نابرابری نتیجه می‌شود که $[\varphi c + \varphi \bar{f}(d - c)] = [\varphi c] + (۲ - \varphi)([\varphi d] - [\varphi c])$. واضح است که $[\varphi c] < [\varphi c] + (۲ - \varphi)([\varphi d] - [\varphi c])$. □

بیان مرتبهٔ اول و بدون‌سور قضیهٔ یک‌بعدی کرونکر نتیجه‌ای جالب از این حقیقت است.

افزودن تابع G به زبان باعث می‌شود که عناصر دنبالهٔ فیبوناتچی در یک زیرساختار $\mathcal{A}$ از یک مدل $\mathcal{M}$، از نظریهٔ $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, -, f, G, <, ۰, ۱)$ در این مدل نیز فیبوناتچی باقی بمانند، به این معنی که $\mathrm{Fib}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Fib}(\mathcal{M})$. زیرا برای هر عدد دلخواه a، $G(۰, a)$ برابر با بزرگترین فیبوناتچی با اندیس زوج کمتر از a است. توجه داشته باشید که در $\mathcal{M}$ ممکن است اعداد فیبوناتچی دیگری غیر از عناصر $\mathrm{Fib}(\mathcal{A})$ یافت شوند، ولی وجود این عناصر زمانی که تابع G را به مجموعهٔ A تحدید می‌کنیم، تاثیری بر رفتار این تابع ندارد.

وجود تابع G در زبان، مزایای جالب دیگری نیز دارد، که در حقیقت زیر یکی از آنها را بیان می‌کنیم.

حقیقت ۳-۳۴. *فرض کنید* $\mathcal{M}$ *مدلی برای نظریهٔ* $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, -, f, G, <, ۰, ۱)$ *و* a، b *و* c *عناصری در* M *باشند. در این صورت موارد زیر برقرار هستند.*

۱. *فرض کنید* $S_c = \{x \in (a, b) : [\varphi x] > [\varphi c]\} \neq \emptyset$. *در این صورت اگر* $p = G(a - c, b - c) + c$، *آنگاه* $[\varphi p] = \min\{[\varphi x] : x \in S_c\}$.

۲. *اگر* $S'_c = \{x \in (a, b) : [\varphi x] > ۱ - [\varphi c]\} \neq \emptyset$ *و* $q = G(a + c, b + c) - c$. *در این صورت* $[\varphi q] = \min\{[\varphi x] : x \in S'_c\}$.

اثبات. مورد ۱. فرض کنید $[\varphi p] = \min\{[\varphi x] : x \in S_c\}$. ادعا می‌کنیم $[\varphi(p-c)] = \min\{[\varphi x] : x \in (a-c, b-c)\}$. در این صورت $G(a-c, b-c) = p-c$ و حکم ثابت می‌شود.

از آنجایی‌که $[\varphi p] > [\varphi c]$، پس $[\varphi(p-c)] = [\varphi p] - [\varphi c]$. هر عنصر $x \in (a-c, b-c)$ را می‌توان به‌صورت $x' - c$ نوشت که در آن $x' \in (a, b)$. حال اگر $[\varphi x'] > [\varphi c]$، آنگاه $[\varphi(x'-c)] = [\varphi x'] - [\varphi c]$. از آنجایی‌که $x' \in (a, b)$ و $[\varphi x'] > [\varphi p]$، لذا $[\varphi x] = [\varphi(x'-c)] > [\varphi(p-c)]$. درغیر این صورت، اگر $[\varphi x'] < [\varphi c]$، آنگاه واضح است که $[\varphi(x'-c)] = [\varphi x'] - [\varphi c] + ۱ > [\varphi p] - [\varphi c] = [\varphi(p-c)]$. بنابراین در هر دو حالت $[\varphi(p-c)]$ کمترین مقدار مجموعهٔ $\{[\varphi x] : x \in (a-c, b-c)\}$ است.

مورد ۲. فرض کنید $[\varphi q] = \min\{[\varphi x] : x \in S'_c\}$. با استدلالی مشابه با استدلال مورد ۱، می‌توان نشان داد که $[\varphi(q+c)] = \min\{[\varphi x] : x \in (a = c, b+c)\}$، بنابراین $G(a+c, b+c) = q+c$. □

با بیان این حقایق و مشاهده‌ها، می‌توانیم دستگاه مورد نظر را حل کنیم.

نتیجه ۳ـ۳۵. *دستگاه زیر را در نظر بگیرید.*

$$\begin{cases} a < x < b, \\ [\varphi c] < [\varphi x] < [\varphi d], \end{cases} \tag{۱۴}$$

حقیقت بالا بیان می‌کند که $G(a-c, b-c) + c$ جوابی برای این دستگاه است.

ملاحظه ۳ـ۳۶. اگر بخواهیم برای ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, -, f, G, <, ۰, ۱ \rangle$ حذف‌سور را ثابت کنیم، باید بتوانیم جوابی برای دستگاه (۱۴) بیابیم. بنابراین با توجه به نتیجهٔ ۳ـ۳۵ به‌نظر می‌رسد که بتوان حذف‌سور را با افزودن تابع G به زبان، ثابت کرد. اما در این صورت باید معادلاتی به‌صورت زیر را حل کنیم، که وجود تابع G در زبان به ما در حل این دستگاه کمکی نمی‌کند.

$$\begin{cases} a < x_۱ < x_۲ < b \\ [\varphi c] < [\varphi x_۱] < [\varphi x_۲] < [\varphi d], \end{cases} \tag{۱۵}$$

تابع G می‌تواند در یافتن عناصر $x_۱$ و $x_۲$ به‌صورت مجزا، مورد استفاده قرار گیرد ولی اینکه این دو عنصر از لحاظ ترتیب عددی و اعشاری چه وضعیتی نسبت به یکدیگر دارند را تابع G نمی‌تواند تضمین کند. این مشاهده باعث شد تا در روند اثبات حذف‌سور، ما به سراغ الگوهای عددی‌ـاعشاری رویم.

علاوه‌بر ملاحظاتی که در بالا گفته شد، برخی مجموعه‌های تعریف‌پذیر نیز خاصیت توپولوژیکی جالبی دارند.

ملاحظه ۳-۳۷. فرض کنید که X زیرمجموعه‌ای تعریف‌پذیر و بی‌کران از $\mathbb{Z}$ باشد، در این صورت تعریف کنید $[\varphi X] = \{[\varphi x] \ : \ x \in X\}$. این مجموعهٔ $[\varphi X]$ دارای نقطهٔ حدی است. به‌بیانی دیگر، اگر X مجموعه‌ای تعریف‌پذیر و بی‌کران باشد، آنگاه برای هر z، عناصر متمایزی مانند x و y در X موجودند که $[\varphi z] < [\varphi y] - [\varphi x] < ۰$. این گزاره در تمام مدل‌های نظریه نیز درست است.

فصل ۴

تصمیم‌پذیری بسط ساختار جمعی اعداد صحیح با یک دنبالهٔ بیتی

فرض کنید α یک عدد **متعالی محاسبه‌پذیر** بزرگ‌تر از یک باشد. در این فصل به مطالعهٔ ساختار $\mathcal{Z}_\alpha = \langle \mathbb{Z}, +, ۰, ۱, f \rangle$ پرداخته‌ایم، که در آن f، تابعی است که هر عنصر x را به $\lfloor \alpha x \rfloor$ می‌نگارد. هدف ما در این فصل، اثبات تصمیم‌پذیری این ساختار است. رویکردی که در این فصل دنبال می‌کنیم، متفاوت از رویکرد فصل ۲ است. در این فصل، تصمیم‌پذیری را به‌عنوان نتیجه‌ای از مدل‌کامل بودن ساختار بیان می‌کنیم، بنابراین مهمترین نتیجهٔ این فصل قضیهٔ زیر است.

قضیه. *ساختار $\mathcal{Z}_\alpha$ مدل‌کامل است و در نتیجه تصمیم‌پذیر است.*

برای اثبات قضیهٔ بالا، باید حل‌پذیری دستگاه‌های معادلات را بررسی کنیم. به‌منظور یافتن شرط حل‌پذیری دستگاه‌های معادلات، ابتدا معادلات را به دو دستهٔ غیرجبری و جبری دسته‌بندی می‌کنیم. معادلات غیرجبری، معادلاتی هستند که دارای تعداد متناهی جواب نیستند. در گام نخست، شرط حل‌پذیری این معادلات را بدست می‌آوردیم و این شرط را به‌عنوان یک اصل به نظریه می‌افزاییم. در گام بعدی، برای یافتن شرط حل‌پذیری دستگاه معادلات جبری، ابتدا حالت سادهٔ معادلات جبری تک‌متغیره را در نظر می‌گیریم و شرط معادل آن را به‌عنوان اصل دیگری به نظریه اضافه می‌کنیم. سپس، به بررسی معادلات دومتغیره می‌پردازیم و در ادامه روش حل معادلات چندمتغیره را از حالت دومتغیره نتیجه می‌گیریم. در حالت دومتغیره، ابتدا دستگاه معادلاتی را درنظر می‌گیریم که تنها شامل یک معادلهٔ جبری

است و شرط حل‌پذیری چنین دستگاهی را به‌عنوان اصل جدیدی در نظریه قرار می‌دهیم. درنهایت دستگاه‌های با دو معادلهٔ جبری را درنظر می‌گیریم و شرط حل‌پذیری آن را به‌عنوان یک اصل به نظریه می‌افزاییم. در هر مرحله، قبل از بیان هر اصل، با ارائهٔ یک لم، درستی اصل مورد نظر را در ساختار $\mathcal{Z}_\alpha$ بیان می‌کنیم و پس از بیان اصل، مدل‌کامل بودن نظریه‌ای که تا آنجا ساخته شده است را نشان می‌دهیم. در انتها، از اینکه ساختار $\mathcal{Z}_\alpha$ مدل اولی برای نظریهٔ ارائه شده است، کامل بودن نظریه و با توجه به بازگشتی بودن اصول موضوعه، تصمیم‌پذیری را استنتاج می‌کنیم.

نتایج بدست آمده در این فصل کاملاً جدید است و در حال حاضر هنوز در مجله‌ای به چاپ نرسیده است. نسخهٔ آمادهٔ ارسال آن در [۱۱] موجود است.

۱.۴ اصول موضوعهٔ اولیه

در این ساختار به‌خودی‌خود ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, \circ \rangle$ قرار دارد، بنابراین تمام اصول نظریهٔ $\mathbb{Z}$ـگروه‌ها در این ساختار درست است. لذا اولین اصلی ($T_\circ$) را که برای این ساختار بیان می‌کنیم و آن را با $T_\circ$ نشان می‌دهیم، همان اصول نظریهٔ $\mathbb{Z}$ـگروه‌ها است.

در ادامهٔ این بخش، مشابه فصل‌های قبل، سعی داریم که یکی از مهمترین قضیه‌هایی که از آن در این فصل به کثرت استفاده می‌کنیم، یعنی قضیهٔ کرونکر، را مرتبهٔ اول بیان کنیم و آن را به‌عنوان اصلی در نظریه قرار دهیم. اما با توجه به غیرجبری بودن α، نیاز به صورت چندبُعدی این قضیه داریم.

مشابه به فصل ۲، در این ساختار نیز ترتیب بین اعداد به‌صورت $[\alpha x]$ علاوه‌بر اینکه تعریف‌پذیر است، نقشی اساسی را در اثبات‌های ما ایفا می‌کند. برای مثال، همانطور که در فصل ۲ اشاره کردیم، برای هر دو عنصر a و b همواره $f(a+b) = f(a) + f(b) + \ell$، برای یک $\ell \in \{\circ, ۱\}$، که $\ell = \circ$ اگر و تنها اگر $[\alpha a] + [\alpha b] < ۱$.

حال که ترتیب بین قسمت‌های اعشاری تعریف‌پذیر است، می‌توانیم قضیهٔ تخمین چندبُعدی کرونِکِر [۱] را به‌صورت مرتبه اول، بیان کنیم.

حقیقت ۴-۱ (قضیهٔ چندبعدی کرونکر)**.** *اگر اعداد حقیقی* $\beta_۱$، ...، β_n *و* ۱ *روی* $\mathbb{Q}$ *مستقل خطی باشند، آنگاه مجموعهٔ* $\{([\beta_۱ x], \ldots, [\beta_n x]) : x \in \mathbb{N}\}$ *در* $(\circ, ۱)^n$ *چگال است.*

اثبات. برای مشاهدهٔ اثبات این قضیه به [۷، قضیه ۴۴۲] مراجعه کنید. □

بسیاری از ویژگی‌های تابع f در این ساختار از قضیهٔ کرونکر نتیجه می‌شود اما از آنجایی که صورت ظاهری این قضیه یک فرمول مرتبه اول در زبان نیست، باید قضیه را با بهره بردن از امکانات زبان بیان

[۱] Kronecker's approximation theorem

کنیم. در ابتدا چند خاصیت مهم و کاربردی قسمت‌های اعشاری را که در زبان قابل تعریف هستند، بیان می‌کنیم.

لم ۴-۲. *برای هر عدد صحیح* a *و* b،

۱. $[\alpha b] < ۱ - [\alpha a]$ *اگر و تنها اگر* $\mathcal{Z}_\alpha \models f(a+b) = f(a) + f(b)$.

۲. $[\alpha a] < [\alpha b]$ *اگر و تنها اگر* $\mathcal{Z}_\alpha \models \phi(a,b)$، که

$$\phi(x,y) := \forall z\,(f(z+x) = f(z) + f(x) + ۱ \to f(z+y) = f(z) + f(y) + ۱)\,.$$

اثبات. اثبات مورد اول ساده است. برای اثبات قسمت دوم، دقت کنید که فرمول $\phi(x,y)$ بیان می‌کند که برای هر z، اگر $[\alpha x] + [\alpha z] > ۱$، آنگاه $[\alpha y] + [\alpha z] > ۱$. بنابراین اگر $[\alpha a] < [\alpha b]$، آنگاه واضح است که $\phi(a,b)$ در $\mathcal{Z}_\alpha$ درست است.

برای اثبات طرف دیگر قسمت دوم، به برهان خلف فرض کنید که $[\alpha a] > [\alpha b]$. در این صورت $[\alpha b] - ۱ > [\alpha a] - ۱$. حال از این نابرابری و قضیهٔ کرونکر نتیجه می‌شود عنصری مانند c چنان موجود است که $[\alpha b] - ۱ > [\alpha c] > [\alpha a] - ۱$ و این تناقض با فرض مساله است؛ زیرا $[\alpha a] + [\alpha c] > ۱$، درحالی که $[\alpha b] + [\alpha c] < ۱$. $\square$

در فصل ۲ از محمول R برای بیان این ترتیب بین قسمت‌های اعشاری استفاده کرده بودیم. این فرمول ϕ، در واقع همان رابطهٔ R است.

بنابراین به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ کرونکر، قسمت دوم لم بالا معادلی عمومی برای فرمول $[\alpha a] < [\alpha b]$ ارائه می‌دهد. این فرمول بیان‌گر ترتیب در مورد قسمت اعشاری اعداد است. بنابراین باید این ویژگی را در اصول موضوعه قرار دهیم. قبل از آن، با توجه به این لم، نمادگذاری‌های زیر را پیشنهاد می‌کنیم.

نمادگذاری ۴-۳.

۱. بجای استفاده از فرمول مرتبه اول $\phi(x,y)$ برای راحتی از «$[\alpha x] < [\alpha y]$» استفاده می‌کنیم. به‌طور مشابه و بدون هیچ‌گونه ابهامی از عبارت‌های «$[\alpha x] \in ([\alpha a], [\alpha b])$» یا «$[\alpha a] < [\alpha x] < [\alpha b]$» استفاده می‌کنیم.

۲. منظور از عبارت «$[\alpha x] < ۱ - [\alpha a]$»، فرمول مرتبهٔ اول $f(x+a) = f(x) + f(a)$ است و به‌طور مشابه، منظور از «$[\alpha x] > ۱ - [\alpha a]$» فرمول مرتبهٔ اول $f(x+a) = f(x) + f(a) + ۱$ است.

۳. از نماد «$[\alpha y] - ۱ < [\alpha x] - ۱$» به‌جای نماد «$[\alpha x] < [\alpha y]$» نیز استفاده می‌کنیم.

