# آنالیز ریاضی ۱

مدرس: محسن خانی

گرد آورنده: سارا حسینی

۲۰ آبان ۱۴۰۳

# فهرست مطالب

# پیشگفتار

در ریاضیات پیشادانشگاهی و نیز در درس حساب دانشگاه (ریاضی ۱ و ریاضی ۲) دانشجویان با ویژگی‌های مهم «میدان اعداد حقیقی» آشنا می‌شوند. درمی‌یابند که مفاهیم مهمی مانند همگرایی، پیوستگی، مشتق و غیره برای توابع «حقیقی» به چه صورتی تعریف می‌شوند، و از همه مهم‌تر با دو قضیهٔ زیر آشنا می‌شوند:

اگر $f$ یک تابع پیوسته در بازهٔ $[a,b]$ باشد و $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$، آنگاه $f$ در نقطه‌ای در بازهٔ $(a,b)$ صفر می‌شود.

اگر $f$ یک تابع پیوسته در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ باشد، آنگاه $f$ دارای ماکزیمم مطلق و مینیموم مطلق در این بازه است.

هر دوی این قضیه‌ها آنقدر طبیعی به نظر می‌رسند که عموماً دانشجویان حتی به دنبال علتی برای آنها نمی‌گردند. اما حقیقت پنهان این است که علت برقراری این دو قضیه، فقط پیوستگی تابع نیست، بلکه «طبیعت مجموعهٔ اعداد حقیقی» به نوعی است که این دو قضیه در آن برقرار باشد.

در درس آنالیز ۱، ابتدا مجموعهٔ اعداد حقیقی را به طور دقیق معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که از اصول موضوعه‌ای که در مبانی ریاضی معرفی کرده‌ایم، چگونه می‌توان به مجموعهٔ اعداد حقیقی رسید. سپس ویژگی بنیادی اصل کمال را در مورد اعداد حقیقی ثابت می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه دو قضیهٔ بالا از آن نتیجه می‌شوند. اما پس از آن، به دنبال مجموعه‌ها، یا بیان بهتر «فضاهای» دیگری می‌گردیم که در آنها دو قضیه بالا برقرار هستند. در واقع به کاوش در این نکته می‌پردازیم که غیر از اصل کمال، کدام ویژگی‌های یک فضا می‌تواند به برقراری قضایای مهمی مانند دو قضیهٔ بالا کمک کند. در واقع به دنبال فضاهایی خواهیم گشت که در آنها دو قضیهٔ بالا به علت کلی‌تری برقرار است. همین نوع کاوشگری، در درس توپولوژی به نقطهٔ اوج خود می‌رسد.

درس‌نامهٔ پیش رو، حاصل جمع آوری یادداشتهای من روی تخته توسط یکی از دانشجویان علاقه‌مند به نام خانم سارا حسینی، و ویرایش هفتگی آنها توسط من است. خانم حسینی در این ترم زحمت فیلم‌برداری کلاس درس را نیز کشیده‌اند و فیلم‌های درس در لینک زیر قابل مشاهده هستند:

https://www.aparat.com/playlist/11324469

هر دو هفته، یک سری تمرین (حاوی ۱۰ تمرین) به دانشجویان داده خواهد شد. سه نمره از درس به تمرینها اختصاص خواهد داشت. ۱۱ نمرهٔ درس مربوط به امتحان پایان‌ترم و ۶ نمرهٔ آن مربوط به امتحان میان‌ترم خواهد بود.

چند کتاب استاندارد برای یادگیری آنالیز ریاضی، منابع زیر هستند:

- Tao, T. (2016). Analysis I: Third Edition. India: Springer Nature Singapore.
- Rudin, W. (1976). Principles of Mathematical Analysis. Colombia: McGraw-Hill.
- Apostol, T. M. (2004). Mathematical Analysis. China: China Machine Press.

جزوهٔ مبانی ریاضی و جزوهٔ توپولوژی می‌تواند در کنار این درسنامه مفید واقع شود:

- https://khani.iut.ac.ir/sites/khani.iut.ac.ir/files//u145/template_1_2.pdf

- https://mohsen-khani.github.io/mabani-riyazi/jozve/mabanikol.pdf

# فصل ۱

# اعداد حقیقی

ماجرای آنالیز با داستان ساخت اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) آغاز می‌شود. همان طور که در پیش‌گفتار اشاره شد، هر آنچه در ریاضیات عمومی می‌خوانیم درباره اعداد حقیقی و ویژگی های آن است. مفاهیمی مانند حد، پیوستگی، مشتق‌پذیری و قضایای مهمی مانند قضیهٔ مقدار میانی، قضیهٔ مقادیر نهایی و قضایای رُل و مقدار میانگین در مورد اعداد حقیقی برقرار هستند. در آنالیز به بررسی این نکته خواهیم پرداخت که چه ویژگی‌هایی در طبیعت اعداد حقیقی باعث چنین خوش‌رفتاری‌هایی می‌شود. اما پیش از هر چیز، باید خودِ اعداد حقیقی را به صورت دقیق بشناسانیم.

## ۱.۱ ساخت میدان اعداد حقیقی

در درس مبانی ریاضی با اصول موضوعهٔ نظریه مجموعه‌ها آشنا شدیم و دیدیم که چگونه هر پدیدهٔ ریاضی، ساختِ خود را وام‌دار این اصول موضوعه است. یکی از اصول نظریهٔ مجموعه‌ها، اصلی است که وجود مجموعهٔ اعداد طبیعی را به عنوان **کوچک‌ترین مجموعهٔاستقرایی** تضمین می‌کند. توابع $+$ و $\times$ روی اعداد طبیعی:

$$+\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

$$(x,y)\longrightarrow x+y$$

$$\times\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

$$(x,y)\longrightarrow x\times y$$

با استفاده از استقراء تعریف می‌شوند. از روی اعداد طبیعی، مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ ساخته می‌شود. پس از آن مجموعه اعداد گویا، ($\mathbb{Q}$) را از روی اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$) می‌سازیم. هر عدد گویا یک زوج $(x,y)$ در اعداد صحیح تحت رابطهٔ هم‌ارزی زیر است:

$$(x,y)=(x',y') \iff xy'=yx'$$

به جای $(x,y)$ عموما می‌نویسیم: $\frac{x}{y}$.

در ریاضیات یونان باستان (که در آن هنوز خبری از اصول موضوعهٔ اولیه ریاضی نبوده است) منظور از عدد، یک عدد گویا بوده است. کلمهٔ «گویا»، به انگلیسی rational، هم به همین نکته اشاره دارد. اما یک مثلث قائم الزاویه که طول هر

ضلع آن یک باشد، وتری دارد که طول آن قابل نمایش با هیچ کسری نیست! همچنین اگر بااستفاده از پرگار، یک دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ رسم کنیم، محیط این دایره نیز قابل نوشتن به صورت یک عدد کسری نیست؛ یا «عدد» نیست! امروزه هر دانش‌آموز دبیرستانی می‌داند که اولی عددی «حقیقی» به نام $\sqrt{2}$ و دومی عددی «حقیقی» به نام $\pi$ است. اولی ریشهٔ معادلهٔ $x^2 = 2$ است و دومی حتی ریشهٔ هیچ معادله‌ای با ضریب گویا نیست! اما این اعداد واقعاً چه هستند و از کجا آمده‌اند. در این بخش پاسخ این سوال را تا حدودی خواهیم دانست.

**تذکر ۱.۱.۱.** من فرض را بر این گرفته‌ام که دانشجو، تا مرحلهٔ ساخت اعداد گویا را از مبانی ریاضی به خوبی می‌داند: یعنی می‌داند که اعداد گویا چه هستند، جمع و ضرب آنها چگونه صورت می‌پذیرد، و چه ترتیبی روی آنها وجود دارد. درس را با در نظر گرفتن این فرض ادامه داده‌ام. در صورتی که دانشجویی علاقه‌مند به مرور مطالب یادشده است، پیشنهاد می‌کنم کتاب مبانی ریاضی من، خصوصاً صفحهٔ ۱۲۹ را مطالعه کند:

https://mohsen-khani.github.io/mabani-riyazi/jozve/mabanikol.pdf

شروع رسمی درس از اینجاست:

**تعریف ۲.۱.۱.** منظور از یک دنباله در $\mathbb{Q}$ یک تابع

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$$

$$n \longrightarrow a_n$$

است. دنباله‌ای مانند فوق را به صورت $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نشان می‌دهیم.

دنباله‌هایی که جملات آنها «در نهایت به هم نزدیک می‌شوند» برای ما حائز اهمیت زیادی هستند. به چنین دنباله‌هایی، دنبالهٔ کُشی گفته می‌شود. بیایید تعریف را دقیق کنیم:

**تعریف ۳.۱.۱** (دنبالهٔ کُشی)**.** دنبالهٔ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را یک دنبالهٔ کُشی می‌نامیم هرگاه ویژگی زیر را داشته باشد:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}^+ \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n, m > N \;\; |a_n - a_m| < \epsilon.$$

در واقع، زمانی دنبالهٔ $(a_n)$ کُشی است که برای هر عدد دادهٔ شدهٔ $\epsilon$ جملات دنباله از جایی به بعد فاصله‌ای کمتر از $\epsilon$ از هم داشته باشند. **در واقع جملات یک دنبالهٔ کُشی در حال تجمع هستند.**

دقت کنید که هنوز عددی غیر از عدد گویا نمی‌شناسیم. بنابراین وقتی صحبت از $\epsilon$ یا به طور کلی صحبت از عدد می‌کنیم، منظورمان یک عدد **گویا** است.

**تمرین ۱.** نشان دهید دنبالهٔ $(a_n)$ که در آن $a_n = \frac{1}{n}$، یک دنبالهٔ کُشی است.

**تمرین ۲** (سوال یکی از دانشجویان)**.** آیا شرط

$$\forall \epsilon \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |a_n - a_{n+1}| < \epsilon,$$

کُشی بودن دنباله را نتیجه می‌دهد؟

**تعریف ۴.۱.۱.** دنبالهٔ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را کراندار گوییم هرگاه عدد گویای $M$ موجود باشد به طوری که:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| < M.$$

به بیان دیگر، هرگاه اعداد $M, N$ وجود داشته باشند به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم:

$$M < a_n < N.$$

(آیا می‌توانید درستی این بیان دیگر را اثبات کنید؟)

**لم ۵.۱.۱.** فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ کُشی باشد،در این صورت $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ کراندار است.

*اثبات.* $\epsilon = 1$ را در نظر بگیرید. بنا به کُشی بودن دنباله، می‌دانیم عدد طبیعی $N$ وجود دارد به طوری که برای هر $m, n > N$ داریم:

$$|a_n - a_m| < 1.$$

به طور خاص برای هر $n > N$ داریم:

$$|a_n - a_{N+1}| < 1$$

یعنی

$$a_{N+1} - 1 < a_n < 1 + a_{N+1}.$$

دقت کنید که $a_{N+1} + 1$ یک عدد ثابت است. پس تمام جملات دنباله، از $N$ به بعد دارای یک کران هستند. اما جملات باقی‌مانده تعدادشان متناهی است:

$$\{a_1, ..., a_N\}$$

و البته $\max\{a_1, ..., a_N\}$ یک کران بالا برای آنها و $\min\{a_1, ..., a_N\}$ یک کران پایین برای آنهاست. بنابراین دنبالهٔ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ کراندار است. $\square$

گفتیم دنبالهٔ کُشی دنباله‌ای است که جملاتش در دور دست در حال نزدیک شدن به هم هستند. دو دنبالهٔ کُشی را که جملاتشان به **همدیگر** نزدیک می‌شوند «هم‌ارز» می‌نامیم:

**تعریف ۶.۱.۱.** دو دنبالهٔ کُشی $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را هم‌ارز می‌نامیم، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ یک عدد طبیعی $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n > N$ داشته باشیم: $|a_n - b_n| < \epsilon$. وقتی دو دنبالهٔ $(a_n)$ و $(b_n)$ هم‌ارز هستند، می‌نویسیم:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

جملهٔ ریاضی زیر، هم‌ارز بودن دو دنبالهٔ $(a_n)$ و $(b_n)$ را بیان می‌کند:

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; |a_n - b_n| < \epsilon.$$

در واقع دو دنباله، زمانی هم‌ارز هستند که به هر مقدار دلخواه ما، جملات با اندیس به قدر کافی بزرگ آنها به هم نزدیک باشد.

**تمرین ۳.** تعریف بالا را می‌توانستیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n, m > N \ \ |a_n - b_m| < \epsilon.$$

حال مواد لازم برای تعریف یک عدد حقیقی را در اختیار داریم:

**تعریف ۷.۱.۱.** به هر دنبالهٔ کُشی در $\mathbb{Q}$ یک عدد حقیقی گفته می‌شود.

**تعریف ۸.۱.۱.** فرض کنید $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دو عدد حقیقی باشند. می‌گوییم این دو عدد با هم برابرند و می‌نویسیم: $a = b$ هرگاه

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

در واقع دو عدد حقیقی زمانی برابرند که دنباله‌های کُشی مربوطه، با هم هم‌ارز باشند.

**تمرین ۴.** رابطهٔ هم‌ارزی دنباله‌های کُشی، یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

## ۲.۱ جمع و ضرب اعداد حقیقی

صرفِ این که بگوییم که هر دنبالهٔ کُشی در اعداد گویا، یک عدد حقیقی نام دارد، ارزشی ندارد. اعداد حقیقی‌ای که در این جا معرفی می‌کنیم، باید همهٔ انتظارات ما را از خط اعداد حقیقی، که آن را بی هیچ دلیلی در دبیرستان و در حساب دانشگاه، شناخته شده فرض می‌کرده‌ایم برآورده کند. اعداد حقیقی باید شامل اعداد گویا باشند، با هم جمع و ضرب شوند و بینشان ترتیبی وجود داشته باشد. تعریف مجموع دو عدد حقیقی کار سختی نیست:

**لم ۱.۲.۱.** فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دو دنبالهٔ کُشی باشند.در این صورت دنبالهٔ $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله کُشی است.

*اثبات.* فرض کنید $\epsilon > 0$ به ما داده شده باشد. می‌خواهیم نشان دهیم عدد طبیعی $N$ به گونه‌ای وجود دارد که برای هر $m, n > N$ داریم:

$$|a_n + b_n - a_m - b_m| < \epsilon.$$

عدد $\frac{\epsilon}{2}$ را در نظر بگیرید. از آنجا که $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ کُشی است عدد طبیعی $N_1$ وجود دارد به طوری که برای هر $m, n > N_1$ داریم:

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

به‌طور مشابه $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نیز یک دنبالهٔ کُشی است و از این رو عدد طبیعی $N_2$ وجود دارد به طوری که برای هر $m, n > N_2$ داریم:

$$|b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

پس برای هر $m, n > \max\{N_1, N_2\}$ داریم:

$$|a_n + b_n - a_m - b_m| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

در واقع عدد طبیعی $N$ ای که در ابتدای اثبات به دنبال پیدا کردن آن بودیم، عدد $\max\{N_1, N_2\}$ است. □

تعریف حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی نیز ساده است:

**تعریف ۲.۲.۱.** فرض کنید $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دو عدد حقیقی باشند. تعریف می‌کنیم:

$$a \cdot b = (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

برای این که تعریف بالا معنا داشته باشد، نیاز است که دنباله‌ای که به عنوان حاصل‌ضرب معرفی شده است، خودش یک عدد حقیقی باشد؛ یعنی یک دنبالهٔ کُشی باشد:

**لم ۳.۲.۱.** فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دو دنبالهٔ کُشی باشند،در این صورت $a \cdot b = (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نیز دنبالهٔ کُشی است.

*اثبات.* فرض کنید $\epsilon > 0$ به ما داده شده باشد؛ می‌خواهیم نشان دهیم عدد طبیعی $N$ به گونه‌ای وجود دارد که برای هر $m, n > N$ داشته باشیم:

$$|a_n b_n - a_m b_m| < N.$$

دقت کنید که همیشه داریم:

$$|a_n b_n - a_m b_m| = |a_n b_n - a_n b_m + a_n b_m - a_m b_m| \leq |a_n||b_n - b_m| + |b_m||a_n - a_m|$$

قبلاً در صفحهٔ ۶ گفتیم که هر دنبالهٔ کُشی کراندار است. $M$ را ماکزیمم کران‌های بالای دو دنبالهٔ $|a_n|$ و $|b_n|$ در نظر بگیرید. خواهیم داشت:

$$|a_n b_n - a_m b_m| \leq |a_n||b_n - b_m| + |b_m||a_n - a_m| \leq M(|b_n - b_m| + |a_n - a_m|).$$

دقت کنید که $M$ یک عدد ثابت است. برای عدد داده شدهٔ $\epsilon$ می‌توانیم عدد $\frac{\epsilon}{2M}$ را به دنباله‌های $(a_n)$ و $(b_n)$ بدهیم و از آنها عدد $N \in \mathbb{N}$ را دریافت کنیم. پس چنین می‌کنیم؛ از آنجا که دنباله‌های $(a_n)$ و $(b_n)$ کُشی هستند، برای $\frac{\epsilon}{2M}$ اعداد $N_1$ و $N_2$ وجود دارند به طوری که برای هر $m, n > N$ داریم:

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2M}$$

و

$$|b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

حال برای هر $m, n > \max\{N_1, N_2\}$ داریم:

$$|a_n b_n - a_m b_m| < M(|b_n - b_m| + |a_n - a_m|) = M(\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2M}) = \epsilon.$$

□

مجموعهٔ اعداد حقیقی با اعمال جمع و ضربی که معرفی کردیم، از لحاظ جبری، یک **میدان** می‌سازد. یعنی ویژگی های جبری زیر برای اعداد حقیقی برقرار است:

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$a(bc) = (ab)c$$

$$ab = ba$$

$$\forall a \exists b \quad (a + b = 0)$$

$$\forall a \neq 0 \exists b \quad a \cdot b = 1.$$

از دانشجو می‌خواهم که به نحوی خود را متقاعد کند که عبارتهای بالا درست هستند.

**مثال ۴.۲.۱.** دنباله‌های $a_n = 1 - 10^{-n}$، $b_n = 1 + 10^{-n}$ و $c_n = 1$ را در نظر بگیرید. نشان دهید این دنباله‌ها، کُشی و با یکدیگر هم‌ارزاند. این مثال در واقع در پاسخ به سوال یک دانشجو بود که دو عدد $0.999999\ldots$ و $1.00000\ldots$ با هم یک عدد هستند.

گفتیم که مجموعهٔ اعداد حقیقی، باید شامل مجموعهٔ اعداد گویا باشد. اما یک عدد گویا را چگونه در مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌بینیم.

**توجه ۵.۲.۱.** اگر $r$ گویا باشد، آنگاه دنبالهٔ $(r)$ نشان دهندهٔ $r$ به عنوان یک عدد حقیقی است. واضح است که دنبالهٔ ثابت $(r)$ یک دنبالهٔ کُشی است. بنابراین:

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

## ۳.۱ ترتیب اعداد حقیقی

بیایید یک مشاهده دربارهٔ دنباله‌های هم‌ارز با دنبالهٔ ثابت صفر داشته باشیم. همهٔ چنین دنباله‌هایی نمایانگر عدد صفر هستند.

**مشاهده ۱.۳.۱.** دنباله‌های کُشی $(0)$ و $(a_n)$ را در نظر بگیرید. زمانی $(a_n) \sim (0)$ که داشته باشیم:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}^+ \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; |a_n| < \epsilon,$$

بنابراین زمانی $(a_n) \nsim (0)$ که داشته باشیم:

$$\exists \epsilon \in \mathbb{Q}^+ \;\; \forall N \in \mathbb{N} \;\; \exists n > N \;\; |a_n| > \epsilon$$

در مورد دنباله‌هایی که با صفر هم‌ارز نیستند، حکمی قوی‌تر و جذاب‌تر از مشاهده بالا برقرار است:

**قضیه ۲.۳.۱.** فرض کنید $(a_n) \nsim (0)$ در این صورت یک عدد مثبت گویای $r$ وجود دارد به طوری که از جایی به بعد تمام $|a_n|$ ها از $r$ بیشتر هستند.

*اثبات.* چون $(a_n)$ کُشی است، عدد $N_1 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $m, n > N_1$:

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$$

از آنجا که $(a_n) \nsim (0)$ نتیجه می‌گیریم، یک عدد $\epsilon$ وجود دارد، که برای هر $N$ یک $n > N$ وجود دارد به طوری که

$$|a_n| > \epsilon$$

پس به طور خاص $M > N_1$ وجود دارد به طوری که:

$$|a_M| > \epsilon.$$

از طرفی دوباره بنا به کُشی بودن، برای هر $n > N_1$ داریم:

$$|a_n - a_M| < \frac{\epsilon}{2}.$$

پس $|a_n|$ ها از جایی به بعد، از $\frac{\epsilon}{2}$ بیشتر است (زیرا حاصل تفریق $a_n$ که از $\epsilon$ بیشتر است با عددی که کمتر از $\frac{\epsilon}{2}$ است، هیچ وقت به کمتر از $\frac{\epsilon}{2}$ نمی‌رسد.) □

از اثبات قضیهٔ بالا، بسته به مثبت یا منفی بودن عدد $a_M$ می‌توان نتیجهٔ زیر را گرفت: اگر $(a_n)$ یک دنبالهٔ کُشی باشد به طوری که $(a_n) \nsim (0)$ در این صورت یکی از اتفاقات زیر رخ می‌دهد.

۱. عدد گویای مثبت $r$ وجود دارد به طوری که جملات دنباله از جایی به بعد بیشتر از $r$ هستند.

۲. عدد گویای مثبت $r$ وجود دارد که از جایی به بعد تمام جملات دنباله از $-r$ کمتر هستند.

