بسم الله الرحمن الرحيم

معرفی یک ارزیابی هنسلی تعریف‌پذیر با پیچیدگی سوری بالا

نجمه زمانی

استاد راهنما: دکتر محسن خانی

دانشگاه صنعتی اصفهان

۳۰ شهریور ۱۴۰۱

مقالهٔ زیر منبع اصلی این پایان‌نامه است.

Immanuel Halupczok and Franziska Jahnke, A definable Henselian valuation with high quantifier complexity. Mathematical Logic Quarterly Bull. 61 (4-5). pp. 362-366. ISSN 0942-5616 (2015).

فهرست مطالب

۱ مقدمات

۲ طرح سوال و مسیر اثبات

۳ اثبات قضیهٔ مورد نظر پایان‌نامه

به دو طریق می‌توانیم یک میدان ارزیابی را تعریف کنیم.

روش اول:

تعریف ۱

فرض کنید K یک میدان و Γ یک گروه مرتب آبلی باشد. نگاشت $v : K^{\times} \longrightarrow \Gamma$ یک **نگاشت ارزیابی** است هرگاه برای هر $a, b \in K^{\times}$ ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

۱. $v(ab) = v(a) + v(b)$

۲. $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$

اگر v یک نگاشت ارزیابی روی K باشد، به (K, v) یک **میدان ارزیابی** گفته می‌شود. به $O_v = \{x \in K : v(x) \geq 0\}$ یک **حلقهٔ ارزیاب** گفته می‌شود.

- O_v یک زیر حلقه از K است که این ویژگی را دارد که هر عنصر در K یا خودش و یا وارونش در O_v است.
- O_v یک حلقهٔ موضعی است یعنی تنها یک ایده‌آل ماکسیمال دارد که به صورت $m_v = \{x \in O_v : v(x) > 0\}$ است.

تعریف ۲

به $k_v := \dfrac{O_v}{m_v}$ **میدان باقی‌مانده‌ها** گفته می‌شود.

روش دوم:

تعریف ۳

فرض کنیم K یک میدان باشد و O زیر حلقه‌ای از این میدان که هر عضو K یا خودش و یا وارونش در O است در واقع

$$O = \{x \in K^{\times} : x \in O \vee x^{-1} \in O\}.$$

- فرض کنیم $x, y \in K$. رابطه هم‌ارزی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$v(x) = v(y) \iff \frac{x}{y} \in O \wedge \frac{y}{x} \in O$$

آنگاه گروه کلاس‌های هم‌ارزی آن‌ها را گروه ارزیاب Γ می‌گوییم که $(\Gamma, ., <)$ یک گروه آبلی مرتب است و ترتیب به این صورت تعریف می‌شود: $x \leq y \Leftrightarrow \frac{y}{x} \in O \wedge \frac{x}{y} \notin O$.

توجه ۴

در این ارائه میدان ارزیابی را به صورت (K, v, Γ, O_v, k_v) نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵ (حلقهٔ هنسلی)

گوییم دامنهٔ موضعی A با ایده‌آل ماکسیمال m یک حلقهٔ هنسلی است هرگاه برای هر $f(x) \in A[X]$ و برای هر $a \in A$ به طوری که $f(a) \in m$ و $f'(a) \notin m$ آنگاه $\alpha \in A$ موجود باشد به طوری که $f(\alpha) = 0$ و $\alpha \equiv a \pmod{m}$.

- به بیان بهتر، فرض کنید A یک دامنهٔ موضعی با ایده‌آل ماکسیمال m باشد آنگاه $K = \frac{A}{m}$ یک میدان است.

می‌خواهیم بدانیم آیا چندجمله ای $f \in A[X]$ ریشه دارد یا نه؟ اگر این چند جمله‌ای را در $\bar{f} \in K[x]$ در نظربگیریم که $\bar{f}(a) = 0$ و $\bar{f}'(a) \neq 0$ یعنی $f(a) \in m$ و $f'(a) \notin m$ آنگاه عنصر $\alpha \in A$ وجود دارد که $f(\alpha) = 0$ و علاوه بر آن $\bar{\alpha} = a$.