۴. برای خوانِش بهتر، نمادهای گیومه را از تمام عبارات بالا حذف می‌کنیم.

۵. از نماد $[\alpha x] < [\alpha y]$ و تمامی نمادهای دیگر برای بیان رابطهٔ ترتیب بین قسمت‌های اعشاری، به‌معنای طبیعی (ترتیب طبیعی روی اعداد حقیقی) استفاده می‌کنیم، مگر اینکه در متن به‌صورت مستقیم به آن اشاره کنیم.

همان‌گونه که قابل حدس بود، اصولی نیاز است که این اصول بیانگر ترتیب خطی رابطهٔ $[\alpha y] < [\alpha x]$ باشد. علاوه‌بر آن، قضیهٔ کرونکر بیان می‌کند که این رابطهٔ ترتیب خطی، چگال نیز است. بنابراین اصول زیر را به‌عنوان یکی از اصول موضوعه نظریه قرار می‌دهیم.

اصل ۱.

۱. رابطهٔ $[\alpha y] < [\alpha x]$ یک رابطهٔ ترتیب خطی چگال است.

۲. برای هر x و y، همواره یا $[\alpha y] - ۱ < [\alpha x]$ یا $[\alpha y] - ۱ > [\alpha x]$.

از آنجایی‌که هدف ما در این فصل، اثبات مدل‌کامل بودن است، بنابراین نیازی به بررسی روابط همنهشتی نداریم. با این وجود، از آنجایی که اثبات گزارهٔ زیر شهود بهتری را نسبت به قضیهٔ کرونکر و نحوهٔ «انتخاب آزادانه» $[\alpha x]$ برای ما فراهم می‌کند، آن را بیان می‌کنیم.

گزاره ۴-۴. *دستگاه معادلات زیر دارای نامتناهی جواب در اعداد صحیح است.*

$$\begin{cases} x \overset{m}{\equiv} i \\ f(x) \overset{n}{\equiv} j \end{cases} \tag{۱}$$

اثبات. با توجه به لم ۲-۱۶، داریم $f(x) \overset{n}{\equiv} j$ اگر و تنها اگر $[\alpha \frac{x}{n}] \in (\frac{j}{n}, \frac{j+۱}{n})$. بنابراین، برای حل این دستگاه، کافی است عددی مانند y را بیابیم به‌طوری که

$$\left[\frac{(my+i)\alpha}{n}\right] \in (\frac{j}{n}, \frac{j+۱}{n}).$$

حال اگر $[\frac{i}{n}\alpha] < \frac{j+۱}{n}$، در این صورت بنابه قضیهٔ کرونکر، عنصر y را چنان می‌یابیم که

$$\left[\frac{m\alpha}{n}y\right] < ۱ - \left[\frac{i}{n}\alpha\right]$$

و همزمان

$$\frac{j}{n}-\left[\frac{i}{n}\alpha\right]<\left[\frac{m\alpha}{n}y\right]<\frac{j+1}{n}-\left[\frac{i}{n}\alpha\right].$$

در این صورت

$$\left[\frac{(my+i)\alpha}{n}\right]=\left[\frac{m\alpha}{n}y\right]+\left[\frac{i}{n}\alpha\right]\in(\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}).$$

در حالتی که $[\frac{i}{n}\alpha]>\frac{j+1}{n}$، با استفاده از قضیهٔ کرونکر، عنصر y را به‌نحوی انتخاب می‌کنیم که

$$\left[\frac{m\alpha}{n}y\right]>1-\left[\frac{i}{n}\alpha\right]$$

و نیز

$$1+\frac{j}{n}-\left[\frac{i}{n}\alpha\right]<\left[\frac{m\alpha}{n}y\right]<1+\frac{j+1}{n}-\left[\frac{i}{n}\alpha\right].$$

در این حالت نیز مشابه حالت بالا، $\left[\frac{(my+i)\alpha}{n}\right]$ در بازهٔ مطلوب قرار می‌گیرد. □

از این گزاره نتایج بسیار جالبی می‌توان گرفت، مثلاً چگال بودن قسمت‌های اعشاری عناصر $n\mathbb{Z}\alpha$ در $\mathbb{Z}\alpha$ نسبت به این رابطه، یکی از این موارد است. علاوه‌براین، با توجه به گزارهٔ فوق عبارت «$[\alpha x]\in(\frac{j}{n},\frac{j+1}{n})$» نیز در زبان قابل بیان است.

از آنجایی‌که α عددی متعالی است، بنابراین اعداد $\alpha,\dots,\alpha^n$ و ۱ روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی هستند. بنابراین قضیهٔ چندبعدی کرونکر نیز برای این اعداد برقرار است. همان‌طور که بیان شد، برای اثبات مدل‌کامل بودن نیاز است که قسمت‌های اعشاری را بتوانیم «کنترل» کنیم. بنابراین قضیهٔ کرونکر را به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم تا از آن بتوانیم در اثبات مدل‌کامل بودن استفاده کنیم. قضیهٔ زیر درمورد اعداد طبیعی است و منظور از چگال بودن، همان مفهوم معمولی آن در اعداد حقیقی است. در این قضیه و در ادامهٔ این فصل، مشابه با فصل‌های قبلی، منظور از f^n، n بار ترکیب تابع f با خودش است.

قضیه ۴-۵ (قضیهٔ کرونکر تعمیم‌یافته). *برای هر عدد طبیعی n، مجموعهٔ زیر در $(0,1)^n$ چگال است.*

$$\{([\alpha x],[\alpha f(x)],\dots,[\alpha f^{n-1}(x)]) : x\in\mathbb{N}\}$$

اثبات. برای اثبات چگال بودن این مجموعه، ابتدا نشان می‌دهیم که می‌توان عنصری مانند x را یافت به‌طوری که قسمت اعشاری αx و $\alpha f(x)$ در بازه‌های مطلوب قرار بگیرند. برای این منظور، فرض کنید $[\alpha x]\in(\frac{k}{\alpha^m},\frac{k+1}{\alpha^m})$ برای برخی اعداد طبیعی k و $m\geq 2$. در این صورت

$$\frac{k}{\alpha^{m-1}}<\alpha\,[\alpha x]<\frac{k+1}{\alpha^{m-1}}.$$

حال اگر $[\alpha^{2}x] > \frac{k+1}{\alpha^{m-1}}$، در این صورت

$$[\alpha f(x)] = [\alpha(\alpha x - [\alpha x])] = [\alpha^{2}x] - \alpha\,[\alpha x]\,.$$

که عبارت نهایی با توجه به فرض مساله در بازهٔ $(0, 1 - \frac{k+1}{\alpha^{m-1}})$ قرار می‌گیرد. به‌طور مشابه، اگر $[\alpha^{2}x] < \frac{k+1}{\alpha^{m-1}}$، آنگاه

$$[\alpha f(x)] = [\alpha(\alpha x - [\alpha x])] = [\alpha^{2}x] - \alpha\,[\alpha x] + 1.$$

به‌طور مشابه، عبارت نهایی در بازهٔ $(1 - \frac{k}{\alpha^{m-1}}, 1)$ قرار می‌گیرد. حال چون $(1 - \frac{k}{\alpha^{m-1}}, 1) \cup (0, 1 - \frac{k+1}{\alpha^{m-1}}) \subseteq (0, 1)$، بنابراین با به‌کار بردن قضیهٔ کرونکر برای اعداد α و α^{2}، برای هر a، b، c و d می‌توان عنصری مانند x یافت به‌طوری که $[\alpha x] \in (a,b)$ و $[\alpha f(x)] \in (c,d)$.

حال با استفاده از استقرا و استدلالی مشابه استدلال بالا، چون $\alpha f^{n}(x) = \alpha f(f^{n-1}(x))$، بنابراین برای کنترل قسمت اعشاری $\alpha f^{n}(x)$ کافی است که قسمت اعشاری $\alpha^{n} f(x)$ را کنترل کنیم. از طرفی دیگر داریم $[\alpha^{n} f(x)] = [\alpha^{n+1}x - \alpha^{n}\,[\alpha x]]$. بنابراین اگر $\alpha^{n}\,[\alpha x]$ در بازهٔ $(\frac{k}{\alpha^{m}}, \frac{k+1}{\alpha^{m}})$ باشد، آنگاه می‌توان با کنترل قسمت اعشاری $\alpha^{n+1}x$، قسمت اعشاری $\alpha^{n} f(x)$ را در بازهٔ مطلوب قرار داد. بنابراین می‌توان x را به‌گونه‌ای انتخاب کرد که تمام قسمت‌های اعشاری $\alpha f^{i}(x)$ در بازه‌های مطلوب قرار بگیرند. $\square$

به بیان دیگر، قضیهٔ فوق بیان می‌کند که برای هر عدد طبیعی i قسمت اعشاری $\alpha f^{i}(x)$ را می‌توان «آزادانه» و مستقل از قسمت‌های اعشاری $\alpha f^{j}(x)$، برای هر $j \neq i$، انتخاب کرد.

از آنجایی که قضیهٔ بالا مهمترین قضیه‌ای است که برای اثبات مدل‌کامل بودن ساختار از آن استفاده می‌کنیم، نیاز است که آن را به عنوان یک اصل به نظریه بیافزاییم.

شمای اصول ۲. برای اعداد طبیعی a_1، b_1، …، a_n و b_n، اگر $[\alpha a_i] < [\alpha b_i]$، آنگاه حداقل m عدد طبیعی x چنان موجود است که

$$\bigwedge_{i=0}^{n} \left(1 - [\alpha a_i] < \left[\alpha f^{i}(x)\right] < 1 - [\alpha b_i] \right).$$

این شمای اصول در واقع بیان می‌کند که نامتناهی عدد طبیعی مانند x وجود دارد به‌طوری که همزمان $[\alpha f^{i}(x)]$ در هر بازهٔ داده شده قرار گیرد. همچنین با تغییر n و m اصل‌ها تولید می‌شوند، به این معنی که برای هر عدد طبیعی n و m یک اصل داریم.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید این اصل، فقط در مورد قسمت اعشاری $\alpha f^{i}(x)$ است. این در حالی است که در قسمت‌های بعد خواهیم دید که اگر $H(\alpha)$ تابع گویای چندجمله‌ای بر حسب α و با ضرایب صحیح باشد، آنگاه لازم است حقایقی نیز در مورد قسمت اعشاری $H(\alpha)x$ بدانیم.

با توجه به اینکه برای اثبات مدل‌کامل بودن، باید معادلات را حل کنیم، بنابراین معادلات را با توجه به اینکه فرمول‌هایی در مورد قسمت اعشاری در آنها ظاهر می‌شود و یا اینکه نمی‌شود، به دو زیردستهٔ معادلات غیرجبری و معادلات جبری تقسیم‌بندی می‌کنیم و در زیرفصل‌هایی جداگانه آنها را بررسی می‌کنیم. معادلاتی که در آنها قسمت اعشاری ظاهر می‌شود، چون بی‌نهایت جواب دارند، را معادلات غیرجبری نامیده‌ایم و معادلاتی مثل $f(x) = a$ که جواب آنها یکتا یا متناهی است را جبری نامیده‌ایم. در زیرفصل مربوط به هر کدام، آنها را به‌صورت دقیق تعریف می‌کنیم.

۲.۴ معادلات غیرجبری

در این زیرفصل، هدفمان ارائهٔ اصولی است که مدل‌کامل بودن نظریه را در حد فرمول‌های غیرجبری تضمین کند. برای این منظور ابتدا فرمول‌های غیرجبری را به‌صورت دقیق تعریف می‌کنیم. قبل از آن، لم زیر را بیان می‌کنیم که در آن فرمولی برحسب قسمت‌های اعشاری معرفی کرده‌ایم که علاوه‌بر اینکه در زبان قابل بیان است، در اثبات‌های قضایای بعد نیز بسیار از آن استفاده می‌کنیم.

لم ۴-۶. *برای عناصر $a_1, \dots, a_n$ و $b_1, \dots, b_n$ و نیز عدد صحیح ℓ، فرمول عمومی $\psi_\ell(\bar{a}, \bar{b})$ موجود است به‌طوری که با برقراری رابطهٔ زیر در $\mathcal{Z}_\alpha$ معادل است.*

$$[\alpha a_1] + \cdots + [\alpha a_n] < [\alpha b_1] + \cdots + [\alpha b_n] + \ell \tag{۲}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید این لم، تعمیمی از قسمت ۲ لم ۴-۲ است و اثبات آن نیز مشابه است.

اثبات. واضح است که اگر $\ell \geq n$، آنگاه ψ_ℓ معادل با یک فرمول همواره درست منطقی است و همچنین اگر $-n \leq \ell$، آنگاه ψ_ℓ معادل با تناقض است. حال فرض کنید که $0 \leq \ell < n$، در این صورت فرمول ψ_ℓ بیانگر این است که اگر قسمت اعشاری عددی مانند αx را به هر دو طرف رابطهٔ (۲) بیافزاییم، در این صورت اگر سمت چپ این نابرابری عددی مانند j تولید کرد، سمت راست تساوی عددی بزرگتر تولید کند. این فرمول به‌صورت ترکیب عطفی از فرمول‌هایی به‌شکل زیر برای هر $\ell < j \leq n$ است.

$$\begin{aligned} &\forall x \Big(f(a_1 + \cdots + a_n + x) = f(a_1) + \cdots + f(a_n) + f(x) + j \\ &\quad \to \bigvee_{0<i<n} f(b_1 + \cdots + b_n + x) = f(b_1) + \cdots + f(b_n) + f(x) + (j - \ell) + i \Big) \end{aligned} \tag{۳}$$

به‌صورت مشابه، اگر $-n < \ell < 0$، در این صورت ψ_ℓ ترکیب عطفی از فرمول‌هایی به‌شکل زیر است.

$$\forall x\Big(f(b_1+\cdots+b_n+x)=f(b_1)+\cdots+f(b_n)+f(x)+j$$
$$\rightarrow \bigvee_{0<i<n} f(a_1+\cdots+a_n+x)=f(a_1)+\cdots+f(a_n)+f(x)+(j+\ell)+i\Big)$$

□

نکته ۴-۷. از اثبات لم فوق مشاهده می‌شود که علاوه بر فرمول ψ_ℓ، نقیض آن نیز یک فرمول عمومی است. بنابراین فرمول ψ_ℓ دارای معادلی وجودی نیز است.

علاوه‌بر رابطهٔ (۲)، روابط دیگری نیز وجود دارند که در این ساختار قابل بیان هستند، که ما به ذکر روابطی که در ادامه به آنها نیاز داریم، بسنده می‌کنیم.

لم ۴-۸. *رابطهٔ زیر در $\mathcal{Z}_\alpha$ دارای معادلی بدون‌سور است.*

$$[\alpha(na)] = n\,[\alpha a] - i \qquad (۴)$$

اثبات. قرار دهید $\varphi_{n,i}(a) := f(na) = nf(a) + i$، در این صورت $\varphi_{n,i}$ فرمول بدون‌سور مطلوب است. □

با توجه به دو لم فوق، نمادگذاری زیر را معرفی می‌کنیم.

نمادگذاری ۴-۹. از آنجایی‌که فرمول‌های ψ_ℓ و $\varphi_{n,i}$، به‌ترتیب معادل روابط (۲) و (۴) در ساختار $\mathcal{Z}_\alpha$ هستند، در ادامه بدون هیچ ابهامی، از خود روابط (۲) و (۴) به‌عنوان فرمول‌های مرتبهٔ اول استفاده می‌کنیم. همچنین در فرمول‌ها از نماد $\sum$ به معنی طبیعی خودش استفاده می‌کنیم.

با توجه به این نمادگذاری‌ها، حال به تعریف یک فرمول غیرجبری می‌پردازیم.

تعریف ۴-۱۰. فرمولی مانند $\theta(x_1,\ldots,x_l,\bar{a})$ را *غیرجبری* می‌نامیم هرگاه آن را بتوان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\sum_{i=0}^{k} n_{i1}\left[\alpha f^i(x_1)\right]+\cdots+\sum_{i=0}^{k} n_{il}\left[\alpha f^i(x_l)\right] < \sum_{i=0}^{k} m_i\,[\alpha a_i]+\ell$$

که m_i, n_{ij} و ℓ اعدادی صحیح هستند.
همچنین منظور از *تایپ غیرجبری* عناصر $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_l)$ روی مجموعهٔ A، مجموعهٔ همهٔ فرمول‌های غیرجبری $\theta(\bar{x},\bar{a})$ با $\bar{a}\in A$ است.