از این مشاهده، برای تعریفِ مثبت یا منفی بودن یک عدد حقیقی استفاده می‌کنیم.

**تعریف ۳.۳.۱.** فرض کنید $a = (a_n)$ یک عدد حقیقی باشد. می‌گوییم $a$ مثبت است هرگاه عدد گویای مثبت $r$ وجود داشته باشد به طوری که جملات دنباله از جایی به بعد بیشتر از $r$ باشند. می‌گوییم $a$ منفی است هرگاه عدد گویای مثبت $r$ وجود داشته باشد به طوری که از جایی به بعد تمام جملات دنباله از کمتر باشند.

بنا به اثبات قضیهٔ ۲.۳.۱ می‌توان دید که هر عدد حقیقی یا برابر با صفر است، یا مثبت است و یا منفی.

**تعریف ۴.۳.۱.** می‌گوییم $(a_n) < (b_n)$ هرگاه

$$(a_n - b_n) < 0.$$

**لم ۵.۳.۱.** فرض کنید $(a_n)$ یک دنباله باشد به‌طوری که برای هر $n$، داشته باشیم $a_n \geq 0$. در این صورت

$$(a_n) \geq 0$$

*اثبات.* زیرا در اثبات قضیهٔ ۲.۳.۱ عدد $a_M$ مثبت می‌شود. □

**نتیجه ۶.۳.۱.** فرض کنید برای هر $n$ داشته باشیم

$$a_n \leq b_n$$

در این صورت

$$(a_n) \leq (b_n)$$

**قضیه ۷.۳.۱** (ویژگی ارشمیدسی). برای هر عدد حقیقی $a$ یک عدد طبیعی $N$ وجود دارد که

$$a < N.$$

*اثبات.* فرض کنید $a = (a_n)$ یک عدد حقیقی باشد. می‌خواهیم عدد طبیعی $N$ را به گونه‌ای پیدا کنیم که

$$(a_i) < N.$$

از آنجا که $(a_i)$ یک دنبالهٔ کُشی است، کراندار است؛ یعنی عدد طبیعی $M$ وجود دارد به طوری که تک تک $a_i$ ها از $M$ کمتراند. بنابراین

$$(a_i) \leq M.$$

□

**تمرین ۵.** اگر $a > 0$ آنگاه عدد گویای $q > 0$ وجود دارد که

$$0 < q < a$$

**تمرین ۶.** فرض کنید $x, y$ دو عدد حقیقی مثبت باشند که $0 < x < y$ نشان دهید عدد گویای $\frac{m}{n}$ وجود دارد به طوری که

$$x < \frac{m}{n} < y$$

**تمرین ۷.** فرض کنید $(a_n)$ یک عدد حقیقی مثبت باشد،نشان دهید دنبالهٔ $a_n = \frac{1}{a_n}$ یک دنبالهٔ کُشی است. با استفاده از این نکته، بگویید که معکوس یک عدد حقیقی را چگونه می‌توان تعریف کرد؟

## ۴.۱ ویژگی کوچکترین کران بالا

مهم‌ترین ویژگی اعداد حقیقی، که از ابتدای درس پی‌گیر آن هستیم، یک ویژگی مهم است که ترتیب آن داراست. نام این ویژگی، **ویژگی کوچکترین کران بالا، اصل کمال، یا ویژگی «ددِکیند کامل‌بودن»** است.

**تعریف ۱.۴.۱.** فرض کنید $E \subseteq \mathbb{R}$ یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی باشد. می‌گوییم $E$ از بالا کراندار است، هرگاه:

$$\exists r \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in E \ \ x \leq r$$

**قضیه ۲.۴.۱** (اصل کمال). اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ یک مجموعهٔ ناتهی از بالا کراندار باشد، آنگاه $E$ دارای کوچک‌ترین کران بالا است.

کوچک‌ترین کرانِ بالای مجموعهٔ $E$ را با $\sup E$ نشان می‌دهیم. واضح است که $\sup E$ دارای دو ویژگی است: ۱) از همهٔ عناصر $E$ بزرگتر یا مساوی است. ۲) از هر عنصر دیگری که از همهٔ عناصر $E$ بزرگ‌تر یا مساوی باشد، کوچک‌تر یا مساوی است.

*اثبات.* فرض کنید $u_0$ یک کران بالا برای $E$ باشد. یک عنصر $l_0$ در نظر بگیرید که یک کران بالا برای $E$ نباشد. چنین عنصری مانند $l_0$ به راحتی پیدا می‌شود. کافی است یک عنصر دلخواه در $E$ را در نظر بگیرید. اگر این عنصر کران بالا باشد، مشخصا کوچکترین کران بالای $E$ است و اثبات قضیه، همین‌جا به پایان می‌رسد. پس می‌شود فرض کرد که این عنصر، کران بالا نیست.

$\frac{l_0+u_0}{2}$ را در نظر بگیرید،دو حالت به وجود می‌آید:

اگر $\frac{l_0+u_0}{2}$ کران بالایی برای $E$ باشد،قرار دهید

$$u_1 = \frac{l_0 + u_0}{2}$$

$$l_1 = l_0$$

اگر $\frac{l_0+u_0}{2}$ کران بالایی برای $E$ نباشد،قرار دهید

$$l_1 = \frac{l_0 + u_0}{2}$$

$$u_1 = u_0$$

حال فرض کنید $u_0, u_1, u_2, ...u_n$ و $l_0, l_1, l_2, ...l_n$ را معرفی کرده اید،برای معرفی $u_{n+1}$ و $l_{n+1}$ مشابه بالا عمل کنید. به این ترتیب، با کمک استقراء، دو دنبالهٔ $u_0, u_1, u_2, ...$ و $l_0, l_1, l_2, ...$ ساخته می‌شوند به طوری که دنبالهٔ $(u_i)$ صعودی و دنبالهٔ $(l_i)$ نزولی است. هم‌چنین هر $u_i$ یک کران بالا برای $E$ است و هر $l_i$ دارای این ویژگی است که یک کران بالا برای $E$ نیست.

از نحوهٔ ساخت دنباله، مشخص است که اولاً $u_i$ ها در حال نزدیک شدن به هم هستند، ثانیاً $l_i$ ها در حال نزدیک شدن به هم هستند، و ثالثاً $u_i$ ها در حال نزدیک شدن به $l_i$ ها هستند. ادعا می‌کنیم که $u_i$ یک دنبالهٔ کُشی و در واقع $u = (u_i)$ یک عدد حقیقی است.

دقت کنید که فاصلهٔ $u_n$ و $u_{n+1}$ برابر است با $\frac{u_0-l_0}{2^{n+1}}$. پس در مورد فاصلهٔ $u_n$ تا $u_{n+m}$ داریم:

$$\begin{aligned}|u_{n+m} - u_n| \leq |u_n - u_{n+1}| + |u_{n+1} - u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+m-1} - u_{n+m}| \leq \\ \frac{u_0 - l_0}{2^{n+1}}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^m}) \leq \\ \frac{u_0 - l_0}{2^{n+1}}(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

عبارت $\frac{u_0-l_0}{\frac{1}{1-\frac{2}{2}}}$ را با $M$ نشان دهید. داریم

$$|u_{n+m} - u_n| < \frac{1}{2^{n+1}}M.$$

واضح است که برای یک عدد داده شدهٔ $\epsilon$ می‌توان $\frac{1}{2^{n+1}}M$ را به اندازهٔ کافی کوچک و شرط کُشی بودن را برآورده کرد.

به بیان دقیق‌تر، فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد. عدد طبیعی $N$ را به گونه‌ای بگیرید که $\frac{1}{2^{n+1}}M < \epsilon$. هر دو عدد عدد طبیعی بزرگتر از $N$ به صورت یک $a_n$ و یک $a_{n+m}$ هستند که فاصلهٔ آنها کمتر از $\epsilon$ خواهد بود.

مشابهاً می‌توان تحقیق کرد که $l_i$ یک دنباله کُشی،است. قرار دهید $u = (u_i)$ و $l = (l_i)$. بنا به نزدیک شدن $l_i$ ها و $u_i$ ها (یعنی هم‌ارز بودن این دو دنباله) داریم:

$$u = l.$$

نهایتاً ادعا می‌کنیم که عدد $u = l$ کوچکترین کران بالا برای $E$ است.

ابتدا دقت کنید که $u$ از تمام عناصر $E$ بزرگتر یا مساوی است. در واقع فرض کنید $t \in E$ عنصر دلخواهی باشد،آنگاه $t$ از تک تک $u_i$ ها کوچکتر است. باقی آنچه نیاز داریم از تمرین (نه چندان سادهٔ) زیر نتیجه می‌شود:

**تمرین ۸.** فرض کنید $t$ یک عدد حقیقی باشد و $u_i$ یک دنباله کُشی از اعداد گویا باشد که تمام عناصر آن از $t$ بیشترند. نشان دهید $t < (u_i)$.

اما چرا $u$ کوچکترین کران بالا است؟ فرض کنید $x$ یک عدد گویای کمتر از $u$ باشد. نشان می‌دهیم که $x$ نمی‌تواند کران بالایی برای $E$ باشد. داریم $x < u$ پس $(x) < (u_i)$. چون $u = l$ داریم $x < l$ پس $x$ از یکی از $l_i$ ها کمتر است. $l_i$ مربوطه از یکی از عناصر $E$ کمتر است، چون کران بالا نیست. □

## ۵.۱ چرا «اصل کمال»

یکی از از دانشجویان پرسید که چرا ویژگی کوچک ترین کران بالا را **اصل کمال** می‌نامیم، در حالی که آن را به عنوان یک قضیه اثبات کرده‌ایم؟

اگر پرسیده شود که مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) چیست، می‌توانیم به دو طریق پاسخ بدهیم:

۱. $\mathbb{R}$ همان مجموعهٔ دنباله‌های کُشی در $\mathbb{Q}$ است که روی آن جمع و ضرب و ترتیب، به گونه‌ای که گفتیم تعریف می‌شود. همان طور که ثابت کردیم، این مجموعه، با ترتیب خود در ویژگی کوچکترین کران بالا صدق می‌کند.

۲. در تعریف $\mathbb{R}$ می‌توان گفت که یک میدان مرتب است به صورت

$$(\mathbb{R}, +, ., 0, 1, <)$$

که اصل کمال در آن برقرار است. در واقع $\mathbb{R}$ یک میدان است که اصول موضوعهٔ خاصی، از جمله اصل کمال در آن برقرار هستند. یکی از میدان های مرتبی که اصل کمال در آن برقرار است، مجموعه‌ای است که ما آن را با استفاده از دنباله‌های کُشی ساختیم و با $\mathbb{R}$ نشان دادیم. اما می‌توان به راحتی (شاید نه خیلی راحت برای دانشجویان ترم‌های اول) اثبات کرد که به هر طریق دیگری نیز که این مجموعه را می‌ساختیم، این دو مجموعه (مجموعهٔ $\mathbb{R}$ و مجموعه اعداد حقیقی ساخته شده به یک روش دیگر) با هم ایزومورفیسم (یکریخت) می‌بودند. یعنی فقط یک میدان مرتب وجود دارد که اصل کمال در آن برقرار باشد.

**تمرین ۹.** نشان دهید که ویژگی ارشمیدسی، از اصل کمال نتیجه می‌شود.

راهنمایی. به این فکر کنید که اگر قرار باشد مجموعهٔ اعداد طبیعی کران‌دار باشد، دارای کوچکترین کران بالا خواهد بود.

## ۶.۱ ویژگی کُشی‌کامل بودن

در بخش قبلی نشان دادیم که میدان اعداد حقیقی، دِدِکیندْکامل است؛ یعنی هر زیرمجموعهٔ از بالا کران‌دار آن دارای کوچک‌ترین کران بالاست. در این بخش، می‌خواهیم از این ویژگی، ویژگی کُشی کامل بودن را نتیجه بگیریم. یعنی می‌خواهیم نشان دهیم که در میدان اعداد حقیقی، دنباله‌های کُشی، همان دنباله‌های همگرا هستند. قبلاً دنباله‌های کُشی در $\mathbb{Q}$ را معرفی کرده بودیم. در اینجا دنباله‌های کُشی در $\mathbb{R}$ را نیز معرفی می‌کنیم.

**تعریف ۱.۶.۱.** به هر تابع

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

یک دنباله در $\mathbb{R}$ گفته می‌شود. چنین دنباله‌ای را به صورت $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۲.۶.۱.** می‌گوییم دنبالهٔ $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ در $\mathbb{R}$ یک دنبالهٔ کُشی است،هرگاه

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n, m > N \;\; |a_n - a_m| < \epsilon.$$

**تعریف ۳.۶.۱.** می‌گوییم دنبالهٔ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا به عدد $l$ است،هرگاه

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; |a_n - l| < \epsilon$$

و یا به عبارت دیگر

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists n \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N \;\; l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$$

در واقع، زمانی دنبالهٔ $a_n$ همگرا به $l$ است که برای هر $\epsilon$ دلخواه ما، جملات دنباله از جایی به بعد در فاصلهٔ $\epsilon$ از عدد $l$ قرار بگیرند. وقتی جملات یک دنباله، به یک حدْ نزدیک می‌شوند، واضح است که به یکدیگر هم نزدیک می‌شوند؛ یعنی:

**لم ۴.۶.۱.** هر دنبالهٔ همگرا یک دنبالهٔ کُشی است.

*اثبات.* فرض کنید دنبالهٔ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ همگرا باشد. فرض کنید $\epsilon > 0$ به ما داده شده،می‌خواهیم نشان دهیم عدد طبیعی $N$ به گونه‌ای وجود دارد که برای هر $m, n > N$ داریم:

$$|a_n - a_m| < \epsilon.$$

از آنجا که $a_n$ همگراست، عدد طبیعی $N$ وجود دارد به طوری که برای هر $n > N$ داریم

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

پس برای هر $m, n > N$ داریم

$$|a_n - a_m| < |a_n - l + l - a_m| < |a_n - l| + |l - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

در ادامه می‌خواهیم نشان دهیم، دنباله‌های کُشی در $\mathbb{R}$ همان دنباله‌های همگرا هستند. دقت کنید که مثلاً $\mathbb{Q}$ چنین ویژگی‌ای ندارد و این ویژگی، مثل اصل کمال، یکی از ویژگی‌های بنیادین میدان اعداد حقیقی است.

**تعریف ۱.۶.۵.** دنبالهٔ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را صعودی می‌گوییم هرگاه

$$\forall m,n \quad (m<n \to \quad a_m<a_n).$$

جملات دنباله‌های صعودی‌ای که از بالا کران‌دار هستند، همه در نهایت کنار هم «تجمع» می‌کنند. از آن مهم‌تر این که:

**لم ۱.۶.۶.** فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ صعودی از بالا کراندار در $\mathbb{R}$ باشد، در این صورت $(a_n)$ همگرا است.

*اثبات.* مجموعهٔ $E=\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک مجموعه از بالا کراندار است، بنابراین عدد $x$ موجود است به طوری که $x=\sup E$ (یعنی کوچکترین کران بالای $E$ موجود است). ادعا می‌کنیم دنبالهٔ $(a_n)$ به $x$ همگرا است.

فرض کنید $\epsilon>0$ به ما داده شده باشد، می‌خواهیم نشان دهیم عدد طبیعی $N$ به گونه ای موجود است به طوری که

$$\forall n>N \quad x-\epsilon<a_n<x+\epsilon.$$

چون $x$ کران بالا است، برای هر $n$، عبارتِ $a_n<x+\epsilon$ بوضوح برقرار است. می‌دانیم که $x$ کوچکترین کران بالا برای $E$ است، بنابراین $x-\epsilon$ کران بالا نیست. یعنی عنصر $a_N$ وجود دارد که $x-\epsilon<a_N$ بنابراین برای هر $n>N$ داریم

$$x-\epsilon<a_N<a_n<x+\epsilon$$

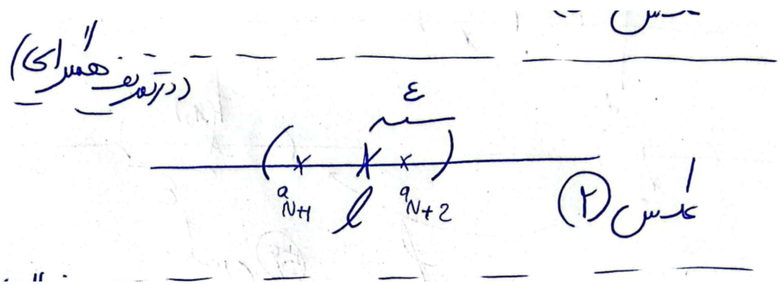
زیرا $a_n>a_N$ یک دنباله صعودی است. □

**تعریف ۱.۶.۷.** می‌گوییم دنبالهٔ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا به عدد $l$ است هرگاه

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}^+ \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n>N \quad |a_n-l|<\epsilon;$$

و یا به عبارت دیگر

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}^+ \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n>N \ \ l-\epsilon<a_n<l+\epsilon.$$




در لم ۱.۶.۴ در صفحهٔ ۱۴ نشان دادیم که هر دنبالهٔ همگرا، یک دنبالهٔ کُشی است. در این جا نشان خواهیم داد که: در $\mathbb{R}$ هر دنبالهٔ کُشی، یک دنبالهٔ همگراست.

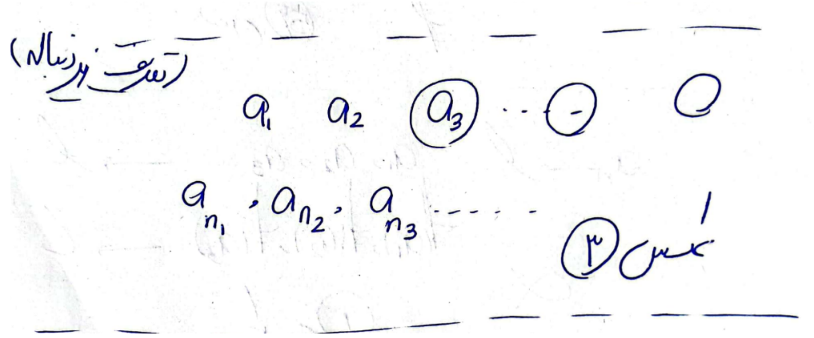
**تعریف ۸.۶.۱.** فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله باشد. به هر دنبالهٔ به صورت

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$$

که در آن

$$n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$$

یک زیر دنباله از دنبالهٔ $(a_n)$ گفته می‌شود.




اگر یک دنبالهٔ نامتناهی در اعداد حقیقی به ما داده شده باشد، می‌توانیم از درون آن یک دنبالهٔ صعودی یا یک دنبالهٔ نزولی، با حفظ ترتیب اندیس‌ها بیرون بکشیم:

**لم ۹.۶.۱.** هر دنبالهٔ نامتناهی در $\mathbb{R}$ یا دارای یک زیر دنبالهٔ صعودی و یا دارای یک زیر دنبالهٔ نزولی است.

*اثبات.* یک عنصر $a_n$ از دنباله را *سقف* می‌نامیم، هرگاه تمام عناصر بعدی دنباله از آن کمتر باشند. پس اگر $a_k$ یک سقف باشد، آنگاه برای هر $n > k$ داریم، $a_k > a_n$. اگر دنبالهٔ $(a_n)$ نامتناهی سقف داشته باشد، خودِ این سقف‌ها یک دنبالهٔ نزولی می‌سازند و اثبات قضیه به پایان می‌رسد. بنابراین فرض کنید دنبالهٔ $(a_n)$ متناهی سقف داشته باشد. در این صورت آخرین سقف در دنباله وجود دارد. فرض کنید $a_{k_1}$ اولین جملهٔ بعد از آخرین سقف باشد. از آنجا که $a_{k_1}$ خودش سقف نیست چنین نیست که همهٔ جملات بعد از $a_{k_1}$ از آن کوچک‌تر باشند؛ پس عنصری مانند $a_{k_2}$ هست که از $a_{k_1}$ بیشتر است. اما خودِ $a_{k_2}$ هم سقف نیست. پس عنصری وجود دارد به طوری که از $a_{k_2}$ بزرگ‌تر است و خودش هم سقف نیست. بدین صورت یک دنبالهٔ صعودی $(a_{k_n})$ پیدا می‌شود. □

**لم ۱۰.۶.۱.** هر دنبالهٔ نزولی از پایین کراندار، همگرا است.

*اثبات.* اگر $(a_n)$ یک دنبالهٔ نزولی از پایین کران‌دار باشد، $(-a_n)$ یک دنبالهٔ صعودی از بالا کران‌دار است که بنا به لم قبل همگرا است. از همگرایی $(-a_n)$ همگرایی $(a_n)$ نتیجه می‌شود. □

**لم ۱۱.۶.۱.** فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ کُشی باشد، در این صورت $(a_n)$ دارای یک زیردنبالهٔ همگرا است.

*اثبات.* بنا به لم قبل می‌دانیم دنبالهٔ $(a_n)$ دارای یک زیر دنبالهٔ صعودی و یا دارای یک زیر دنبالهٔ نزولی است. از طرفی بنا به کُشی بودن دنباله می‌دانیم که $(a_n)$ کراندار است، پس زیردنبالهٔ یاد شده هم کراندار است. بنا به لم‌های قبل این زیردنباله همگرا است. □

در لم بعدی نشان داده‌ایم که هر دنبالهٔ کُشی که یک زیردنبالهٔ همگرا به عددی مانند $l$ داشته باشد، خودش نیز همگرا به $l$ است. علت امر این است که از یک طرف عناصر زیردنبالهٔ مورد نظر به $l$ نزدیک می‌شوند و از طرفی بنا به کُشی بودن دنباله، سایر عناصر دنباله به هم نزدیک می‌شوند. پس عناصر دنباله، در حال نزدیک شدن به $l$ هستند. در لم زیر این ایده‌ها را دقیق کرده‌ایم.