یکی از کاربردهای میدان سرهای هان این است که اگر میدان K و گروه آبلی مرتب Γ را داشته باشیم، می‌توانیم میدان ارزیابی $K((\Gamma))$ را بسازیم که گروه ارزیاب آن Γ و میدان باقی‌ماندهٔ آن K باشد.

تعریف ۶ (سری‌های هان)

اگر K یک میدان و $(\Gamma, +, <)$ یک گروه آبلی مرتب باشد. مجموعهٔ سری‌های هان را با $K((\Gamma))$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K((\Gamma)) = \{f = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma \,|\, supp(f) \text{ خوش ترتیب است}\}$$

توجه شود که: $supp(f) = \{\gamma | a_\gamma \neq ۰\}$

- فرض کنید $f = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma$ و $g = \sum_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma t^\gamma$، مجموعهٔ $K((\Gamma))$ همراه با اعمال جمع و ضرب زیر یک حلقه است:

$$f + g = \sum_{\gamma\in\Gamma} (a_\gamma + b_\gamma) t^\gamma$$

$$f.g = (\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma)(\sum_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma t^\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \sum_{\gamma_۱+\gamma_۲=\gamma} a_{\gamma_۱} b_{\gamma_۲} t^\gamma$$

- حلقهٔ $K((\Gamma))$ یک میدان است.

تعریف ۷

نگاشت ارزیابی $v : K((\Gamma)) \longrightarrow \Gamma$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v(\sum a_\gamma t^\gamma) := min\{\gamma : a_\gamma \neq 0\}$$

- حلقهٔ ارزیاب $K((\Gamma))$ را به صورت $K[[\Gamma]]$ نشان می‌دهیم و به شکل زیر است:

$$O_v = \{f | v(f) \geq 0\} = \{f | \text{هایی که اولین توان آن ها بزرگتر یا مساوی صفر باشد} f\}$$

$$= \{f | \text{هایی که توان منفی نداشته باشند} f\}$$

طرح سوال و مسیر اثبات

سوال ۸

اگر (K, v, Γ, O_v, k_v) یک میدان ارزیابی هنسلی باشد، آیا O_v به عنوان یک زیر حلقه از K در زبان حلقه‌ها با فرمولی تعریف می‌شود یا خیر؟

به طور خاص اگر k یک **میدان سودو بستهٔ جبری باشد به طوری که بستهٔ جدایی‌پذیر نیست یعنی بستار جدایی‌پذیر آن با خودش برابر نیست**، آنگاه با توجه به لم ۳.۵ و قضیهٔ ۳.۶ در منبع [۸] پایان‌نامه، هر ارزیابی هنسلی با میدان باقی‌ماندهٔ k، در زبان حلقه‌ها بدون پارامتر تعریف‌پذیر است. فرمول زیر میدان ارزیاب O_v را در هر میدان ارزیابی هنسلی (K, v) با میدان باقی ماندهٔ k بدون پارامتر در زبان حلقه‌ها تعریف می‌کند:

$$\eta(x) \equiv (\exists u, t)\big(x = u + t \wedge (\exists y, z, y_1 z_1)\big(u = y_1 - z_1 \wedge y_1(y^3 - 2) = 1 \wedge z_1(z^3 - 2) = 1$$

$$\wedge (\exists y, z, y_1, z_1)\big(t = 0 \vee (t = y_1 z_1 \wedge y_1(y^3 - 2) = 1) \wedge z_1(z^3 - 2) = 1)\big)\big)$$

سوال ۹

اگر (K, v, Γ, O_v, k_v) یک میدان ارزیابی هنسلی باشد که k یک میدان سودو بستهٔ جبری باشد به طوری که بستهٔ جدایی‌پذیر نیست یعنی بستار جدایی‌پذیر آن با خودش برابر نیست آیا حلقهٔ ارزیاب O_v از میدان ارزیابی هنسلی K در زبان حلقه‌ها با یک فرمولِ $\exists\forall$ و یا یک فرمول $\forall\exists$ تعریف می‌شود یا خیر؟

