تعریف‌پذیری وجودی حلقه‌های ارزیاب هنسلی

شقایق شیرانی

استادان راهنما:

دکتر محسن خانی

دکتر حامد لروند

دانشگاه صنعتی اصفهان

۲ اسفند ۱۴۰۲

منابع اصلی این پایان‌نامه است:

- Fehm, Arno. Existential $\emptyset$-definability of henselian valuation rings. The Journal of Symbolic Logic, 80(1):301–307, 2015.
- Fried, Michael D, Jarden, Moshe, et al. Field arithmetic, volume 11. Springer, 2005.

مقدمات جبری

فرض کنید Γ یک گروه آبلی مرتب و K یک میدان باشد. نگاشت $v : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ را یک نگاشت ارزیابی می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in K$ ویژگی‌های زیر برقرار باشد:

۱. $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$،

۲. $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$،

۳. $x = ۰ \Leftrightarrow v(x) = \infty$.

تعریف ۱ (حلقه‌ی ارزیاب)

زیرحلقه‌ی $\mathcal{O}$ از میدان K را یک حلقه‌ی ارزیاب برای K می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in K$ داشته باشیم $x \in \mathcal{O}$ یا $x^{-1} \in \mathcal{O}$.

تعریف ۲ (میدان ارزیابی)

زوج $(K, \mathcal{O})$ را یک میدان ارزیابی می‌نامیم هرگاه $\mathcal{O} \subseteq K$ یک حلقه‌ی ارزیاب باشد.

- فرض کنید $v : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ یک نگاشت ارزیابی باشد. حلقه‌ی ارزیاب نظیر نگاشت v را با $\mathcal{O}_v$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{O}_v = \{x \in K : v(x) \geq 0\}.$$

- O یک حلقه‌ی ارزیاب در میدان K است اگر و تنها اگر حلقه‌ی ارزیاب نظیر یک نگاشت ارزیابی $v : K \to \Gamma$ باشد.

حلقه‌ی موضعی و میدان ارزیابی

تعریف ۳ (حلقه‌ی موضعی)

حلقه‌ی R را موضعی می‌نامیم هرگاه تنها یک ایده‌آل ماکزیمال داشته باشد؛ معادلاً هرگاه تمامی عناصر وارون‌ناپذیر آن تشکیل یک ایده‌آل بدهند.

- هر حلقه‌ی ارزیاب $\mathcal{O}$ یک حلقه‌ی موضعی است.
- ایده‌آل ماکزیمال حلقه‌ی $\mathcal{O}$ را با نماد $\mathfrak{m}$ نمایش می‌دهیم.
- اگر $\mathcal{O}$ یک حلقه‌ی ارزیاب با ایده‌آل ماکزیمال $\mathfrak{m}$ باشد، $F = \frac{\mathcal{O}}{\mathfrak{m}}$ یک میدان است که آن را میدان باقیمانده‌های این حلقه‌ی ارزیاب می‌نامیم.

حلقه‌ی موضعی هنسلی

فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی باشد. حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی موضعی هنسلی می‌نامیم هرگاه برای هر $f \in R[x]$ داشته باشیم:
اگر $\alpha \in R$ موجود باشد به طوری که $\bar{f}(\bar{\alpha}) = 0$ و $\bar{f}'(\bar{\alpha}) \neq 0$ آنگاه عنصر $a \in R$ موجود باشد به طوری که $f(a) = 0$ و $\bar{a} = \bar{\alpha}$.

تعریف ۴ (میدان ارزیابی هنسلی)

میدان ارزیابی $(K, \mathcal{O})$ را هنسلی می‌نامیم هرگاه حلقه‌ی $\mathcal{O}$ هنسلی باشد.

میدان‌های سودوبسته‌ی جبری

- فرض کنید V یک K واریته‌ی مطلقاً تحویل‌ناپذیر باشد. واریته‌ی V را تعریف شده روی K می‌نامیم هرگاه $I_{\tilde{K}}(V)=\tilde{K}I_K(V)$.

تعریف ۵ (میدان سودوبسته‌ی جبری)

میدان K را سودوبسته‌ی جبری می‌نامیم هرگاه هر واریته‌ی تعریف شده روی آن، در خود میدان K یک ریشه داشته باشد.