**لم ۱.۶.۱۲.** فرض کنید $(a_n)$ یک دنبالهٔ کُشی باشد که یک زیردنبالهٔ همگرا به عدد $l$ دارد. در این صورت خود $(a_n)$ هم به عدد $l$ همگراست.

*اثبات.* فرض کنید $(a_{n_k})$ با $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ زیر دنبالهٔ همگرا به $l$ باشد. فرض کنید $\epsilon > 0$ به ما داده شده باشد. در این صورت چون زیردنبالهٔ $(a_{n_k})$ همگراست عدد طبیعی $N_1$ وجود دارد به طوری که برای هر $n_k > N_1$ داریم:

$$|a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

از آنجا که $(a_n)$ کُشی است، عدد طبیعی $N_2$ وجود دارد به طوری که برای هر $m, n > N_2$ داریم:

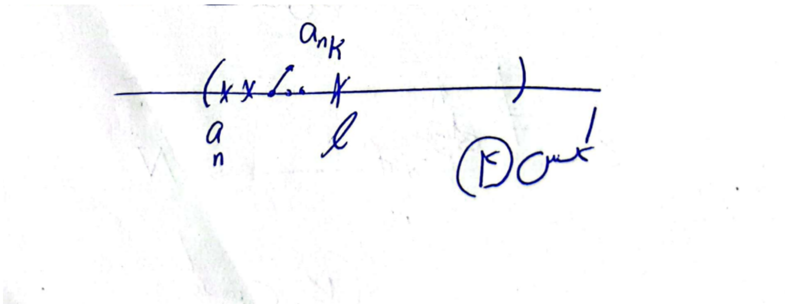
$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

قرار دهید $N = \max\{N_1, N_2\}$ در این صورت برای هر $n, n_k > N$ داریم:

$$|a_n - l| < |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

به طور خاص، برای هر $n > N$ داریم

$$|a_n - l| < \epsilon.$$




□

**نتیجه ۱.۶.۱۳.** هر دنبالهٔ کُشی در $\mathbb{R}$ همگرا است.

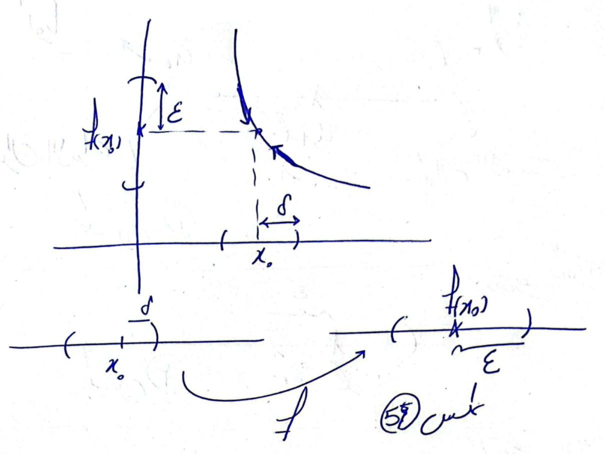
**تمرین ۱۰.** مستقیماً (بدون استفاده از تکنولوژی یاد شده و تنها با تکیه بر نحوهٔ ساخت اعداد حقیقی)، نشان دهید $\mathbb{R}$ کُشی کامل است. در واقع از این که هر عدد حقیقی یک دنبالهٔ کُشی از اعداد گویا است، نتیجه بگیرید که هر دنبالهٔ کُشی در $\mathbb{R}$ همگراست.

## ۱.۷ ویژگی مقدار میانی

یکی از مهم‌ترین قضایایی که در ریاضی ۱ در مورد اعداد حقیقی ثابت می‌شود، قضیهٔ مقدار میانی است که می‌گوید یک تابع پیوسته، وقتی دو مقدار را اختیار کند، همهٔ مقادیر مابین آنها را نیز اختیار می‌کند. این ویژگی نیز، به اندازهٔ کُشی کامل بودن و دد کنید کامل بودن، جزو خصلت‌های اصلی میدان مرتب اعداد حقیقی است.

**تعریف ۱.۷.۱.** تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ رادر نقطهٔ $x_0$ پیوسته می‌نامیم، هرگاه

$$\forall\epsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\quad \Big(x_0-\delta<x<x_0+\delta\longrightarrow f(x_0)-\epsilon<f(x_0)<f(x_0)+\epsilon\Big).$$



در واقع زمانی تابع $f$ در یک نقطهٔ $x_0$ پیوسته است که مقادیر $f$ بتوانند به **هر اندازهٔ دلخواه** ما به $f(x_0)$ نزدیک شوند، به خرج این که مقادیر $x$ به **اندازهٔ کافی** نزدیک $x_0$ باشند. لم زیر، حاوی ایدهٔ پیوستگی یک تابع است:

**لم ۲.۷.۱.** فرض کنید $(a_n)$ یک دنبالهٔ باشد که به عدد $l$ همگراست. همچنین فرض کنید $f$ یک تابع پیوسته در نقطهٔ $l$ باشد. دراین صورت دنبالهٔ $(f(a_n))$ به $f(l)$ همگراست.

$$a_1,a_2,a_3,\ldots\longrightarrow l.$$

$$f(a_1),f(a_2),f(a_3),\ldots\longrightarrow f(l).$$

*اثبات.* فرض کنید $\epsilon>0$ به ما داده شده باشد. می‌خواهیم عدد طبیعی $N$ را به گونه‌ای پیدا کنیم که برای هر $n>N$ داشته باشیم

$$|f(a_n)-f(l)|<\epsilon.$$

از آنجا که $f$ در $l$ پیوسته است، عدد $\delta>0$ موجود است، به طوری که برای هر $x$

$$|x-l|<\delta\longrightarrow|f(x)-f(l)|<\epsilon.$$

پس اگر $a_n$ یکی از جملات دنباله باشد به طوری که

$$|a_n-l|<\delta$$

در این صورت خواهیم داشت

$$|f(a_n)-f(l)|<\epsilon.$$

از آنجا که $(a_n)$ به $l$ همگراست، عدد $N$ وجود دارد به طوری که از برای $n$ های بیشتر از $N$ داریم:

$$|a_n-l|<\delta.$$

پس برای همین $n$ ها همچنین داریم:

$$|f(a_n) - f(l)| < \epsilon.$$

$$\epsilon \longrightarrow \delta \longrightarrow N$$

$\square$

**لم ۳.۷.۱.** فرض کنید تابع

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

در نقطهٔ $x_0$ پیوسته باشد.فرض کنید $(x_n)$ یک دنبالهٔ همگرا به $x_0$ باشد

$$x_n \longrightarrow x_0.$$

در این صورت دنبالهٔ $f(x_n)$ به $f(x_0)$ میل می‌کند.

$$f(x_n) \longrightarrow f(x_0).$$

**تمرین ۱۱.** نشان دهید که عکس لم بالا برقرار است. (یعنی اگر اینگونه باشد که برای هر دنبالهٔ $(x_n)$ که به $x_0$ میل می‌کند،دنبالهٔ $(f(x_n))$ به $f(x_0)$ میل کند آنگاه $f$ پیوسته است.)

**لم ۴.۷.۱.** فرض کنید $(a_n)$ یک دنبالهٔ همگرا باشد و $l = \lim_{n\to\infty} a_n$ عددی مثبت باشد. در این صورت از جایی به بعد تمام جملات دنباله اکیداً مثبت هستند.

*اثبات.* عدد $\epsilon = \frac{l}{2}$ را در نظر بگیرید. عدد طبیعی $N$ وجود دارد به طوری که برای هر $n > N$ داریم:

$$\frac{l}{2} = l - \frac{l}{2} < a_n < l + \frac{l}{2}.$$

یعنی از جایی به بعد تمام جملات دنباله از $\frac{l}{2}$ و در نتیجه از صفر بیشتر هستند. $\square$

دقیقاً مشابه روش بالا می‌توان لم زیر را اثبات کرد:

**لم ۵.۷.۱.** اگر حد دنباله‌ای منفی باشد از جایی به بعد تمام جملات دنباله منفی هستند.

از لمهای بالا می‌توان نتیجه جالبی گرفت. فرض کنید $(a_n)$ یک دنبالهٔ همگرا باشد که تمام جملات آن مثبت هستند. در این صورت حد دنباله نمی‌تواند منفی باشد. چون همان طور که گفتیم، وقتی حد دنباله منفی است، از جایی به بعد جملات آن دنباله منفی هستند. به طور مشابه یک دنبالهٔ همگرا که تمام جملات آن منفی هستند، نمی‌تواند حد مثبت داشته باشد.

با این لمهای نسبتاً ساده، هم‌اکنون ابزار لازم برای اثبات یک قضیهٔ مهم را در اختیار داریم.

**قضیه ۶.۷.۱.** فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد و داشته باشیم

$$f(a) < 0, f(b) > 0.$$

در این صورت نقطه‌ای مانند $x_0 \in (a, b)$ وجود دارد به طوری که $f(x_0) = 0$.

*اثبات.* قرار دهید $a_0 = a$ و $b_0 = b$. عدد $\frac{a+b}{2}$ را در نظر بگیرید. اگر $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ که حکم اثبات شده است. اگر $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ قرار دهید

$$b_1 = \frac{a+b}{2}, a_1 = a_0$$

و اگر $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ قرار دهید

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, b_1 = b_0.$$

همین روند را به صورت استقرایی ادامه می‌دهیم تا به یک دنبالهٔ

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots$$

و یک دنبالهٔ

$$b_0 > b_1 > b_2 > \dots$$

برسیم به طوری که در برای هر بازهٔ $[a_n, b_n]$ داریم $f(a_n) < 0$ و $f(b_n) > 0$. دنبالهٔ $(a_n)$ یک دنبالهٔ صعودی و از بالا کراندار است؛ واضح است که $b$ یک کران بالا برای آن است. دنبالهٔ $(b_n)$ نزولی و از پایین کراندار است؛ واضح است که $a$ یک کران پایین برای آن است. بنابراین هر دو دنبالهٔ $(a_n), (b_n)$ همگرا هستند.

**تمرین ۱۲.** به عنوان تمرین نشان دهید هر دو دنبالهٔ $(a_n), (b_n)$ به یک عنصر یکسان همگرا هستند؛ یعنی نشان دهید که اگر $a_n \longrightarrow l$ آنگاه $b_n \longrightarrow l$.

فرض کنید حد هر دو دنبالهٔ فوق برابر با $l$ باشد. چون تابع $f$ پیوسته است، داریم

$$f(a_n) \longrightarrow f(l), \quad f(b_n) \longrightarrow f(l).$$

دنبالهٔ $f(a_n)$ یک دنباله با جملات منفی است، پس $f(l) \leq 0$؛ زیرا گفتیم که حد یک دنباله با جملات منفی، نمی‌تواند مثبت باشد. دنبالهٔ $f(b_n)$ یک دنباله با جملات مثبت است، پس $f(l) \geq 0$. بنابراین $f(l) = 0$. □

**تمرین ۱۳.** فرض کنید $f$ یک تابع پیوسته باشد و $f(a) < z < f(b)$ عدد دلخواهی باشد. نشان دهید عددی مانند $c \in (a, b)$ وجود دارد به طوری که $f(c) = z$.

## ۸.۱ قضیهٔ مقادیر نهایی

آخرین قضیه‌ای که می‌خواهیم دربارهٔ اعداد حقیقی ثابت کنیم، و مطابق معمول درستی آن را از اصل کمال نتیجه بگیریم، قضیه‌ای است که می‌گوید یک تابع پیوسته در یک بازهٔ به صورت $[a, b]$ به ماکزیمم و مینیموم مطلق خود می‌رسد.

**لم ۱.۸.۱.** فرض کنید $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. در این صورت مجموعهٔ $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ یک مجموعهٔ از بالا کراندار است.

*اثبات.* فرض کنید چنین نباشد. در این صورت هر عدد طبیعی $n$ که در نظر بگیریم، کران بالا نیست؛ یعنی عنصری مانند $x_n$ وجود دارد به طوری که $f(x_n) > n$. دنبالهٔ $f(x_n)$ را با این ویژگی در ذهن داشته باشیم؛ فعلا می‌خواهیم با دنبالهٔ $(x_n)$ کار کنیم.

ادعا می‌کنیم دنبالهٔ $(x_n)$ دارای یک زیردنبالهٔ همگرا است. می‌دانیم $(x_n)$ دارای یک زیر دنبالهٔ صعودی یا دارای یک دنبالهٔ نزولی است. از طرفی $(x_n)$ کراندار است، پس $(x_n)$ دارای یک زیردنبالهٔ همگرا است. بیایید این زیردنباله را با $(x_{n_k})$ نشان دهیم و فرض کنیم $x_{n_k} \longrightarrow l$. بنا به پیوستگی تابع داریم

$$f(x_{n_k}) \longrightarrow f(l).$$

اما این یک تناقض است؛ زیرا برای هر $n_k$ داریم $f(x_{n_k}) > n_k$؛ یعنی هر عددی که در نظر بگیریم مقادیر دنبالهٔ $f(x_{n_k})$ در جایی از آن بزرگتر می‌شوند (به بیان دیگر این دنباله به بی‌نهایت میل می‌کند). $\square$

تا این‌جا دیدیم که اگر تابع $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد، در این صورت مجموعهٔ $\{f(x)|x \in [a, b]\}$ یک مجموعهٔ از بالا کراندار است. در نتیجه این مجموعه، کوچک ترین کران بالا دارد. فرض کنید

$$u = \sup\{f(x)|x \in [a, b]\}.$$

**قضیه ۲.۸.۱.** فرض کنید $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. در این صورت $f$ دارای ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق در بازه $[a, b]$ است.

*اثبات.* بنا به نتیجهٔ بالا، مجموعهٔ $\{f(x)|x \in [a, b]\}$ دارای کوچکترین کران بالایی به نام $u$ است. ادعا می‌کنیم یک دنبالهٔ $f(x_n)$ وجود دارد که به $u$ همگراست.

می‌دانیم $u$ کوچک ترین کران بالا برای $\{f(x)|x \in [a, b]\}$ است. بنابراین برای هر $n$، عنصر $u - \frac{1}{n}$ کران بالا نیست:

$u - 1$ کران بالا نیست، پس عنصری مانند $x_1$ هست که $u - 1 < f(x_1) < u$.

$u - \frac{1}{2}$ کران بالا نیست، پس عنصری مانند $x_2$ هست که $u - \frac{1}{2} < f(x_2) < u$.

$u - \frac{1}{3}$ کران بالا نیست، پس عنصری مانند $x_3$ هست که $u - \frac{1}{3} < f(x_3) < u$.

دنبالهٔ $f(x_n)$ که به این طریق ساخته می‌شود دارای این ویژگی است که برای هر $n$، $u - \frac{1}{n} < x_n < u$. در واقع جملات دنبالهٔ $f(x_n)$ در حال نزدیک شدن به $u$ هستند؛ به بیان دیگر این دنباله همگرا به $u$ است.

حال دنبالهٔ $(x_n)$ را در نظر بگیرید. مشابه قبل، این دنباله دارای یک زیر دنبالهٔ همگراست؛ زیرا دارای یک زیردنباله صعودی یا نزولی است که در یک بازه کران دار واقع شده است. فرض کنید $(x_{n_k})$ زیردنباله‌ای از $(x_n)$ و همگرا به $l$ باشد. چون تابع پیوسته است

$$f(x_{n_k}) \longrightarrow f(l).$$

توجه کنید که دنبالهٔ $f(x_{n_k})$ یک زیردنباله از دنبالهٔ $f(x_n)$ است که به $u$ همگراست؛ پس این زیردنباله نمی‌تواند به عنصری غیر از $u$ همگرا باشد. یعنی

$$f(l) = u$$

و $l$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق است. $\square$

**تمرین ۱۴.** چرا عدد $l$ در بازهٔ $(a, b)$ است؟

**تمرین ۱۵.** فرض کنید $(a_n)$ یک دنباله همگرا به عدد $l$ باشد. فرض کنید $(a_{n_k})$ یک زیردنباله از $(a_n)$ باشد که همگرا است. نشان دهید که $a_{n_k}$ هم به $l$ همگرا است.

بحثمان در مورد اعداد حقیقی را در این جا پایان می‌دهیم. در بخشهای آینده خواهیم دید که مشابه این قضایای مهم، در چه فضاهای دیگری، و به چه عللی برقرار هستند.

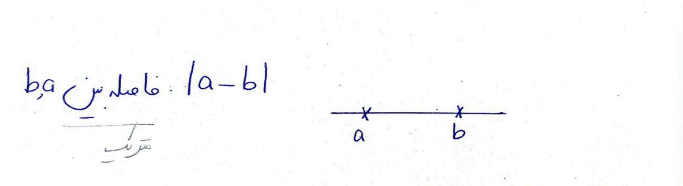
# فصل ۲

# فضاهای متریک و مفاهیم اولیه توپولوژیک

## ۱.۲ فضای متریک، همگرایی، پیوستگی

در فصل قبل، با میدان اعداد حقیقی و خوش‌رفتاری‌های توابع پیوسته روی آن آشنا شدیم. این ویژگی‌ها فقط مختص به توابع روی $\mathbb{R}$ نیست. برای مثال در ریاضی ۲ دیده‌اید که مفاهیم حد و پیوستگی، قضیهٔ مقدار میانی، و قضیهٔ مقادیر نهایی برای توابع $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ یا $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ هم برقرار هستند. چه چیزی بین $\mathbb{R}$ و فضاهایی مثل $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ مشترک است؟

در $\mathbb{R}$ بین هر دو نقطه، **فاصله** قابل تعریف است. فاصله بین دو نقطهٔ $a, b$ در $\mathbb{R}$ برابر با $|a-b|$ است:




همین «فاصله» است که کمک می‌کند حد توابع را تعریف کنیم: زمانی می‌گوییم حد یک تابع $l$ است که «فاصلهٔ» مقادیر تابع از $l$ کم و کم‌تر شود. فضاهای بسیاری هستند که روی آنها مفهوم فاصله وجود دارد.

**تعریف ۱.۱.۲** (متر، یا متریک)**.** فرض کنید $X$ یک مجموعه باشد، تابع

$$d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$$

را یک متر روی $X$ می‌نامیم هرگاه ویژگی های زیر را داشته باشد:

۱. برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(x,y) = 0 \longleftrightarrow x = y.$$

(به طور خاص $d(x,x) = 0$. همچنین اگر $x \neq y$ آنگاه $d(x,y) > 0$.)

۲. برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(x,y) = d(y,x).$$

۳. برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

**تعریف ۲.۱.۲** (فضای متریک)**.** هرگاه $d$ یک متر روی $X$ باشد، می‌گوییم $(X, d)$ یک فضای متریک است.

دقت کنید که روی یک مجموعه می‌توانیم مترهای مختلفی داشته باشیم؛ یعنی ممکن است $(X, d_1)$ و $(X, d_2)$ هر دو، فضای متریک باشند.

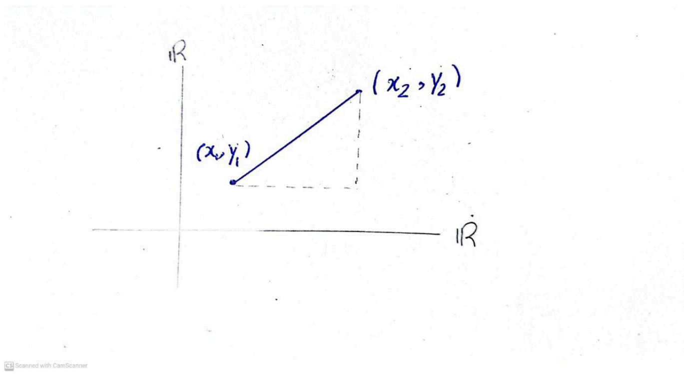
در زیر چند نمونه فضای متریک را مثال زده‌ایم. طبیعی است که باید برای هر کدام از این مثالها، ویژگی‌های متر بودن را به طور دقیق چک می‌کردیم. این کار را کمی به تعویق می‌اندازیم تا درسمان دربارهٔ فضاهای متریک با انجام محاسبات از مسیر خود خارج نشود.

**مثال ۳.۱.۲.** $(\mathbb{R}, d_1)$ با تعریفِ $d_1(x, y) = |x - y|$ یک فضای متریک است.

**مثال ۴.۱.۲.** $(\mathbb{R}^2, d_2)$ با تعریفِ

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

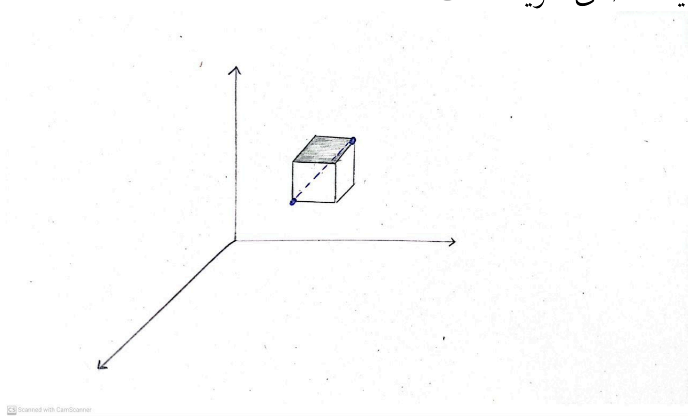
یک فضای متریک است.




**مثال ۵.۱.۲.** $(\mathbb{R}^3, d_3)$ با تعریفِ

$$d_3((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2))) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)}$$

یک فضای متریک است.



فضاهای متریک بالا را «فضاهای اقلیدسی» یا «فضاهای با متر اقلیدسی» می‌نامیم. روی $\mathbb{R}^n$ ها می‌توان مترهای دیگری نیز در نظر گرفت. فعلاً قصد پرداختن به این موضوع را نداریم.