پاسخ این سوال خیر است. مثالی از یک میدان ارزیابی هنسلی معرفی می‌کنیم که حلقهٔ ارزیاب آن بدون پارامتر در زبان حلقه‌ها تعریف‌پذیر است اما با فرمول‌های $\exists\forall$ و $\forall\exists$ در زبان حلقه‌ها تعریف‌پذیر نیست.

$$K = k((\Gamma_۱))((\Gamma_۲))$$

در واقع در این پایان‌نامه به اثبات قضیهٔ زیر پرداخته شده است:

قضیه ۱۰

گروه‌های آبلی مرتب Γ_1 و Γ_2 وجود دارند به طوری که برای هر میدان سودو بستهٔ جبری که با بستار جدایی‌پذیرش برابر نباشد($k \neq k^{sep}$) حلقه ارزیابِ $O_w = k((\Gamma_1))[[\Gamma_2]]$ در میدان ارزیابی هنسلی $K = k((\Gamma_1))((\Gamma_2))$ بدون پارامتر تعریف‌پذیر است، اما O_w با هیچ فرمولِ $\exists\forall$ و $\forall\exists$ در زبان حلقه‌ها تعریف‌پذیر نیست.

دو ابزار مهم در اثبات قضیه:

۱.محکی از پرستل برای تعریف‌پذیری محمول تک موضعی در ساختار
۲.قضیهٔ اکس-کوچن و ارشف

قضیه ۱۱ (محکی از پرستل برای تعریف‌پذیری)

فرض کنید $\sum$ یک سیستمِ اصل موضوعه‌ای مرتبهٔ اول در زبان حلقه‌ها به همراه یک محمول تک‌موضعیِ O باشد. در این صورت فرمولِ $\phi(x)$ در زبان حلقه‌ها موجود است به طوری که مجموعهٔ O را در همهٔ مدل‌های $(K, O) \models \sum$ تعریف می‌کند و نوع سوری آن، برای هر دو مدل (K_1, O_1) و (K_2, O_2) از $\sum$ به شرح زیر است:

$$\exists \ \ iff \left(K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow O_1 \subseteq O_2\right)$$
$$\forall \ \ iff \left(K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow O_2 \cap K_1 \subseteq O_1\right)$$
$$\exists\forall \ \ iff \left(K_1 \prec_{\exists} K_2 \Rightarrow O_1 \subseteq O_2\right)$$
$$\forall\exists \ \ iff \left(K_1 \prec_{\exists} K_2 \Rightarrow O_2 \cap K_1 \subseteq O_1\right)$$

◀ زبان $\mathcal{L}_U = \mathcal{L} \cup \{U\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\sum$ یک تئوری در زبان $\mathcal{L}_U$ باشد و (K, O) مدلی از این تئوری است که O یک محمول تک‌موضعی در این مدل است. فرض کنید $(K_1, O_1) \models \sum$ و $(K_2, O_2) \models \sum$. **اگر از اینکه $K_1 \prec_{\exists} K_2$ در زبان $\mathcal{L}$ نتیجه بگیریم که $O_1 \subseteq O_2$** آنگاه محمول تک‌موضعی O در ساختار (K, O) با یک فرمول به صورت $\exists\forall$ در زبان حلقه‌ها تعریف می‌شود.

- در نتیجه با توجه به قضیهٔ قبل برای آنکه نشان دهیم حلقهٔ ارزیابِ میدان ارزیابی هنسلی $K = k((\Gamma_1))((\Gamma_2))$ با فرمول‌های به صورت $\exists\forall$ در زبان حلقه‌ها تعریف‌پذیر نیست کافی است یک نشاندنِ بستهٔ وجودی از $f : K \longrightarrow K$ بیابیم به طوری که $f(O) \nsubseteq O$.