توجه کنید که طبق لم ۴-۲، $[\alpha a] < [\alpha x]$ و $[\alpha a] - 1 < [\alpha x]$ هر دو مثالی از فرمول‌های غیرجبری هستند.

تایپ غیرجبری x روی a، برخی ویژگی‌های قسمت‌های اعشاری را بیان می‌کند. به‌عنوان مثال، این تایپ مقدار اعداد ℓ_i را که در فرمول‌های زیر صدق می‌کند، تعیین می‌کند.

$$\begin{aligned} f(x+a) &= f(x)+f(a)+\ell_1 \\ f^2(x+a) &= f(f(x)+(f(a)+\ell_1)) = f^2(x)+f(f(a)+\ell_1)+\ell_2 \\ f^3(x+a) &= f(f^2(x)+f(f(a)+\ell_1)+\ell_2) = f^3(x)+f(f(f(a)+\ell_1)+\ell_2)+\ell_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که $\ell_i \in \{0,1\}$. اما با توجه به نمادگذاری‌ها، این فرمول‌ها را می‌توانیم به‌صورت زیر برحسب قسمت‌های اعشاری بازنویسی کنیم.

	$\ell_i = 0$	$\ell_i = 1$
$i=1$	$[\alpha x]+[\alpha a] < 1$	$[\alpha x]+[\alpha a] > 1$
$i=2$	$[\alpha f(x)]+[\alpha(f(a)+\ell_1)] < 1$	$[\alpha f(x)]+[\alpha(f(a)+\ell_1)] > 1$
$i=3$	$[\alpha f^2(x)]+[\alpha(f(f(a)+\ell_1)+\ell_2)] < 1$	$[\alpha f^2(x)]+[\alpha(f(f(a)+\ell_1)+\ell_2)] > 1$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

معادله‌هایی به‌صورت معادلهٔ زیر نیز در تایپ غیرجبری عنصر x روی مجموعهٔ A، قرار دارد.

$$f(k_1 f(\cdots f(k_t x + a_t)\cdots)+a_1) = \sum_i m_i f^i(x) + \sum_i n_i f^i(a_i) + \ell$$

در این معادله ضرایب k_i، m_i، n_i و ℓ همگی اعداد صحیح هستند، t عددی طبیعی و a_i عناصری در مجموعهٔ A هستند.

لم ۴-۱۱. *فرض کنید $\bar{m}$، $\bar{n}$ و $\bar{l}$ چندتایی‌هایی با طول یکسان و k عددی طبیعی باشد. در این صورت فرمول بدون‌سور $\chi(\bar{a}) = \chi_{\bar{m},\bar{n},k,\bar{l}}(\bar{a})$ چنان موجود است که جواب داشتن دستگاه معادلات زیر در مجموعهٔ اعداد صحیح معادل با برقراری این فرمول در $\mathcal{Z}_\alpha$ است.*

$$\begin{cases} \sum n_{1j}\,[\alpha f^j(x)] < b_1 = \sum m_{1j}\,[\alpha a_j] + \ell_1 \\ \cdots \\ \sum n_{kj}\,[\alpha f^j(x)] < b_k = \sum m_{kj}\,[\alpha a_j] + \ell_k \end{cases} \tag{5}$$

اثبات. از آنجایی‌که طبق قضیهٔ کرونکر تعمیم‌یافته، قسمت‌های اعشاری $\alpha f^j(x)$ را می‌توان مستقل از یکدیگر کنترل کرد، یا به بیانی دیگر، متغیرهای مستقلی نسبت به یکدیگر هستند، بنابراین می‌توانیم در این دستگاه معادلات به‌جای $\alpha f^j(x)$ متغیر x_j قرار می‌دهیم. پس جواب داشتن دستگاه (۵) معادل با جواب داشتن دستگاه زیر در $\mathbb{R}$ است.

$$\begin{gathered}\sum n_{۱j}x_j < b_۱\\ \vdots\\ \sum n_{kj}x_j < b_k\\ x_j \in (۰,۱)\end{gathered} \tag{۶}$$

جواب داشتن این دستگاه در اعداد حقیقی، بستگی به ضرایب صحیح و مقایسهٔ اعداد b_i دارد. از طرفی دیگر، نمادگذاری امکان مقایسهٔ عناصر b_i را برای ما با استفاده از فرمول‌های غیرجبری، فراهم می‌کند. بنابراین جواب داشتن این دستگاه معادل با شرایطی درمورد پارامترهای دستگاه است. □

با توجه به لم فوق، شمای اصول زیر را برای معادلات غیرجبری بیان می‌کنیم.

شمای اصول ۳. دستگاه معادلات (۵) جواب دارد اگر و تنها اگر $\chi_{\bar{m},\bar{n},k,\bar{l}}(\bar{a})$.

فرض کنید $\mathcal{T}_{\rm nalg}$ (نظریهٔ غیرجبری $\mathcal{T}$)، نظریهٔ $T_۰$ همراه با اصل ۱ و شمای اصول ۲ و ۳ باشد. نشان می‌دهیم که در حد فرمول‌های غیرجبری، این نظریه مدل‌کامل است.

قضیه ۴-۱۲. *فرض کنید $\mathcal{M}_۱$ و $\mathcal{M}_۲$ دو مدل از نظریهٔ $\mathcal{T}_{\rm nalg}$ باشند که $\mathcal{M}_۱ \subseteq \mathcal{M}_۲$. در این صورت اگر دستگاهی از معادلات که شامل تعداد متناهی از معادلات به‌صورت*

$$\sum_{i=۱}^{k} n_{۱i}\left[\alpha f^i(x_۱)\right] + \cdots + \sum_{i=۱}^{k} n_{pi}\left[\alpha f^i(x_p)\right] < \sum_{i=۱}^{k} m_i\left[\alpha a_i\right] + \ell$$

با پارامتر در $\mathcal{M}_۱$ $(a_i \in M_۱)$، در $\mathcal{M}_۲$ جواب داشته باشد، آنگاه در $\mathcal{M}_۱$ نیز جواب دارد.

اثبات. فرض کنید $(x_۱, \dots, x_p)$ جواب این دستگاه در $\mathcal{M}_۲$ باشد. مجموعهٔ همهٔ فرمول‌های این دستگاه که در آنها فقط از متغیر $x_۱$ و پارامتر $\bar{a}$ استفاده شده را $\Gamma_۱(x_۱/\bar{a})$ می‌نامیم. در این صورت $\Gamma_۱(x_۱/\bar{a})$ زیرمجموعه‌ای متناهی از تایپ غیرجبری $x_۱$ روی $\bar{a}$ است و چون در $\mathcal{M}_۲$ دارای جواب است، پس بنابه اصل ۳، فرمول بدون‌سور معادل با آن در $\mathcal{M}_۲$ برقرار است. حال چون پارامترهای این فرمول بدون‌سور همگی در $M_۱$ قرار دارند، پس این فرمول بدون‌سور در $\mathcal{M}_۱$ نیز درست است. بنابراین عنصر $b_۱$ در $\mathcal{M}_۱$ موجود است که پاسخی برای معادلات موجود در مجموعهٔ $\Gamma_۱(x_۱/\bar{a})$ است. حال متغیر $x_۱$ را

در دستگاه معادلات با عنصر $b_۱$ جایگزین می‌کنیم و به‌طور مشابه در این دستگاه جدید مجموعهٔ همهٔ فرمول‌هایی که در آنها فقط از متغیر $x_۲$ و پارامترهای $\bar{a}$ و $b_۱$ استفاده شده است را $\Gamma_۲(x_۲/b_۱\bar{a})$ می‌نامیم. این مجموعه نیز، زیرمجموعه‌ای متناهی از تایپ غیرجبری عنصر $x_۲$ روی مجموعهٔ پارامترهای $\bar{a}$ و $b_۱$ است. بنابراین عنصر $b_۲$ در $\mathcal{M}_۱$ موجود است که تمام فرمول‌های این مجموعه را برآورده می‌کند. با ادامهٔ این روند، عنصری مانند $\bar{b}$ در $\mathcal{M}_۱$ پیدا می‌شود که پاسخی برای این دستگاه است. □

۳.۴ معادلات جبری

در قضیهٔ ۴-۱۲ ثابت کردیم که ساختار $\mathcal{Z}_\alpha$ در حد فرمول‌های غیرجبری، مدل‌کامل است. در اثبات این قضیه و اصولی که تا اینجا برای ساختار بیان کردیم، تنها از قضیهٔ کرونکر تعمیم‌یافته‌ای که برای قسمت‌های اعشاری $\alpha f^i(x)$ بیان شد، استفاده کردیم. اما قدرت قضیهٔ کرونکر، بسیار فراتر از این قضیه است. به‌عنوان مثال، همانطور که قبلا هم اشاره کردیم، قضیهٔ کرونکر را می‌توان برای هر تابع گویای $H(\alpha)$ نیز استفاده کرد. در این فصل علاوه بر آنچه گفته شد، از قضیهٔ کرونکر برای قسمت‌های اعشاری عناصری شبیه به $\frac{۱}{\alpha^i}x$ یا به‌طور کلی برای قسمت اعشاری $\frac{۱}{F(\alpha)}x$ نیز استفاده می‌کنیم، که در آن $F(\alpha)$ یک تابع چندجمله‌ای با ضرایب صحیح برحسب α است. هدف از این کار نیز، وارد کردن معادلات جبری به دستگاه معادلات غیرجبری و کامل کردن اثبات مدل‌کاملیت است. بررسی قسمت اعشاری $\frac{۱}{F(\alpha)}x$، از آن سوی اهمیت‌دار است که به ما در شناختن بُرد تابع $\lfloor F(\alpha)x\rfloor$ کمک می‌کند، در ادامه این ارتباط را بیان خواهیم کرد.

مشابه با دو زیرفصل قبلی، در این زیرفصل نیز هدف ارایهٔ شمای اصولی است که استدلال مدل‌کاملیت را کامل کند. به این معنی که دستگاه معادلات در کلی‌ترین حالت ممکن را درنظر می‌گیریم. ایدهٔ اصلی اثبات در این فصل، جایگزین کردن معادلات جبری با معادلات غیرجبری و همزمان افزودن تأثیر وابستگی‌هایی که به‌وسیلهٔ معادلات جبری بوجود می‌آیند، در معادلات غیرجبری است. پس از انجام این کار، مشاهده می‌کنیم که تمامی معادلات به معادلات غیرجبری تبدیل می‌شوند.

در ابتدا نیاز است که فرمول‌های جبری را به‌صورت دقیق تعریف کنیم.

تعریف ۴-۱۳. فرمول $\theta(\bar{x}, A)$ را *جبری* می‌نامیم هرگاه معادلی به‌صورت زیر داشته باشد.

$$\sum_i f^i(m_{۱i}x۱) + \cdots + \sum_i f^i(m_{ni}x_n) = A$$

دستگاه‌هایی که شامل معادلات جبری هستند، را با توجه به تعداد متغیرهای ظاهرشده در معادلات جبری و همچنین تعداد معادلات جبری، به‌طور جداگانه بررسی می‌کنیم. در روند اثبات، علت این دسته‌بندی در قابل مشاهده است، ما نیز این دلیل را در ابتدای زیرفصل ۳.۳.۴ شرح می‌دهیم.

۱.۳.۴ معادلات تک‌متغیره

قرار داشتن عنصری مانند A در بُرد تابع f، از ویژگی‌های ذاتی عنصر A در نظریهٔ کامل $\mathcal{Z}_\alpha$ است، به این معنی که تحت زیرمدل‌ها حفظ می‌شود. به‌عنوان مثال اگر $\alpha > ۲$، در این صورت قرار گرفتن عنصر A در برد تابع f معادل با یک جملهٔ عمومی است. این مشاهدهٔ ساده را در گزارهٔ زیر بیان و اثبات می‌کنیم.

گزاره ۴-۱۴. *اگر $\alpha > ۲$، آنگاه A در برد تابع f است اگر و تنها اگر هیچکدام از عددهای $A + j$ و $A - j$ برای $۰ < j < \lfloor\alpha\rfloor$، در برد تابع f نباشند.*

اثبات. از آنجایی‌که برای هر x همواره $f(x+۱) = f(x) + f(۱) + \ell$ که $\ell \in \{۰, ۱\}$، بنابراین

$$\lfloor\alpha\rfloor \le f(x+۱) - f(x) \le \lfloor\alpha\rfloor + ۱.$$

پس فاصلهٔ هر دوعنصر متوالی در برد تابع f حداقل $\lfloor\alpha\rfloor$ و حداکثر $\lfloor\alpha\rfloor + ۱$ است. یعنی از هر $\lfloor\alpha\rfloor + ۱$ عنصر متوالی حداقل یک عنصر در برد تابع f قرار دارد و همچنین از هر $\lfloor\alpha\rfloor$ عنصر متوالی حداکثر یک عنصر در برد تابع f قرار دارد. حال فرض کنید A در برد تابع f باشد. چون از هر $\lfloor\alpha\rfloor$ عنصر متوالی، حداکثر یک عنصر در برد تابع قرار دارد، پس هیچکدام از عناصر $A - ۱$، ... و $A - (\lfloor\alpha\rfloor - ۱)$ در برد تابع نیستند و به‌طور مشابه عناصر $A + ۱$، ... و $A + (\lfloor\alpha\rfloor - ۱)$ نیز در برد تابع قرار ندارند. حال فرض کنید تمام عناصر مجموعهٔ $\{A - j, A + j : ۰ < j < \lfloor\alpha\rfloor\}$ در برد تابع f نباشند. حال اگر A نیز در برد تابع قرار نداشته باشد، تناقض با این حقیقت است که از هر $\lfloor\alpha\rfloor + ۱$ عنصر متوالی حداقل یک عنصر در برد تابع f قرار دارد. بنابراین A در برد تابع f قرار دارد. □

در ادامه خواهیم دید که نیاز است تا برد هر تابعی به‌صورت $\lfloor F(\alpha)x\rfloor$ که در آن $F(\alpha)$ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح نسبت به α است ($F(\alpha) \in \mathbb{Z}[\alpha]$)، را بشناسیم. که در این مورد، گزارهٔ بالا پاسخگو نیست. بنابراین نیازمند گزاره‌ای دیگر هستیم که قرار داشتن عنصری در برد تابع f را به‌صورت عمومی بیان کند. لذا با کمک گرفتن از قسمت‌های اعشاری سعی می‌کنیم تا مشکل را برطرف کنیم.

فرض کنید α عددی غیرگویا و بزرگتر از یک باشد. با استفاده از خواص تابع جزءصحیح، می‌دانیم که A در برد f قرار دارد، اگر و تنها اگر $[\frac{A}{\alpha}] > ۱ - \frac{۱}{\alpha}$. که در این حالت اگر $f(x) = A$، آنگاه $x = \lfloor\frac{A}{\alpha}\rfloor + ۱$. در حالتی که $۰ < \alpha < ۱$، در این صورت تابع f پوشا است و دیگر نیازی به شناختن برد تابع f نیست.

بنابراین در حالت کلی، برای شناختن برد تابع $\lfloor F(\alpha)x\rfloor$، کافی است در عبارت بالا α را با $F(\alpha)$ جایگزین کنیم.

لم ۴-۱۵. *فرض کنید $H(x) := n_۰x + n_۱f(x) + \ldots + n_kf^k(x)$، که در آنها n_i اعداد صحیح هستند. در این صورت موارد زیر برقرار است.*

۱. *اگر معادلهٔ $H(x) = A$ دارای جواب باشد، آنگاه دارای حداکثر تعداد متناهی جواب است که این جواب‌ها در فاصله‌ای متناهی از یکدیگر قرار دارند. علاوه براین، حداکثر تعداد جواب‌های این معادله و همچنین حداکثر فاصلهٔ این جواب‌ها از یکدیگر به‌وسیلهٔ $\mathrm{Th}(\mathcal{Z}_\alpha)$ تعیین می‌شود.*

۲. *عدد طبیعی K چنان موجود است که از هر K عنصر متوالی، یک عنصر در برد $H(x)$ قرار دارد. این عدد نیز به‌وسیلهٔ $\mathrm{Th}(\mathcal{Z}_\alpha)$ تعیین می‌شود. علاوه براین، اگر برای یک $j \leq K$ عناصری مانند x و x' چنان موجود باشند که $H(x) = A$ و $H(x') = A + j$، آنگاه فاصلهٔ x از x' حداکثر K است.*

اثبات. ۱. ابتدا ادعا می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی i و برای هر x، عدد صحیح ℓ_i چنان موجود است که $f^i(x) = \lfloor \alpha^i x \rfloor + \ell_i$.