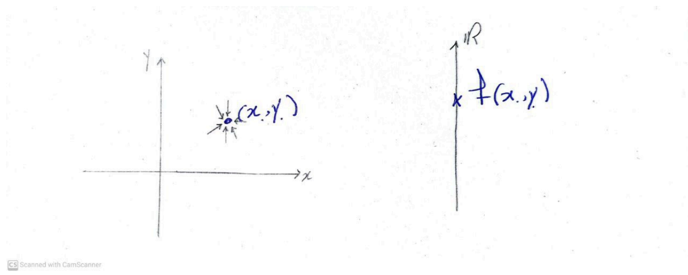
وجود مفهوم «فاصله» یا «متر» روی فضا، به ما کمک می‌کند که مفاهیمی مانند «نزدیک شدن، میل کردن و پیوستگی» را به طوری طبیعی تعریف کنیم: فرض کنید $X, Y$ دو فضا باشند که روی هر کدام، مترِ مختص به خود را داریم. می‌گوییم تابع $f : X \to Y$ در یک نقطهٔ $x_0 \in X$ پیوسته است، هرگاه مقادیر آن به اندازهٔ دلخواه به $f(x_0)$ نزدیک شوند، به شرطی که مقادیر $x$ به اندازهٔ کافی به $x_0$ نزدیک شده باشند. در اینجا، نزدیک شدن مقادیر تابع به $f(x_0)$ از منظر مترِ روی $Y$ است ولی نزدیک شدن مقادیر $x$ به $x_0$ از منظرِ مترِ روی $X$ است. در تعریف زیر، همین گفته‌ها را دقیق کرده‌ایم.

**تعریف ۶.۱.۲.** فرض کنید $(X, d_X)$ و $(Y, d_Y)$ دو فضای متریک باشند و $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد. می‌گوییم $f$ در نقطهٔ $x_0 \in X$ پیوسته است هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \Big( d_X(x, x_0) < \delta \longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon \Big).$$

**مثال ۷.۱.۲.** تابع $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ در یک نقطهٔ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ پیوسته است هرگاه:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \qquad \forall (x, y) \quad \Big( \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \longrightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon \Big).$$



**تمرین ۱۶** (غیر تحویلی!). تعریف پیوستگی را برای توابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ و $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ بنویسید.

مشابهاً می‌توان «همگرایی دنباله‌ها» در یک فضای متریک را تعریف کرد. منظور از دنباله در $X$ یک تابع به صورت زیر است:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow X$$

$$n \mapsto a_n.$$

**تعریف ۸.۱.۲.** فرض کنید $(X, d_X)$ یک فضای متریک باشد و $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ یک دنباله در $X$ باشد و $a$ عنصری در $X$ باشد. می‌گوییم دنبالهٔ $(a_n)$ به $a$ همگراست هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > \mathbb{N} \quad d_X(a_n, a) < \epsilon.$$

بنابراین زمانی یک دنبالهٔ $a_n$ به یک عنصر $a$ همگراست که مقادیر آن **با توجه به متری که روی** $X$ **داریم** به هر اندازه که بخواهیم به $a$ از جایی مناسب به بعد، نزدیک شوند.

حال که مفهوم متریک را داریم که تعمیم همان فاصله در اعداد حقیقی است، به معرفی مفهوم «گوی باز» می‌پردازیم که تعمیم مفهوم «بازه» در اعداد حقیقی است.

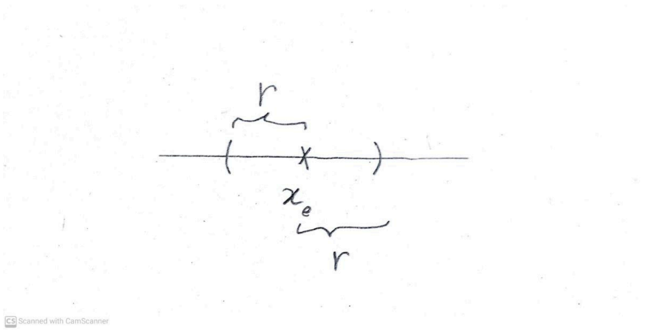
**تعریف ۹.۱.۲.** فرض کنید $(X,d)$ یک فضای متریک باشد و $x_0 \in X$ یک نقطه دلخواه باشد. فرض کنید $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. منظور از **گوی باز به مرکز** $x_0$ **و شعاع** $r$ مجموعهٔ زیر است:

$$B_r(x_0) = \{y \in X | d(y, x_0) < r\}.$$

به یک گوی باز، یک **همسایگی** نیز گفته می‌شود.

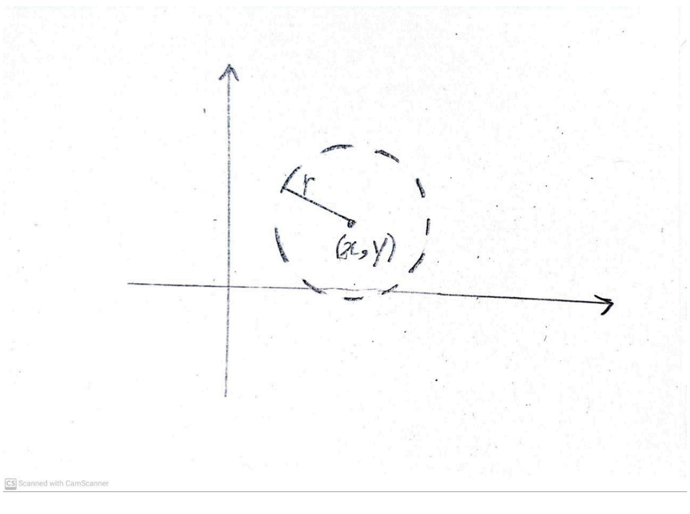
**مثال ۱۰.۱.۲.** فرض کنید $X = \mathbb{R}$ و $x_0 \in \mathbb{R}$ و $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. در این صورت یک گوی باز به مرکز $x_0$ و شعاع $r$ به صورت زیر است:

$$B_r(x_0) = \{y \in \mathbb{R} | |y - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r).$$



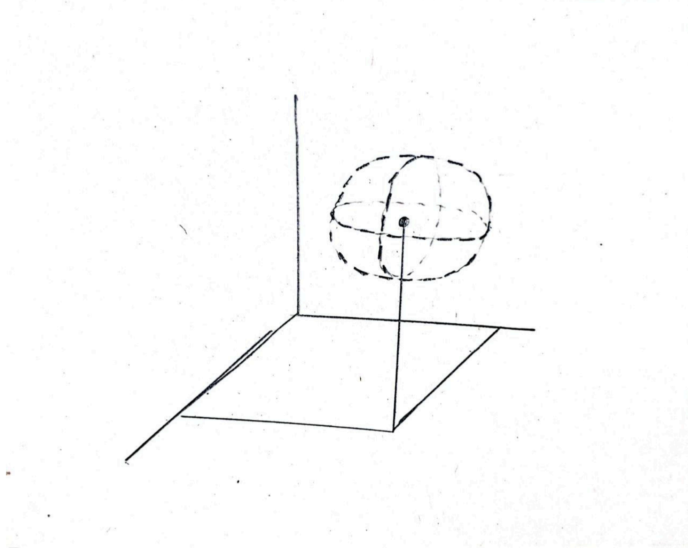

**مثال ۱۱.۱.۲.** فرض کنید $X = \mathbb{R}^2$ و $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ و $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. در این صورت یک گوی باز به مرکز $(x_0, y_0)$ و شعاع $r$ به صورت زیر است:

$$B_r((x_0, y_0)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}.$$

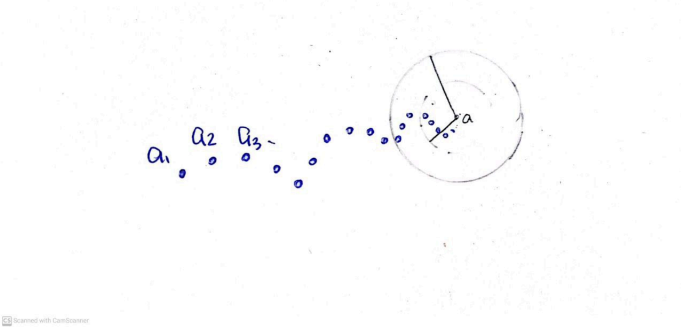



**مثال ۱۲.۱.۲.** فرض کنید $X = \mathbb{R}^3$ و $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ و $r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. در این صورت یک گوی باز به مرکز $(x_0, y_0, z_0)$ و شعاع $r$ به صورت زیر است:

$$B_r((x_0, y_0, z_0)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r\}$$



با استفاده از گوی‌های باز می‌توان مفهوم همگرایی را بهتر توضیح داد: فرض کنید $X = \mathbb{R}^2$. می‌گوییم دنبالهٔ $(a_n)$ در $\mathbb{R}^2$ به $a$ همگراست، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ یک عدد $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n > N$ داشته باشیم $d(a_n, a) < \epsilon$. به زبان گوی های باز می‌توان گفت دنبالهٔ $(a_n)$ به $a$ میل می‌کند هرگاه برای هر گوی باز به شعاع $\epsilon$ حول $a$ یک عدد طبیعی $N$ موجود باشد به طوری که جملات دنباله با اندیس $n > N$ در آن گوی قرار بگیرند. باز به بیان دیگر، «برای هر همسایگی باز به شعاع $\epsilon$ از $a$، جملات دنباله از جایی به بعد در آن همسایگی واقع شوند».




# مفاهیم اولیهٔ توپولوژیک (باز، بسته، فشرده و همبند بودن مجموعه‌ها)

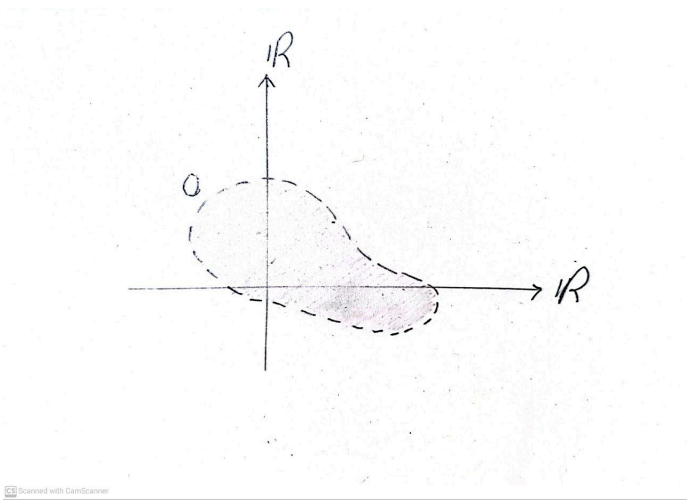
## ۲.۲ مجموعهٔ باز

منظور یک از مجموعه باز، مجموعه‌ای است که «حول هر نقطهٔ آن» یک «گوی باز» داشته باشیم که تمامی عناصر این گوی باز در داخل مجموعهٔ ما باشند. [۱]

**تعریف ۱.۲.۲.** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد. مجموعهٔ $O \subseteq X$ را یک مجموعهٔ باز می‌نامیم هرگاه

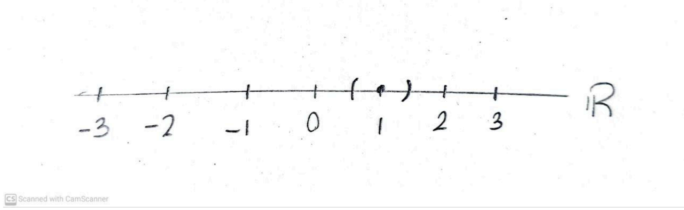
$$\forall x \in O \quad \exists r \in \mathbb{R}^{\geq 0} \quad B_r(x) \subseteq O.$$

[۱] دقت کنید که از کلمهٔ «درون» مجموعهٔ ما استفاده نکرده‌ام، زیرا «درون یک مجموعه» اصطلاحی توپولوژیک است که تعریفِ خود را دارد.

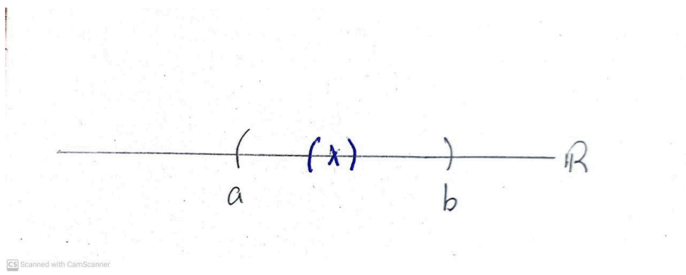



**سوال.** فرض کنید فضای متریک ما، مجموعهٔ اعداد حقیقی با متر قدر مطلق باشد. آیا $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ باز است؟

خیر! برای یک نقطه مثل $x = 1$ یک گوی باز پیدا می‌شود که زیر مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ نیست. مثلا یک گوی باز به شعاع $\frac{1}{2}$ حول $1$ نقاط بسیار زیادی دارد که عدد صحیح نیستند.

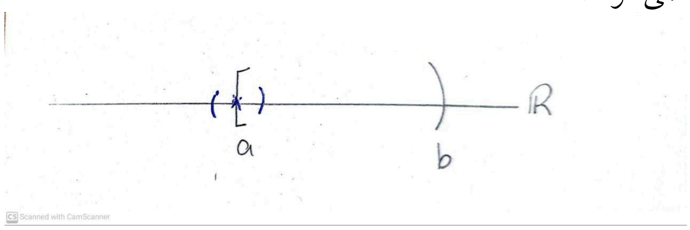



**سوال.** فرض کنید فضای متریک ما، مجموعهٔ اعداد حقیقی با متر قدر مطلق باشد. آیا بازهٔ $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ باز است؟



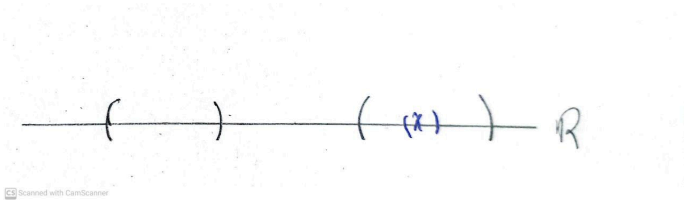

**سوال.** فرض کنید فضای متریک ما، مجموعهٔ اعداد حقیقی با متر قدر مطلق باشد. آیا $[a, b)$ باز است؟

خیر. نقطهٔ $a$ نقطه‌ای در مجموعهٔ ماست. هر گوی بازی که شامل $a$ باشد نقاطی دارد که در مجموعهٔ $[a, b)$ واقع نمی‌شوند.

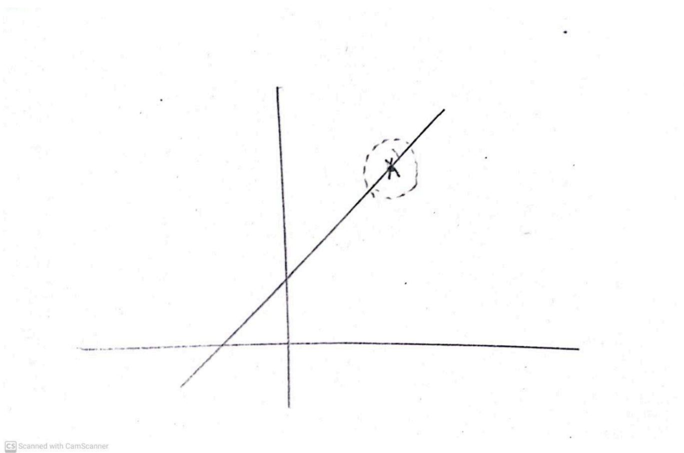


**سوال.** فرض کنید فضای متریک ما، مجموعهٔ اعداد حقیقی با متر قدر مطلق باشد. آیا $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ باز است؟ خیر زیرا حول هر عدد گویا، هر بازه‌ای که در نظر بگیریم شامل نقاطی غیرگویا است.

**تمرین ۱۷.** آیا $(a, b) \cup (c, d)$ باز است؟




**تمرین ۱۸.** فرض کنید فضای متریک ما، مجموعهٔ $\mathbb{R}^2$ با متر اقلیدسی باشد. آیا یک خط دلخواه در $\mathbb{R}^2$ باز است؟ خیر زیرا هر گوی حول خط، شامل نقاطی است که روی خط واقع نیستند.



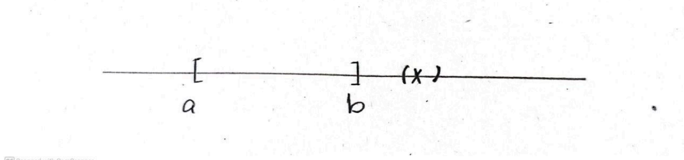

**تمرین ۱۹.** فرض کنید فضای متریک ما، مجموعهٔ اعداد حقیقی با متر قدر مطلق باشد. آیا $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ باز است؟

**توجه ۲.۲.۲.** مجموعهٔ باز با گوی باز اشتباه نشود. (یک گوی باز، مجموعهٔ باز است، ولی مجموعه‌های باز، لزوما گوی باز نیستند.)

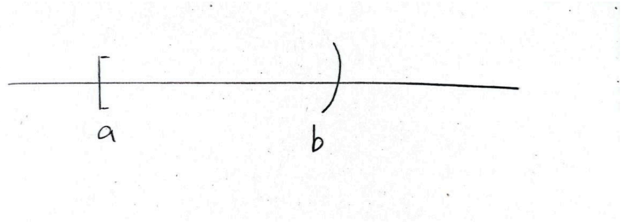
## ۳.۲ مجموعهٔ بسته، نقطهٔ حدی و بستار

**تعریف ۱.۳.۲.** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد و $B \subseteq X$. می‌گوییم $B$ بسته است، هرگاه $X - B$ باز باشد.

**مثال ۲.۳.۲.** در $\mathbb{R}$ با متر قدر مطلق، آیا $[a, b]$ یک مجموعهٔ بسته است؟ بله، زیرا برای هر $x$ که در $[a, b]$ نباشد، یک همسایگی حول $x$ می‌توان پیدا کرد که با $[a, b]$ هیچ اشتراکی نداشته باشد.

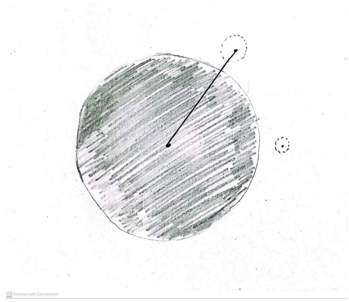


دقت کنید این طور نیست که هر مجموعه‌ای که باز نباشد، بسته است.[2] برای مثال، در $\mathbb{R}$ با متر قدر مطلق، مجموعهٔ $[a,b)$ نه باز و نه بسته است. باز نیست، زیرا حول نقطهٔ $a$ که در این مجموعه است، نمی‌توان هیچ همسایگی‌ای در $\mathbb{R}$ پیدا کرد، که کاملاً در این مجموعه قرار بگیرید. بسته نیست، زیرا نقطهٔ $b$ خارج از این مجموعه است ولی نمی‌توان یک همسایگی حول $b$ پیدا کرد که با $[a,b[$ هیچ اشتراکی نداشته باشد.

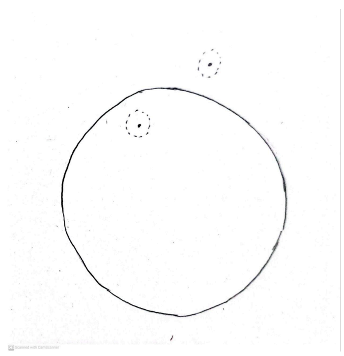



**مثال ۳.۳.۲.** در فضای متریک $(\mathbb{R}^2, d_2)$، آیا مجموعهٔ متشکل از نقاط درون و روی دایره، بسته است؟ بله، زیرا برای هر نقطه بیرون دایرهٔ توپر می‌توان یک همسایگی حول آن پیدا کرد که با دایره و «مرز» آن اشتراکی نداشته باشد.

**تمرین ۲۰.** مثال بالا را دقیق کنید: نشان دهید که مجموعهٔ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_2((x,y),(0,0) \leq r)\}$ یک مجموعهٔ بسته است.



**مثال ۴.۳.۲.** در فضای متریک $(\mathbb{R}^2, d_2)$ آیا مجموعهٔ نقاط واقع روی دایره، یک مجموعهٔ بسته است؟ بله، زیرا برای هر نقطه که روی دایره نباشد می‌توان یک همسایگی حول آن پیدا کرد که با دایره اشتراکی نداشته باشد.



بیایید تعریف بسته بودن یک مجموعه را دوباره با هم مرور کنیم: مجموعهٔ $E \subseteq X$ بسته است، هرگاه:

$$\forall x \in X \quad (x \notin E \longrightarrow \exists r \in \mathbb{R}^{>0} \;\; B_r(x) \cap E = \emptyset).$$

[2] ممکن است مجموعه‌ای نه باز باشد نه بسته. همچنین ممکن است مجموعه‌ای هم باز باشد و هم بسته.

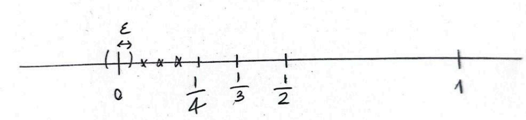
جملهٔ بالا را با استفاده از عکس نقیض عبارت داخل پرانتز، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\forall x \in X \quad \Big((\forall r \in \mathbb{R}^{>0} \;\; B_r(x) \cap E \neq \emptyset) \longrightarrow x \in X\Big).$$

یعنی مجموعهٔ $E$ زمانی بسته است که هر نقطه‌ای که هر همسایگی آن $E$ را قطع می‌کند، عضو $E$ باشد.