قضیه ۱۲ (اکس-کوچن و ارشف)

فرض کنید (K, w, Γ_w, k_w) یک میدان ارزیابی هنسلی با گروه ارزیاب Γ و میدان باقی‌ماندهٔ k_w است که مشخصهٔ صفر باشد. همچنین فرض کنید (L, u, Γ_u, k_u) یک توسیع از میدان (K, w, Γ, k_w) باشد. اگر گروه ارزیابِ Γ_w و میدان باقی‌ماندهٔ k_w به ترتیب در گروه ارزیابِ Γ_u و میدان باقی‌ماندهٔ k_u به ترتیب در زبان گروه‌های مرتب و زبان حلقه‌ها، بستهٔ وجودی باشد، آنگاه میدان ارزیابی هنسلی (K, w, Γ_w, k_w) بستهٔ وجودی در (L, u, Γ_u, k_u) است.

بنابراین با توجه به قضیه اکس-کوشن و ارشوف، برای اینکه یک میدان ارزیابی (K, w, k, Γ) را در خودش به صورت بستهٔ وجودی بنشانیم، کافی است میدان باقی‌ماندهٔ k و گروه ارزیاب آن Γ را در خودشان به صورت بستهٔ وجودی بنشانیم.

اثبات قضیهٔ مورد نظر پایان‌نامه

حال به سراغ ساخت میدان ارزیابی هنسلی مورد نظر می‌پردازیم. گروه‌های آبلی مرتب زیر را در نظر بگیرید:

$$X := \mathbb{Z}_{(۲)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} | a, b \in \mathbb{Z}, ۲ \nmid b, (a, b) = ۱\}$$

