

امتحان منطق پیشرفته (اثبات قضیه مورلی)

محسن خانی

۷ خرداد ۱۴۰۴

چکیده

برای درسی، به نظریه مدلهای، هیچ وقت نباید انتظار داشت که دانشجوی به سبکهای سنتی قضیه حفظ کند و امتحان بدهد. بلکه باید از میان انبوه مطالب، حداقلی را که از دانشجوی انتظار داریم مشخص کنیم.

از بین سوالهای زیر، هشت سوال در امتحان کتبی خواهد آمد. روز پس از امتحان کتبی، امتحان شفاهی برگزار خواهد شد و در آن امتحان، از بین همین سوالات به صورت شفاهی پرسیده خواهد شد.

طبقه بندی سوالات زیر، بر اساس میزان نمره مورد ادعای دانشجویان است. نمره نهایی نخست از ۲۳ حساب خواهد شد (۲۰ نمره امتحان و ۳ نمره تمرین) و سپس به مقیاس ۲۰ نمره تبدیل خواهد شد. کسانی که در کلاس نام برده شدند، به علت غیبت در جلسات اساسی درس، حتی در صورتی که از پس همه سوالات برآیند، نمره ای بیش از ۱۸ نخواهند گرفت.

قرار اولیه ما این بود که هشت نمره درس به تمرینها اختصاص یابد، اما سه نمره تمرین بیشتر دریافت نکرده ام (و البته این تعجب آور است، با توجه این که دانشجویان مدام تاکید کردند که وقت زیادی روی تمرینها گذاشته اند!)

۱ نمره از ۱ تا ۱۲

- سوال ۱. محک تارسکی برای زیرساختارهای مقدماتی، و اثبات قضایای فشردگی و لونهایم اسکولم.
- سوال ۲. این که برای هر دو مدل یک تئوری، یک فرمول جداکننده وجود دارد، معادل است با این که فرمولی وجود دارد که همه مدلهای دو تئوری را از هم جدا کند.
- سوال ۳. فرمول φ دارای معادل ψ است اگر و تنها اگر تحت زیرساختارها حفظ شود.
- سوال ۴. یک تئوری، مدل کامل است اگر و تنها اگر هر فرمولی معادل عمومی (وجودی) داشته باشد.
- سوال ۵. فرمول φ دارای یک معادل به صورت $\forall \exists$ است اگر و تنها اگر تحت اجتماع زنجیرها حفظ شود.

۲ نمره از ۱۲ تا ۱۴

- سوال ۶. در تئوری R مدولها، هر فرمولی دارای معادلی به صورت pp است.
- سوال ۷. تئوری میدانهای بسته جبری سورها را حذف می کند.
- سوال ۸. اثبات قضیه ریشه های هیلبرت با استفاده از حذف سور تئوری میدانهای بسته جبری.

۳ نمره از ۱۴ تا ۱۷

سوال ۹ (قضیه ریل - ناردفسکی). یک تئوری شمارا $\aleph_0$ جازم است اگر و تنها اگر برای هر عدد طبیعی n ، تعدادی متناهی فرمول n متغیره داشته باشد.

سوال ۱۰. فضای $S_n(T)$ با توپولوژی استون، فشرده است.

سوال ۱۱. یک تئوری شمارا، ω پایدار است اگر و تنها اگر بسیار متعالی باشد.

سوال ۱۲. اگر تئوری T در یک کاردینال منتظم پایدار باشد، دارای مدلی اشباع با همان اندازه است.

سوال ۱۳. یک تئوری، κ جازم است اگر و فقط اگر تنها یک مدل با اندازه κ داشته باشد.

سوال ۱۴. تئوری میدانهای بسته جبری، κ پایدار است برای هر کاردینال نامتناهی κ .

سوال ۱۵. هر تئوری شمارا، یک مدل از اندازه $\aleph_1$ دارد که در آن فقط تعدادی شمارا تایپ برآورده می شود.

سوال ۱۶. هر تئوری κ جازم، ω پایدار است (یادآوری: یک مدل با تعداد کمی تایپ، یک مدل با تعداد زیادی تایپ)

سوال ۱۷. هر تئوری شمارای T یک مدل دارد که در آن یک دنباله تمیزناپذیر وجود دارد (استفاده از لم رمزی)

سوال ۱۸. وجود مدل اول، معادل چگال بودن تایپهای ایزوله است.