**تمرین ۲۱** (غیرتحویلی)**.** با تعریف بالا، مثال ها را دوباره بررسی کنید.

**مثال ۵.۳.۲.** آیا مجموعهٔ $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ به عنوان یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ با متر قدرمطلق، بسته است؟ خیر، نقطهٔ $x = 0$ در نظر بگیرید. هر همسایگی این نقطه، نقطه‌ای از $A$ را در بردارد. زیرا برای هر $\epsilon > 0$ عددی مانند $N$ وجود دارد که $\frac{1}{N} < \epsilon$. اما خودِ صفر جزو $\frac{1}{n}$ ها نیست.




نقطه‌ای که هر همسایگی آن مجموعهٔ $E$ را قطع می‌کند، شایسته یک نام است:

**تعریف ۶.۳.۲.** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد و $E$ زیرمجموعه‌ای از $X$ باشد. نقطهٔ $x \in X$ را یک **نقطهٔ حدی** برای $E$ می‌نامیم هرگاه هر همسایگی آن، $E$ را در نقطه‌ای غیر از $x$ قطع کند. به بیان دیگر $x$ یک نقطهٔ حدی برای $E$ است هرگاه:

$$\forall r \in \mathbb{R}^{>0} \;\; \exists y \neq x \;\; y \in B_r(x) \cap E.$$

**مثال ۷.۳.۲.** در فضای متریک $(\mathbb{R}^2, d_2)$ هر نقطهٔ روی دایره، $x$ یک نقطهٔ حدی برای مجموعهٔ متشکل از نقاط درون دایره است.


با استفاده از تعریف نقطهٔ حدی، می‌توان تعریف «مجموعهٔ بسته» را به صورت زیر بازنویسی کرد:

> فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد. مجموعهٔ $E \subseteq X$ را بسته گوییم هرگاه شامل تمام نقاط حدی خود باشد. (دقت کنید که نگفتیم تمام نقاط $E$ باید نقطهٔ حدی باشند. گفته‌ایم که اگر نقطه‌ای در $X$ یک نقطهٔ حدی برای $E$ باشد، این نقطه متعلق به $E$ باشد.)

**مثال ۸.۳.۲.** مجموعهٔ $\{\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}\}$ به عنوان یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ با متر قدر مطلق، بسته نیست، زیرا $0$ یک نقطهٔ حدی برای این مجموعه است که متعلق به خودِ مجموعه نیست.

نقطهٔ حدی را به این علت، **نقطهٔ حدی** می‌نامند که «حد» یک دنباله است:

**لم ۹.۳.۲.** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$. نقطهٔ $x \in X$ یک نقطهٔ حدی برای $E$ است اگر و تنها اگر یک دنبالهٔ نامتناهی از نقاط $E$ به $x$ همگرا باشد.

*اثبات.* نخست فرض کنید $x$ یک نقطهٔ حدی برای $E$ باشد. هدفمان پیدا کردن یک دنباله در $E$ است که به $x$ همگراست. برای هر عدد طبیعی $n$ گوی به شعاع $\frac{1}{n}$ را حول $x$ در نظر بگیرید. از آنجا که $x$ نقطهٔ حدی است، یک عنصر $x_n$ وجود دارد که $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$. ادعا می‌کنیم که دنبالهٔ $(x_n)$، به $x$ میل می‌کند. فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد. بنا به ویژگی ارشمیدسی، عدد طبیعی $n$ وجود دارد به طوری که $\frac{1}{n} < \epsilon$. جملات دنباله از $x_{n+1}$ به بعد، در داخل این گوی قرار می‌گیرند؛ یعنی فاصله‌شان با $x$ کمتر از $\epsilon$ است.

**تمرین ۲۲.** نشان دهید که دنبالهٔ $(x_n)$ که در بالا معرفی شد، دنبالهٔ ثابت نیست.

ادامهٔ اثبات: برعکس، فرض کنید $(x_n)$ یک دنباله نامتناهی از نقاط $E$ باشد که به $x$ میل می‌کند. می‌خواهیم نشان دهیم که در این صورت $x$ یک نقطهٔ حدی است. فرض کنید $B_\epsilon(x)$ یک همسایگی دلخواه از $x$ باشد. از آنجا که $x_n$ به $x$ همگراست، جملات $x_n$ از جایی به بعد در $B_\epsilon(x)$ واقع هستند. واضح است که این جملات در $E$ هم هستند، پس $x$ یک نقطهٔ حدی است. $\square$

بنا به آنچه تا این لحظه گفتیم، مجموعهٔ بسته، یعنی مجموعه‌ای که **تحت حد گرفتن** بسته است. به بیان دقیق‌تر:

**نتیجه ۱۰.۳.۲.** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد. مجموعهٔ $E \subseteq X$ بسته است هرگاه هر دنبالهٔ $(x_n)$ از اعضای $E$ اگر همگرا به نقطه‌ای در $X$ باشد، آن نقطه در خودِ $E$ قرار داشته باشد.

**مثال ۱۱.۳.۲.** $\mathbb{Q}$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ با متر قدر مطلق بسته نیست. زیرا، به عنوان مثال دنباله‌ای در $\mathbb{Q}$ وجود دارد که به $\sqrt{2}$ میل کند ولی $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

مجموعهٔ متشکل از حدود دنباله‌های همگرای مختلف در $E$ را با $E'$ نشان می‌دهیم:

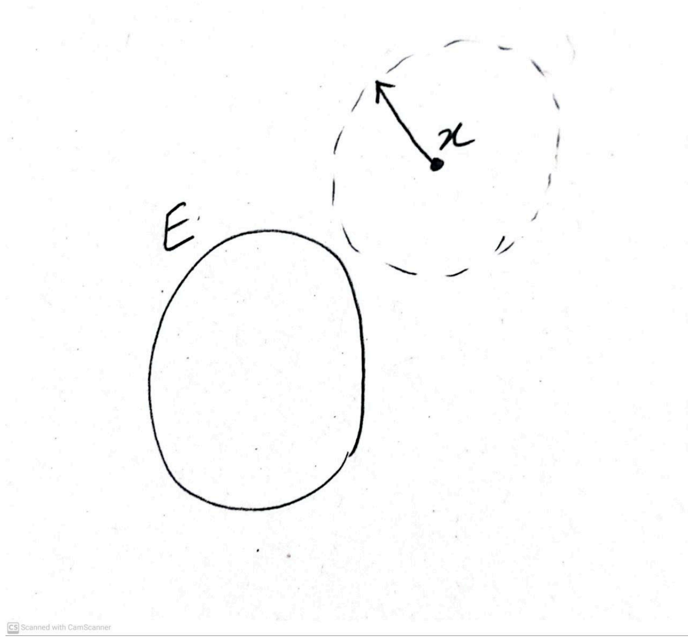
**تعریف ۱۲.۳.۲.** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$. مجموعهٔ تمام نقاط حدی $E$ را با $E'$ نشان می‌دهیم.

**نتیجه ۱۳.۳.۲.** $E$ بسته است اگر و تنها اگر $E' \subseteq E$.

گفتیم که زمانی یک مجموعهٔ $E \subseteq X$ بسته نیست که دنباله‌هایی در آن وجود داشته باشند که به اعدادی میل کنند که آن اعداد در مجموعهٔ $E$ نیستند. فرض کنید $E$ یک مجموعه باشد. بیایید تمام حدهای همه دنباله‌های موجود در $E$ را به $E$ اضافه کنیم. آیا مجموعهٔ به دست آمده بسته است؟ به نظر می‌آید که این طور باشد، زیرا حد هر دنباله‌ای را اضافه کرده‌ایم. اما با دقت بیشتر، متوجه می‌شویم که با اضافه شدن نقطه‌های تازه، حدهای جدیدی نیز پیدا می‌شوند که آنها را نیز باید اضافه کنیم. در نتیجهٔ بعدی می‌بینیم که نیازی به این کار نیست.

**لم ۱۴.۳.۲.** فرض کنید $(X,d)$ یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$. در این صورت مجموعهٔ $E \cup E'$ بسته است.

*اثبات.* کافی است نشان دهیم متمم $E \cup E'$ باز است. فرض کنید $x \notin E \cup E'$ یعنی $x$ نه در $E$ باشد و نه یک نقطهٔ حدی برای $E$ باشد. با توجه به این که $x$ نقطهٔ حدی برای $E$ نیست، یک همسایگی $B_r(x)$ از $x$ وجود دارد که $E$ را قطع نمی‌کند.




ادعا می‌کنیم که $B_r(x)$ مجموعهٔ $E'$ را هم قطع نمی‌کند. فرض کنید $x'$ یک نقطهٔ حدی برای $E$ باشد، که در $B_r(x)$ واقع شده است. این که $x'$ یک نقطهٔ حدی برای $E$ است یعنی هر همسایگی حول $x'$، مجموعهٔ $E$ را در نقطه‌ای بجز خودش قطع می‌کند. از طرفی $x'$ در $B_r(x)$ واقع شده است که طبق فرض $E$ را قطع نمی‌کند و این تناقض است. □

هر اجتماع دلخواه از مجموعه‌های باز، یک مجموعهٔ باز است:

**قضیه ۱۵.۳.۲.** فرض کنید $(X,d)$ یک فضای متریک باشد و $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های باز باشد. در این صورت $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ نیز باز است.

*اثبات.* فرض کنید $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$. می‌خواهیم یک همسایگی حول $x$ پیدا کنیم که زیر مجموعهٔ $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ باشد. از آنجا که $x \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ اندیس $\alpha_0$ وجود دارد به طوری که $x \in U_{\alpha_0}$. مجموعهٔ $U_{\alpha_0}$ باز است، پس یک گوی $B_r(x)$ وجود دارد که زیر مجموعهٔ $U_{\alpha_0}$ است. داریم:

$$B_r(x) \subseteq U_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha.$$

یعنی همسایگی مورد نظر ما، همان $B_r(x)$ است. □

**نتیجه ۱۶.۳.۲.** فرض کنید $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های بسته باشد،در این صورت $\bigcap\limits_{\alpha\in I} E_\alpha$ یک مجموعهٔ بسته است.

*اثبات.* برای اینکه نشان دهیم $\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha$ بسته است، باید نشان دهیم $(\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha)^c$ باز است. داریم

$$(\bigcap_{\alpha\in I} E_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha^c$$

از آنجا که هر $E_\alpha$ بسته است هر ${E_\alpha}^c$ باز است. بنا به قضیه ۱۵.۳.۲ مجموعهٔ $\bigcup_{\alpha\in I} E_\alpha^c$ باز است. □

حال فرض کنید $(X,d)$ یک فضای متریک و $E \subseteq X$ یک مجموعهٔ دلخواه باشد. بنا به آن چه در بالا گفتیم مجموعهٔ زیر بسته است:

$$\bigcap_{\substack{E\subseteq C\\ \text{بسته}\, C\subseteq X}} C.$$

مجموعهٔ فوق اشتراک تمام مجموعه‌های $C \subseteq X$ است که $C$ یک مجموعهٔ بسته است و شامل $E$ است. مجموعهٔ فوق ویژگی‌های زیر را دارد:

- بسته است.
- شامل $E$ است.
- کوچکترین مجموعهٔ بسته‌ای است که شامل $E$ است: یعنی اگر $K$ یک مجموعهٔ بستهٔ دیگر باشد که شامل $E$ است، داریم $\bigcap_{\substack{E\subseteq C\\ \text{بسته}\, C\subseteq X}} C \subseteq K$.

بیایید مورد سوم را اثبات کنیم:

*اثبات.* مجموعهٔ $\bigcap_{\substack{E\subseteq C\\ \text{بسته}\, C\subseteq X}} C$ اشتراک تمام مجموعه‌های بستهٔ شامل $E$ است. اگر $K$ یک مجموعهٔ بستهٔ شامل $E$ باشد، جزو $C$ هاست. پس $\bigcap_{\substack{E\subseteq C\\ \text{بسته}\, C\subseteq X}} C \subseteq K$. □

در بخش‌های قبلی با مجموعهٔ نقاط حدی یک مجموعه $E$ آشنا شدیم و آن را با $E'$ نشان دادیم. لم ۱۴.۳.۲ را در صفحهٔ ۳۳ مشاهده کنید. فرض کنید $(X,d)$ یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$. در این صورت تعریف می‌کنیم: $\bar{E} = E' \cup E$ و $\bar{E}$ را **بستار** $E$ در فضای متریک $(X,d)$ می‌نامیم. در بخش قبلی نشان دادیم که $\bar{E}$ بسته است. در قضیهٔ زیر نشان داده‌ایم که بستار $E$ کوچکترین مجموعهٔ بسته‌ای است که $E$ را به عنوان زیرمجموعه در بر دارد.

**قضیه ۱۷.۳.۲.** فرض کنید $(X,d)$ فضای متریک باشد و $E \subseteq X$. در این صورت

$$\bar{E} = \bigcap_{\substack{E\subseteq C\\ \text{بسته}\, C\subseteq X}} C$$

*اثبات.* می‌دانیم که $E \cup E'$ یک مجموعهٔ بستهٔ شامل $E$ است، پس $\bar{E} \subseteq E \cup E'$ $\bigcap\limits_{\substack{E \subseteq C \\ C \subseteq X \text{ بسته}}} C$ .

حال نشان می‌دهیم $\bigcap\limits_{\substack{E \subseteq C \\ C \subseteq X \text{ بسته}}} C \supseteq E \cup E'$. می‌دانیم که $\bigcap\limits_{\substack{E \subseteq C \\ C \subseteq X \text{ بسته}}} C \supseteq E$ زیرا تمام $C$ ها شامل $E$ هستند. پس فقط باید نشان دهیم که $\bigcap\limits_{\substack{E \subseteq C \\ C \subseteq X \text{ بسته}}} C \supseteq E'$.

فرض کنید $x \in E'$. در این صورت $x$ یک نقطهٔ حدی برای $E$ است، پس $x$ در تمام بسته‌های شامل $E$ واقع است (این بسته‌ها شامل تمام نقاط حدی خود و زیرمجموعه‌های خود هستند). چون مجموعه‌های $C$ بسته و $x$ یک نقطه حدی برای آنها است پس $\bigcap\limits_{\substack{E \subseteq C \\ C \subseteq X \text{ بسته}}} C \ni x$ ، بنابراین $\bigcap\limits_{\substack{E \subseteq C \\ C \subseteq X \text{ بسته}}} C = \bar{E}$. □

**تمرین ۲۳.** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$ و $B \subseteq X$.

- نشان دهید که $(A \cap B)' = A' \cap B'$.
- نشان دهید که لزوماً این طور نیست که $(A \cup B)' = A' \cup B'$. کدام شمول برقرار نیست، چرا؟

**تمرین ۲۴.** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد، موارد زیر را ثابت کنید:

- $X$ و $\emptyset$ باز هستند. (نتیجه بگیرید $X$ و $\emptyset$ بسته هستند.)
- فرض کنید $A \subseteq X$ یک مجموعهٔ متناهی باشد. نشان دهید $A$ بسته است.
- فرض کنید $U_1, U_2 \subseteq X$ باز باشند، نشان دهید $U_1 \cap U_2$ باز است. (به طور مشابه نشان دهید اشتراک هر تعداد متناهی مجموعهٔ باز، باز است.)
- فرض کنید $E_1, E_2 \subseteq X$ بسته باشند، نشان دهید $E_1 \cup E_2$ بسته است. (به طور مشابه نشان دهید اجتماع هر تعداد متناهی مجموعهٔ‌بسته، بسته است.)

**تمرین ۲۵.** فرض کنید $(X, d)$ فضای متریک باشد، نشان دهید مجموعهٔ $E \subseteq X$ بسته است اگروتنهااگر $E = \bar{E}$.

**توجه ۱۸.۳.۲.** اشتراک هر تعداد دلخواه مجموعهٔ باز از یک فضای متریک لزوماً باز نیست. برای مثال، فضای متریک $(\mathbb{R}, d_1)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $E_n = (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$. در این صورت

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = \{0\}$$

مجموعهٔ تک عضوی $\{0\}$ باز نیست (چرا؟). لازم است توضیحی بیاوریم که چرا اشتراک $E_n$ ها مجموعهٔ تک عضوی متشکل از صفر است. فرض کنید $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$. همچنین بدون کاستن از کلیت فرض کنید $x > 0$. پس

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x < \frac{1}{n}$$

بنابراین

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{x} > n.$$

یعنی عدد حقیقی $\frac{1}{x}$ از تمام اعداد طبیعی بیشتر می‌شود و ابن با ویژگی ارشمیدسی در تناقض است.(بنا بر ویژگی ارشمیدسی هیچ عدد حقیقی از همهٔ اعداد طبیعی بزرگتر نیست.)

**تذکر ۱۹.۳.۲.** واضح است که

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x < y.$$

اما بنا به ویژگی ارشمیدسی، این طور نیست که:

$$\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad x < y.$$

به عنوان یک مرور بر مبانی ریاضیات، دربارهٔ دو عبارت بالا بحث کنید.

**تمرین ۲۶.** $(\mathbb{R}, d_1)$ در نظر بگیرید، فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ یک مجموعهٔ متناهی باشد، نشان دهید $A$ باز نیست.

**تمرین ۲۷.** برای یک مجموعهٔ دلخواه $E$ نشان دهید که $E'$، یعنی مجموعهٔ متشکل از نقاط حدی $E$، یک مجموعهٔ بسته است.

## ۴.۲ مجموعه‌های فشرده

مجموعه‌های فشرده در یک فضای توپولوژیک، و به طور خاص در یک فضای متریک، تعریف پیچیده‌ای دارند که از بسط تاریخی این مفهوم شکل می‌گیرد. امکان دارد دانشجو پس از خواندن تعریف مجموعهٔ فشرده در زیر، به هیچ «حسی» دربارهٔ فشرد بودن دست نیابد. در فضاهای متریک، مفهوم فشردگی به طور ملموس‌تری قابل درک است. ما در این جا ترجیح می‌دهیم با همان تعریف پیچیدهٔ توپولوژیک شروع کنیم، سپس قدم به قدم سعی می‌کنیم تعریف را هضم و برای خود ملموس‌تر کنیم.

**تعریف ۱.۴.۲.** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد و $K \subseteq X$. می‌گوییم $K$ فشرده است هرگاه اتفاق زیر رخ دهد:

اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های باز باشد که $K$ را می‌پوشاند $(K \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha)$ متناهی تا از همین $U_\alpha$ ها وجود داشته باشد که $K$ را بپوشانند؛ یعنی اندیس‌های $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ وجود داشته باشند به طوری که

$$K \subseteq U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup ... \cup U_{\alpha_n}.$$

بیایید چک کنیم که تعریف را درست متوجه شده‌ایم یا نه:

**سوال.** کدام مورد دربارهٔمجموعهٔ فشرده درست است؟

- تعداد نامتناهی $U_\alpha$ وجود دارند که $K$ را می‌پوشانند.

- تعدادی متناهی از $U_\alpha$ ها وجود دارند که $K$ را می‌پوشانند.

توجه کنید که هیچ‌یک از موارد بالا دربارهٔیک مجموعهٔ فشرده درست نمی‌باشد؛ تحلیل کنید.

**مشاهده ۲.۴.۲** (بازی با تعریف فشردگی)**.** مجموعهٔ $K$ فشرده است هرگاه اتفاق زیر رخ دهد:

- اگر $\{U_\alpha\}$ یک خانواده از مجموعه‌های باز باشد که $K$ را می‌پوشاند، تعدادی متناهی از این $U_\alpha$ ها $K$ را بپوشانند.

- اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های باز باشد که هیچ تعداد متناهی از آنها $K$ را نمی‌پوشاند، آنگاه $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ هم $K$ را نپوشاند.

- اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های باز باشد، به طوری که برای هر $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in I$ داشته باشیم:

$$K\nsubseteq U_{\alpha_1}\cup U_{\alpha_2}\cup...\cup U_{\alpha_n}$$

آنگاه

$$K\nsubseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha.$$

- $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ اگر یک خانواده از مجموعه‌های باز باشد به طوری که برای هر $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ داشته باشیم

$$K\cap U^c_{\alpha_1}\cap U^c_{\alpha_2}\cap...\cap U^c_{\alpha_n}\neq\emptyset.$$

آنگاه

$$K\cap\bigcap_{\alpha\in I} U^c_\alpha\neq\emptyset.$$

- اگر $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های بسته باشد، که هر تعداد متناهی از آنها با هم اشتراکی در $K$ داشته باشد آنگاه همهٔ $E_\alpha$ ها با هم اشتراکی در $K$ داشته باشند.

**سوال.** آیا مجموعهٔ $\mathbb{R}$ به عنوان زیرمجموعه‌ای در فضای متریک $(\mathbb{R},d_1)$ فشرده است؟
خیر ، بازه‌های $O_n=(n,n+2)$ را برای $n\in\mathbb{Z}$ در نظر بگیرید. داریم:

$$\mathbb{R}\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} O_n.$$

عبارت فوق به علت ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی برقرار است (بنا به این ویژگی، هر عدد حقیقی بالاخره کمتر از یک $n+2$ ای می‌شود). پس $\{O_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک پوشش باز برای $\mathbb{R}$ است. اما هیچ گردایهٔ $\{O_i\}_{i\in\{-n,-n+1,...,0,1,2,...,n\}}$ نمی‌تواند $\mathbb{R}$ را پوشش دهد زیرا بزرگترین عدد حقیقی‌ای که تحت پوشش این پوشش متناهی قرار می‌گیرد، کمتر از $n+2$ است.

شاید از این ناراحت شویم که $\mathbb{R}$، که قرار است همهٔ ویژگی‌های خوب را داشته باشد، فشرده نیست. بعداً خواهید دید که $\mathbb{R}$ یک فضای **موضعاً فشرده** است، و همین، به اندازهٔ کافی مطلوب ماست!