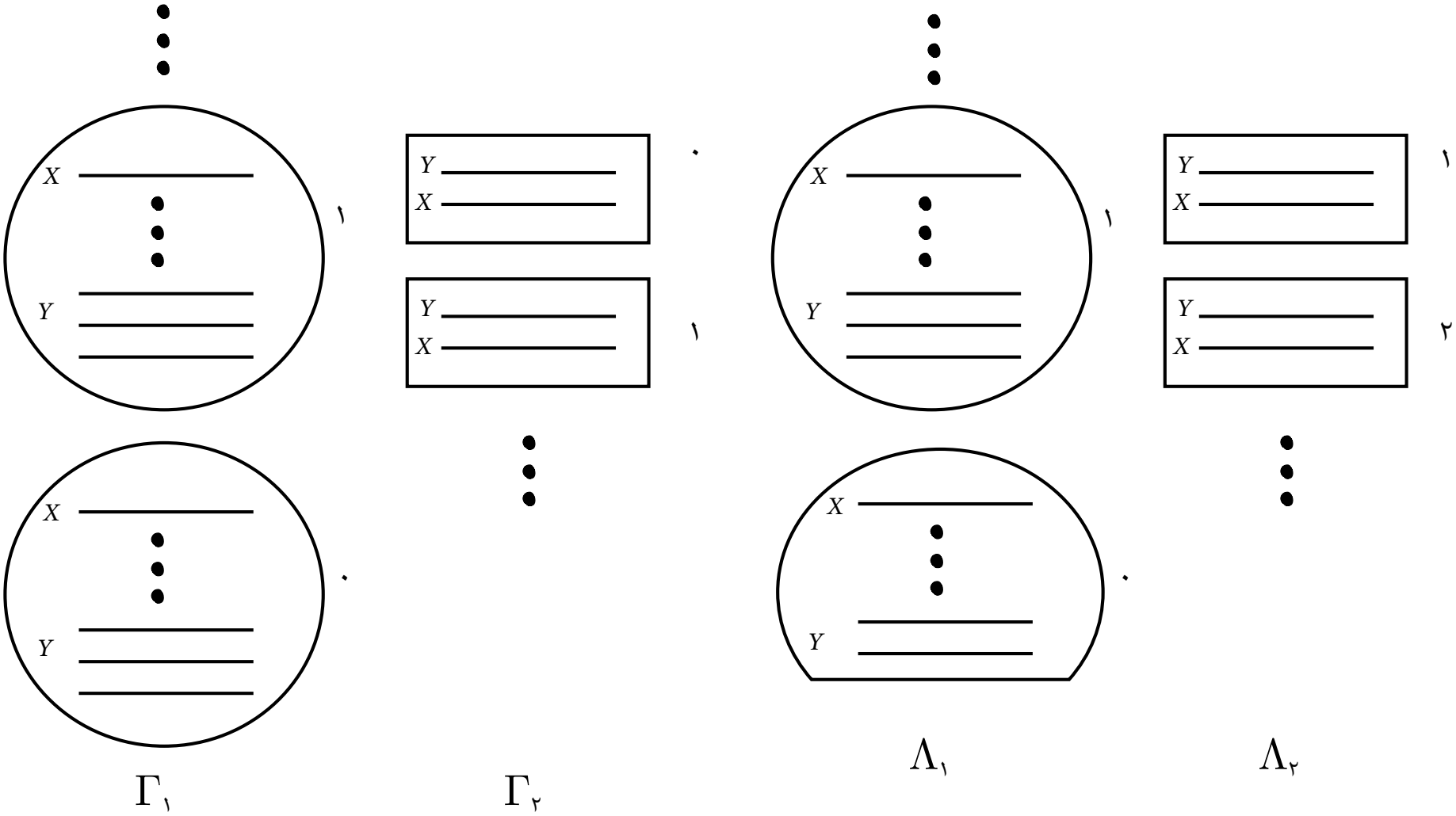
و

$$Y := \mathbb{Z}_{(۳)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} | a, b \in \mathbb{Z}, ۳ \nmid b, (a, b) = ۱\}$$

فرض کنید $(\mathbb{N}, <)$ مجموعهٔ اعداد طبیعی با ترتیب معمول باشد و $(\mathbb{N}', <)$ مجموعهٔ اعداد طبیعی با عکس ترتیب معمول باشد، آنگاه گروه‌های $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ و زیرگروه $\Lambda_۱$ از گروه $\Gamma_۱$ و زیرگروه $\Lambda_۲$ از گروه $\Gamma_۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

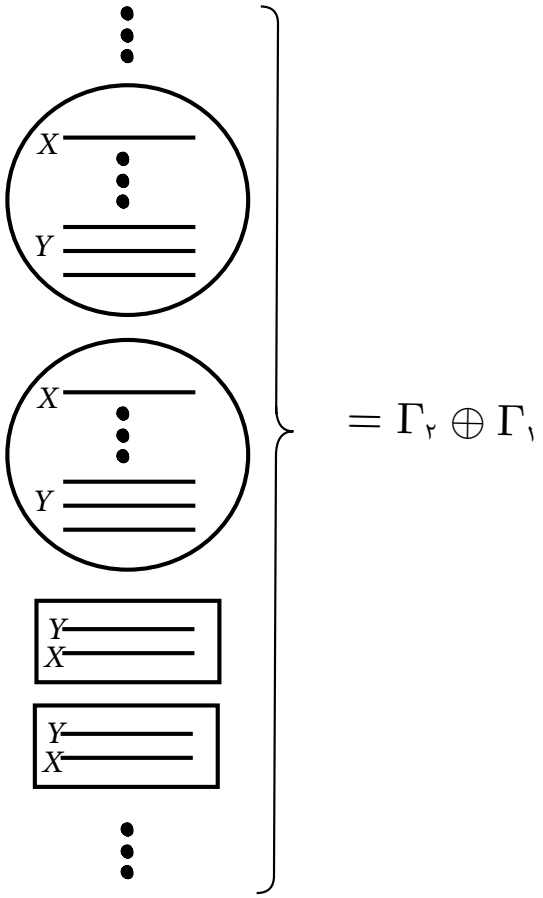
$$\Gamma_۱ := \bigoplus_{\mathbb{N}}((\bigoplus_{\mathbb{N}} Y) \oplus X) \qquad \Lambda_۱ := ((\bigoplus_{\mathbb{N}-\{۰\}}) \oplus X) \oplus (\bigoplus_{\mathbb{N}-\{۰\}} (\bigoplus_{\mathbb{N}} Y) \oplus X))$$

$$\Gamma_۲ := \bigoplus_{\mathbb{N}'}(X \oplus Y) \qquad \Lambda_۲ := \bigoplus_{\mathbb{N}'-\{۰\}} (X \oplus Y)$$


