یک تعریف وجودیِ بدون پارامتر برای حلقه‌ی ارزیابِ $\mathbb{F}_q[[t]]$ در میدان ارزیابیِ $\mathbb{F}_q((t))$

ارائه دهنده: زهرا یادگاری

استاد راهنما: دکتر محسن خانی

دانشگاه صنعتی اصفهان

۲۱ شهریور ۱۴۰۲

مقالات زیر منابع اصلی این پایان‌نامه هستند:

- Will Anscombe and Jochen Koenigsmann. An existential $\emptyset$-definition of $\mathbb{F}_q[[t]]$ in $\mathbb{F}_q((t))$, The Journal of Symbolic Logic, 79(4):1336–1343, 2014.

  (سخنرانی اول)

- Alexander Prestel and Martin Ziegler. Model-theoretic methods in the theory of topological fields, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, vol. 299 (1978), no. 300, pp. 318–341.

  (سخنرانی دوم)

حلقه‌ی ارزیاب و حلقه‌ی موضعی :

- حلقه‌ی R را موضعی می‌نامیم هرگاه تنها یک ایده‌آل ماکزیمال داشته باشد؛ معادلاً هرگاه تمامی عناصر وارون‌ناپذیر آن تشکیل یک ایده‌آل بدهند.
- اگر R یک حلقه‌ی موضعی و m تنها ایده‌آل ماکزیمال آن باشد، مطلوب است که ویژگی‌های حلقه‌ی R را با ویژگی‌های «میدان پیمانه‌های» $k = \frac{R}{m}$ پیوند دهیم.

- زیرحلقه‌ی R از یک میدانِ K را یک حلقه‌ی ارزیاب K می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in K$ یا $x \in R$ یا $x^{-1} \in R$.
- هر حلقه‌ی ارزیاب، یک حلقه‌ی موضعی است، زیرا از یک «نگاشت ارزیابی» ناشی می‌شود.

میدان‌های ارزیابی :

فرض کنید K یک میدان و $(\Gamma, +, \geq)$ یک گروه مرتب آبلی باشد. نگاشتِ $v : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ یک نگاشت ارزیابی است هرگاه برای هر $x, y \in K$ موارد زیر برقرار باشند:

۱. $v(x+y) \geq \mathtt{min}\{v(x), v(y)\}$،

۲. $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$،

۳. $x = 0 \iff v(x) = \infty$.

- $O_v = \{x \in K : v(x) \geq 0\}$ یک حلقه‌ی ارزیاب است؛ یعنی برای هر $x \in K$ یا $x \in O_v$ یا $x^{-1} \in O_v$.
- O_v یک حلقه‌ی موضعی با ایده‌آل ماکسیمالِ $m_v := \{x \in K : v(x) > 0\}$ است و $k_v = \frac{O_v}{m_v}$ را میدان پیمانه‌های نگاشت ارزیابی v می‌نامیم.
- $(K, \Gamma, v, O_v, m_v, k_v)$.

مثال :

- مثال‌های معروف: حلقه‌ی p ادیک‌ها، سری‌های هان، سری‌های لوران روی یک میدان دلخواه.
- مثال مد نظر ما:

$\mathbb{F}_q[[t]] := \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i | a_i \in \mathbb{F}_q\}$.

میدان کسرهای $\mathbb{F}_q[[t]]$ برابر است با $K = \mathbb{F}_q((t)) := \{\sum_{i=-n}^{\infty} a_i t^i : a_i \in \mathbb{F}_q\}$.

نگاشت $v : \mathbb{F}_q((t)) \to \mathbb{Z}$ با ضابطه‌ی $v(\sum_{i=-n}^{\infty} a_i t^i) := \texttt{min}\{i | a_i \neq 0\}$ یک ارزیابی روی این میدان است.

$$\Downarrow$$

$k_v = \mathbb{F}_q$ و $m_v = t\mathbb{F}_q[[t]]$ و $O_v = \mathbb{F}_q[[t]]$

توپولوژی :

تعریف

نگاشت ارزیابیِ $v : K \to \Gamma$ را در نظر بگیرید. گوی‌های باز توپولوژی که توسط این نگاشت روی میدان القاء می‌شود به صورت $U_\gamma(a) := \{x \in K : v(x-a) > \gamma, \gamma \in \Gamma\}$ هستند. این توپولوژی را نمادِ τ_v نشان می‌دهیم.

- τ_v یک توپولوژی میدانی است. به طور کلی یک میدان توپولوژیک، میدانی است که دارای یک توپولوژی است به طوری که اعمال میدان تحت آن توپولوژی پیوسته باشند.
- گوی‌های بازی که اشتراک ناتهی دارند، تشکیل یک زنجیر می‌دهند.
- هر گوی باز، یک مجموعه‌ی بسته نیز هست.