تعریف فشردگی یک مجموعه را به یاد آورید. دقت کنید که در ریاضیات هر زمان سخن از فشردگی شود، گذار از یک نامتناهی به بخشی متناهی از آن اتفاق افتاده است. بعدها در درس منطق ریاضی، معنای عمیق اهمیت این گذار را درک خواهیم کرد.

**تمرین ۲۸.** فضای متریک $(\mathbb{R}, d_1)$ را در نظر بگیرید. آیا مجموعهٔ $\{\frac{1}{n}|n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ فشرده است؟ فقط با استفاده از تعریف مستقیم، پاسخ این تمرین را بدهید.

فشردگی یک مجموعه، حتی قوی‌تر از بسته بودنِ آن است. قضیهٔ زیر ما را یک قدم به درک فشردگی نزدیک‌تر می‌کند:

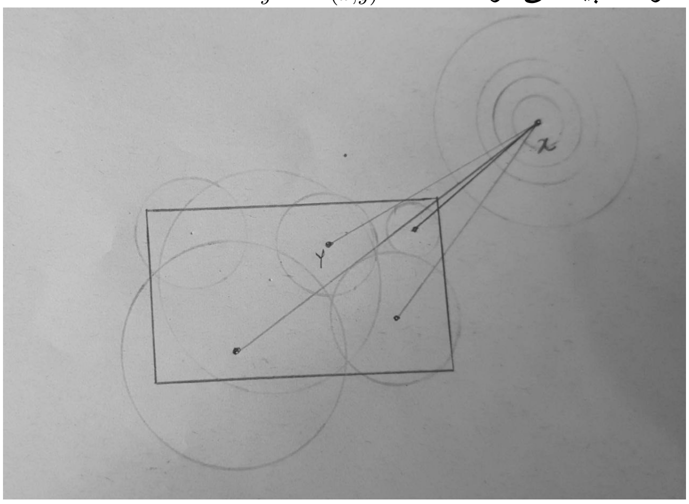
**قضیه ۳.۴.۲.** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد، اگر مجموعهٔ $K \subseteq X$ فشرده باشد، آنگاه $K$ بسته است.

*اثبات.* فرض کنید $K$ فشرده باشد. می‌خواهیم نشان دهیم $K$ بسته است. برای اثبات کافی است نشان دهیم $K^c$، یعنی متمم مجموعهٔ $K$ در $X$ باز است.

فرض کنید $x$ نقطه‌ای خارج از $K$ باشد؛ یعنی $x \notin K$. باید یک همسایگی حول $x$ پیدا کنیم که با $K$ اشتراکی ندارد.

فرض کنید $y \in K$ نقطهٔ دلخواهی باشد. فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $x$ و $y$ برابر با $d(x, y)$ است. یک گوی باز به نام $U_y$ حول $y$ و یک گوی باز به نام $U_{(x,y)}$ حول $x$ وجود دارند، به طوری که $U_y \cap U_{(x,y)} = \emptyset$. برای تحقیق این گفته، کافی است شعاع $\frac{d(x,y)}{3}$ را حول هر کدام از نقاط $x, y$ در نظر بگیرید.

این کار را برای هر $y \in K$ انجام می‌دهیم: یعنی برای هر $y \in K$ یک گوی باز $U_y$ حول $y$ و یک گوی باز $U_{(x,y)}$ حول $x$ پیدا می‌شود که $U_y \cap U_{(x,y)} = \emptyset$.



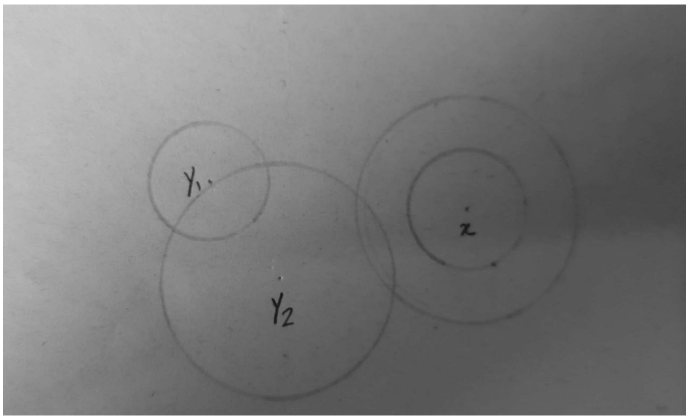

مجموعهٔ $K$ توسط $U_y$ ها پوشیده می‌شود؛ یعنی

$$K \subseteq \{U_y\}_{y \in K}.$$

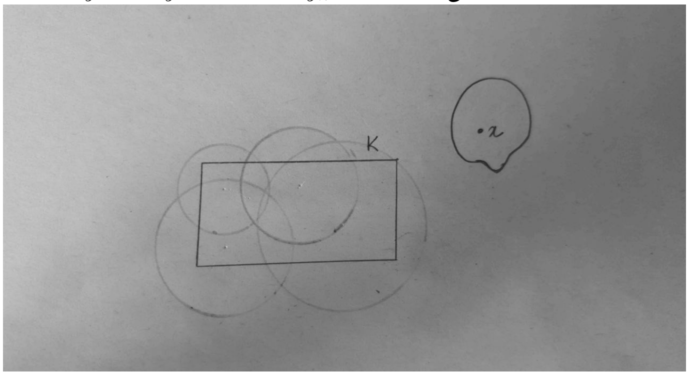
بنا به فشردگی عناصر $y_1, y_2, ..., y_n$ وجود دارند به طوری که

$$K \subseteq U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup ... \cup U_{y_n}.$$

گوی های متناظر $U_{(x,y_1)}, U_{(x,y_2)}, ..., U_{(x,n)}$ را که حول $x$ هستند در نظر بگیرید، می‌دانیم که: $U_{y_n} \cap U_{(x,y_n)} = \emptyset$.




بنابراین $U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup ... \cup U_{y_n}$ با $U_{(x,y_1)} \cap U_{(x,y_2)} \cap ... \cap U_{(x,n)}$ اشتراک ندارد. اما $U_{(x,y_1)} \cap U_{(x,y_2)} \cap ... \cap U_{(x,n)}$ یک مجموعه باز شامل $x$ است و $U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup ... \cup U_{y_n}$ یک مجموعهٔ باز شامل $K$ است.




□

بررسی فشردگی با استفاده از تعریف، عموماً کار آسانی نیست، حتی برای زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$. در این مجموعه هم، ویژگی مهمی در حد اصل کمال می‌تواند در اثبات فشردگی مجموعه‌ها به کار آید. انتظار ندارم تمرینی که در زیر آمده است را بتوانید حل کنید. آن را تنها بدین علت آورده‌ام که تلاش برای پاسخ دادنش، حقایقی دربارهٔ فشردگی را برایتان آشکار کند.

**تمرین ۲۹.** فضای متریک $(\mathbb{R}, d_1)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ فشرده است.

اما تمرین زیر آسان است!

**تمرین ۳۰.** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد و $E$ یک زیرمجموعهٔ متناهی از $X$ باشد، نشان دهید $E$ فشرده است.

عکس قضیهٔ بالا برقرار نیست؛ یعنی لزوماً هر مجموعهٔ بسته‌ای فشرده نیست. بعدها مثالهای نقضی برای این گفته خواهیم آورد. اما مجموعه‌های بسته‌ای که داخل مجموعه‌های فشرده قرار می‌گیرند، فشرده هستند:

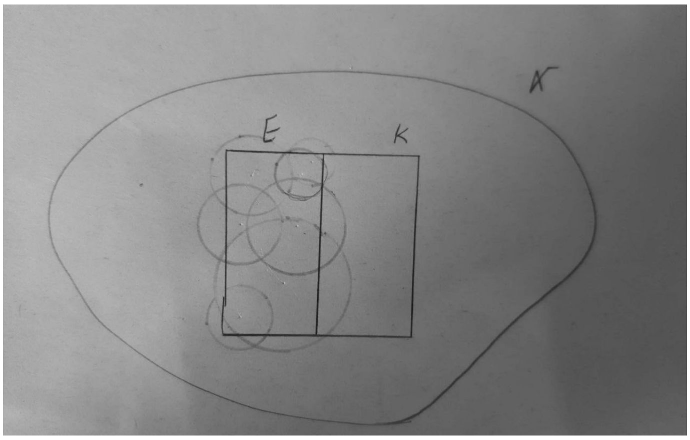
**قضیه ۴.۴.۲.** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک و $K \subseteq X$ یک مجموعهٔ فشرده باشد. همچنین فرض کنید $E$ یک مجموعهٔ بسته در $X$ باشد به طوری که $E \subseteq K$. در این صورت $E$ فشرده است.

*اثبات.* فرض کنید $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک پوشش باز برای $E$ باشد. می‌خواهیم نشان دهیم تعدادی متناهی از $U_\alpha$ ها $E$ را می‌پوشاند. چون مجموعهٔ $E$ بسته است، بنابه تعریفِ بسته بودن، $E^c$ باز است. بنابراین $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup E^c$ یک پوشش باز برای $K$

است؛ یعنی

$$K \subseteq \{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \cup E^c.$$

از آنجا که $K$ فشرده است تعداد متناهی از $U_\alpha$ ها، مثلاً به نام $U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}$ هستند که به همراه $E^c$ مجموعهٔ $K$ را می‌پوشاند. دقت کنید که $E\cap E^c=\emptyset$ و $E\subseteq K$. پس $U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},...,U_{\alpha_n}$ مجموعهٔ $E$ را می‌پوشاند. □




## ۵.۲ فشردگی و معادل بودن آن با دنباله‌ای ـ فشرده بودن

شاید هیچ چیز به اندازهٔ قضیهٔ بعدی، دربارهٔ مفهوم فشردگی به ما شهود ندهد. هرگاه نامتناهی نقطه در یک مجموعهٔ فشرده قرار دهیم، در بخش‌هایی، این نقاط در کنار هم متمرکز می‌شوند. بیایید این ویژگی را به دقت بیشتری بیان کنیم:

**قضیه ۱.۵.۲.** فرض کنید $(X,d)$ یک فضای متریک باشد و $K\subseteq X$ مجموعه‌ای فشرده باشد. همچنین فرض کنید $A\subseteq X$ یک مجموعهٔ نامتناهی باشد به طوری که $A\subseteq K$. در این صورت مجموعهٔ $A$ دارای نقطهٔ حدی است (و چون $K$ بسته است، این نقطهٔ حدی در $K$ است).

پیش از شروع اثبات، دقت کنید وقتی می‌گوییم یک مجموعه، دارای نقطهٔ حدی است، نباید این تصور ایجاد شود که نقطهٔ حدی مورد نظر، در خودِ مجموعه است. نقطهٔ مورد نظر در فضای متریک ما قرار دارد.

*اثبات.* فرض کنید $A\subseteq K$ یک مجموعهٔ نامتناهی باشد که نقطهٔ حدی ندارد. در این صورت پس برای هر $x\in K$ می‌دانیم که $x$ نقطهٔ حدی برای $A$ نیست. همچنین به طور خاص برای هر $x\in A$ عنصر $x$ یک نقطهٔ حدی برای $A$ نیست.

پس هر $x\in K$ یک همسایگی $B(x)$ دارد که $A$ را در نقطه‌ای غیر از خودش قطع نمی‌کند. برای $x$ هایی که در $A$ نباشند، $B(x)$ هیچ اشتراکی با $A$ ندارد و برای $x$ هایی که در $A$ هستند، $B(x)$ یک مجموعه است که تنها در یک نقطه با $A$ اشتراک دارد. واضح است که $B(x)$ ها یک پوشش برای $K$ هستند. بنابراین چون $K$ فشرده است، تعدادی متناهی از $B(x)$ ها $K$ را می‌پوشاند. بنابراین تعداد متناهی از $B(x)$ ها $A$ را می‌پوشانند. اما هر کدام از این $B(x)$ ها با $A$ فقط در یک تک نقطه مشترک هستند، پس تعدادی متناهی از آنها نمی‌توانند $A$ را که نامتناهی است بپوشانند؛ و این یک تناقض است. □

دقت کنید که در قضیهٔ بالا گفتیم وقتی نامتناهی نقطه در یک مجموعهٔ فشرده قرار می‌دهیم، این نقاط «در جایی» متمرکز می‌شوند. لازم نیست تصور کنیم که «در انتها» این اتفاق رخ می‌دهد. این گفته را در زیر به صورت دقیق‌تر بیان کرده‌ایم:

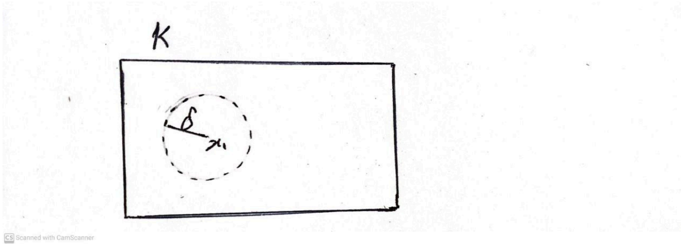
**نتیجه ۲.۵.۲.** فرض کنید $(X,d)$ فضای متریک باشد و $K \subseteq X$ فشرده باشد. در این صورت هر دنبالهٔ نامتناهی $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از عناصر $K$ دارای یک **زیردنبالهٔ همگرا** است (و نگفته‌ایم که خودش همگراست).

در واقع مجموعهٔ $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از $K$ است و بنا به فشردگی $K$ مجموعهٔ $A$ دارای نقطهٔ حدی است. وجود نقطهٔ حدی برای این مجموعه، یعنی این که دنبالهٔ $(x_n)$ یک زیردنبالهٔ همگرا دارد. یک فضا که در آن هر دنباله نامتناهی، زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد، یک فضای «فشردهٔ دنباله‌ای» نامیده می‌شود. آنچه تا کنون ثابت کرده‌ایم این است که هر فضای فشرده، فشردهٔ دنباله‌ای نیز هست. اما جالب اینجاست که عکس این گفته هم برای فضاهای متریک درست است. اثبات این گفته، کار چندان ساده‌ای نیست، اما کوشیده‌ام تا در زیر بدون استفاده از ترمینولوژی سنگین و در سطح آنالیز ۱، این اثبات را ارائه کنم.

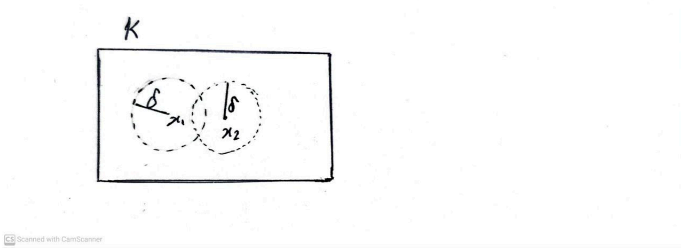
**قضیه ۳.۵.۲.** فرض کنید $(X,d)$ فضای متریک باشد و $K \subseteq X$ مجموعه‌ای باشد به طوری که هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از $K$ دارای یک نقطهٔ حدی در $K$ است. در این صورت $K$ فشرده است.

*اثبات.* **مرحله اول.** فرض کنید $K$ یک مجموعه باشد که هر زیرمجموعهٔ نامتناهی آن نقطهٔ حدی داشته باشد. همچنین فرض کنید $\delta > 0$ به ما داده شده باشد. ادعا می‌کنیم که $K$ را می‌توان با متناهی گوی به شعاع $\delta$ پوشاند.

با برهان خلف فرض کنید نتوان $K$ را با متناهی گوی به شعاع $\delta > 0$ پوشاند. عنصر $x_1 \in K$ و یک گوی باز به شعاع $\delta$ حول آن در نظر بگیرید که آن را $B_\delta(x_1)$ می‌نامیم.




بنا به فرض نمی‌توان $K$ را با $B_\delta(x_1)$ پوشاند، یعنی نقطهٔ $x_2 \in K$ وجود دارد که در $B_\delta(x_1)$ واقع نیست.

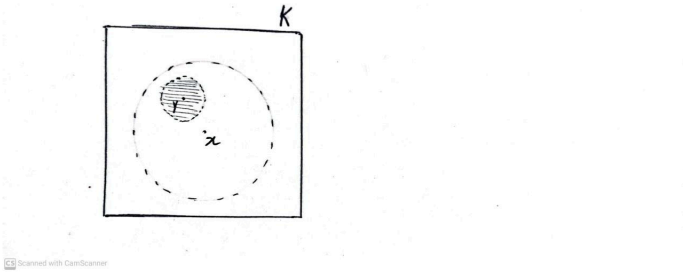



گوی $B_\delta(x_2)$ حول $x_2$ به شعاع $\delta$ را نیز درنظر بگیرید. دوباره بنابه فرض نمی‌توان $K$ را با گوی‌های $B_\delta(x_1)$ و $B_\delta(x_2)$ پوشاند؛ یعنی یک نقطهٔ $x_3$ وجود دارد به طوری که $x_3$ در $B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2)$ قرار ندارد. همین روند را ادامه می‌دهیم و بدین ترتیب یک دنبالهٔ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ساخته می‌شود که فاصلهٔ دوبه‌دوی جملات آن بیشتر از $\delta$ است. به بیان دیگر فاصلهٔ هر جمله از جملات قبل آن بیشتر از $\delta$ است. این دنباله هیچ زیردنبالهٔ همگرایی ندارد و این تناقض است؛ بنابراین حکم اثبات می‌شود.

بنا بر آنچه تا این جا دیدیم: با متناهی گوی به شعاع $1$ می‌توان $K$ را پوشاند. با متناهی گوی به شعاع $\frac{1}{2}$ می‌توان $K$ را پوشاند. با متناهی گوی به شعاع $\frac{1}{3}$ می‌توان $K$ را پوشاند. و به همین صورت برای هر عدد طبیعی $n$ با متناهی گوی به شعاع $\frac{1}{n}$ می‌توان $K$ را پوشاند. بدین ترتیب، شمارا گوی به دست آورده‌ایم که البته واضح است که با هم $K$ را می‌پوشانند. بیایید

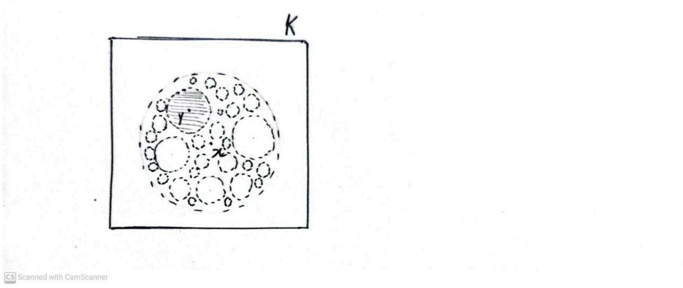
از این مرحله به بعد، این گوی‌ها را **گوی‌های خوب** بنامیم.

**مرحلهٔ دوم.** یک گوی دلخواه مثل $B_r(x)$ در $K$ و یک نقطهٔ دلخواه مثل $y$ در این گوی، در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که یکی از گوی‌های خوب هست که شامل $y$ است و کاملاً زیرمجموعهٔ $B_r(x)$ قرار دارد.




برای اثبات این گفته، دقت کنید که همهٔ گوی‌های خوب، با هم $K$ را پوشش می‌دهند، پس حداقل از این گوی‌های خوب شامل $y$ است. کافی است $n$ را به اندازهٔ کافی بزرگ درنظر بگیریم. در این صورت $y$ در یک گوی خوب به شعاع $\frac{1}{n}$ است که کاملاً زیر مجموعهٔ $B_r(x)$ است.

به همین ترتیب اگر یک نقطهٔ دیگر مثل $y'$ در $B_r(x)$ در نظر بگیریم، یک گوی خوب شامل $y'$ پیدا می‌شود که کاملاً زیرمجموعهٔ $B_r(x)$ است. در نتیجه $B_r(x)$ اجتماعی از این گوی‌های خوب است. بنابراین هر زیرمجموعهٔ باز اجتماعی از گوی‌های خوب است.

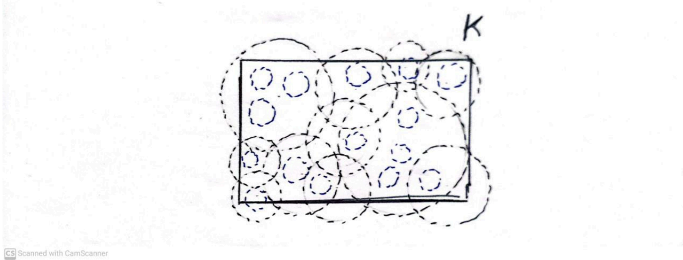



**مرحلهٔ سوم.**

فرض کنید $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک پوشش باز برای $K$ باشد؛ یعنی $K \subseteq \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. ادعا می‌کنیم که $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ دارای یک زیرپوشش شمارا است.

برای اثبات این ادعا دقت کنید که هر کدام از $U_\alpha$ ها یک مجموعهٔ باز است. بنا به مرحلهٔ قبل می‌توان آن را به صورت اجتماعی از گوی‌های خوب نوشت. پس گوی‌های خوبی که در تک تک $U_\alpha$ ها قرار دارند $K$ را می‌پوشانند. تعداد گوی‌های خوب شمارا تا است و بعضی از آن ها تمام $U_\alpha$ ها را می‌پوشانند. بنابراین $K$ توسط شمارا تا گوی خوب پوشانده می‌شوند.

فرض کنید $\{B_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ همان شمارا تا گوی خوب باشند که $K$ را می‌پوشانند و فرض کنید $B_{i_n} \subseteq U_{i_n}$. در این صورت $\{U_{i_n}\}$ زیر پوشش شمارای مورد نظر ما است.