X
Y
۱
۰
Γ۱
Γ۲
Λ۱
Λ۲

- همچنین Γ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma := \Gamma_{۲} \oplus \Gamma_{۱}$$

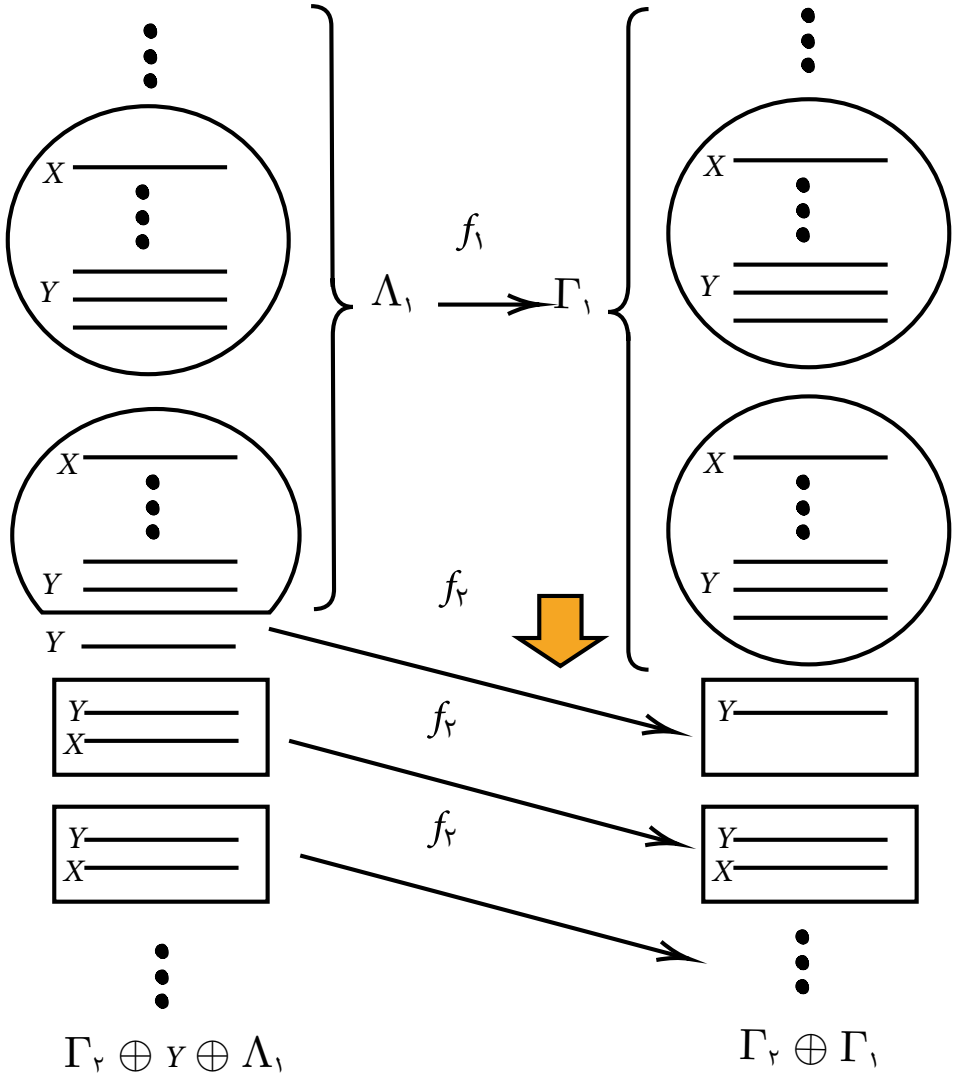


قضیه ۱۳

فرض کنید G_1 و G_2 دو گروه آبلی مرتب باشند. اگر G_1 زیر گروه محدبِ G_2 باشد، آنگاه G_1 در G_2 به طور وجودی بسته است.