ادعا را با استقرا ثابت می‌کنم. می‌دانیم که $f^{۱}(x) = \lfloor \alpha x \rfloor$. فرض کنید $f^i(x) = \lfloor \alpha^i x \rfloor + \ell_i$، در این صورت

$$\begin{aligned} f^{i+۱}(x) &= f(f^i(x)) = \lfloor \alpha f^i x \rfloor = \lfloor \alpha(\lfloor \alpha^i x \rfloor + \ell_i) \rfloor \\ &= \lfloor \alpha(\alpha^i x - [\alpha^i x] + \ell_i) \rfloor = \lfloor \alpha^{i+۱} x - \alpha^i([\alpha^i x] - \ell_i) \rfloor \\ &= \lfloor \alpha^{i+۱} x \rfloor + \ell_{i+۱}, \end{aligned} \qquad (۷)$$

برای یک عدد صحیح $\ell_{i+۱}$.

با استفاده از این ادعا و همچنین خواص تابع جزءصحیح نتیجه می‌شود که برای هر x معادلهٔ $H(x) = A$ معادل با معادله‌ای به‌شکل زیر است (در زیرفصل معادلات جبری دومتغیره (۲.۳.۴)، این روند را به تفسیر توضیح داده‌ایم):

$$\lfloor (n_۰ + n_۱\alpha + \cdots + n_k\alpha^k)x \rfloor = A + j,$$

برای یک عدد صحیح j، که کران‌های این عدد صحیح به توان‌های تابع f و ضرایب بستگی دارد.

قرار دهید $F(\alpha) = n_۰ + n_۱\alpha + \ldots + n_k\alpha^k$. در این صورت با توجه به خواص تابع جزءصحیح، معادلهٔ $\lfloor F(\alpha)x \rfloor = A + j$ دارای $\lfloor \frac{۱}{F(\alpha)} \rfloor + ۱$ جواب است که تمامی این جواب‌ها نیز متوالی هستند. اما همهٔ این جواب‌ها لزوما جواب معادلهٔ $H(x) = A$ نیستند. بنابراین حداکثر جواب‌های معادلهٔ $H(x) = A$ برابر با $\lfloor \frac{۱}{F(\alpha)} \rfloor + ۱$ است و همچنین فاصلهٔ بین هر دو جواب نیز از این عدد بیشتر نیست. قابل ذکر است که این عدد در نظریه $\mathrm{Th}(\mathcal{Z}_\alpha)$ قابل محاسبه است. همچنین اگر $F(\alpha) > ۱$، آنگاه معادلهٔ $\lfloor F(\alpha)x \rfloor = A$ اگر دارای جواب باشد، دارای جواب یکتایی به‌صورت $\lfloor \frac{A}{F(\alpha)} \rfloor + ۱$ است (این نتیجه‌گیری، تعمیمی از ویژگی سوم تابع f در فصل پیش‌نیازها است).

۲. از آنجا که برد $\lfloor F(\alpha)x \rfloor$ در $\mathcal{Z}_\alpha$ بی‌کران است، بنابراین $H(x)$ نیز بی‌کران است. اما با توجه به خواص تابع f و ضرایب، برای هر x، عدد طبیعی K چنان موجود است که

$$H(x+۱) - H(x) < K.$$

یعنی فاصلهٔ هر دو عنصر متوالی در برد تابع H، کمتر از K است. بنابراین از هر K عدد متوالی، حداقل یک عنصر در برد $H(x)$ قرار دارد. $\square$

لم بالا را به‌عنوان یک شمای اصول به نظریه می‌افزاییم. از آنجایی که می‌خواهیم اصول نظریه شمارش‌پذیر بازگشتی باشد، در نوشتن این اصل باید به این نکته توجه داشته باشیم.

شمای اصول ۴. از هر K عنصر متوالی، حداقل یک عنصر در برد تابع H قرار دارد، که عدد طبیعی K همان عددی است که در لم قبل بیان شد. همچنین برای هر x و x'، از $|H(x) - H(x')| \leq K$ نتیجه می‌شود $|x - x'| \leq K$.

مشابه قسمت‌های قبل، نشان می‌دهیم که نظریه‌ای که تا اینجا معرفی کرده‌ایم، همچنان مدل‌کامل است.

لم ۴–۱۶. *فرض کنید $\mathcal{M}_۱ \subseteq \mathcal{M}_۲$ و $\mathcal{M}_۲$ دو مدل برای نظریهٔ $\mathcal{T}_{\text{nalg}}$ به همراه شمای اصول ۴ باشند، به طوری که $\mathcal{M}_۱ \subseteq \mathcal{M}_۲$. همچنین فرض کنید A عنصری در $M_۱$ و n عددی طبیعی باشد. در این صورت اگر عنصری مانند x در $M_۲$ چنان موجود باشد که $n_۰x + n_۱f(x) + \ldots + n_kf^n(x) = A$، آنگاه x در $M_۱$ قرار دارد.*

اثبات. طبق شمای اصول ۴، عدد طبیعی $j \leq K$ و همچنین عنصر x' در $\mathcal{M}_۱$ چنان موجود است که $n_۰x' + n_۱f(x') + \ldots + n_kf^n(x') = A + j$. استفاده مجدد از همین شمای اصول، نتیجه می‌دهد که فاصلهٔ x و x' از یکدیگر متناهی (عددی صحیح و استاندارد) است که نتیجه می‌دهد عنصر x در $\mathcal{M}_۱$ قرار دارد. $\square$

در ادامه مسیر، ابتدا تعداد معادلات و سپس تعداد متغیرها را افزایش می‌دهیم.

۲.۳.۴ معادلات دومتغیره

در این زیرفصل، ابتدا دستگاه‌های معادلاتی را در نظر می‌گیریم که شامل تنها یک معادلهٔ جبری دومتغیره باشند و لم‌های مورد نیاز و اصل آن را بیان می‌کنیم. سپس تعداد معادلات جبری را افزایش می‌دهیم و لم‌ها و اصول مربوط به آنها را بیان می‌کنیم.

دستگاه با یک معادلهٔ جبری

دستگاه معادلاتی را درنظر بگیرید که شامل یک معادلهٔ جبری دومتغیره به‌صورت زیر است:

$$\sum_{i=0}^{M} f^i(c_i x) + \sum_{j=0}^{N} f^j(c_j y) = A, \tag{۸}$$

که در آن c_i و d_i اعدادی صحیح هستند. همچنین فرض کنید که در این دستگاه تعدادی متناهی معادلات غیرجبری به‌صورت زیر نیز وجود داشته باشد:

$$\sum_{i=0}^{M-1} m_i \left[\alpha f^i(x)\right] + \sum_{j=0}^{N-1} n_j \left[\alpha f^j(y)\right] < a, \tag{۹}$$

که m_i و n_i اعدادی صحیح هستند و منظور از $f^0(x)$ همان تابع همانی است.

حل چنین دستگاهی، نیازمند محاسباتی با جزییات زیاد است که منجر به یک شمای اصولی برای $\mathcal{Z}_\alpha$ می‌شود که حل‌پذیری چنین دستگاهی را تضمین کند. برای اینکه دنبال کردن این روند دشوار نباشد، ابتدا روند کلی محاسبات را توضیح می‌دهیم.

مرور اجمالی روند محاسبات. ابتدا معادلهٔ (۸) را به‌صورت $\lfloor F(\alpha)x\rfloor + \lfloor G(\alpha)y\rfloor = A$ می‌نویسیم که در آن $F(\alpha)$ و $G(\alpha)$ دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح با متغیر α هستند. سپس برای جلوگیری از پیچیدگی در نوشتن و خواندن، قرار می‌دهیم $z = \lfloor F(\alpha)x\rfloor$. بنابراین پاسخ‌های این معادلهٔ جبری به‌صورت $x = \lfloor \frac{z}{F(\alpha)}\rfloor + 1$ و $y = \lfloor \frac{A-z}{G(\alpha)}\rfloor + 1$ است. در ادامه، این مقادیر را در معادلات غیرجبری جایگذاری می‌کنیم. لذا معادلات غیرجبری براساس متغیرهای $\left[\frac{z}{F(\alpha)}\right]$ و $\left[\frac{A-z}{G(\alpha)}\right]$ تغییر می‌یابند. سپس اثر وابستگی معادلهٔ جبری برروی قسمت‌های اعشاری، را اعمال می‌کنیم و در انتها با استفاده از قضیهٔ کرونکر، حل‌پذیری دستگاه را بررسی می‌کنیم. این محاسبات را گام‌به‌گام انجام می‌دهیم.

گام نخست. معادلات به‌شکل (۹) را با معادلاتی به‌صورت

$$\sum_{i=1}^{M} m_i[\alpha^i x] + \sum_{j=1}^{N} n_j[\alpha^j y] < a \tag{۱۰}$$

برای یک a مناسب جایگزین می‌کنیم. همچنین معادلهٔ (۸) را نیز با معادله‌ای به‌صورت

$$\lfloor F(\alpha)x\rfloor + \lfloor G(\alpha)y\rfloor = A \tag{۱۱}$$

جایگزین می‌کنیم، که در آن F و G دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح نسبت به α هستند. در حین این جایگزینی‌ها، تعدادی معادلهٔ غیرجبری جدید و *نابرابری* نیز به دستگاه افزوده می‌شود، که آنها را نیز بیان می‌کنیم.

روش انجام. با توجه به ویژگی‌های تابع جزءصحیح، برای هر x و هر $i \leq M$، عدد طبیعی ℓ_i چنان موجود است که

$$f^i(x) = \lfloor \alpha^i x \rfloor - \ell_i.$$

با توجه به رابطهٔ ۷، این عبارت معادل با عبارت زیر در مورد قسمت‌های اعشاری است، که در آن $\ell_0 = 0$.

$$\ell_i < [\alpha^i x] - \alpha[\alpha^{i-1} x] - \alpha \ell_{i-1} < \ell_i + 1$$

بنابراین نامساوی فوق را به دستگاه معادلات غیرجبری می‌افزاییم. به‌طور مشابه، برای هر y و هر $j \leq N$، عدد طبیعی ℓ'_j موجود است که

$$f^j(y) = \lfloor \alpha^j y \rfloor - \ell_j$$

و همچنین رابطهٔ معادل قسمت اعشاری آن را نیز به دستگاه معادلات غیرجبری می‌افزاییم.

$$\ell'_j < [\alpha^j y] - \alpha[\alpha^{j-1} y] - \alpha \ell'_{j-1} < \ell'_j + 1$$

با جایگذاری این عبارت‌ها در معادلهٔ (۸) و (۹) و همچنین استفاده از ویژگی‌های تابع جزءصحیح، معادلات (۱۰) و (۱۱) حاصل می‌شوند. در حین استفاده از ویژگی‌ها تابع جزءصحیح، شرایطی برروی قسمت‌های اعشاری ایجاد می‌شود که آنها را نیز به دستگاه معادلات غیرجبری می‌افزاییم. این معادلات به‌صورت زیر هستند.

$$\begin{aligned} l &< \sum_{i=1}^{M} m_i[\alpha^i x] < l + 1 \\ l' &< \sum_{j=1}^{N} n_j[\alpha^j y] < l' + 1 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

□

بنابراین دستگاه معادلات، به دستگاه معادلاتی تبدیل می‌شود که در آن فقط معادلاتی به‌شکل زیر وجود دارد. دقت کنید که ما برای سادگی، از پارامترهای A و a دوباره استفاده کرده‌ایم. همچنین دقت کنید که از آوردن معادلات شبیه به هم خودداری کرده‌ایم.

$$A = \lfloor F(\alpha) x \rfloor + \lfloor G(\alpha) y \rfloor \tag{۱۳}$$

$$\sum_{i=1}^{M} m_i[\alpha^i x] + \sum_{j=1}^{N} n_j[\alpha^j y] < a \tag{۱۴}$$

$$\ell_i < [\alpha^i x] - \alpha[\alpha^{i-1} x] - \alpha \ell_{i-1} < \ell_i + 1, \qquad 1 < i \leq M \tag{۱۵}$$

$$\ell'_j < [\alpha^j y] - \alpha[\alpha^{j-1} y] - \alpha \ell'_{j-1} < \ell'_j + 1, \qquad 1 < j \leq N \tag{۱۶}$$

همان‌گونه که از قبل تعریف کردیم، معادلات غیرجبری دارای ضرایب صحیح هستند. از طرفی دیگر، معادلات (۱۵) و (۱۶) دارای ضرایب غیرگویا هستند، پس معادلات غیرجبری نیستند. در ادامه برای چنین معادلاتی از عبارت «*نامعادله*» استفاده می‌کنیم.

گام بعدی در مسیر بررسی حل‌پذیری این دستگاه، استفاده از قضیهٔ کرونکر است. بنابراین با توجه به مستقل بودن و یا وابسته بودن $\frac{1}{F(\alpha)}$، $\frac{1}{G(\alpha)}$ و ۱، دو حالت مختلف را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: اگر اعداد $\frac{1}{F(\alpha)}$، $\frac{1}{G(\alpha)}$ و ۱ روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی باشند. در این حالت، یافتن عنصری مانند z که z در برد تابع $\lfloor F(\alpha)x \rfloor$ و $A-z$ در برد تابع $\lfloor G(\alpha)y \rfloor$ قرار گیرد، یا معادلاً $[\frac{z}{F(\alpha)}] \in (1 - \frac{1}{F(\alpha)}, 1)$ و همچنین $[\frac{A-z}{G(\alpha)}] \in (1 - \frac{1}{G(\alpha)}, 1)$، کار آسانی است. قضیهٔ کرونکر وجود چنین عنصری مانند z را تضمین می‌کند؛ زیرا زوج‌های $([\frac{z}{F(\alpha)}], [\frac{A-z}{G(\alpha)}])$ برای $z \in \mathbb{N}$، در $(0, 1)^2$ چگال است. یادآوری می‌کنیم (در فصل پیش‌نیازها و ویژگی چهارم تابع f) که عنصر z در برد تابع $\lfloor F(\alpha)x \rfloor$ قرار دارد اگر و تنها اگر $1 - \frac{1}{F(\alpha)} < [\frac{z}{F(\alpha)}]$، بنابراین یافتن چنین عنصری، جوابی برای معادلهٔ جبری است.

برای سادگی بیشتر در دنبال کردن محاسبات، در ادامه قرار می‌دهیم $t = \frac{z}{F(\alpha)}$ و $t' = \frac{A-z}{G(\alpha)}$. اما این نکته را درنظر داشته باشید که هر چند متغیرها t و t' هستند، که اعداد صحیحی نیستند، ولی متغیر اصلی همان z است و ما از این متغیرها برای سادگی در نوشتن و خواندن استفاده کرده‌ایم. حال باتوجه به این ساده‌نویسی، جواب معادلهٔ جبری به‌صورت زیر است.

$$x = \lfloor t \rfloor + 1, \qquad y = \lfloor t' \rfloor + 1.$$

در این صورت نامعادلات زیر را نیز به دستگاه معادلات باید بیافزاییم.

$$F(\alpha) - 1 < F(\alpha)[t] < F(\alpha) \tag{۱۷}$$

$$G(\alpha) - 1 < G(\alpha)[t'] < G(\alpha) \tag{۱۸}$$

این نابرابری‌ها، شرط قرار گرفتن z و $A-z$، به‌ترتیب در برد تابع $\lfloor F(\alpha)x \rfloor$ و $\lfloor G(\alpha)y \rfloor$ است.