سوال ۱۹. هر کلاس از ساختارها که ویژگیهای ارثبری، نشانند توانمان، و انطباق را داشته باشد، دارای حد فراسه است.

سوال ۲۰ (قضیه وات). یک تئوری شمارا، نمی تواند دقیقاً دو مدل شمارا داشته باشد.

سوال ۲۱ (قضیه حذف تایپ). هر تایپ جزئی غیرایزوله، حذف شدنی است.

۴ نمره از ۱۷ تا ۱۹

سوال ۲۲. مفهوم یک تئوری بسیار کمینه را معرفی کنید. نشان دهید که در تئوریهای بسیار کمینه، عملگر acl یک شبه هندسه است (به طور ویژه، ویژگی تبادل دارد).

سوال ۲۳. نشان دهید که هر تئوری شمارای بسیار کمینه، در کاردینالهای ناشمارا جازم است.

سوال ۲۴. فرق بین یک فرمول کمینه، و یک فرمول بسیار کمینه چیست؟ نشان دهید در یک مدل ω اشباع، هر فرمول کمینه، بسیار کمینه است.

سوال ۲۵. فرض کنید $\varphi(x, \bar{a})$ یک فرمول بسیار کمینه باشد و $\text{tp}(\bar{a}) = \text{tp}(\bar{b})$. نشان دهید فرمول $\varphi(x, \bar{b})$ نیز بسیار کمینه است.

سوال ۲۶. فرض کنید M در کاردینال $\kappa = |A|$ اشباع باشد و $A \subseteq M$. نشان دهید که یک تایپ $p \in S^M(A)$ جبری است اگر و تنها اگر توسط متناهی عنصر برآورده شود.

سوال ۲۷. نشان دهید هر تایپ جبری ایزوله است.

سوال ۲۸. فرض کنید M یک مدل باشد و $a \in M$ و $A \subseteq M$. فرض کنید a روی A غیرجبری باشد و $A \subseteq B$. نشان دهید عنصر b وجود دارد به طوری که روی B غیرجبری است و $\text{tp}(b/A) = \text{tp}(a/A)$.

سوال ۲۹. اگر یک تئوری سور $\exists^\infty$ را حذف کند، برای هر فرمول $\varphi(x, y)$ یک فرمول ψ وجود دارد به طوری که

$$\exists^\infty x \varphi(x, y) \leftrightarrow \psi(y).$$

سوال ۳۰. هر تئوری که زوج وات نداشته باشد، سور $\exists^\infty$ را حذف می‌کند.

سوال ۳۱. اگر یک تئوری زوج وات داشته باشد، زوج واتنی دارد که در آن هر دو مدل، همگن و شمارا هستند.

سوال ۳۲. اگر یک تئوری زوج وات داشته باشد، یک مدل با سائز $\aleph_1$ دارد که در آن یک فرمول با سائز $\aleph_0$ پیدا می‌شود.

سوال ۳۳. اگر یک تئوری شمارا زوج وات داشته باشد، در کاردینالهای ناشمارا، جازم نیست.

۵ نمره ۱۹ تا ۲۰ - جزئیات قضیه زیر

سوال ۳۴ (بالدوین - لاخلان). فرض کنید κ یک کاردینال ناشمارا باشد. تئوری شمارای T در کاردینال κ جازم است اگر و تنها اگر ω پایدار باشد و هیچ زوج وات نداشته باشد.

اثبات. حقایق زیر، ما را به اثبات قضیه خواهد رساند.

حقیقت ۱. اگر T در یک کاردینال ناشمارا، جازم باشد، ω پایدار است.

منظور از یک تئوری ω پایدار، تئوری‌ای است که در آن تعداد تاپیهای روی یک مجموعه شمارا از پارامترها، حداکثر شماراست. فرض کنید T جازم باشد ولی ω پایدار نباشد. در این صورت T یک مدل بزرگ دارد که در آن تعداد تاپیها زیاد است. از طرف دیگر، هر تئوری شمارا، دارای یک مدل بزرگ است که در آن حداکثر تعدادی شمارا تاپ برآورده می‌شود. چنین مدلی در واقع با استفاده از یک دنباله تمیزناپذیر بزرگ ساخته می‌شود. واضح است که این دو مدل معرفی شده نمی‌توانند با هم ایزومرف باشند.

