

تمرین سری اول

۲ مهر ۱۴۰۳

۱. نشان دهید دنباله‌ی $a_n = \frac{1}{n}$ یک دنباله‌ی کشی است.

۲. نشان دهید دو گزاره‌ی زیر با یکدیگر معادل‌اند.

$$\bullet \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n - b_n| < \varepsilon$$

$$\bullet \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N |a_m - b_n| < \varepsilon$$

۳. گوئیم دو دنباله‌ی (a_n) و (b_n) با یکدیگر هم‌ارز هستند هرگاه گزاره‌ی زیر برقرار باشد.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n - b_n| < \varepsilon$$

حال نشان دهید رابطه‌ی هم‌ارزی بین دنباله‌های کشی یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۴. نشان دهید برای هر عدد حقیقی $a > 0$ یک عدد گویای $q > 0$ وجود دارد که $0 < q < a$.

۵. فرض کنید x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند که $0 < x < y$ ، نشان دهید عدد گویای $\frac{m}{n}$ وجود دارد

$$\text{به طوری که } x < \frac{m}{n} < y.$$

۶. فرض کنید (a_n) یک عدد حقیقی مثبت باشد. نشان دهید دنباله‌ی $(\frac{1}{a_n})$ یک دنباله کشی است.