Vـ توپولوژی :

تعریف

فرض کنید (K,τ) یک میدان توپولوژیک باشد. توپولوژی τ را یک Vـ توپولوژی می‌نامیم هرگاه برای هر بازِ U حول نقطه‌ی صفر یک باز V حول نقطه‌ی صفر وجود داشته باشد، به طوری که

$$x \cdot y \in V \to (x \in U \vee y \in U).$$

- توپولوژی القاء شده توسط یک نگاشت ارزیابی و یک قدرمطلق Vـ توپولوژی هستند.

قضیه (اینگلر–پرستل، ۲۰۰۵)

اگر K یک میدان و τ یک توپولوژی روی آن باشد، آن‌گاه τ یک Vـ توپولوژی است اگروتنهااگر یک نگاشت قدرمطلق ارشمیدسی و یا یک نگاشت ارزیابی روی K وجود داشته باشد به گونه‌ای که توپولوژی القاء شده توسط آن برابر τ باشد.

هنسلی بودن :

تعریف

فرض کنید (R, m) یک حلقه‌ی موضعی باشد و $k = \frac{R}{m}$. حلقه‌ی R هنسلی است هرگاه برای هر چند جمله‌ای $f \in R[x]$ اگر $\bar{f} \in k[x]$ دارای یک ریشه‌ی ساده‌ی $\alpha \in k$ باشد، آنگاه f دارای یک ریشه‌ی a در R باشد به طوری که $\bar{a} = \alpha$.

یک نگاشت ارزیابیِ $v : K \to \Gamma$ را هنسلی می‌نامیم هرگاه $O_v = \{x \in K : v(x) \geq 0\}$ یک حلقه‌ی هنسلی باشد.

- حلقه‌ی $\mathbb{F}_q[[t]]$ هنسلی است.

تعریف

یک میدان توپولوژیک را tـ هنسلی می‌نامیم هرگاه با یک میدانِ (L, τ_v) به طور موضعی معادل باشد به طوری که τ_v یک توپولوژی القاء شده توسط یک نگاشت ارزیابی هنسلی روی میدانِ L است.

- یک تعریف معادل برای حلقه‌های هنسلی:

حلقه‌ی موضعیِ (R, m) هنسلی است اگروتنهااگر هر چندجمله‌ای به صورتِ $x^n + x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_0$ که در آن هر c_i متعلق به ایده‌آل ماکسیمالِ m است، یک ریشه در حلقه‌ی R داشته باشد.

- یک تعریف معادل برای میدان‌های t ـ هنسلی: (K, τ) یک میدانِ t ـ هنسلی است اگروتنهااگر به ازای هر n یک گویِ U_n در τ وجود داشته باشد به طوری که هر چندجمله‌ای به صورتِ $x^n + x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_0$ که در آن هر c_i متعلق به U_n است، یک ریشه در میدانِ K داشته باشد.

- $(\mathbb{F}_q((t)), \tau_v)$ یک میدان t ـ هنسلی است.

فرض کنید $v : K \to \Gamma$ یک ارزیابی باشد. $O_v : \{x \in K : v(x) \geq 0\}$ را در نظر بگیرید.

سوال: آیا یک فرمولِ φ در زبان حلقه‌ها وجود دارد به طوری که $O_v = \{a \in K : K \vDash \varphi(a)\}$.

چند نمونه:

۱. حلقه‌ی ارزیاب pـ ادیک در میدانِ pـ ادیک با فرمولِ $\exists y \; 1+px^2=y^2$ تعریف‌پذیر است. [جولیا رابینسون، ۱۹۶۵]

۲. اگر F یک میدان دلخواه باشد، آن‌گاه حلقه‌ی ارزیابِ $F[[t]]$ در میدان ارزیابیِ $F((t))$ با فرمول زیر تعریف‌پذیر است. [جیمز اکس، ۱۹۶۵]

$$\exists w, y \forall u, x_1, x_2 \exists z \forall y_1, y_2 [(z^m = 1 + w x_1^m x_2^m \vee y_1^m \neq 1 + w x_1^m \vee y_2^m \neq 1 + w x_2^m) \\ \wedge u^m \neq w \wedge y^m = 1 + w x^m]$$

۳. اگر (K, O_v) یک میدان ارزیابی باشد که میدان پیمانه‌های آن متناهی یا سودو بسته‌ی جبری است، آن‌گاه O_v تعریف‌پذیر است. [آرنو فهم، ۲۰۱۵]