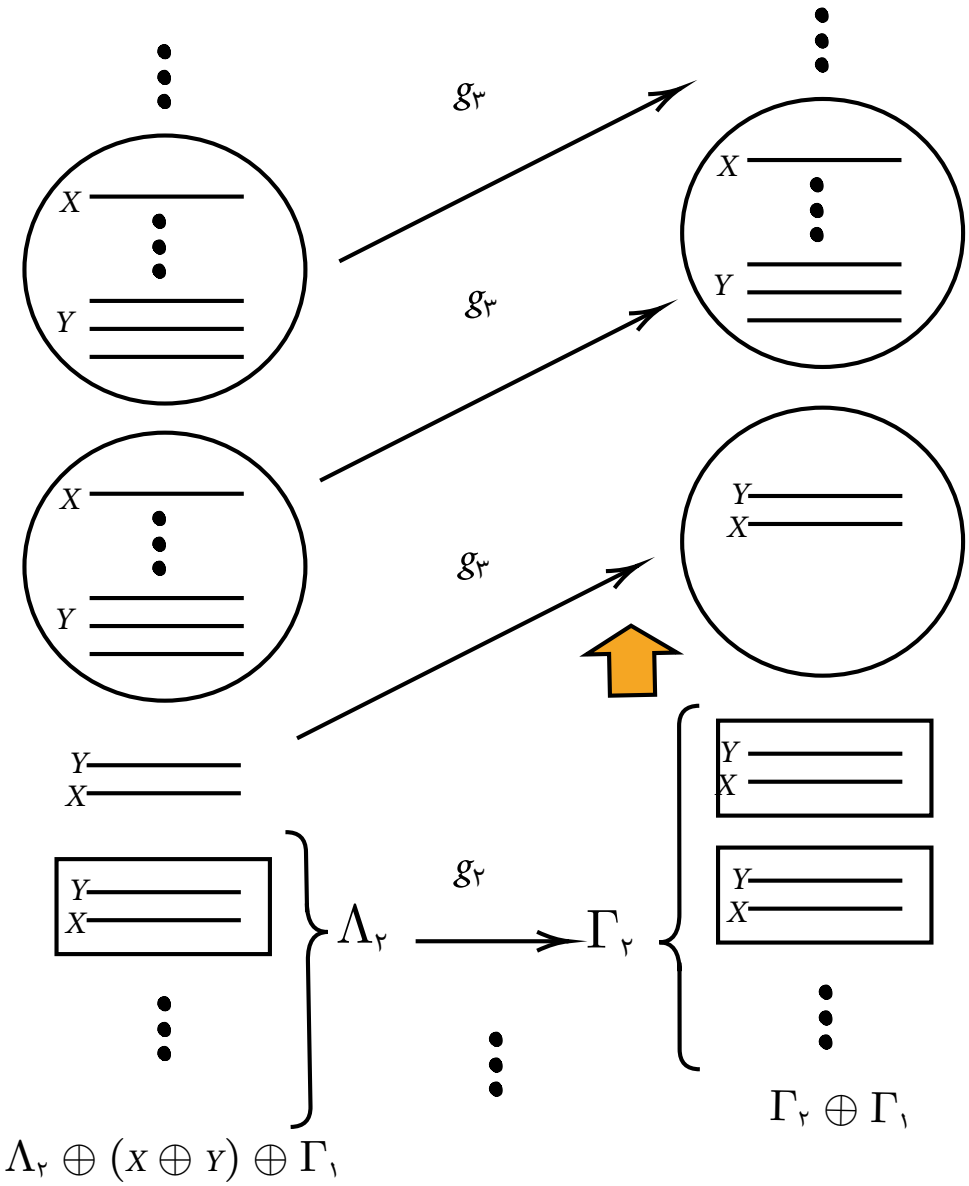
نشاندن اول

$$f_3 : \Gamma_2 \oplus \Gamma_1 = \Gamma_2 \oplus Y \oplus \Lambda_1 \cong \underbrace{f_2(\Gamma_2 \oplus Y)}_{\prec_\exists} \oplus \underbrace{f_1(\Lambda_1)}_{=\Gamma_2} \prec_\exists \Gamma_2 \oplus \Gamma_1$$