گام دوم. در این مرحله در معادلات، برای هر $i \leq M$ مقادیر $[\alpha^i x]$ را با $[\alpha^i t]$ جایگزین می‌کنیم و به‌طور مشابه برای هر $j \leq N$، $[\alpha^j t']$ را جایگزین $[\alpha^j y]$ می‌کنیم. بنابراین معادلات غیرجبری و نامعادلات همگی تبدیل به نامعادلاتی برحسب $[\alpha^i t]$ و $[\alpha^j t']$ می‌شوند.

روش انجام. برای هر x و هر $i \leq M$، از آنجایی که $\lfloor t \rfloor = t - [t]$، پس عدد صحیح u_i چنان موجود است که

$$u_i < [\alpha^i t] - \alpha^i [t] + \alpha^i < u_i + ۱. \tag{۱۹}$$

که در این صورت

$$[\alpha^i x] = [\alpha^i t] - \alpha^i [t] + \alpha^i - u_i. \tag{۲۰}$$

به‌طور مشابه برای هر y و هر $j \leq N$، عدد صحیح v_j چنان موجود است که

$$v_j < [\alpha^j t'] - \alpha^j [t'] + \alpha^j < v_j + ۱ \tag{۲۱}$$

و همچنین

$$[\alpha^j y] = [\alpha^j t'] - \alpha^j [t'] + \alpha^j - v_j. \tag{۲۲}$$

حال اگر معادلات (۲۰) و (۲۲) را در معادلهٔ (۱۴) جایگزین کنیم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم.

$$\sum_{i=۱}^{M} m_i [\alpha^i t] - [t] \sum_{i=۱}^{M} m_i \alpha^i + \sum_{j=۱}^{N} n_j [\alpha^j t'] - [t'] \sum_{j=۱}^{N} n_i \alpha^i < a - s \tag{۲۳}$$

که در آن $s = \sum_{i=۱}^{M} m_i(\alpha^i - u_i) + \sum_{j=۱}^{N} n_j(\alpha^j - v_j)$. همچنین معادلات (۱۵) و (۱۶) را نیز به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\ell_i < [\alpha^i t] - \alpha[\alpha^{i-۱} t] + u_{i-۱}\alpha - u_i < \ell_i + ۱, \quad ۱ < i \leq M \tag{۲۴}$$

$$\ell'_j < [\alpha^j t'] - \alpha[\alpha^{j-۱} t'] + v_{j-۱}\alpha - v_j < \ell'_j + ۱, \quad ۱ < j \leq N \tag{۲۵}$$

□

در گام آخر، وابستگی ایجاد شده توسط معادلهٔ جبری را بر روی قسمت‌های اعشاری اعمال می‌کنیم.

گام سوم (اعمال وابستگی). توجه کنید که اعضای دو مجموعهٔ $\{\alpha^i t, \ldots, \alpha^M t\}$ و $\{\alpha^j t', \ldots, \alpha^N t'\}$ روی $\mathbb{Q}$ وابسته هستند. بنابراین در این گام، این وابستگی را که قسمت‌های اعشاری ایجاب می‌کند، اعمال می‌کنیم. فرض کنید $F(\alpha) = c_۰ + c_۱\alpha + \ldots + c_M \alpha^M$ که $c_M \neq ۰$. در این صورت

$$\frac{\alpha^M}{F(\alpha)} = \frac{۱}{c_M} - \left(\frac{r_۰}{F(\alpha)} + \frac{r_۱\alpha}{F(\alpha)} + \cdots + \frac{r_{M-۱}\alpha^{M-۱}}{F(\alpha)} \right), \tag{۲۶}$$

که در آن $r_i = \frac{c_i}{c_M}$، برای هر $0 \leq i < M$. اگر طرفین عبارت بالا را در z ضرب کنیم، به رابطهٔ زیر می‌رسیم.

$$\frac{\alpha^M z}{F(\alpha)} = \frac{z}{c_M} - \left(\frac{r_0 z}{F(\alpha)} + \frac{r_1 \alpha z}{F(\alpha)} + \cdots + \frac{r_{M-1}\alpha^{M-1} z}{F(\alpha)}\right)$$

اگر قسمت اعشاری طرفین رابطهٔ فوق را محاسبه کنیم و عبارت $\frac{z}{F(\alpha)}$ را با متغیر t، جایگزین کنیم و همچنین از ویژگی‌های تابع قسمت اعشاری استفاده کنیم، به معادلهٔ زیر در مورد وابستگی قسمت‌های اعشاری می‌رسیم.

$$[\alpha^M t] = -\sum_{i=0}^{M-1} r_i[\alpha^i t] + q \tag{27}$$

که در این رابطه، q عددی گویا است که در معادلهٔ غیرجبری زیر صدق می‌کند. این معادلهٔ غیرجبری را به دستگاه معادلات می‌افزاییم.

$$q < -\sum_{i=0}^{M-1} r_i[\alpha^i t] < q + 1 \tag{28}$$

به‌طور مشابه

$$[\alpha^N t'] = -\sum_{j=0}^{N-1} r'_j[\alpha^j t'] + q' \tag{29}$$

و همچنین معادلهٔ غیرجبری زیر نیز به دستگاه معادلات افزوده می‌شود.

$$q' < -\sum_{j=0}^{N-1} r'_j[\alpha^j t'] < q' + 1 \tag{30}$$

حال اگر معادلات (۲۷) و (۲۹) را در معادلهٔ (۲۳) جایگذاری کنیم، بعد از فاکتورگیری و ساده کردن، به معادلهٔ زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{M-1}(m_i - m_M r_i)[\alpha^i t] - [t](m_M r_0 + \sum_{i=1}^{M} m_i\alpha^i) + m_M q \\ &+ \sum_{j=1}^{N-1}(n_j - n_N r'_j)[\alpha^j t'] - [t'](n_N r'_0 + \sum_{j=1}^{N} n_j\alpha^j) + n_N q' < a - s\end{aligned} \tag{31}$$

همچنین اگر برای $i = M$ و $j = N$، به‌ترتیب در معادلهٔ (۲۴) و (۲۵)، معادلات (۲۷) و (۲۹) را جایگذاری کنیم، به معادلات زیر می‌رسیم.

$$\ell_M < -\sum_{i=0}^{M-1} r_i[\alpha^i t] - \alpha[\alpha^{M-1} t] + u_{M-1}\alpha - u_M + q < \ell_M + 1 \tag{۳۲}$$

$$\ell'_N < -\sum_{j=0}^{N-1} r'_j[\alpha^j t'] - \alpha[\alpha^{N-1} t'] + v_{N-1}\alpha - v_N + q' < \ell'_N + 1 \tag{۳۳}$$

حال از آنجایی‌که برای هر $0 \leq i < M$ و هر $0 \leq j < N$، قسمت اعشاری $\alpha^i t$ و $\alpha^j t'$ مستقل از یکدیگر قابل کنترل شدن هستند، پس به‌راحتی می‌توانیم به‌جای آنها از متغیرهای مختلفی استفاده کنیم. بنابراین اگر در معادلات غیرجبری و نامعادلات به‌جای $[\alpha^i t]$ و $[\alpha^j t']$ به‌ترتیب متغیرهای جدید z_i و w_j را جایگزین کنیم، به معادلات زیر می‌رسیم.

$$\sum_{i=1}^{M-1} m'_i z_i + \sum_{j=1}^{N-1} n'_j w_j - z_0 d - w_0 d' < a' \tag{۳۴}$$

$$b_i < z_i + \alpha z_{i-1} < b_i + 1, \quad 1 < i < M \tag{۳۵}$$

$$b'_j < w_i + \alpha w_{j-1} < b'_j + 1, \quad 1 < j < N \tag{۳۶}$$

$$b_M < -\sum_{i=0}^{M-1} r_i z_i - \alpha z_{M-1} < b_M + 1 \tag{۳۷}$$

$$b'_N < -\sum_{j=0}^{N-1} r'_j w_j - \alpha w_{N-1} < b'_N + 1 \tag{۳۸}$$

که در این معادلات برای هر $i < M$، $m'_i = m_i - m_M r_i$ و برای هر $j < N$ و $n'_j = n_j - n_N r'_j$، همچنین $d = m_M r_0 + \sum_{i=1}^{M} m_i \alpha^i$ و $d' = n_N r'_0 + \sum_{j=1}^{N} n_j \alpha^j$. بنابراین جواب داشتن دستگاه با یک معادلهٔ جبری دومتغیره و تعداد متناهی معادلهٔ غیرجبری، معادل است با جواب داشتن دستگاهی از معادلات که فقط شامل معادلات غیرجبری و نامعادلات به شکل فوق است. اما اگر این معادلات را به‌عنوان اَبرصفحه‌ای در فضای با بعد $M + N$ در نظر بگیریم، آنگاه هر دو اَبرصفحه‌ای که یکدیگر را قطع کنند، دستگاه معادلات متناظر با آن دو اَبرصفحه، همواره دارای جواب است. بنابراین، هر دستگاهی که شامل نامعادلاتی به‌صورت (۳۵)، (۳۶)، (۳۷) و (۳۸) باشد، همواره دارای جواب است؛ زیرا اَبرصفحهٔ متناظر آنها علاوه بر اینکه بقیهٔ اَبرصفحه‌ها را قطع می‌کند، اَبرصفحهٔ متناظر بامعادلات به‌شکل (۳۴) را نیز قطع می‌کند. بنابراین چنین دستگاهی دارای جواب است اگر و تنها اگر دستگاهی که شامل همهٔ معادلات به‌صورت (۳۴) است، دارای جواب باشند.

لم ۴-۱۷. *فرض کنید Ω دستگاهی باشد که شامل یک معادلهٔ جبری به‌شکل*

$$\sum_{i=\circ}^{M} f^{i}(c_i x)+\sum_{j=\circ}^{N} f^{j}(d_j y)=A$$

که در آن c_i و d_i اعدادی صحیح هستند، به همراه تعداد متناهی معادلات غیرجبری به‌صورت

$$\sum_{i=\circ}^{M-1}[\alpha f^{i}(c_i x)]+\sum_{j=\circ}^{N-1}[\alpha f^{j}(d_j y)]<a,$$

که تمامی ضرایب اعداد صحیح هستند. در این صورت موارد زیر برقرار است.

۱. *دستگاه Ω در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است اگر دستگاه Ω' که شامل همهٔ معادلات اصلاح شدهٔ به‌شکل (۳۴) به‌همراه اینکه متغیرها باید در بازهٔ $(\circ, ۱)$ باشند، در $\mathbb{R}$ دارای جواب باشد.*

۲. *فرمولی مانند ε_Ω (بر حسب پارامترهای دستگاه) وجود دارد به‌طوری که $\mathcal{Z}_\alpha \models \varepsilon_\Omega$ اگر و تنها اگر دستگاه Ω' در $\mathbb{R}$ دارای جواب باشد.*

اثبات. قسمت اول این لم را در بالا اثبات کردیم. برای اثبات قسمت دوم، ابتدا معادلات به‌شکل (۳۴) را به‌عنوان ابرصفحه در نظر بگیرید. در این صورت طبق مطالبی که بالا گفته شد، برای بررسی حل‌پذیری چنین دستگاهی، کافی است موازی و یا متقاطع بودن این ابرصفحه‌ها را بررسی کنیم. از طرفی دیگر، چون در حالتی که دو ابر صفحه متقاطع باشند، دستگاه متناظر همواره دارای جواب است، پس کافی است فقط در حالتی که دو ابرصفحه موازی هستند، معادلات متناظر آنها را حل کنیم. اما، دو ابرصفحه با هم موازی هستند اگر و تنها اگر نسبت ضرایب متناظر آنها یکسان باشد. ادعا می‌کنیم که این نسبت یکسان که آن را با λ نشان می‌دهیم، گویا است.

چون فقط ضریب $z_\circ$ و $w_\circ$ گویا نیست، بنابراین تنها درصورتی λ گویا نیست که ضرایب بقیهٔ مجهول‌ها صفر باشد، یعنی برای هر $۱ \le i < M$ و هر $۱ \le j < N$، داشته باشیم $m'_i = \circ$ و $n'_j = \circ$. اما در این صورت $m_i = m_M r_i$ و $n_j = n_N r'_j$. بنابراین ضریب $z_\circ$ برابر با $m_M \sum_{i=\circ}^{M} r_i \alpha^i$ می‌شود، که چون ضرایب r_i به معادلهٔ جبری مربوط می‌شود، پس برای هر دو معادلهٔ به‌صورت (۳۴) یکسان است و تنها در این معادلات ضریب m_M، که عددی صحیح است، تغییر می‌کند. به‌طور مشابه، برای ضریب $w_\circ$ نیز، همین استدلال را می‌توان به‌کار برد. بنابراین در این حالت نیز λ عددی گویا است.

برای بررسی حل‌پذیری دو ابرصفحهٔ موازی، کافی است که ضرایب ثابت هر دو ابرصفحه (بعد از یکسان سازی ضرایب غیرثابت، یعنی ضرب کردن در نسبت توازی) را با هم مقایسه کرد. اما با توجه به زیرفصل قبل، مقایسه کردن دو ضریب ثابت توسط فرمول مرتبه اول قابل بیان است. به‌عنوان

مثال عبارت $F(\alpha) < [\alpha x]$، معادل با فرمولی مرتبه اول است. زیرا به‌جای $F(\alpha)$ می‌توان از $[F(\alpha) \cdot ۱]$ استفاده کرد، زیرا از طرفی $\lfloor F(\alpha) \cdot ۱]$ عددی متناهی است که توسط ضرایب دستگاه مشخص می‌شود. از طرفی دیگر نیز، چون هر $[\alpha^i \cdot ۱]$ نیز قابل بیان است، پس به‌طور مشابه $[F(\alpha) \cdot ۱]$ نیز قابل بیان است.
بنابراین فرمول ε_Ω وجود دارد که $\mathcal{Z}_\alpha \models \varepsilon_\Omega$ اگر و تنها اگر دستگاه Ω' در $\mathbb{R}$ دارای جواب باشد. □

با توجه به لم بالا، شمای اصول زیر را به نظریه می‌افزاییم.

شمای اصول ۵. دستگاه Ω دارای جواب است اگر و تنها اگر ε_Ω برقرار باشد.

حالت دوم: اگر اعداد $\frac{۱}{F(\alpha)}$، $\frac{۱}{G(\alpha)}$ و ۱ روی $\mathbb{Q}$ وابستهٔ خطی باشند. در این حالت ما نیاز داریم تا روش‌های قبلی برای حل معادلات جبری یک‌متغیره و دومتغیره را با یکدیگر ترکیب کنیم. چون روش حل معادلات شبیه به روش‌های قبلی است، در این قسمت وارد جزئیات نمی‌شویم.

اگر $\frac{۱}{F(\alpha)}$، $\frac{۱}{G(\alpha)}$ و ۱ روی $\mathbb{Q}$ وابسته خطی باشند، آنگاه اعداد گویای $r_۱$، $r_۲$ و $r_۳$ موجودند به‌طوری که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند.

$$\frac{r_۱}{F(\alpha)} + \frac{r_۲}{G(\alpha)} = r_۳$$

حال چون درجهٔ چندجمله‌ای $F(\alpha)G(\alpha)$ از درجهٔ چندجمله‌ای‌های $F(\alpha)$ و $G(\alpha)$ اکیداً بزرگتر است، بنابراین $r_۳$ حتما باید صفر باشد. که در این صورت، $F(\alpha)$ و $G(\alpha)$ روی $\mathbb{Q}$ وابستهٔ خطی هستند، یعنی عدد گویای r چنان موجود است که $G(\alpha) = rF(\alpha)$. بنابراین معادلهٔ اصلی (۸) تبدیل به معادله‌ای به‌شکل

$$\lfloor F(\alpha)(x + ry) \rfloor = A, \qquad (۳۹)$$

برای یک A مناسب، می‌شود. برای اینکه چنین معادله‌ای حل‌پذیر باشد، کافی است A در برد $\lfloor F(\alpha)z \rfloor$ قرار گیرد. بنابراین باید عنصری مانند A' را طوری بیابیم که در رابطه‌های زیر صادق باشد.

$$x + ry = A'$$
$$\lfloor \frac{A}{F(\alpha)} \rfloor + ۱ = A'$$

حال اگر در تمامی معادلات غیرجبری و نامعادلات x را با $A' - ry$ جایگزین کنیم، در این صورت معادلات غیرجبری و نامعادلات، تک‌متغیره می‌شوند. توجه داشته باشید که در اینجا اگر درجهٔ چندجمله‌ای F برابر با M باشد، در این صورت قسمت اعشاری $\alpha^M y$ به همهٔ قسمت‌های اعشاری $\alpha^i y$ برای $i < M$ وابسته است.