۴. اگر (K, O_v) یک میدان ارزیابی باشد که میدان پیمانه‌های آن گسسته است، آن‌گاه O_v تعریف‌پذیر است. [هانگ، ۲۰۱۴]

قضیه‌ی اصلی :

نگاشتِ $v : \mathbb{F}_q((t)) \to \mathbb{Z}$ با ضابطه‌ی $v(\sum_{i=-n}^{\infty} a_i t^i) = \min\{i | a^i \neq 0\}$ یک ارزیابی روی این میدان است که حلقه‌ی ارزیاب آن $\mathbb{F}_q[[t]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i | a_i \in \mathbb{F}_q\}$ است.

قضیه‌ی اصلی: «حلقه‌ی ارزیابِ $\mathbb{F}_q[[t]]$ در میدان ارزیابیِ $\mathbb{F}_q((t))$ با یک فرمول وجودیِ بدون پارامتر در زبان حلقه‌ها تعریف‌پذیر است.» [انسکام و کونیگزمن، ۲۰۱۴]

$$\mathbb{F}_q[[t]] = \{x \in \mathbb{F}_q((t)) : \mathbb{F}_q((t)) \vDash \varphi(x)\}$$

وجود یک همسایگی تعریف‌پذیر از صفر :

قضیه (زیگلر و پرستل، ۱۹۷۸)

فرض کنید (K,τ) یک میدان tـ هنسلی باشد که بسته‌ی جدایی‌پذیر نیست. یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر و جدایی‌پذیرِ f را در $K[x]$ در نظر بگیرید که در K ریشه‌ای ندارد. همچنین فرض کنید $a \in K$ در شرطِ $f'(a) \neq 0$ صدق می‌کند. در این صورت، مجموعه‌ی $U_{f,a} := \{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} : x \in K\}$ یک همسایگی باز و کراندار حول 0 است.

- در $K = \mathbb{F}_q((t))$ در شروط قضیه‌ی فوق صدق می‌کند.

۱. $\mathbb{F}_q$ یک زیرمیدان به طور نسبی بسته‌ی جبری از $\mathbb{F}_q((t))$ است.

۲. $\mathbb{F}_q$ بسته‌ی جدایی‌پذیر نیست.

$\Downarrow$

- $\mathbb{F}_{q^2} = \mathbb{F}_q(\alpha)$:

چند جمله‌ای مینیمالِ α تحویل‌ناپذیر، جدایی‌پذیر و در $\mathbb{F}_q((t))$ ریشه ندارد و همچنین یک عنصر a در $\mathbb{F}_q$ وجود دارد به طوری که $f'(a) \neq 0$.

رسیدن به تعریفِ $\mathbb{F}_q[[t]]$:

قضیه

اگر $V \subseteq \mathbb{F}_q((t))$ یک همسایگیِ $\exists$ ـ C ـ تعریف‌پذیر و کراندار از صفر باشد. یک مجموعه‌ی $Y \subseteq \mathbb{F}_q((t))$ وجود دارد به طوری که کراندار و $\exists$ ـ C ـ تعریف‌پذیر است و $t\mathbb{F}_q[[t]] \subseteq Y \subseteq \mathbb{F}_q[[t]]$.

اثبات.

۱. $n \in \mathbb{Z}$ وجود دارد به طوری که $U_n(0) \subseteq V$. در نظر بگیرید $m > n$ $\Longleftarrow$ $W := \{x \in K : x^m \in V\}$ یک مجموعه‌ی کراندار، تعریف‌پذیر و شاملِ $\{x : v(x) = 1\}$ است.

۲. مجموعه‌ی $X := W - (W \cup \{0\})$ یک مجموعه‌ی کراندار، تعریف‌پذیر و شاملِ $t\mathbb{F}_q[[t]]$ است.

۳. $h \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $X \subseteq U_{-h}(0)$ $\Longleftarrow$ $Y := \{x : x^h \in X\} - \{x : x^h \in X\}$.

□

$$\mathbb{F}_q[[t]] = \mathbb{F}_q + Y$$

⬇

$\mathbb{F}_q[[t]]$ تعریف‌پذیر

حذف پارامترها :

لم

فرض کنید $f \in \mathbb{F}_p[x]$ یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر از درجه‌ی l باشد. اگر $l \nmid k$، آن‌گاه چندجمله‌ای f در $\mathbb{F}_{p^k}$ نیز تحویل‌ناپذیر باقی می‌ماند.

اثبات.