حقیقت ۲. اگر T در یک کاردینال ناشمارا جازم باشد، هیچ زوج وات ندارد.

به یک زوج (N, M) از مدلهای یک تئوری T یک زوج وات گفته می‌شود هرگاه M یک زیرساختار مقدماتی از N باشد و یک فرمول φ با نامتناهی جواب، وجود داشته باشد به طوری که $\varphi(M) = \varphi(N)$. وقتی یک تئوری دارای یک زوج وات است، آنگاه دارای یک زوج وات (N, M) است که در آن هر دو مدل، همگن و ایزومرف هستند. با استفاده از یک زنجیر بسیار بلند از چنین مدلهایی، می‌توان یک مدل N برای تئوری پیدا کرد که سائز آن $\aleph_1$ است اما یک فرمول φ وجود دارد به طوری که $\varphi(N)$ شماراست. از طرف دیگر، وقتی تئوری T در کاردینال κ جازم است، مدلهای با سائز κ از این تئوری، اشباع هستند. علت این امر این است که تئوری‌های جازم پایدار هستند و تئوری‌های پایدار، مدلهای اشباع دارند. در یک مدل κ اشباع از تئوری مورد نظر ما به نام N' هر مجموعه تعریف پذیر، حداقل دارای اندازه κ است. چنین مدلی، نمی‌تواند با مدل N که در بند قبلی معرفی شد، ایزومرف باشد. با استفاده از حقیقت ۱ و حقیقت ۲، یک سمت قضیه اثبات شده است.

حقیقت ۳. هر تئوری ω پایدار، بسیار متعالی است.

منظور از یک تئوری بسیار متعالی، تئوری‌ای است که در آن هیچ درختی از فرمولها پیدا نشود که در مسیرها سازگار و در سطرها ناسازگار باشد. اگر در تئوری T یک درخت پیدا شود، تعداد تاپیها به صورت نمایی زیاد می‌شود و ω پایدار بودن نقض می‌گردد.

حقیقت ۴. در یک تئوری بسیار متعالی، تاپیهای ایزوله چگال هستند.

هر فرمول φ که در هیچ تاپ ایزوله‌ای نباشد، به دو فرمول تجزیه می‌شود که آنها نیز در هیچ تاپ ایزوله‌ای نیستند و از این طریق یک درخت ایجاد می‌شود که بسیار متعالی بودن را نقض می‌کند.

حقیقت ۵. هر تئوری که در آن تاپیهای ایزوله چگال هستند، دارای یک مدل اول است.

منظور از یک مدل اول، مدلی است که در هر مدل دیگر به صورت مقدماتی بنشیند. برای پیدا کردن مدل اول، کافی است یک مدل پیدا کنیم که تایپ همه چندتایی‌های آن ایزوله، یعنی معادل با فقط یک فرمول، باشد. به بیان معادل باید مدلی پیدا کنیم که تایپ جزئی زیر را حذف کند:

$$\{\neg\varphi(\bar{x})\}_{\varphi \in A}$$

که در آن A مجموعه همه فرمولهایی است که تایپ ایزوله می‌کنند. اما حذف تایپ بالا، معادل چگال بودن تایپهای ایزوله است.

حقیقت ۶. در هر مدل از یک تئوری بسیار متعالی، هر فرمولی شامل یک فرمول کمینه است.

منظور از یک فرمول کمینه در یک مدل M فرمولی است مانند φ به طوری که برای هر فرمول ψ یا $\varphi \wedge \psi$ یا $\varphi \rightarrow \psi$ در مدل M متناهی باشند. اگر φ یک فرمول دلخواه در یک تئوری بسیار متعالی باشد که کمینه نیست، به ψ و $\neg\psi$ تجزیه می‌شود که هر دوی آنها نامتناهی هستند. این تجزیه، به صورت درختی ادامه پیدا می‌کند و با این روش، بسیار متعالی بودن تئوری نقض می‌شود.

حقیقت ۷. اگر یک تئوری، هیچ جفت وات نداشته باشد، سور $\exists^\infty$ را حذف می‌کند.