- میدان K را سودوبسته‌ی جبری می‌نامیم هرگاه هر چندجمله‌ای مطلقاً تحویل‌ناپذیر $f(X,Y)\in K[X,Y]$ یک ریشه در K داشته باشد.

- میدان‌های سودوبسته‌ی جبری نامتناهی هستند.

تعریف ۶ (تعریف پذیری)

فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک ساختار مرتبه اول با جهان M باشد. یک مجموعه‌ی $X \subseteq M^n$ را تعریف‌پذیر توسط فرمول $\varphi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ با پارامترهای $b_1, ..., b_m$ می‌نامیم هرگاه

$$X = \{(a_1, ..., a_n) \in M^n \mid \mathfrak{M} \models \varphi(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)\}.$$

قضایای اصلی

- **قضیه:** فرض کنید K یک میدان ارزیابی هنسلی با حلقه‌ی ارزیاب $\mathcal{O}$ و میدان باقیمانده‌های F باشد. اگر F متناهی باشد، یک تعریف وجودی و بدون پارامتر در زبان حلقه‌ها برای حلقه‌ی $\mathcal{O}$ در میدان K وجود دارد.
- **قضیه:** فرض کنید K یک میدان ارزیابی هنسلی با حلقه‌ی ارزیاب $\mathcal{O}$ و میدان باقیمانده‌های F باشد. اگر F سودوبسته‌ی جبری باشد و F_{alg}، مجموعه نقاطی از F که روی میدان اول F_0 جبری هستند، بسته‌ی جبری نباشد آنگاه یک تعریف وجودی و بدون پارامتر در زبان حلقه‌ها برای حلقه‌ی $\mathcal{O}$ در میدان K وجود دارد.

- **مرحله‌ی اول:** فرض کنید $T, U \subseteq \mathcal{O}$ به گونه‌ای باشند که $U \supseteq \mathfrak{m}$ و T همه‌ی کلاس‌های باقیمانده را قطع کند، آنگاه $\mathcal{O} = T + U$.
- **مروری بر اثبات:**
  1. به سادگی می‌توان دید $T + U \subseteq \mathcal{O}$.
  2. عنصر دلخواه $x \in \mathcal{O}$ را در نظر می‌گیریم. T همه‌ی کلاس‌های باقیمانده را قطع می‌کند. بنابراین عنصر $t \in T$ موجود است به طوری که $\bar{t} = \bar{x}$. در نتیجه $\mathcal{O} \subseteq T + \mathfrak{m}$؛ از طرفی $\mathfrak{m} \subseteq U$. بنابراین $\mathcal{O} \subseteq T + \mathfrak{m} \subseteq T + U$

معرفی مجموعه‌ی U

- **مرحله‌ی دوم:** فرض کنید $f \in \mathcal{O}[X]$ یک چندجمله‌ای تکین باشد، $\bar{f}$ در F ریشه نداشته باشد و عنصر $a \in \mathcal{O}$ وجود داشته باشد به طوری که $f'(a) \notin \mathfrak{m}$ آنگاه

$$\mathfrak{m} \subseteq U_f = \{\frac{۱}{f(x)} - \frac{۱}{f(y)} \mid x, y \in K\} \subseteq \mathcal{O}.$$

- **مراحل اثبات:**
  ۱. $f(K)^{-۱} \subseteq \mathcal{O}$.
  ۲. $\mathfrak{m} \subseteq f(K)^{-۱} - f(a)^{-۱} \subseteq \mathcal{O}$
  ۳. $\mathfrak{m} \subseteq f(K)^{-۱} - f(a)^{-۱} \subseteq f(K)^{-۱} - f(K^{-۱}) \subseteq \mathcal{O}$

- مجموعه‌ی U_f تعریف‌پذیراست:

$$\varphi_f(x) \equiv (\exists y, z, y_1, z_1)(x = y_1 - z_1 \wedge y_1 f(y) = 1 \wedge z_1 f(z) = 1).$$

وجود چندجمله‌ای f

- **مرحله‌ی چهارم (برای حالت متناهی):** اگر F متناهی باشد، خواهیم دید که چندجمله‌ای تکین، تحویل‌ناپذیر و جدایی‌پذیر $f \in F_\circ[X]$ موجود است که در F ریشه ندارد. همچنین عنصر $a \in F$ به گونه‌ای وجود دارد که $f'(a) \neq \circ$.
- **اثبات:**

۱. برای هر عدد اول p و هر عدد صحیح مثبت m، چندجمله‌ای تکین، تحویل‌ناپذیر و جدایی‌پذیر $f \in \mathbb{F}_p[X]$ از درجه‌ی m وجود دارد به طوری که $f'(\circ) \neq \circ$.

$$\Downarrow$$

۲. اگر F متناهی باشد، چندجمله‌ای $f \in F_\circ[X]$ موجود است به طوری که تحویل‌ناپذیر، جدایی‌پذیر و تکین است. همچنین عنصر $a \in F$ به گونه‌ای وجود دارد که $f'(a) \neq \circ$.