X
Y
X
Y
Y
Y
X
Y
X
Y
X
Y
X
Y
Λ_1
f_1
Γ_1
f_2
f_2
f_2
$\Gamma_2 \oplus Y \oplus \Lambda_1$
$\Gamma_2 \oplus \Gamma_1$

نشاندن دوم

$$g_3 : \Gamma_2 \oplus \Gamma_1 = \Lambda_2 \oplus (X \oplus Y) \oplus \Gamma_1 \cong \underbrace{g_2(\Lambda_2)}_{\prec_\exists} \oplus \underbrace{g_1((X \oplus Y) \oplus \Gamma_1)}_{=\Gamma_2} \prec_\exists \Gamma_2 \oplus \Gamma_1$$


g_3
g_3
g_3
g_2
X
Y
Λ_2
Γ_2
$\Lambda_2 \oplus (X \oplus Y) \oplus \Gamma_1$
$\Gamma_2 \oplus \Gamma_1$

- داریم: $K = k((\Gamma_1))((\Gamma_2)) = k((\Gamma_2 \oplus \Gamma_1))$

$$v : k((\Gamma_2 \oplus \Gamma_1)) \longrightarrow \Gamma_2 \oplus \Gamma_1$$

دیدیم که حلقهٔ ارزیابِ $(k((\Gamma_2 \oplus \Gamma_1)), v)$ با گروه ارزیاب $\Gamma_2 \oplus \Gamma_1$ و میدان باقی‌ماندهٔ k بدون پارامتر در زبان حلقه‌ها تعریف‌پذیر است.

$$w : k((\Gamma_1)) \longrightarrow \Gamma_2$$

- نگاشت w یک نگاشت ارزیابی (تحدید شدهٔ نگاشت ارزیابی v) با گروه ارزیاب Γ_2 و میدان باقی‌ماندهٔ $k((\Gamma_1))$ است. بنا به لم زیر $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \oplus \Gamma_1$، $\varnothing$- تعریف‌پذیر است. در نتیجه نگاشت ارزیابیِ w روی میدان ارزیابی K، بدون پارامتر تعریف‌پذیر است.

لم ۱۴

Γ_1 در $\Gamma_2 \oplus \Gamma_1$ بدون پارامتر در زبانِ $\mathcal{L}_{oag}$، تعریف‌پذیر است.

$$f_{\cdot} = k_w \xrightarrow{id} k_w$$

$$f_{۳} = \Gamma \longrightarrow \Gamma$$

$$\exists f : K \longrightarrow K$$

$$K \prec_{\exists} K \Longrightarrow O_w \subsetneq O_w$$

زیرا با توجه به نشاندن اول چیزی بیشتر از $\Gamma_{۲}$ به $\Gamma_{۲}$ تصویر می‌شود بنابراین $f(O_w) \supsetneq O_w$.

$$g_{۰} = k_w \xrightarrow{id} k_w$$

$$g_{۳} = \Gamma \longrightarrow \Gamma$$

$$\exists g : K \longrightarrow K$$

$$K \prec_{\exists} K \Longrightarrow O_w \subsetneq O_w$$

$O_w \subsetneq O_w$ زیرا با توجه به نشاندن دوم چیزی بیشتر از $\Gamma_{۱}$ به $\Gamma_{۱}$ تصویر می‌شود بنابراین $g(O_w) \subsetneq O_w$.

قضیه ۱۵

گروه‌های آبلی مرتب Γ_1 و Γ_2 وجود دارند به طوری که برای هر میدان سودو بستهٔ جبری که با بستار جدایی‌پذیرش برابر نباشد($k \neq k^{sep}$) حلقه ارزیابِ $O_w = k((\Gamma_1))[[\Gamma_2]]$ در میدان ارزیابی هنسلی $K = k((\Gamma_1))((\Gamma_2))$ بدون پارامتر تعریف‌پذیر است، اما O_w با هیچ فرمولِ $\exists\forall$ و $\forall\exists$ در زبان حلقه‌ها تعریف‌پذیر نیست.

باسپاس از توجه شما