می‌گوییم تئوری T سور $\exists^\infty$ را حذف می‌کند هرگاه در هر مدل M در خانواده $\{\varphi(M, \bar{a})\}_{\bar{a} \in M}$ تمام مجموعه‌های با اندازه متناهی باشند، اندازه‌شان از یک عدد n_φ کمتر باشد. تئوری T سور $\exists^\infty$ را برای یک فرمول φ حذف نکند، در این صورت می‌توان می‌توان در زبان $L_p = L \cup \{p\}$ و با استفاده از متناهی ثابت، یک تئوری نوشت که یکی از مدلهای آن زوجی واتی مانند (N, M) نسبت به فرمول φ باشد. در واقع عدم حذف سور $\exists^\infty$ منجر به ایجاد یک مدل می‌شود که در آن φ توسط نامتناهی عنصر برآورده شود.

حقیقت ۸. اگر یک تئوری سور $\exists^\infty$ را حذف کند، در آن هر فرمول کمینه، بسیار کمینه است.

منظور از یک فرمول بسیار کمینه در یک مدل M فرمولی است که نه تنها در M بلکه در تمام توسیعیهای مقدماتی آن نیز کمینه باشد. وقتی تئوری T سور $\exists^\infty$ را برای یک فرمول φ حذف می‌کند، فرمولی مانند ψ پیدا می‌شود به طوری که:

$$\exists^\infty x \quad \varphi(x, \bar{a}) \leftrightarrow \psi(\bar{a}).$$

بنابراین وقتی φ در M کمینه است در تمام توسیعیهای مقدماتی نیز کمینه می‌شود. تا اینجا ثابت شد که اگر یک تئوری هیچ زوج واتی نداشته باشد و ω پایدار باشد در آن یک فرمول بسیار کمینه پیدا می‌شود.

حقیقت ۹. اگر فرمول φ یک فرمول بسیار کمینه باشد، آنگاه عملگر

$$A \mapsto \varphi(M) \cap acl(A)$$

یک شبه هندسه در مدلهای تئوری ایجاد می‌کند. شبه هندسه منجر به ایجاد مفهوم بُعد می‌شود. هر دو مدل تئوری که بعد یکسانی داشته باشند، با هم ایزومرف هستند.

علت این که فرمولهای بسیار کمینه موجب ایجاد شبه هندسه می‌شوند، به شرح خلاصه زیر است. هر تایپی که شامل یک فرمول بسیار کمینه باشد، فقط یک توسیع غیر جبری دارد. این توسیع غیر جبری طبیعتاً از فرمولهایی تشکیل می‌شود که عطف آنها با فرمول مورد نظر، نامتناهی جواب دارد. حال فرض کنید $p(x)$ همان یکتا تایپ غیر جبری شامل فرمول φ باشد. در این صورت همه چندتایی‌های $a_1, \dots, a_n$ که تایپ p را برآورده کنند و $a_{i+1} \notin acl(a_1, \dots, a_i)$ دارای تایپ یکسانی هستند. برای اثبات این گفته از استقرا استفاده کنید و به این نکته توجه کنید که اگر a_1 تایپ p را برآورده کند، می‌توان تایپ p روی مجموعه A را به مجموعه $a_1 A$ به نحو یکتای غیر جبری گسترش داد. این امر تایپ $a_2 a_1$ را در صورتی که $a_2 \notin acl(a_1)$ معلوم می‌کند.

حال برای اثبات ویژگی «تبادل» به صورت زیر عمل کنید. فرض کنید $a \notin acl(b)$. در این صورت تایپ ba به نحوی یکتا معلوم است. می‌توان یک دنباله نامتناهی $A = a_1, \dots$ از عناصر هم‌تایپ با a پیدا

کرد به طوری که $b \notin acl(A)$. در این صورت تایپ تمام $a_i b$ ها مثل هم و مثل تایپ ab است. پس b نمی‌تواند روی a جبری باشد.

برای به پایان رساندن اثبات قضیهٔ بالدوین – لاخلان، حال فرض کنید M_1 و M_2 دو مدل با سائز κ باشند که κ کاردینالی ناشماراست. در این صورت هر دوی این مدلها باید دارای پایه‌ای به سائز κ باشند و از این رو با هم ایزومرف هستند. $\square$