۳. اگر m را به گونه‌ای در نظر بگیریم که $[F : F_\circ]$ را عاد نکند آنگاه f در F ریشه ندارد.

معرفی مجموعه‌ی T

- مرحله‌ی پنجم (برای حالت متناهی): فرض کنید $F = \mathbb{F}_q$، تعریف می‌کنیم:

$$T := \{x \in K : x^q - x = ۰\}$$

- مجموعه‌ی T تعریف‌پذیر است:

$$\psi(x) \equiv (x^q - x = ۰)$$

- $qv(x) = v(x) \to v(x) = ۰ \Rightarrow T \subseteq \mathcal{O}$.
- قرار می‌دهیم $g(x) = x^q - x$ برای هر $\bar{x} \in F$ داریم $\bar{g}(\bar{x}) = ۰$ و $\bar{g}' = -\bar{۱} \neq ۰$ از هنسلی بودن حلقه‌ی $\mathcal{O}$ نتیجه می‌شود که عنصر $a \in \mathcal{O}$ موجود است به طوری که $g(a) = ۰$ و $\bar{a} = \bar{x}$. در نتیجه $\bar{T} = F$.

یکنواختی

قضیه ۷

عدد اول p و عدد صحیح m را در نظر بگیرید. فرمول وجودی و بدون پارامتر φ موجود است به طوری که $\varphi(K) = \mathcal{O}$ برای هر میدان ارزیابی K با حلقه‌ی ارزیاب $\mathcal{O}$ و میدان باقیمانده‌ی $F = \mathbb{F}_{p^n}$ که $n \nmid m$.

وجود چندجمله‌ای f

- مرحله‌ی چهارم (برای حالت سودوبسته‌ی جبری):

اگر F نامتناهی باشد و F_{alg} بسته‌ی جبری نباشد، چندجمله‌ای تکین، تحویل‌ناپذیر و جدایی‌پذیر $f \in F_{\circ}[X]$ وجود دارد به گونه‌ای که f در F ریشه ندارد و و عنصر $a \in F$ موجود است به طوری که $f'(a) \neq \circ$.

نتیجه: میدان‌های سودوبسته‌ی جبری نامتناهی هستند. بنابراین به طور خاص اگر F یک میدان سودوبسته‌ی جبری باشد و F_{alg} بسته‌ی جبری نباشد، یک چندجمله‌ای f با ویژگی‌های فوق موجود است.

- **مرحله‌ی پنجم (برای حالت سودوبسته‌ی جبری):** فرض کنید $f \in \mathcal{O}[X]$ یک چندجمله‌ای تکین باشد و برای هر $x \in K$ داشته باشیم $f(x) \neq ۰$ تعریف می‌کنیم:

$$T_f = \{\frac{۱}{f(x)}\frac{۱}{f(y)} \mid x, y \in K\} \cup \{۰\}$$

اگر $\bar{f}$ در F ریشه نداشته باشد و مربع ـ آزاد باشد داریم:

- $T_f \subseteq \mathcal{O}$.
- $\bar{T}_f = F$.

قضیه ۸

فرض کنید $f \in K[X]$ یک چندجمله‌ای غیر ثابت و مربع‌ـآزاد باشد. برای هر عنصر دلخواه $K \ni c$، چندجمله‌ای $f(X)f(Y) - c \in K[X, Y]$ مطلقاً تحویل‌ناپذیر است.

قضیه ۹

فرض کنید $f \in F[X]$ یک چندجمله‌ای غیر ثابت و مربع‌ـآزاد باشد. اگر F سودوبسته‌ی جبری باشد آنگاه $F = \{f(x)f(y) \mid x, y \in F\} \cup \{0\}$.

باسپاس از توجه شما