با برهان خلف فرض کنید f در $\mathbb{F}_{p^k}[x]$ تحویل‌پذیر باشد، در این صورت $f = gg_1 \cdots g_u$ که در آن g یک عامل تحویل‌ناپذیرِ f است. اگر α یک ریشه‌ی g باشد، آن‌گاه $\mathbb{F}_{p^k}(\alpha) = \mathbb{F}_{p^{km}}$ که در آن m درجه‌ی g است. در نتیجه $\mathbb{F}_{p^l} \subseteq \mathbb{F}_{p^{km}}$ و این تناقض است. $\square$

- یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیرِ $f \in \mathbb{F}_p[x]$ با درجه‌ی l انتخاب می‌کنیم به طوری که l کوچکترین عدد اولی باشد که k را عاد نمی‌کند و $U_{f,a} = \{f(x)^{-1} - f(a)^{-1} : x \in K\} \Longleftarrow l \mid 1 + \prod_{p|k\text{ , }p\text{ اول}} p$ یک همسایگی باز و کراندار و تعریف‌پذیر بدون پارامتر است.
- $V := \bigcup\{U_{f,a} : a \in \mathbb{F}_q, Df(a) \neq 0\}$ یک همسایگی کراندار از صفر است .

$$\zeta := \exists y(y^q - y = 0 \wedge \neg Df(y) = 0 \wedge x \in U_{f,y}).$$

با تشکر از توجه شما

سخنرانی دوم

دسته‌بندی میدان‌های Vــ توپولوژیک :

تعریف

میدان توپولوژیکِ (K, τ) را در نظر بگیرید. یک عنصر $x \in K$ پوچ‌توان نامیده می‌شود هرگاه $x = 0$ یا دنباله‌ی $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ در توپولوژی τ به 0 همگرا باشد.

Vـ توپولوژی

شامل حداقل یک عنصر پوچ‌توان

بدون عنصر پوچ‌توان

توسط یک نگاشت ارزیابی القاء شده

توسط یک قدرمطلق القاء شده

مجموعه‌های تقریباً ارزیاب :

تعریف

یک زیرمجموعه‌ی S از میدان K یک مجموعه‌ی تقریباً ارزیاب نامیده می‌شود هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱. S یک همسایگی باز و کراندار از صفر است.

۲. $1 \in S$، $S \neq K$ و $S \cdot S \subseteq S$.

۳. $K^\times \subseteq \dot{S}(\dot{S})^{-1}$ که در آن $\dot{S} = S \quad \{0\}$.

۴. یک عنصرِ $d \in \dot{S}$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in K$، داریم $x \in S$ یا $x^{-1} \in d^{-1}S$.

وجود یک مجموعه‌ی تقریباً ارزیاب در Vـ توپولوژی :

- در یک میدانِ Vـ توپولوژیک یک گوی کراندار وجود دارد.
- به ازای یک گوی کراندار U در τ، مجموعه‌ی $O := \{x \in K \mid xU \subseteq U\}$ یک مجموعه‌ی تقریباً ارزیاب است.

قضیه

فرض کنید (K,τ) یک میدانِ tـ هنسلی و $f \in K[x]$ یک چندجمله‌ای تکین و جدایی‌پذیر باشد که در K ریشه‌ای ندارد. در این صورت $\{f(x)^{-1} : x \in k\}$ یک مجموعه‌ی کراندار است.

قضیه

فرض کنید (K,τ) یک میدانِ tـ هنسلی و $f \in K[x]$ یک چندجمله‌ای تکین باشد. در این صورت $S = \{f(a) : a \in K, f'(a) \neq 0\}$ یک مجموعه‌ی باز است.

نتیجه

فرض کنید (K,τ) یک میدان tـ هنسلی باشد که بسته‌ی جدایی‌پذیر نیست. یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر و جدایی‌پذیرِ f در $K[x]$ را در نظر بگیرید که در K ریشه‌ای ندارد. همچنین فرض کنید $a \in K$ در شرطِ $f'(a) \neq 0$ صدق می‌کند. در این صورت، مجموعه‌ی $\{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} : x \in K\}$ =: $U_{f,a}$ یک همسایگی باز و کراندار حول 0 است.

اثبات.

۱. $f(K)^{-1} - f(a)^{-1}$ کراندار است.

۲. $f(a)$ یک مقدار ساده‌ی f است، پس حول $f(a)$ یک همسایگی U وجود دارد که تمام نقاط آن به صورت $f(t)$ هستند و $f'(t) \neq 0$. در نتیجه، $U^* = \frac{1}{U} - \frac{1}{f(a)}$ یک همسایگی صفر است، پس $U_{f,a}$ یک مجموعه‌ی باز است.

$\square$