اما در این حالت نیز اصول‌های نظریه در حل‌پذیر بودن چنین معادلاتی قابل استفاده است. نحوهٔ استفاده از اصول در حل‌پذیری چنین معادلات را در زیر توضیح داده‌ایم.

اگر A در برد تابع $\lfloor F(\alpha)z \rfloor$ باشد، در این صورت این معادله قابل حل است. حال برای اینکه معادلات جبری با معادلات غیرجبری و نامعادلات سازگار باشد، کافی است که سازگار باقی ماندن ویژگی‌های قسمت‌های اعشاری $\alpha^i x$ در دستگاه جدید، یعنی وقتی که x را با $A' - ry$ جایگزین می‌کنیم، را بررسی کنیم. بنابراین معادلات غیرجبری و نامعادلات همگی فقط برحسب متغیر y هستند.

بنابراین برای دستگاه معادلات با دو متغیر که شامل فقط یک معادلهٔ جبری باشد، نتیجهٔ زیر را می‌توان استنتاج کرد.

نتیجه ۴-۱۸. *فرض کنید $\mathcal{M}$ مدلی برای نظریه‌ای باشد که شامل T_{nalg} به همراه شمای اصول ۴ و ۵ باشد. در این صورت اگر دستگاه Ω در $\mathcal{M}$ دارای جواب باشد، آنگاه در هر زیرمدل آن نیز دارای جواب است.*

اثبات. با توجه به آنچه در بالا گفته شد، تنها کافی است نشان دهیم که اگر عنصری مانند A' در $\mathcal{M}$ موجود باشد به‌طوری که $A = \lfloor F(\alpha)A' \rfloor$ که A در یک زیرمدل از $\mathcal{M}$ قرار دارد، آنگاه A' نیز در همان زیرمدل قرار دارد. که با توجه به اینکه زیرمدل‌ها تحت توابع بسته هستند، این حکم نیز برقرار است. □

دستگاه با دو معادلهٔ جبری

حال دستگاه معادلات دمتغیره‌ای را در نظر بگیرید که شامل دو معادلهٔ جبری زیر و تعدادی متناهی از معادلات غیرجبری به صورت (۹) باشد.

$$\begin{aligned} H_1(x,y) &= A_1 \\ H_2(x,y) &= A_2 \end{aligned} \tag{۴۰}$$

که در آن هر کدام از این معادلات جبری به‌شکل معادلهٔ (۸) است. برای حل این دستگاه، مشابه گام نخست، در زیربخش ۲.۳.۴، ابتدا معادلات جبری را به معادلات زیر تبدیل می‌کنیم. در این روند، تعدادی معادلات غیرجبری و نامعادله نیز به دستگاه افزوده می‌شود.

$$\lfloor F_1(\alpha)x \rfloor + \lfloor G_1(\alpha)y \rfloor = A_1 \tag{۴۱}$$

$$\lfloor F_2(\alpha)x \rfloor + \lfloor G_2(\alpha)y \rfloor = A_2 \tag{۴۲}$$

حال مشابه آنچه در زیربخش ۲.۳.۴ بیان کردیم، جواب‌های معادلهٔ جبری (۴۱)، به‌صورت $x = \lfloor \frac{z}{F_1(\alpha)} \rfloor + 1$ و $y = \lfloor \frac{A_1 - z}{G_1(\alpha)} \rfloor + 1$ است.

اگر این مقادیر جواب معادلهٔ (۴۱) را در معادلهٔ (۴۲) قرار دهیم، بعد از ساده‌سازی به معادلهٔ زیر می‌رسیم.

$$\lfloor I(\alpha)z \rfloor = B + j \tag{۴۳}$$

که در آن $I(\alpha)$ یک تابع گویا با ضرایب صحیح، j عددی صحیح و مقدار B با توجه به $A_۲$ و $\lfloor \frac{G_۲(\alpha)}{G_۱(\alpha)} A_۱ \rfloor$ تعیین می‌شود.

حال با توجه به لم ۴-۱۵، عدد طبیعی K چنان موجود است که از هر K عدد متوالی، حداقل یک عدد در برد تابع $\lfloor I(\alpha)z \rfloor$ قرار می‌گیرد و همچنین برای هر z و z'، اگر $|\lfloor I(\alpha)z \rfloor - \lfloor I(\alpha)z' \rfloor| < K$ آنگاه نتیجه می‌شود که $|z - z'| < K$.

اکنون با توجه به لم ۴-۱۵، معادلهٔ (۴۳) دارای حداکثر تعدادی متناهی جواب است، بنابراین تعداد زوج‌های صحیح (x, y) که $x = \lfloor \frac{z}{F_۱(\alpha)} \rfloor + ۱$ و $y = \lfloor \frac{A_۱ - z}{G_۱(\alpha)} \rfloor + ۱$ متناهی است. بنابراین برای هر $A_۱$ و $A_۲$ داده شده، حداکثر تعداد متناهی (x, y) وجود دارد که جواب دستگاه معادلات باشد. علاوه‌براین، برای هر دو جواب $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$، هر مولفهٔ این زوج‌مرتب‌ها، در فاصلهٔ متناهی از یکدیگر قرار دارند که این فاصله توسط ضرایب تعیین می‌شود. به این معنی که فاصلهٔ $|x_۱ - x_۲|$ و همچنین $|y_۱ - y_۲|$ متناهی است و توسط ضرایب معادلات جبری تعیین می‌شود.

برای جمع‌بندی این مطالب، شمای اصول زیر را برای هر $H_۱(x, y)$ و $H_۲(x, y)$ بیان می‌کنیم.

شمای اصول ۶. عدد طبیعی K چنان موجود است که برای هر $A_۱$ و $A_۲$، عدد $۰ \leq j \leq K$ و یک جواب (x, y) برای دستگاهی که از جایگزینی $A_۱ + j$ به‌جای $A_۱$ در دستگاه (۴۰) حاصل می‌شود، وجود دارد. علاوه‌براین، برای هر دو جواب $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$، اگر

$$\max\{|H_۱(x_۱, y_۱) - H_۱(x_۲, y_۲)|, |H_۲(x_۱, y_۱) - H_۲(x_۲, y_۲)|\} < K,$$

آنگاه همواره

$$\max\{|x_۱ - x_۲|, |y_۱ - y_۲|\} < K.$$

از این اصل، نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۴-۱۹. *فرض کنید، T نظریه‌ای باشد که شامل T_{nalg} به همراه شمای اصول ۴ تا ۶ باشد. اگر $\mathcal{M}_۱$ و $\mathcal{M}_۲$ دو مدل این نظریه باشند به‌طوری که $\mathcal{M}_۱ \subseteq \mathcal{M}_۲$. در این صورت هر دستگاه معادلاتی که شامل دو معادلهٔ جبری و تعدادی متناهی معادلات غیرجبری با پارامتر در $\mathcal{M}_۱$ باشد، اگر در $\mathcal{M}_۲$ دارای جواب باشد، در $\mathcal{M}_۱$ نیزجواب دارد.*

بنابراین در دستگاه معادلاتی که از دو متغیر تشکیل شده است، اگر دستگاه شامل حداقل دو معادلهٔ جبری باشد، آنگاه دستگاه دارای تعداد متناهی جواب است و این جواب‌ها در تمام زیرمدل‌های هر مدل یکسان هستند. این ویژگی را می‌توان به حالتی که تعداد متغیرها بیشتر از دو متغیر باشد و تعداد معادلات از تعداد متغیرها بیشتر باشد، نیز تعمیم داد.

۳.۳.۴ معادلات با بیش از دو متغیر

همان طور که در زیربخش ۲.۳.۴ مشاهده کردیم، برای حل دستگاه معادلات با دو متغیر، معادلات جبری باعث ایجاد دو وابستگی بر روی قسمت‌های اعشاری می‌شوند. نخست آن‌که، معادلهٔ جبری باعث می‌شود که همهٔ عبارت‌های گویای $\frac{\alpha^i}{F(\alpha)}$ مستقل نشوند و بنابراین یکی از آنها را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی از مابقی نوشت و در نتیجه قسمت اعشاری آن نیز با توجه به قسمت‌های اعشاری مابقی تعیین می‌شود. علاوه‌براین، ممکن است توابع چندجمله‌ای $F(\alpha)$ و $G(\alpha)$ ضریبی گویا از یکدیگر شوند که این وابستگی باعث می‌شود یکی از متغیرها را بتوان با استفاده از پارامترهای معادلهٔ جبری، براساس یکی دیگر نوشت و بنابراین قسمت‌های اعشاری مرتبط با آن متغیر نیز از این وابستگی متأثر خواهد شد. در این زیربخش، تعداد معادلات را افزایش می‌دهیم و سعی می‌کنیم که روش حل معادلات را به‌عنوان تعمیمی از قسمت‌های قبلی بیان کنیم.

همان‌گونه که در حالت دو معادلهٔ جبری دومتغیره، تعداد معادلات را کاهش دادیم، در این جالت نیز می‌توانیم تعداد معادلات را کاهش دهیم. در حقیقت هر معادلهٔ جبری باعث می‌شود که ما بتوانیم یکی از متغیرها را بر اساس مابقی متغیرها بنویسیم. در این بین، تعدادی معادلهٔ غیرجبری و نامعادله نیز به دستگاه افزوده می‌شود. در ادامه این روش را توضیح می‌دهیم.

ابتدا دستگاهی که تنها شامل یک معادلهٔ جبری چندمتغیره است را در نظر می‌گیریم و سپس حالت کلی را شرح می‌دهیم. یک معادلهٔ جبری kـمتغیره به‌صورت زیر است. از آنجایی که حالت تک‌متغیره و دومتغیره را قبلا بررسی کردیم، بنابراین فرض کنید $k > ۲$.

$$\sum_{i=۰}^{N_۱} f^i(c_{۱i}x_۱) + \cdots + \sum_{i=۰}^{N_k} f^i(c_{ki}x_k) = A \tag{۴۴}$$

مشابه گام نخست در زیرفصل ۲.۳.۴، این معادله را می‌توان به معادله‌ای به‌صورت زیر نوشت، که بازنویسی این معادله به‌صورت زیر، باعث می‌شود تعدادی معادلهٔ غیرجبری و نامعادله نیز به دستگاه افزوده شود.

$$\lfloor F_۱(\alpha)x_۱ \rfloor + \cdots + \lfloor F_k(\alpha)x_k \rfloor = A \tag{۴۵}$$

که در این معادله، برای هر i، $F_i(\alpha)$ یک چندجمله‌ای برحسب متغیر α و ضرایب صحیح است. توجه داشته باشید که برای سادگی در نوشتن و پرهیز از نوشتن نمادهای زیاد، در این بازنویسی معادله، دوباره از A استفاده کرده‌ایم، که در حقیقت ممکن است با A موجود در معادلهٔ (۴۴) متفاوت باشد. برای حل این معادله، با توجه به وابستگی خطی این چندجمله‌ای‌ها نسبت به یکدیگر روی $\mathbb{Q}$، سه حالت مختلف درنظر می‌گیرم.

حالت اول. اگر همهٔ چندجمله‌ای‌ها ضریب گویایی از یک چندجمله‌ای باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مساله، فرض کنید همهٔ چندجمله‌ای‌ها ضریب گویایی از $F_1(\alpha)$ باشند. یعنی برای هر $1 < i \leq k$ عدد گویای r_i چنان موجود باشد که $F_i(\alpha) = r_i F_1(\alpha)$. در این حالت مشابه حالت ب) در زیرفصل ۲.۳.۴، معادلهٔ (۴۵) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود، ضمن اینکه معادلاتی غیرجبری و نامعادلاتی نیز به دستگاه افزوده می‌شود.

$$\lfloor F_1(\alpha)(x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_kx_k)\rfloor = A$$

اما همان‌طور که قبلا مشاهده کردیم، چنین معادله‌ای درحقیقت یک نامعادله است که اصول نظریه حل‌پذیری چنین معادلاتی را نتیجه می‌دهد.

حالت دوم. اگر دو چندجمله‌ای $F_1(\alpha)$ و $F_2(\alpha)$ موجود باشند به‌طوری که بقیهٔ چندجمله‌ای را بتوان براساس آنها نوشت. در این صورت معادلهٔ (۴۵) به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود.

$$\lfloor F_1(\alpha)(x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_\ell x_\ell)\rfloor + \lfloor F_2(\alpha)(y_1 + r'_2y_2 + \cdots + r'_ky_k)\rfloor = A$$

حل‌پذیری معادلاتی به این صورت را در حالت الف) زیرفصل ۲.۳.۴ بررسی کرده‌ایم. معادلهٔ حاصل، مشابه حالت یک معادلهٔ جبری دومتغیره حل می‌شود.

حالت سوم. اگر حداقل سه چندجمله‌ای وجود داشته باشد که هیچ‌کدام ضریب گویایی از یکدیگر نباشند. به‌عنوان مثال، فرض کنید $F_1(\alpha)$، $F_2(\alpha)$ و $F_3(\alpha)$ این چندجمله‌ای‌ها باشند و همچنین در معادلهٔ زیر صدق کنند.

$$\lfloor F_1(\alpha)x_1\rfloor + \lfloor F_2(\alpha)x_2\rfloor + \lfloor F_3(\alpha)x_3\rfloor = A$$

جواب‌های این معادله به‌صورت $z_1 = \lfloor F_1(\alpha)x_1\rfloor$، $z_2 = \lfloor F_2(\alpha)x_2\rfloor$ و $A-(z_1+z_2) = \lfloor F_1(\alpha)x_1\rfloor$ است. بنابراین یافتن جوابی برای معادلهٔ بالا، معادل با یافتن اعداد صحیح z_1 و z_2 است که در شرایط

زیر صدق کند.

$$1 - \frac{1}{F_1(\alpha)} < \left[\frac{z_1}{F_1(\alpha)}\right] < 1, \tag{۴۶}$$

$$1 - \frac{1}{F_2(\alpha)} < \left[\frac{z_2}{F_2(\alpha)}\right] < 1, \tag{۴۷}$$

$$1 - \frac{1}{F_3(\alpha)} < \left[\frac{A-(z_1+z_2)}{F_3(\alpha)}\right] < 1. \tag{۴۸}$$

توجه کنید که، در این صورت حتی اگر $\frac{1}{F_1(\alpha)}$، $\frac{1}{F_2(\alpha)}$، $\frac{1}{F_3(\alpha)}$ و ۱ روی $\mathbb{Q}$ وابستهٔ خطی باشند، نیز می‌توان قسمت اعشاری $\frac{A-(z_1+z_2)}{F_3(\alpha)}$ را آزادانه و بدون تاثیرپذیری از قسمت‌های اعشاری $\frac{z_1}{F_1(\alpha)}$ و $\frac{z_2}{F_2(\alpha)}$ کنترل کرد. زیرا، اگر این اعداد وابستهٔ خطی باشند، آنگاه اعداد گویای r_1 و r_2 را می‌توان به‌گونه‌ای یافت که رابطهٔ زیر برقرار است.

$$\frac{1}{F_3(\alpha)} = \frac{r_1}{F_1(\alpha)} + \frac{r_2}{F_2(\alpha)}$$

دقت کنید که با یک بررسی ساده در مورد توان این چندجمله‌ای‌ها، می‌توان به این نتیجه رسید که اگر اعداد $\frac{1}{F_1(\alpha)}$، $\frac{1}{F_2(\alpha)}$، $\frac{1}{F_3(\alpha)}$ و ۱ وابستهٔ خطی باشند، آنگاه بدون عدد ۱ نیز وابستهٔ خطی هستند (روی $\mathbb{Q}$). بنابراین رابطهٔ زیر در مورد قسمت اعشاری‌ها برقرار است.

$$\left[\frac{A-(z_1+z_2)}{F_3(\alpha)}\right] = \left[r_1\frac{A-(z_1+z_2)}{F_1(\alpha)} + r_2\frac{(A-z_1+z_2)}{F_2(\alpha)}\right] \tag{۴۹}$$

اما همان‌طور که در این رابطه مشاهده می‌کنید، می‌توان قسمت‌های اعشاری $\frac{z_1}{F_2(\alpha)}$ و $\frac{z_2}{F_1(\alpha)}$ را بدون تاثیر از مقادیر قبلی، آزادانه کنترل کرد. دقت کنید که چون $\frac{1}{F_1(\alpha)}$ و $\frac{1}{F_2(\alpha)}$ و ۱ روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی هستند، پس به‌عنوان مثال قسمت اعشاری $\frac{z_1}{F_2(\alpha)}$ را می‌توان آزادانه و بدون تاثیرپذیری از قسمت اعشاری $\frac{z_1}{F_1(\alpha)}$ کنترل کرد.