**مرحلهٔ چهارم.**

ادعا: یک زیرپوشش متناهی از $\{U_{i_n}\}$ مجموعهٔ $K$ را می‌پوشانند.
با برهان خلف فرض کنید هیچ تعداد متناهی از $U_{i_n}$ ها $K$ را نپوشاند. عنصر $x_1$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که در $U_{i_1}$ نباشد:

$$x_1 \notin U_{i_1}$$

همچنین عنصر $x_2$ را در نظر بگیرید به طوری که $x_2 \notin U_{i_2} \cup U_{i_2}$. و به همین ترتیب عنصر $x_n$ را در نظر بگیرید به طوری که

$$x_n \notin U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup ... \cup U_{i_n}.$$

دنبالهٔ $(x_n)$ را در نظر بگیرید. بنا به فرض این دنباله دارای یک زیردنبالهٔ همگراست، فرض کنید

$$(x_{n_k}) \longrightarrow x.$$

می‌دانیم $x$ در یکی از $U_{i_n}$ ها قرار می‌گیرد. بنا به همگرایی، جملات دنباله از جایی به بعد باید در $U_{i_n}$ قرار گیرند. اما این با نوع ساخت دنباله در تناقض است زیرا از جملهٔ $x_n$ به بعد در $U_{i_n}$ نیستند. □

**توجه ۲.۵.۴.** در مورد فضاهای متریک، فشرده بودن معادل دنباله‌ای فشرده بودن است؛ اما این امر برای هر فضای توپولوژیک دلخواهی برقرار نیست. همان طور که گفتم، اثبات بالا، ساده شده بسیاری ملاحظات جذاب توپولوژیک را در خود دارد. در زیر برخی از این ملاحظات را برای خوانندهٔ باتجربه‌تر آورده‌ام. نیازی نیست که دانشجویان این درس خود را به دردسر متوجه شدن جملات زیر بیندازند.

۱. به فضایی که هر پوشش باز آن دارای زیرپوشش شمارا باشد، «لیندلوف» گفته می‌شود. در بالا نشان داده‌ایم که یک فضای دنباله‌ای فشرده، لیندلوف است. اما لیندلوف بودن آن را از «شمارای نوع دوم بودن» نتیجه گرفته‌ایم.

۲. یک فضای توپولوژیک را جدایی‌پذیر می‌نامیم هرگاه یک زیر مجموعهٔ شمارا داشته باشد که در آن چگال است. ما در بالا نشان داده‌ایم که $K$ به عنوان یک فضای متریک، جدایی‌پذیر است (مرکز گوی‌های خوب زیرمجموعهٔ مورد نظر ماست).

۳. یک فضای توپولوژیک را شمارای نوع دوم می‌نامیم هرگاه «پایه‌ای» شمارا داشته باشد. هر فضای متریک جدایی‌پذیر، شمارای نوع دوم است. پس در بالا نشان داده‌ایم که $K$ شمارای نوع دوم است.

۴. لیندلوف بودن فضای متریک مورد نظر را از شمارای نوع دوم بودن آن نتیجه گرفته‌ایم.

## ۲.۶ زیر مجموعه‌های فشردهٔ $\mathbb{R}$

زیرمجموعه‌های فشردهٔ فضاهای $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots$ دارای یک ویژگی تعیین کننده هستند که، مطابق معمول، از اصل کمال نشأت می‌گیرد. در این بخش مشخصهٔ تعیین کننده این مجموعه‌ها را بیان و اثبات خواهیم کرد.

**قضیه ۲.۶.۱.** فضای متریک $(\mathbb{R}, d_1)$ را در نظر بگیرید. (که در آن منظور از $d_1$ متر قدر مطلق است.) بازهٔ بستهٔ $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ یک مجموعهٔ فشرده است.

*اثبات شمارهٔ یک.* نشان می‌دهیم که هر دنبالهٔ نامتناهی در $[a,b]$ یک زیر دنبالهٔ همگرا دارد. فرض کنید $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ نامتناهی در $[a,b]$ باشد. در این صورت، همان طور که در صفحهٔ ۱۶ لم ۹.۶.۱ دیدیم، $(a_n)$ یا یک زیردنبالهٔ صعودی و یا یک زیردنبالهٔ نزولی دارد. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $(a_n)$ دارای یک زیر دنبالهٔ صعودی است، همچنین این زیر دنباله از بالا توسط $b$ کراندار است، بنابراین همگراست. قبلاً نشان داده بودیم که در یک فضای متریک، این که هر دنباله، یک زیردنبالهٔ همگرا داشته باشد، معادل با فشرده بودن است.

$\square$

اثبات بالا منوط به اصل کمال بود. در ادامه در پی آنیم که اثباتی مقدماتی‌تر برای لم بالا ارائه کنیم که البته آن هم از اصل کمال ناشی می‌شود. در لم بعدی، گفته‌ایم که بازه‌های تودرتوی بسته در اعداد حقیقی، لزوماً با هم اشتراک دارند.

**لم ۲.۶.۲.** فضای متریک $(\mathbb{R},d_1)$ و بازه‌های تو در توی زیر را در نظر بگیرید

$$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq....$$

در این صورت

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}[a_i,b_i]\neq\emptyset.$$

*اثبات.* دنبالهٔ $(a_i)$ صعودی و از بالا کراندار است.

$$a_1\leq a_2\leq ...$$

و همهٔ $a_i$ ها از $b_1$ کوچک تر هستند. پس دنبالهٔ $(a_i)$ همگرا است. فرض کنید:

$$a_n\longrightarrow a.$$

به طور مشابه دنبالهٔ $(b_n)$ ها نزولی و از پایین کران دار است بنابراین همگرا است.

$$b_n\longrightarrow b.$$

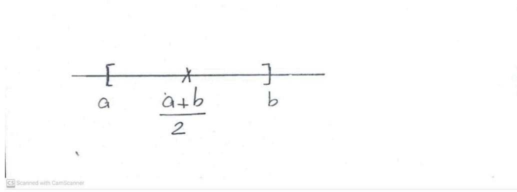
نشان می‌دهیم که $a\in\bigcap_{i\in I}[a_i,b_i]$. عنصر $b_j$ را در نظر بگیرید. هر یک از $a_i$ ها از این $b_j$ کمتر است پس $\lim\limits_{i\to\infty}a_n\leq b_j$. (یادآوری. قبلا ثابت کردیم هر دنباله که جملات آن منفی هستند، حد کمتر مساوی صفر دارد. کافی است دنبالهٔ $(a_i-b_j)_i$ را در نظر بگیرید.) حال عنصر $a_j$ را در نظر بگیرید، از جایی به بعد، $a_i$ ها از $a_j$ بیشتر هستند پس $\lim\limits_{i\to\infty}a_n\geq a_j$. تا به اینجا نشان دادیم حد دنبالهٔ $(a_n)$ از تمام $a_i$ ها بزرگتر یا مساوی و از تمام $b_i$ ها کوچکتر یا مساوی است. بنابر این حد دنبالهٔ $(a_n)$ در $\bigcap_{i\in I}[a_i,b_i]$ است. $\square$

**قضیه ۳.۶.۲.** فضای متریک $(\mathbb{R},d_1)$ را در نظر بگیرید. (منظور از $d_1$ متر قدر مطلق است.) $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ فشرده است.

*اثبات شمارهٔ دو.* فرض کنید $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک پوشش باز برای $[a,b]$ باشد. باید نشان دهیم که $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ دارای یک زیر پوشش متناهی است.

فرض کنید پوشش مورد نظر هیچ زیر پوشش متناهی نداشته باشد. بازهٔ $[a,b]$ را نصف کنید. از بین دو بازهٔ $[a,\frac{a+b}{2}]$ و

$[\frac{a+b}{2}, b]$ حداقل یکی توسط تعداد متناهی $U_\alpha$ پوشش داده نمی‌شود (چون اگر هر دو، پوشش متناهی داشته باشند، کل بازه پوشش متناهی پیدا می‌کند).




پس به این صورت عمل کنید که

$$a_0 = a.$$

$$b_0 = b.$$

اگر $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ پوشش متناهی نداشت قرار دهید

$$a_1 = a_0.$$
$$b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

در غیر این صورت قرار دهید

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$
$$b_1 = b_0.$$

با ادامه دادن این روند بازه‌های تو در توی $[a_i, b_i]$ ساخته می‌شوند. بنا به لم قبل یک عنصر

$$x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} [a_i, b_i].$$

وجود دارد. از آن جا که $U_\alpha$ پوشش هستند، $x$ در یکی از آن‌هاست؛ یعنی $\alpha \in I$ وجود دارد به طوری که $x \in U_\alpha$. دقت کنید که $U_\alpha$ باز است، بنابر این یک همسایگی به صورت $(c,d)$ از $x$ داریم به طوری که $(c,d) \subseteq U_\alpha$. دقت کنید که در هر مرحله طول بازه‌ها نصف خواهد شد، یعنی در مرحلهٔ $n$ ام داریم:

$$|b_n - a_n| \leq \frac{1}{2} \cdot |a_{n-1} - b_{n-1}| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |a_{n-2} - b_{n-2}| \leq \ldots \leq \frac{1}{2^n} \cdot |a - b|.$$

بنابراین یک بازهٔ $[a_n, b_n]$ وجود دارد به طوری که

$$x \in [a_n, b_n] \subseteq (c,d) \subseteq U_\alpha.$$

و این در تناقض با نحوهٔ ساخت بازه های $[a_n, b_n]$ است؛ زیرا قرار بود هیچ یک از $[a_n, b_n]$ ها توسط متناهی $U_\alpha$ پوشیده نشود. □

لم بالا، کمک می‌کند که زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbb{R}$ را شناسایی کنیم:

**نتیجه ۴.۶.۲.** هر زیرمجموعهٔ بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ (همراه با متر اقلیدسی)، فشرده است.

*اثبات.* فرض کنید $K \subseteq \mathbb{R}$ یک مجموعهٔ بسته و کراندار باشد. بنا به کرانداری، نقاط $a$ و $b$ وجود دارند به طوری که

$$K \subseteq (-M, M) \subseteq [a, b].$$

بنا به قضیهٔ قبل $[a, b]$ فشرده است. پس $K$ یک زیرمجموعهٔ بسته از یک مجموعهٔ فشرده است؛ از این رو $K$ فشرده است. $\square$

## ۷.۲ زیرمجموعه‌های فشردهٔ $\mathbb{R}^n$

در این بخش، می‌خواهیم لمها و قضایای بخش قبلی را برای $\mathbb{R}^n$ ها بیان و اثبات کنیم. منظور از یک مربع در $\mathbb{R}^2$ یک مجموعه به شکل $[a, b] \times [c, d]$ است.

**لم ۱.۷.۲.** خانواده‌ای از مربع های تو در تو را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$B_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i] \supseteq B_{i+1} = [a_{i+1}, b_{i+1}] \times [c_{i+1}, d_{i+1}] \supseteq \dots.$$

در این صورت

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i \neq \emptyset.$$

*اثبات.* دقت کنید که چون $B_i \supseteq B_{i+1}$ داریم

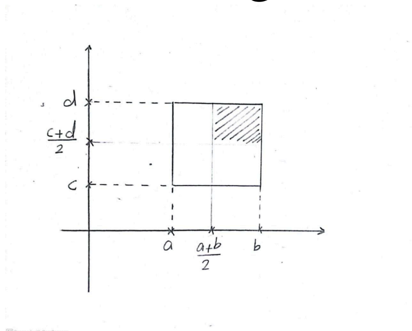
$$[a_i, b_i] \supseteq [a_{i+1}, b_{i+1}].$$

$$[c_i, d_i] \supseteq [c_{i+1}, d_{i+1}].$$

بنا به ۲.۶.۲ عناصر $x, y$ به گونه‌ای پیدا می‌شوند که $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} [a_i, b_i]$ و $y \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} [c_i, d_i]$. بنابراین $(x, y) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i$. $\square$

**قضیه ۲.۷.۲.** فضای متریک $(\mathbb{R}^2, d_2)$ را در نظر بگیرید. هر مربعِ $B = [a, b] \times [c, d]$ دراین فضا فشرده است.

*اثبات.* فرض کنید $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک پوشش باز برای $B$ باشد. می‌خواهیم نشان یک زیر کلاس متناهی از $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ وجود دارد که $B$ را می‌پوشاند.
فرض کنید هیچ تعداد متناهی از $U_\alpha$ ها نتوانند $B$ را پوشش دهند. مربع $B$ را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنید:



حداقل یکی از این چهار مربع هست که توسط متناهی از این $U_\alpha$ ها پوشیده نمی‌شود. نام آن را $B_2$ بگذارید و همین بحث را در مورد $B_2$ بکنید. این روند را ادامه دهید. به یک دنبالهٔ تو در تو از مربع ها می‌رسیم.

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots.$$

بنا به لم قبل ۱.۷.۲ یک نقطهٔ $(a,b)$ هست که در اشتراک تمامی این مربع‌ها قرار می‌گیرد:

$$(a,b) \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i.$$

یک $\alpha \in I$ وجود دارد به طوری که $(a,b) \in U_\alpha$. مجموعهٔ $U_\alpha$ باز است، بنابراین یک گوی باز حول $(a,b)$ هست که زیرمجموعهٔ $U_\alpha$ است. یکی از این مربع های ساخته شدهٔ $B_i$ زیر این گوی باز قرار خواهند گرفت (یعنی توسط این گوی به تنهایی پوشش داده می‌شود) و این تناقض است. □

**توجه ۳.۷.۲.** بحث بالا را می‌توان در مورد هر $\mathbb{R}^n$ به صورت مشابه پیاده کرد؛ یعنی می‌توان نشان داد که مربع‌های $n$ بعدی فشرده هستند.

**توجه ۴.۷.۲.** فضای متریک $(\mathbb{R}^2, d_2)$ را در نظر بگیرید. مجموعهٔ $X \subseteq \mathbb{R}^2$ را کراندار می‌گوییم، هرگاه یک گوی $B_r(0)$ وجود داشته باشد به طوری که $X \subseteq B_r(0)$.

**قضیه ۵.۷.۲** (هاینه ـ بورل)**.** اگر $K \subseteq \mathbb{R}^2$ (همراه با متر اقلیدسی) بسته و کراندار باشد، فشرده است.

*اثبات.* فرض کنید $K \subseteq \mathbb{R}^2$ یک مجموعهٔ بسته و کراندار باشد، در این صورت یک مربع $B$ وجود دارد به طوری که

$$K \subseteq B_r(0) \subseteq B.$$

بنا به قضیه قبل، هر مربع $B$ فشرده است و $K$ زیرمجموعهٔ بستهٔ یک زیرمجموعهٔ فشرده است، بنابراین $K$ فشرده است. □

در بخش‌های قبلی نشان دادیم که در فضای متریک $(\mathbb{R}^k, d_k)$ هر زیرمجموعهٔ بسته و کراندار، فشرده است. عکس این گفته هم درست است. یعنی زیرمجموعه‌های فشرده در این فضاها، دقیقا همان زیرمجموعه‌های بسته و کران‌دار هستند.

**قضیه ۶.۷.۲.** در فضای متریک $(\mathbb{R}^k, d_k)$ هر زیرمجموعهٔ فشرده، بسته و کراندار است.

*اثبات.* فرض کنید $C \subseteq \mathbb{R}^k$ فشرده باشد. قبلا نشان داده‌ایم که مجموعه‌های فشرده، بسته هستند. حال نشان می‌دهیم $C$ کراندار نیز هست.

حول هر نقطه در $C$، یک گوی باز در نظر بگیرید. واضح است که این گوی ها $C$ را می‌پوشانند. $C$ فشرده است پس تعداد متناهی از گوی‌ها آن را می‌پوشانند. به راحتی می‌توان نشان داد که اجتماع این گوی‌ها زیر مجموعهٔ یک گوی بزرگ است. بنابراین $C$ کراندار است. (با توجه به اثبات دقت کنید که این ویژگی در هر فضای متریک دلخواه $(X,d)$ برقرار است.) □

دقت کنید که قضیهٔ هاینه ـ بورل می‌گوید که مجموعه‌های بسته و کران‌دار، در $\mathbb{R}^k$ فشرده هستند. اما این امر لزوماً برای هر فضای متریک دلخواه برقرار نیست. در تمرین‌های درس به این موضوع رسیدگی خواهیم کرد.

از آنجا که زیرمجموعه‌های کراندار در $\mathbb{R}^k$ می‌توانند توسط مجموعه‌های فشرده محاط شوند، قضیهٔ جذاب زیر را داریم:

**قضیه ۷.۷.۲** (ویراشتراس)**.** فضای متریک $(\mathbb{R}^k, d_k)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^k$ یک مجموعهٔ کراندار باشد. در این صورت هر دنبالهٔ نامتناهی در $X$ دارای یک زیردنبالهٔ همگرا در $\mathbb{R}^k$ است.

*اثبات.* اگر $X \subseteq \mathbb{R}^k$ یک مجموعهٔ کراندار باشد، $X$ زیرمجموعهٔ یک مربع (منظورمان یک مربع $k$ بعدی است) است. مربع‌ها فشرده هستند. بنابراین هر زیرمجموعهٔ نامتناهی آن دارای نقطهٔ حدی است. □

## ۸.۲ پیوستگی و مجموعه‌های باز

گفته بودیم که برای تعریف توابع پیوسته، داشتن درکی از «فاصله» ضروری است. اما حقیقت آن است که بدون داشتن فاصله، و فقط با داشتن مفهوم «مجموعهٔ باز» هم می‌توان پیوستگی را تعریف کرد. در واقع پیوستگی یک مفهوم «توپولوژیک» است و فضاهای متریک حالت خاصی از فضاهای توپولوژیک هستند. بیایید نخست چند تعریف ساده از مبانی ریاضی را یادآوری کنیم.

فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد، $A \subseteq X$ و $V \subseteq Y$. تعریف می‌کنیم

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}.$$

$$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\}.$$

دقت کنید که نمادِ $f^{-1}$ به شما چنین القا نکند که تابع $f$ وارون‌پذیر است.

همچنین تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه را به یاد آورید: فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد و $a \in X$. می‌گوییم $f$ در $a$ پیوسته است هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x$ اگر $x \in B_\delta(a)$ آنگاه $f(x) \in B_\epsilon(f(a))$. به بیان دیگر برای هر $\epsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a)).$$

**تعریف ۱.۸.۲.** می‌گوییم تابع $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته است، هرگاه در تمام نقاط $a \in X$ پیوسته باشد.

**قضیه ۲.۸.۲.** فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع پیوسته باشد (یعنی در تمام نقاط $a \in X$ پیوسته باشد). فرض کنید $V \subseteq Y$ باز باشد. در این صورت $f^{-1}(V) \subseteq X$ یک مجموعهٔ باز است.

*اثبات.* مجموعهٔ

$$f^{-1}(V) = \{x \in X | f(x) \in V\}.$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید $a$ یک نقطهٔ دلخواه در $f^{-1}(V)$ باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که این نقطه، درونی است. بنا به تعریف، $f(a) \in V$. بنا به باز بودن مجموعهٔ $V$، یک همسایگی $B_\epsilon(f(a)) \subseteq V$ موجود است. بنا به پیوستگی تابع، یک همسایگی $B_\delta(a)$ داریم به طوری که

$$f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a)) \subseteq V.$$

اما عبارت بالا، بدین معنی است که $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(V)$. بنابراین $a$ یک نقطهٔ درونی در $f^{-1}(V)$ است. □

عکس قضیهٔ بالا هم برقرار است:

**قضیه ۳.۸.۲.** فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد، به طوری که برای هر زیرمجموعهٔ باز $V \subseteq Y$ داشته باشیم مجموعهٔ $f^{-1}(V) \subseteq X$ باز است. آنگاه $f$ پیوسته است.

*اثبات.* فرض کنید $a \in X$ یک نقطهٔ دلخواه باشد. می‌خواهیم نشان دهیم $f$ در نقطهٔ $a$ پیوسته است.
همسایگی $B_\epsilon(f(a))$ را در نظر بگیرید. بنا به فرض $f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$ باز است. $a$ یکی از نقاط $f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$ است. پس $a$ یک نقطهٔ درونی است، یعنی یک همسایگی $B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$ وجود دارد. یعنی:

$$f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a)).$$

پس $f$ در $a$ پیوسته است. □

**نتیجه ۴.۸.۲.** تابع $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعهٔ باز $V \subseteq Y$، مجموعهٔ $f^{-1}(V) \subseteq X$ باز باشد.

**تمرین ۳۱.** نشان دهید مشابه نتیجه بالا برای مجموعه‌های بسته هم برقرار است. (البته بعداً در همین درس این گفته را اثبات خواهیم کرد.)

## ۹.۲ پیوستگی و فشردگی ـ قضیهٔ مقادیر نهایی

در قضیهٔ ۲.۸.۱ در صفحهٔ ۲۱ گفتیم که یک تابع پیوسته $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ به ماکزیمم و مینی‌موم خود می‌رسد. قضیهٔ زیر تعمیم این گفته برای فضاهای متریک دلخواه است. [۳]

**قضیه ۱.۹.۲.** فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع پیوسته باشد و مجموعهٔ $K \subseteq X$ فشرده باشد. دراین صورت $f(K)$ فشرده است.

پیش از شروع اثبات، دقت کنید که فشردگی $K$ در فضای متریک $X$ است و فشردگی $f(K)$ در فضای متریک $Y$.