با استدلالی مشابه، می‌توان نتیجه گرفت که اگر تعداد متغیرها و چندجمله‌ای‌های مستقل موجود بیشتر از سه باشند، نیز می‌توان قسمت‌های اعشاری را آزادانه کنترل کرد و بنابراین حل‌پذیری سیستم را بررسی کرد. دقت کنید که وابسته بودن این توابع گویای $\frac{1}{F_i(\alpha)}$ فقط به ضرایب بستگی دارد و بنابراین نظریه می‌تواند وابستگی آنها را بررسی کند.

حال فرض کنید که در دستگاه معادلات، بیشتر از یک معادلهٔ جبری kـمتغیره وجود دارد. اگر روشی را که در بالا توضیح دادیم، برروی اولین معادلهٔ جبری اعمال کنیم، تعداد متغیرهای دستگاه معادلات به $k-1$ متغیر کاهش می‌یابد. با ادامه دادن این روش، می‌توانیم تعداد متغیرهای این دستگاه را کمتر کنیم تا جایی که به یک معادلهٔ جبری برسیم. توجه داشته باشید که در هر مرحله که یکی از متغیرها را

برحسب مابقی متغیرها و بر اساس یک معادلهٔ جبری می‌نویسیم و سپس آن را در مابقی معادلات جبری جایگزین می‌کنیم، در این معادلات جبری جدید، به‌جای چندجمله‌ای‌ها برحسب α، توابع گویا برحسب α استفاده شده است. که این توابع گویا براساس پارامترهای معادلات جبری و ضرایب هستند. بنابراین حل‌پذیری آن به پارامترها و ضرایب بستگی دارد. پس فرمول $\xi_{k,\ell}(\bar{a})$ موجود است که جواب داشتن دستگاه، معادل با برقرار بودن این فرمول است. بنابراین شمای اصول زیر را به نظریه می‌افزاییم.

شمای اصول ۷. هر دستگاه معادلات شامل k معادلهٔ جبری و ℓ معادلهٔ غیرجبری با پارامتر $\bar{a}$، دارای جواب است اگر و تنها اگر $\xi_{k,\ell}(\bar{a})$.

تعریف ۴-۲۰. مجموعهٔ شمای اصول ۴ تا ۷ به همراه $\mathcal{T}_{\mathrm{nalg}}$ را نظریهٔ $\mathcal{T}_\alpha$ می‌نامیم.

از آنجایی‌که ساختار $\mathcal{Z}_\alpha$ مدلی برای این نظریه است، پس این نظریه سازگار است. همچنین، با توجه به زبان، ساختار $\mathcal{Z}_\alpha$ در هر مدل آن نشانده می‌شود، بنابراین $\mathcal{Z}_\alpha$ مدل اولی برای این نظریه است.

قضیه ۴-۲۱. *نظریهٔ $\mathcal{T}_\alpha$، مدل‌کامل، کامل و تصمیم‌پذیر است.*

اثبات. مدل‌کامل بودن نظریه از اصول نظریه و نتایجی که بعد از هر اصل بیان کردیم، حاصل می‌شود. از آنجایی‌که این نظریه دارای مدل اول است، بنابراین کامل است. همچنین، چون مجموعهٔ اصول بازگشتی است، پس نظریهٔ $\mathcal{T}_\alpha$ تصمیم‌پذیر است. □

از این قضیه نتیجه می‌شود که نظریهٔ $\mathcal{T}_\alpha$ با $\mathrm{Th}(\mathcal{Z}_\alpha)$ معادل مقدماتی است و بنابراین ساختار $\mathcal{Z}_\alpha$ نیز تصمیم‌پذیر است. بنابراین نتیجهٔ زیر برقرار است.

نتیجه ۴-۲۲. *برای هر عدد غیرجبری α، ساختار $\mathcal{Z}_\alpha$ تصمیم‌پذیر است.*

فصل ۵

پژوهش‌های آتی

در این فصل به بیان ملاحظاتی در مورد ساختارهای بررسی شده و همچنین به طرح سوالاتی دیگر برای پژوهش‌های آتی می‌پردازیم.

۱.۵ اعداد صحیح و دنبالهٔ ویتهُف

در فصل ۲ نشان دادیم که ساختار $\mathcal{Z}_\varphi = \langle \mathbb{Z}, +, f, R, \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, 0, 1\rangle$ که در آن f تابعی است که x را به $[\varphi x]$ می‌نگارد، تصمیم‌پذیر است. در آن فصل ثابت کردیم که این ساختار حذف‌سور دارد. اما آیا می‌توان در زبان $\mathcal{L}$ این رابطهٔ R را تعریف کرد، که در آن صورت حذف‌سور جالب‌تری بدست آید؟

سوال ۱. *آیا معادلی بدون سور برای رابطهٔ $R(x, y)$ در زبان $\mathcal{L}$ وجود دارد؟*

۲.۵ دنباله‌ی بیتی متناظر با عددی جبری

در فصل ۴، نشان دادیم که ساختار $\mathcal{Z}_\alpha$ برای هر عدد حقیقی غیرجبری α تصمیم‌پذیر است. اما چه اتفاقی می‌افتد اگر α جبری و غیرمربعی باشد؟ به‌نظر می‌رسد که اثبات مدل‌کاملیتی را که در فصل ۴ ارائه کردیم، می‌توان برای حالتی که α عددی جبری باشد، نیز استفاده کرد. اما باید به این نکته هم توجه کنیم که در این حالت، به‌خاطر جبری بودن α و چندجمله‌ای کمینهٔ آن، وابستگی جدیدی در قسمت‌های

اعشاری بوجود می‌آید. درحقیقت، اگر α در یک چندجمله‌ای با کمترین درجهٔ n به‌صورت

$$\alpha^n + k_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + k_0 = 0 \qquad (1)$$

صدق کند، که در آن ضرایب اعداد صحیح هستند، آنگاه این رابطه باعث می‌شود که در دستگاه‌های معادلات، وابستگی جدیدی ایجاد شود.

برای بیان دقیق‌تر این مطلب، برای مثال دستگاهی از معادلات دومتغیره‌ای مشابه زیربخش ۲.۳.۴ را درنظر بگیرید. در این صورت مثلا برای متغیر x، معادلهٔ (۱) ایجاب می‌کند که $[\alpha^n x]$ به تمام $[\alpha^i x]$ که $i < n$، وابسته شود. این وابستگی، علاوه بر وابستگی‌هایی است که در زیرفصل ۲.۳.۴ آنها را برروی دستگاه معادلات اعمال کردیم.

اما علاوه‌براین وابستگی، معادلهٔ (۱) باعث می‌شود که شرایط وابسته بودن دو چندجمله‌ای نیز تغییر کند. به‌این معنی که از وابستهٔ خطی بودن توابع گویای $\frac{1}{F(\alpha)}$، $\frac{1}{G(\alpha)}$ و ۱ روی $\mathbb{Q}$، نمی‌توان نتیجه گرفت که دوچندجمله‌ای $F(\alpha)$ و $G(\alpha)$ روی $\mathbb{Q}$ وابستهٔ خطی هستند. ولی وابستگی آنها به‌صورت $F(\alpha) = r + r'G(\alpha)$ است (برای اعداد گویای r و r'). پس چنین وابستگی نیز در دستگاه معادلات ایجاد می‌شود. اما به‌نظر می‌رسد که چنین وابستگی نیز با افزودن شمای اصول مناسبی، در مدل‌کامل بودن ساختار و درنتیجه تصمیم‌پذیری آن ، خللی وارد نکند. با توجه به این نکته که در نوشتن چنین شمای اصولی باید برخی ظرافت‌ها در مورد وابستگی‌ها اعمال شود، حدس زیر را می‌توان با یک بررسی ساده ثابت کرد.

حدس ۱. *ساختار $\mathcal{Z}_\alpha$ برای هر عدد حقیقی α، تصمیم‌پذیر است.*

۳.۵ مجموعه‌های تعریف‌پذیر

از آنجایی که ساختار $\mathbb{Z}_\varphi$ حذف‌سور دارد، بنابراین مجموعه‌های تعریف‌پذیر کاملا بوسیلهٔ فرمول‌های بدون‌سور در زبان $\mathcal{L}^*$ مشخص می‌شوند. اما چون ساختار $\mathcal{Z}_\alpha$، دارای حذف‌سور نیست، بنابراین بررسی مجموعه‌های تعریف‌پذیر این ساختار، سوال جالبی است.

در زبان $\mathcal{L}$ دو دسته مجموعه تعریف‌پذیر هستند. دستهٔ اول، آنهایی هستند که به وسیلهٔ فرمول‌های وجودی‌ای که در آنها توان‌های مختلف f ظاهر نشده است، تعریف می‌شوند. که در این حالت با توجه به حذف‌سور پذیرفتن نظریهٔ $\mathbb{Z}$ـ گروه‌ها، مجموعه‌های تعریف‌پذیر درحقیقت دنباله‌های حسابی نامتناهی هستند. به این چنین مجموعه‌هایی «مجموعه‌های ساختاری» می‌گوییم، که رفتارهایی قابل پیش‌بینی دارند. در جهت دیگر، مجموعه‌هایی تعریف می‌شود که رفتاری تصادفی‌ـ ساختاری دارند. به

این معنی که از جهتی رفتاری تصادفی دارند، یعنی در این مجموعه‌های نمی‌توان یک دنبالهٔ حسابی با طول نامتناهی یافت و از سویی دیگر رفتاری ساختاری دارند، به این معنی که تمام کلاس‌های همنهشتی را قطع می‌کند. به‌عنوان مثال، برد تابع f تمام کلاس‌های همنهشتی را قطع می‌کند ولی کانِل [۱] در [۲] ثابت کرد که در برد این تابع دنبالهٔ حسابی با هر طولی وجود دارد ولی هیچ دنبالهٔ حسابی با طول نامتناهی یافت نمی‌شود. چنین مجموعه‌هایی رفتاری «ترکیبی [۲]» از خود نشان می‌دهند. چنین نام‌گذاری برای این مجموعه‌ها را بر اساس نام‌گذاری تائو [۳] در [۶] برگزیده‌ایم. تمامی فرمول‌هایی به‌صورت $\exists y(x = f^n(y))$ چنین مجموعه‌هایی را تعریف می‌کنند.

اما همچنان فرمول‌هایی باقی می‌مانند که ما رفتار مجموعه‌هایی را که آنها تعریف می‌کنند، نمی‌دانیم. به‌عنوان مثال فرمول‌هایی به‌صورت $\exists y(x = f(y) + f^۲(y))$. با این حال، می‌توان نتیجه‌ای که کانِل در [۲] بیان کرده است را تعمیمی جالب داد، به این ترتیب که به‌جای برد تابع f، برد هر تابع چندجمله‌ای برحسب توان‌های مختلف f را قرار داد. این تعمیم جالب را در گزارهٔ زیر بیان و سپس اثبات می‌کنیم.

گزاره ۵-۱. *فرض کنید* $h(x) = \sum_{i=0}^{k} m_i f^i(x)$. *در این صورت برد تابع* h *در* $\mathcal{Z}_\alpha$*، شامل دنبالهٔ حسابی با هر طولی است.*

اثبات. برای داشتن دنبالهٔ حسابی از طول دلخواه n، کافی است عناصری مانند x و y را بیابیم به‌طوری که برای هر $\ell \leq n$، همواره $h(x + \ell y) = h(x) + \ell h(y)$. اما چنین رابطه‌ای زمانی برقرار است که در $\mathcal{Z}_\alpha$ معادلهٔ غیرجبری زیر برای هر $۱ \leq i \leq k$ برقرار باشد.

$$f^i(x + ny) = f^i(x) + nf^i(y)$$

این عبارت معادل است با اینکه برای هر $۰ \leq i \leq k - ۱$ رابطهٔ زیر برقرار باشد.

$$\mathcal{Z}_\alpha \models ۰ < [\alpha f^i(x)] + n[\alpha f^i(y)] < ۱$$

حال بهره جستن از قضیهٔ کرونکر، یافتن چنین عناصری را برای ما میسر می‌کند. □

با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که حتی مجموعه‌ای که به‌وسیلهٔ فرمولی با بیش از یک متغیر تعریف می‌شوند، نیز چنین خاصیتی دارند. یعنی در این مجموعه‌ها، دنبالهٔ حسابی از هر طول متناهی یافت می‌شود ولی شامل هیچ دنبالهٔ حسابی با طول نامتناهی نیست.

این مشاهده نشان می‌دهد که مجموعه‌هایی که با فرمول‌هایی که در آن توان‌های مختلف f ظاهر شده است، کمابیش رفتاری شبیه به اعداد اول دارند. به این معنی که شامل هیچ دنبالهٔ حسابی با طول

[۱] Connell
[۲] hybrid
[۳] T. Tao

نامتناهی نیست ولی در آن دنبالهٔ حسابی از هر طول متناهی وجود دارد [۶]. با این حال، گزارهٔ ۴-۴ نشان می‌دهد که چنین مجموعه‌های تعریف‌پذیری ممکن است با مجموعهٔ اعداد اول در اشتراک نامتناهی داشتن با هر کلاس همنهشتی، متفاوت باشد.

بنابراین شناختن دقیق تمامی مجموعه‌های تعریف‌پذیر در این ساختارها، سوالی بسیار جالب است که می‌توان آن را به‌عنوان یک موضوع پژوهشی جدید درنظر گرفت. ضمن اینکه، در حالتی که α عددی مربعی باشد، چون توان‌های بزرگتر از دو در فرمول‌ها ظاهر نمی‌شوند، شناسایی مجموعه‌های تعریف‌پذیر آسان‌تر بنظر می‌رسد.

سوال ۲. *برای هر α، مجموعه‌های تعریف‌پذیر در ساختار $\mathcal{Z}_\alpha$ به چه‌صورت هستند؟ آیا به‌غیر از مجموعه‌های ساختارمند و مجموعه‌های ترکیبی، مجموعه‌های تصادفی نیز تعریف می‌شوند؟*

خاصیت بسیار جالب دیگری که این ساختارها دارند، از ترتیب اعشاری تعریف شده در این ساختارها نشأت می‌گیرد. به این ترتیب که اگر توپولوژی القا شده به‌وسیلهٔ این رابطهٔ ترتیب را در نظر بگیریم، آنگاه هر دو دسته مجموعه‌های تعریف‌پذیر، ساختارمند و ترکیبی، مجموعه‌هایی چگال و متمم‌چگال نیز هستند.

همانطور که در مقدمه بیان کردیم، هیرونیمی ثابت کرد که در ساختار $\langle\mathbb{R},<,+,\mathbb{Z},\alpha\mathbb{Z},\beta\mathbb{Z}\rangle$ ضرب تعریف می‌شود هرگاه ۱، α و β روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی باشند. دنبال کردن اثبات هیرونیمی بسیار دشوار است. بنابراین اثبات نظریهٔ مدلی برای این قضیه می‌تواند سوالی جالب باشد.

سوال ۳. *آیا اثباتی با استفاده از ابزارهای مقدماتی نظریهٔ مدل برای تعریف‌پذیری ضرب در ساختار $\langle\mathbb{R},<,+,\mathbb{Z},\alpha\mathbb{Z},\beta\mathbb{Z}\rangle$ وجود دارد.*

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

ا

اشباع، ۸ .... saturated

اصل‌بندی، ۱۱ .... axiomatization

ب

بازگشتی، ۱۰ .... recursive

ت

تایپ، ۷ .... type

تصمیم‌پذیری، ۱۰ .... decidability

ح

حذف‌سور، ۷ .... quantifier elimination

د

دنبالهٔ بیتی، ۱۱ .... Beatty sequence

دنبالهٔ بیتی کامل، ۱۱ .... complete Beatty sequence

دنبالهٔ پایینی ویتهُف، ۱۲ .... lower Wythoff sequence

دنبالهٔ فیبوناتچی، ۲۰ .... Fibonacci sequence

س

سامانهٔ رفت و برگشتی، ۹ .... back and forth system

م

متعالی، ۷۱ .... transcendental

محاسبه‌پذیر، ۷۱ .... computable

ه

هم‌ارزِ مقدماتی، ۶ .... elementarily equivalent

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی

A

axiomatization .... اصل‌بندی، ۱۱

B

back and forth system .... سامانهٔ رفت و برگشتی، ۹
Beatty sequence .... دنبالهٔ بیتی، ۱۱

C

complete Beatty sequence .... دنبالهٔ بیتی کامل، ۱۱
computable .... محاسبه‌پذیر، ۷۱

D

decidability .... تصمیم‌پذیری، ۱۰

E

elementarily equivalent .... هم‌ارزِ مقدماتی، ۶

F

Fibonacci sequence .... دنبالهٔ فیبوناتچی، ۲۰

L

lower Wythoff sequence .... دنبالهٔ پایینی ویتهُف، ۱۲

Q

quantifier elimination .... حذف‌سور، ۷

R

recursive .... بازگشتی، ۱۰

S

saturated .... اشباع، ۸

T

transcendental .... متعالی، ۷۱

type .... تایپ، ۷

نمایه

nـتایپ کامل، ۸

اشباع، ۸
الگوی عددیـاعشاری، ۴۳
ایزومرف، ۶
تایپ، ۷
تایپ بدون‌سور، ۷
تایپ غیرجبری، ۷۸
تصمیم‌پذیری، ۱۰
جایگشت، ۴۶
حذف‌سور، ۷
حساب پرسبرگر، ۴۷
دنبالهٔ بیتی، ۱۱
دنبالهٔ بیتی کامل، ۱۱
دنبالهٔ فیبوناتچی، ۲۰
دنبالهٔ پایینی ویتهُف، ۱۲
سامانهٔ رفت و برگشتی، ۹
عدد متعالی، ۷۱

قضیهٔ باقیماندهٔ چینی، ۴۰
قضیهٔ تخمین چندبُعدی کرونِکِر، ۷۲
قضیهٔ کرونکر، ۱۴، ۲۵
محاسبه‌پذیر، ۷۱
نسبت طلایی، ۱۲، ۲۰

نظریه، ۶
نظریهٔ غیرجبری، ۸۰
نظریهٔ مدل‌کامل، ۶
نظریهٔ کامل، ۶
نمایش فیبوناتچی، ۲۲
هم‌ارز مقدماتی، ۶

منابع

[1] Büchi, J. R. On a decision method in restricted second order arithmetic. in *Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proc. 1960 Internat. Congr .)*, pp. 1–11. Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 1962. 2

[2] Connell, I. G. Some properties of Beatty sequences. I. *Can. Math. Bull.*, 2:190–197, 1959. 11, 101

[3] Connell, I. G. Some properties of Beatty sequences. II. *Canad. Math. Bull.*, 3:17–22, 1960. 11

[4] Du, C. F., Mousavi, H., Schaeffer, L. and Shallit, J. Decision algorithms for Fibonacci-automatic words, III: Enumeration and abelian properties. *Internat. J. Found. Comput. Sci.*, 27(8):943–963, 2016. 3

[5] Gödel, K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I. *Monatsh. Math. Phys.*, 38:173–198, 1931. 1

[6] Green, B. and Tao, T. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Ann. Math. (2)*, 167(2):481–547, 2008. 101, 102

[7] Hardy, G. H. and Wright, E. M. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, Oxford, sixth ed. , 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by Andrew Wiles. 11, 15, 72

[8] Hieronymi, P. Expansions of the ordered additive group of real numbers by two discrete subgroups. *J. Symb. Log.*, 81(3):1007–1027, 2016. 1, 54

[9] Hieronymi, P. When is scalar multiplication decidable? *Ann. Pure Appl. Logic*, 170(10):1162–1175, 2019. 2

[10] Khani, M. and Zarei, A. The additive structure of integers with the lower Wythoff sequence. *Arch. Math. Logic*, 62(1-2):225–237, 2023. 16

[11] Khani, M., Valizadeh, A. N. and Zarei, A. Model-completeness and decidability of the additive structure of integers expanded with a function for a Beatty sequence. *preprint*, 2022. 72

[12] Khani, M., Valizadeh, A. N. and Zarei, A. Quantifier elimination and decidability of the structure $\langle \mathbb{R}, \mathbb{Z}, <, +, \lambda_\varphi \rangle$. *preprint*, 2023. 43

[13] Marker, D. *Model Theory: An Introduction*. Springer, 2002. 5

[14] Mousavi, H., Schaeffer, L. and Shallit, J. Decision algorithms for Fibonacci-automatic words, I: Basic results. *RAIRO Theor. Inform. Appl.*, 50(1):39–66, 2016. 3

[15] Rezaei, M. *Expansions of the ordered additive group of real numbers by two discrete subgroups*. MsC Thesis, Isfahan University of Technology, 2019. 2

[16] Skolem, T. *Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik*. I Kommisjon hos Jacob Dybwad, 1931. 1

[17] Stolarsky, K. B. Beatty sequences, continued fractions, and certain shift operators. *Can. Math. Bull.*, 19:473–482, 1976. 20

[18] Tent, K. and Ziegler, M. *A Course in Model Theory*. Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, 2012. 5

[19] Zeckendorf, E. Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 41:179–182, 1972. 23

References

[1] J. R. Büchi. On a decision method in restricted second order arithmetic. In *Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proc. 1960 Internat. Congr .)*, pages 1–11. Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 1962.

[2] G. Conant. There are no intermediate structures between the group of integers and Presburger arithmetic. *J. Symb. Log.*, 83(1):187–207, 2018.

[3] I. G. Connell. Some properties of Beatty sequences. I. *Canad. Math. Bull.*, 2:190–197, 1959.

[4] I. G. Connell. Some properties of Beatty sequences. II. *Canad. Math. Bull.*, 3:17–22, 1960.

[5] Mousavi H. Schaeffer L. Du, C. F. and J. Shallit. Decision algorithms for Fibonacci-automatic words. III: Enumeration and abelian properties. *Int. J. Found. Comput. Sci.*, 27(8):943–963, 2016.

[6] K. Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I. *Monatsh. Math. Phys.*, 38:173–198, 1931.

[7] P. Hieronymi. Expansions of the ordered additive group of real numbers by two discrete subgroups. *J. Symb. Log.*, 81(3):1007–1027, 2016.

[8] P. Hieronymi. When is scalar multiplication decidable? *Ann. Pure Appl. Logic*, 170(10):1162–1175, 2019.

[9] I. Kaplan and S. Shelah. Decidability and classification of the theory of integers with primes. *J. Symb. Log.*, 82(3):1041–1050, 2017.

[10] M. Khani and A. Zarei. The additive structure of integers with the lower Wythoff sequence. *Arch. Math. Logic*, 62(1-2):225–237, 2023.

[11] Valizadeh, A. N. Khani, M. and A. Zarei. Model-completeness and decidability of the additive structure of integers expanded with a function for a Beatty sequence. *preprint*, 2022.

[12] Valizadeh, A. N. Khani, M. and A. Zarei. Quantifier elimination and decidability of the structure $\langle \mathbb{R}, \mathbb{Z}, <, +, \lambda_\varphi \rangle$. *preprint*, 2023.

[13] Schaeffer, L. Mousavi, H. and J. Shallit. Decision algorithms for Fibonacci-automatic words, I: Basic results. *RAIRO Theor. Inform. Appl.*, 50(1):39–66, 2016.

Corollary 2.2. *The structure $\mathcal{Z}_\varphi$ is decidable.*

The results of this section have been published in [10].

3 Decidability of the structure $\langle \mathbb{Z}, +, f_\varphi, <, 0, 1\rangle$

By adding order to the structure of $\mathcal{Z}_\varphi$, the Kronecker theorem cannot be applied for poof of quantifier-elimination; because we may need to solve an equation of the form $[\varphi x] \in (a, b)$ augmented by $x \in (c, d)$, and the Kronecker theorem cannot be applied for solving this equation. Hence we resorted to some a different idea to prove the decidability of this structure by directly analysing formulas.

Note that, the Fibonacci sequence is definable in the structure $\langle \mathbb{Z}, +, f_\varphi, <, 0, 1\rangle$ but cannot be defined by a quantifier-free formula. So the structure $\langle \mathbb{Z}, +, f_\varphi, <, 0, 1\rangle$ does not admit quantifier-elimination.

The main theorem of this section is the following.

Theorem 3.1. *The structure $\langle \mathbb{Z}, +, f_\varphi, <, 0, 1\rangle$ is decidable.*

4 Decidability of the structure $\langle \mathbb{Z}, +, f_\alpha, 0, 1\rangle$

In this section, we prove the decidability of the structure of $\mathcal{Z}_\alpha$, for every computable non-algebraic number α. To prove the decidability, we prove that this structure is model-complete and the decidability is then obtained as a result of model-completeness. So the main theorem of this section is model-completeness of the structure $\mathcal{Z}_\alpha$.

Theorem 4.1. *For computable non-algebraic α, the structure $\mathcal{Z}_\alpha$ is model-complete.*

Corollary 4.2. *The structure $\mathcal{Z}_\alpha$ is decidable.*

In this thesis, we prove the decidability of expansions of the additive structure of integers by a Beatty sequence. The thesis is structured as follows. The decidability of the structure $\mathcal{Z}_\varphi := \langle \mathbb{Z}, +, f_\varphi, 0, 1\rangle$, where $f_\varphi(x) = \lfloor \varphi x \rfloor$, and φ is the golden ratio, is proved in Section 2. In Section 3, we add the order relation to the structure and prove the decidability of the structure $\langle \mathbb{Z}, +, <, f_\varphi, 0, 1\rangle$. In section 4, we prove that the structure $\mathcal{Z}_\alpha$ is decidable for all computable non-algebraic α.

2 Decidability of the structure $\langle \mathbb{Z}, +, f_\varphi, 0, 1\rangle$

In this section we prove that the structure $\mathcal{Z}_\varphi$ has quantifier-elimination and it is decidable. We are already aware that this follows from the decidability of the theory of $(\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \alpha\mathbb{Z}, +, <)$ for a quadratic irrational number α, as proved by Hieronymi in [7]. His proof relies on the continued fractions and Ostrowski representations and interpreting in the structure $\langle \mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \in, s_\mathbb{N}\rangle$. Since the latter is decidable by a classical result of Büchi [1], so is the former. Also, the decidability of our structure can as well be obtained as a consequence of two papers of Shallit et al., [5, 13] where they even propose an automata-based decision algorithms for Fibonacci words.

Nevertheless, although we rely on facts on Fibonacci words and the lower Wythoff sequence to explain the properties of the function f, our approach is pure model-theoretic and based on a quantifier-elimination result in a suitable language. This approach was suggested by Hieronymi, who guessed that a model-theoretic treatment of the properties of Beatty sequences would lead to the decidability of our structure.

Recall that any sequence of the form $\mathcal{B}_\alpha = (\lfloor \alpha n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ for a positive irrational α, is called a *Beatty sequence*. For $\alpha > 1$ and $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$, $(\mathcal{B}_\alpha, \mathcal{B}_\beta)$ form a so-called pair of complementary Beatty sequences; that is $\mathcal{B}_\alpha \cup \mathcal{B}_\beta = \mathbb{N}$ and $\mathcal{B}_\alpha \cap \mathcal{B}_\beta = \emptyset$ (see [3, 4] for more on Beatty sequences). The Beatty sequence $\mathcal{B}_\alpha$, in the special case that $\alpha = \varphi$, the golden ratio, is called the *lower Wythoff sequence*.

We augment the language of $\mathbb{Z}$-groups by the unary function symbol f. This choice of the language suggests that in order to have a chance for quantifier-elimination, we need to deal with systems of equations involving congruence relations and the function f. It turns out that the solvability of such systems is closely related to a classical theorem of Kronecker that the set of decimal parts of elements of the form φn, for $n \in \mathbb{N}$, is dense in the unit interval $(0, 1)$. We will deploy this connection as a major means for our axiomatization.

The main idea we rely on is that the order of the decimal parts is definable in $\mathcal{L}$. That is there is an $\mathcal{L}$-formula $R(x, y)$ such that $R(m, n)$ holds for two integers m, n if and only if the decimal part of φm is smaller than that of φn. Hence we add a binary predicate $R(x, y)$ to the language, and the main theorem is the following.

Theorem 2.1. *The structure $\langle \mathbb{Z}, +, f_\varphi, R, \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, 0, 1\rangle$ admits elimination of quantifiers.*

Expansions of the Additive Structure of Integers with a Beatty Sequence

Afshin Zarei
afshin.zarei@math.iut.ac.ir
September 19, 2023
Doctor of Philosophy Thesis (in Farsi)
Departement of Mathematical Sciences
Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-8311, Iran

Supervisor: Dr. Mojtaba Aghaei, `aghaei@iut.ac.ir`
Supervisor: Dr. Mohsen Khani, `mohsen.khani@iut.ac.ir`
Advisor: Dr. Ali N. Valizadeh, `valizadeh.ali@gmail.com`
2020 MSC: 03B25, 03C10, 03C98, 11U09, 11U05, 11B39
Keywords: Decidability, Quantifier-Elimination, Beatty Sequence, Golden Ratio, Expansions of the Additive Structure of Integers

Abstract

We proof the decidability of four different structures using different methods of model theory. At first, we proof quantifier-elimination for the structure $\langle \mathbb{Z}, +, \lfloor \varphi x \rfloor, 0, 1\rangle$, where φ is the golden ratio. We then conclude the decidability is obtained as a result. We extend this decidability result to the case where an order relation is also added. A similar result also proof when we consider this structure together with the real numbers. Finally, we proof that the structure $\langle \mathbb{Z}, +, \lfloor \alpha x \rfloor, 0, 1\rangle$ is model-complete, for any computable irrational number α, the decidability of the latter structure is a result of model-completeness.

1 Introduction

While the theory of the structure $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ is famously undecidable (first Gödel incompleteness theorem [6]), tame reducts of this structure have been subject of various literature, see for example [2, 8, 7, 9]. A classical result in this direction is the decidability of the theory of the structure $(\mathbb{Z}, +, \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, 0, 1)$, known as the theory of $\mathbb{Z}$-groups. In the mentioned structure, multiplication in $\mathbb{Z}$ is replaced by infinitely many unary predicates p_n, where $p_n(x)$ holds if $x \overset{n}{\equiv} 0$. More recent relevant results are, for example, that there are no intermediate structures between the group of integers and Presburger arithmetic (Conant in [2]); and that the theory of integers with a predicate for prime numbers is decidable, provided that Dickson's conjecture holds (Kaplan and Shelah in [9]).

Isfahan University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Expansions of the Additive Structure of Integers with a Beatty Sequence

A Thesis

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Doctor of Philosophy (Ph. D.)

By

Afshin Zarei

Evaluated and approved by the thesis committee, on 19/9/2023

1- Dr. Mojtaba Aghaei, Assistant Professor (Supervisor) M. Aghaei

2- Dr. Mohsen Khani, Assistant Professor (Supervisor)

3- Dr. Ali Valizadeh, (Advisor) on behalf

4- Dr. Massoud Pourmahdian, Associate Professor (Examiner) on behalf

5- Dr. Nazanin Roshandel Tavana, Assistant Professor (Examiner) on behalf

6- Dr. Mohammad Reza Koushesh, Associate Professor (Examiner) Koushesh

Dr. Azam Etemad Dehkordy, Associate Professor (Department graduate coordinator)

Isfahan University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Thesis Submitted for the Award of Doctor of Philosophy (Ph. D.) in Mathematics

Expansions of the Additive Structure of Integers with a Beatty Sequence

Afshin Zarei

Supervisor: Dr. Mojtaba Aghaei

Supervisor: Dr. Mohsen Khani

Advisor: Dr. Ali Valizadeh

September 2023