*اثبات.* فرض کنید $K \subseteq X$ یک مجموعهٔ فشرده است. می‌خواهیم نشان دهیم $f(K)$ فشرده است. فرض کنید $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک پوشش باز برای $f(K)$ باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که این پوشش، دارای یک زیرپوشش متناهی است.
نخست دقت کنید که $\{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ یک پوشش باز برای $K$ است. زیرا اولاً از پیوستگی تابع می‌دانیم هر یک از $f^{-1}(U_\alpha)$ ها باز است. حال فرض کنید $x \in K$. باید نشان دهیم $x$ در یکی از $f^{-1}(U_\alpha)$ ها است. برای این منظور باید $f(x)$ در یکی از $U_\alpha$ ها باشد و این امر واضح است زیرا $f(x) \in f(K)$.
از فشردگی $K$ نتیجه می‌شود که اندیس‌های $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ وجود دارند به طوری که

$$K \subseteq f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup f^{-1}(U_{\alpha_2}) \cup ... \cup f^{-1}(U_{\alpha_n}).$$

یعنی برای هر عنصر $x \in K$ داریم $f(x) \in U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup ... \cup U_{\alpha_n}$ یعنی $U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup ... \cup U_{\alpha_n}$ پوششی متناهی برای $f(K)$ است. □

[۳] علت این که گفته‌ام این قضیه، تعمیم آن قضیه است را در فصل بعدی خواهیم دید.

## ۱۰.۲ پیوستگی یکنواخت

یکی از موهبتهای توابع پیوسته روی فضاهای فشرده، **پیوستگی یکنواخت** آنهاست. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ در تمام نقاط یک مجموعهٔ $K \subseteq X$ پیوسته باشد؛ یعنی داشته باشیم:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall x \in K \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \quad \Big(d(x,y) < \delta \longrightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon).$$

اگر $K$ فشرده باشد، خواهیم داشت:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in K \quad \forall y \quad \Big(d(x,y) < \delta \longrightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon\Big).$$

(به جابه‌جایی سورها دقت شود). یعنی برای هر $\epsilon$ می‌توانیم یک $\delta$ پیدا کنیم که همزمان برای همهٔ $x$ ها کار کند.

**قضیه ۱.۱۰.۲.** تابع $f : X \longrightarrow Y$ را در نظر بگیرید. فرض کنید مجموعهٔ $K \subseteq X$ فشرده و $f$ در تمام نقاط $x \in K$ پیوسته است. در این صورت برای هر $\epsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall x \in K \quad \forall y \quad (d(x,y) < \delta \longrightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon).$$

اصطلاحاً می‌گوییم تابع $f$ در $K$ پیوستهٔ یکنواخت است.

پیش از شروع اثبات قضیه، توجه کنید که قضیهٔ پیوستگی یکنواخت توابع پیوسته روی مجموعه‌های فشرده را در درس آنالیز ریاضی ۲، برای اثبات انتگرال‌پذیری توابع پیوسته نیاز خواهید داشت.

*اثبات.* فرض کنید تابع $f$ در تمام نقاط $x \in K$ پیوسته است. $\epsilon > 0$ داده شده است. برای هر $x \in K$ یک همسایگی به شعاع $\delta_x$ وجود دارد به طوری که

$$d(x,y) < \delta_x \longrightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

دقت کنید که گوی‌های $B_{\frac{1}{2}\delta_x}(x)$ مجموعهٔ $K$ را پوشش می‌دهند. چون $K$ فشرده است تعداد متناهی از این گوی‌ها، $K$ را پوشش می‌دهند؛ یعنی اندیس‌های $\frac{1}{2}\delta_{x_1} \frac{1}{2}\delta_{x_2}, \dots, \frac{1}{2}\delta_{x_n}$ وجود دارند به طوری که

$$K \subseteq B_{\frac{1}{2}\delta_{x_1}}(x_1) \cup B_{\frac{1}{2}\delta_{x_2}}(x_2) \cup \dots \cup B_{\frac{1}{2}\delta_{x_n}}(x_n).$$

قرار دهید $\delta = \min\{\frac{1}{2}\delta_{x_1}, \frac{1}{2}\delta_{x_2}, \dots, \frac{1}{2}\delta_{x_n}\}$.

فرض کنید $x, y \in K$ دو نقطه باشند که $d(x,y) < \delta$. نقطهٔ $x$ در یکی از این گوی‌ها است. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $x \in B_{\frac{1}{2}\delta_{x_1}}(x_1)$؛ یعنی $d(x, x_1) < \frac{1}{2}\delta_{x_1}$. همچنین دقت کنید که

$$d(y, x_1) \le d(x, x_1) + d(x,y) < \frac{1}{2}\delta_{x_1} + \delta < \frac{1}{2}\delta_{x_1} + \frac{1}{2}\delta_{x_1} = \delta_{x_1}.$$

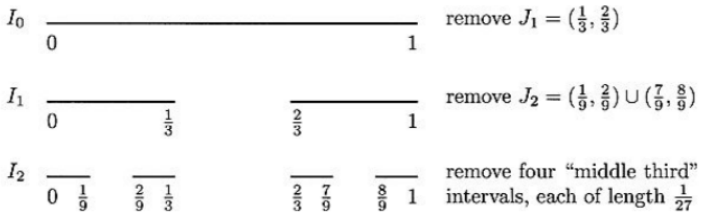
حال داریم

$$d(f(y), f(x)) < d(f(y), f(x_1)) + d(f(x_1), f(x)) < \epsilon + \epsilon \le 2\epsilon.$$

پس برای هر $\epsilon$ یک $\delta$ وجود دارد که وقتی $d(x,y) < \delta$ داریم $d(f(x), f(y)) < 2\epsilon$. حال برای هر $\epsilon$ اگر $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ را در نظر بگیریم، یک $\delta$ پیدا می‌شود که وقتی $d(x,y) < \delta$ داریم $d(f(x), f(y)) < 2\epsilon' = \epsilon$. □

## ۱۱.۲ مجموعهٔ کانتور

**تعریف ۱.۱۱.۲.** بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ را در نظر بگیرید. یک سومِ بازِ میانی آن را بردارید. همین کار را با بازه‌های به دست آمده انجام دهید و بدین طریق ادامه دهید:




یعنی داریم

$$I_0 = [1, 0]$$
$$I_1 = [1, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$
$$I_2 = [1, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

مجموعهٔ

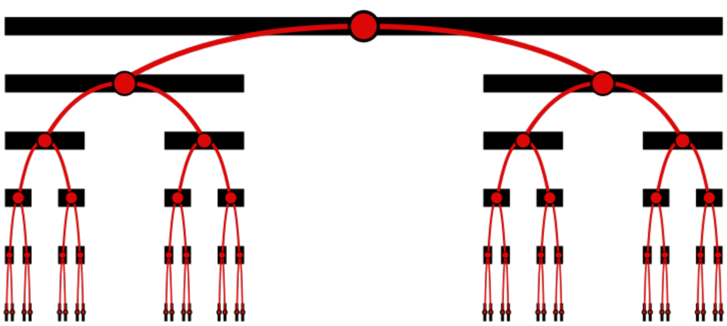
$$I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

را **مجموعهٔ کانتور** می‌نامیم.

مجموعهٔ کانتور ویژگی‌های جذابی دارد که آن را تبدیل به یک «مثال نقض» مطلوب آنالیزی کرده است.

- مجموعهٔ کانتور بسته است، چون اشتراک $I_n$ ها است و هر $I_n$ بسته است. هر $I_n$ اجتماع متناهی مجموعهٔ بسته است و به این علت بسته است.
- مجموعهٔ کانتور فشرده است؛ چون بسته و کراندار است.
- مجموعهٔ کانتور ناشماراست.

قبلا نشان داده بودیم اشتراک بازه‌های بستهٔ تو در تو ناتهی است. در این اثبات، اصل کمال نقش کلیدی بازی می‌کرد. حال دقت کنید هر عضو از مجموعهٔ کانتور در اشتراک یک **مسیر** از بازه‌های تو در تو قرار دارد. پس هر عضو در این مجموعه یک مسیر در درخت زیر را مشخص می‌کند.



در مبانی ریاضیات نشان دادیم، تعداد مسیرهای این درخت $2^{\aleph_0}$ و بنابراین ناشمارا است.

دقت کنید که ناشمارا بودن مجموعهٔ کانتور، با توجه به مقدار زیادی که از بازهٔ $[0,1]$ برای ساخت آن برداشته می‌شود، کمی عجیب است. در آنالیزهای بالاتر خواهید دید که مجموعهٔ کانتور نمونه‌ای از یک **مجموعهٔ ناشمارای با اندازهٔ صفر** است. البته منظور از این اندازه، کاردینالیتی مجموعه نیست. انتگرال‌گیری از توابع روی مجموعهٔ کانتور هم موضوع جالبی است.

- مجموعهٔ کانتور شامل هیچ بازه‌ای نیست (درون $I$ تهی است)

فرض کنید بازهٔ $(a,b)$ بخواهد در $I$ باشد. در این صورت برای یک $n$ به اندازه کافی بزرگ، یکی از تکه های $I_n$ زیرمجموعهٔ $(a,b)$ است. در مرحلهٔ بعد یک سوم میانی این تکه برداشته خواهد شد و بنابراین بازهٔ $(a,b)$ نمی‌تواند زیر مجموعهٔ $I$ باشد.

دوباره این که مجموعه ناشمارا نقطه داشته باشد اما هیچ‌کدام درونی نباشد جالب است. مجموعه‌های $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}^c$ نیز همین خصلت را دارند.

- همهٔ نقاط $I$ حدی هستند. هر مجموعهٔ بسته شامل نقاط حدی خود است، اما این که هر نقطهٔ یک مجموعه، حدی باشد، مطلب مهم دیگری است.

به عنوان روش اول اثبات دقت کنید که هر نقطه در مجموعهٔ کانتور حد یک دنباله است. این دنباله، از نقاط ابتدایی بازه‌هایی ساخته شده است که در هر مرحله در مجموعهٔ کانتور باقی مانند و نقطه مورد نظر ما در اشتراک آنهاست.
روش دوم. فرض کنید $x$ یک نقطهٔ دلخواه در $I$ باشد. باید نشان دهیم هر همسایگی دلخواه از $x$ با $I$ اشتراکی غیر از $x$ دارد. همسایگی $(c,d)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $n$ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد. یکی از تکه‌های $I_n$ زیر مجموعهٔ $(c,d)$ می‌شود. عنصر ابتدای این تکه در $(c,d)$ است.

**توجه ۲.۱۱.۲.** مجموعهٔ کانتور دقیقاً از عناصری در بازهٔ $(0,1)$ تشکیل شده است که در مبنای 3 فقط ارقام 0 و 2 دارند. در صورت علاقه‌مندی این گفته را اثبات کنید یا اثبات آن را پیدا کنید!

# فصل ۳

# تمرین با راهنمایی

## ۱.۳ سری اول

**تمرین ۳۲.** فرض کنید $(X,d)$ یک فضای متریک باشد. نشان دهید که

- هر گوی باز، یک مجموعهٔ باز است.
- نشان دهید که هر مجموعهٔ باز اجتماعی از گوی‌های باز است.

راهنمایی: یک مجموعهٔ باز مثل $O \subseteq X$ را در نظر بگیرید. برای هر عنصر دلخواه $x \in O$ یک گوی باز $B_x \subseteq O$ وجود دارد. نشان دهید

$$O = \bigcup_{x\in O} B_x.$$

(پس از اثبات این تمرین می‌توانیم بگوییم یک مجموعه، باز است اگر و تنها اگر اجتماعی از گوی‌های باز باشد.)

**تعریف ۱.۱.۳.** فرض کنید $(X,d)$ یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$. نقطهٔ $x \in A$ را یک نقطهٔ درونی برای $A$ می‌نامیم، هرگاه یک گوی باز حول $x$ مانند $B_r(x)$ موجود باشد به طوری که

$$B_r(x) \subseteq A.$$

مجموعهٔ نقاط درونی $A$ را با $A^\circ$ نشان می‌دهیم.
بنا به این تعریف، یک مجموعه، باز است هرگاه تمام نقاط آن درونی باشند.

از اینجا به بعد فرض کنید در فضای متریک $(X,d)$ قرار گرفته‌ایم.

**تمرین ۳۳.** مجموعهٔ $E \subseteq X$ دلخواه است. نشان دهید $E^\circ$ باز است.
راهنمایی: عنصر $x \in E^\circ$ را در نظر بگیرید، باید نشان بدهیم یک گوی باز حول $x$ وجود دارد که زیرمجموعهٔ $E^\circ$ است. از آنجا که $x$ در نقاط درونی $E$ قرار دارد، پس یک گوی باز حول $x$ هست به طوری که $B_x \subseteq E$. ادعا می‌کنیم همین گوی زیر مجموعهٔ $E^\circ$ نیز هست. باید نشان دهیم هر نقطه‌ای در این همسایگی $B_x$ درونی است. باقی کار را شما انجام دهید.

**تمرین ۳۴.** مجموعهٔ $E \subseteq X$ باز است اگر و تنها اگر $E^\circ = E$.

**تمرین ۳۵.** مجموعهٔ $E \subseteq X$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که $E^\circ$ بزرگ‌ترین زیرمجموعهٔ بازِ زیرمجموعهٔ $E$ است.

راهنمایی: فرض کنید مجموعهٔ $O \subseteq E$ باز باشد. نشان دهید $O \subseteq E^\circ$. برای این منظور دقت کنید که هر نقطه در $O$ یک نقطهٔ درونی است. پس در $E^\circ$ است.

**تمرین ۳۶.** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد $E \subseteq X$. در این صورت

•
$$\bar{E} = \bigcap_{E \subseteq C}^{\text{بسته}\,C} C$$

•
$$E^\circ = \bigcup_{O \subseteq E}^{\text{باز}\,O} O$$

راهنمایی. مورد اول را قبلاً اثبات کرده‌ایم. برای دومی، دقت کنید که $E^\circ$ بزرگترین باز زیرمجموعه $E$ است، پس شامل همهٔ بازهای زیرمجموعهٔ $E$ است؛ یعنی $\bigcup O \subseteq E^\circ$. از طرفی خودِ $E^\circ$ یکی از $O$ هاست پس $E^\circ \subseteq \bigcup O$.

**توجه ۲.۱.۳.** باز نبودن مجموعهٔ $E$ به چه معنا است؟ یعنی نقطه‌ای مانند $x \in E$ وجود دارد به طوری که درونی نیست، یعنی هر گوی حول $x$ با $E^c$ اشتراک دارد. به عبارت دیگر $x$ یک نقطهٔ حدی برای $E^c$ است.

**تمرین ۳۷.** مجموعهٔ $E \subseteq X$ را در نظر بگیرید. نشان دهید $E'$، یعنی مجموعهٔ نقاط حدی $E$، بسته است.
راهنمایی: باید نشان دهیم متمم $E'$ باز است. فرض کنید $x \notin E'$ ، باید نشان دهیم یک همسایگی حول $x$ وجود دارد که با $E'$ اشتراک ندارد.
$x$ نقطهٔ حدی $E$ نیست، یعنی یک همسایگی از $x$ مثل $B_r(x)$ وجود دارد که با $E$ اشتراک ندارد. ادعا می‌کنیم همین همسایگی با $E'$ هم اشتراکی ندارد.
فرض کنید در گوی $B_r(x)$ یک نقطهٔ حدی، مثلا به نام $y$ قرار بگیرد. گفتیم این گوی با $E$ اشتراک ندارد. اما از طرفی $y$ یک نقطهٔ حدی است و این گوی شامل آن است. پس این گوی باید با $E$ اشتراک داشته باشد؛ و این تناقض است.

## ۲.۳ سری دوم

**تعریف ۱.۲.۳.** فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$. نقطهٔ $x$ را یک نقطهٔ مرزی برای $E$ می‌نامیم هرگاه هر همسایگی از $x$ هم با $E$ و هم با $E^c$ اشتراک داشته باشد. این اشتراک می‌تواند خودِ نقطه باشد. مجموعهٔ نقاط مرزی مجموعهٔ $E$ را با $\partial E$ نمایش می‌دهیم. دقت کنید که امکان دارد که نقطهٔ مرزی $E$ جزو خود نقاط $E$ نباشد.

یادآوری می‌کنیم که نقطهٔ $x$ را یک نقطهٔ حدی برای $E$ می‌نامیم هرگاه هر همسایگی اش در نقطه‌ای غیر از خودش با $E$ اشتراک داشته باشد.

در تمام تمارین، فرض کنید $(X, d)$ فضای متریک و $E \subseteq X$ باشد.

**سوال.** آیا هر نقطهٔ مرزی، حدی است؟

اگر $x$ نقطه‌ای مرزی باشد که حدی نیست، یک همسایگی از $x$ هست که با $E$ فقط در خود $x$ اشتراک دارد (به چنین نقطه‌ای یک نقطهٔ ایزوله گفته می‌شود). به طور خاص داریم $x \in E$.

**سوال.** آیا هر نقطهٔ حدی، مرزی است؟

اگر $x$ یک نقطه‌ی حدی باشد که مرزی نیست، در این صورت هر همسایگی آن $E$ را در نقطه‌ای به جز خودش قطع می‌کند اما یک همسایگی دارد که هیچ اشتراکی با $E^c$ ندارد؛ یعنی کاملاً در $E$ است، بنابراین $x$ نقطه‌ای درونی است.

**تمرین ۳۸.** نشان دهید

$$E' - \partial E \subseteq E^\circ.$$

**تمرین ۳۹.** نشان دهید

$$\bar{E} = E \cup \partial E.$$

راهنمایی: کافی است نشان دهیم $E \cup \partial E = E \cup E'$.

**تمرین ۴۰.** نشان دهید

$$\partial E = \bar{E} - E^\circ.$$

راهنمایی: کافی است نشان دهید $\partial E = (E \cup E') - E^\circ$. فرض کنید $x$ مرزی باشد، واضح است که این نقطه درونی نیست. حال اگر $x$ در $E$ نباشد، آنگاه در $E'$ است.(زیرا هر همسایگی آن $E$ را در نقطه‌ای بجز خودش قطع می‌کند).

**تمرین ۴۱.** نشان دهید $\partial E$ (نقاط مرزی $E$) بسته است.

**تمرین ۴۲.** فضای متریک $(\mathbb{R}, d_1)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید

$$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset.$$

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

**تمرین ۴۳.** نشان دهید رابطهٔ

$$(\bar{E})^\circ = E^\circ$$

لزوما برقرار نیست.

راهنمایی: مجموعهٔ $A = (0,1) \cap \mathbb{Q}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید

$$\bar{A} = [0,1].$$

$$(\bar{A})^\circ = (0,1).$$

$$A^\circ = \emptyset.$$

## ۳.۳ سری سوم

در تمامی تمارین زیر فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$. یادآوری می‌کنیم که نقطهٔ $x$ را (برای مجموعهٔ $E$) مرزی می‌نامیم، هرگاه هر همسایگی آن هم $E$ و هم $E^c$ را قطع کند.

**سوال.** چه زمانی نقطهٔ $x$ یک نقطهٔ مرزی برای $E$ **نیست؟**
زمانی که یک همسایگی $B_r(x)$ وجود داشته باشد به طوری که (یا $E$ را قطع نکند یا $E^c$ را قطع نکند). از نظر مبانی ریاضیات این بیان از جنس جملهٔ زیر است:

$$\exists x \ \ (p(x) \vee q(x)).$$

اما جملهٔ منطقی بالا معادل با جملهٔ زیر است:

$$(\exists x \ p(x)) \ \vee \ (\exists x \ q(x)).$$

بنابراین $x$ زمانی یک نقطهٔ مرزی برای $E$ نیست که یا یک همسایگی از $x$ داشته باشیم که $E$ را قطع نمی‌کند یا یک همسایگی از $x$ داشته باشیم که $E^c$ را قطع نمی‌کند. یعنی یا یک همسایگی از $x$ داریم که زیرمجموعهٔ $E$ است، یا یک همسایگی از $x$ داریم که زیرمجموعهٔ $E^c$ است.

**تمرین ۴۴.** نشان دهید

$$X = E^\circ \cup \partial E \cup (E^c)^\circ.$$

**تمرین ۴۵.** نشان دهید $\partial E$ بسته است.
(راهنمایی: با توجه به تمرین قبل، کافی است به راحتی نشان دهید که متمم آن باز است.)

**تمرین ۴۶.** نشان دهید

$$\bar{E} = E^\circ \cup \partial E.$$

(راهنمایی: $\bar{E}$ کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل $E$ است.)

**تمرین ۴۷.** نشان دهید

$$\partial E = \bar{E} - E^\circ.$$

**سوال.** آیا

$$E^\circ = (\bar{E})^\circ$$

است؟
خیر، فضای متریک $(\mathbb{R}, d_1)$ را در نظر بگیرید، مجموعهٔ نقاط گویای بازهٔ $(0,1)$ را در نظر بگیرید؛ یعنی قرار دهید:

$$A = (0,1) \cap \mathbb{Q}.$$

این مجموعه شامل هیچ بازه‌ای نیست، پس نقطهٔ درونی ندارد. (زیرا هر بازه شامل نقاطی است که گویا نیستند.) پس:

$$A^\circ = \emptyset.$$

از طرفی $\bar{A} = [0,1]$ و $(\bar{A})^\circ = (0,1)$. پس $\bar{A} \neq (\bar{A})^\circ$.

**سوال.** آیا این گونه است که: $\partial E = \partial \bar{E}$

(راهنمایی: در مثال قبل، $\partial A = [0,1]$ و $\partial \bar{A} = \{0,1\}$ به وضوح $\partial A \neq \partial \bar{A}$.)

**تمرین ۴۸.** آیا این گونه است که

$$\partial E = \partial E^{\circ}$$

**تمرین ۴۹.** فرض کنید $X$ یک مجموعهٔ نامتناهی باشد. تعریف کنید

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

- نشان دهید $d$ یک متر روی $X$ است.
- گوی های باز، مجموعه‌های باز، بسته و فشرده را شناسایی کنید.
- همگرایی یک دنباله در این فضا را $(x_n \longrightarrow x)$ توصیف کنید.

راهنمایی: یک گوی باز حول نقطه دلخواه $x$ و شعاع دلخواه $r$ در نظر بگیرید. اگر $r \leq 1$ داریم

$$B_r(x) = \{y | d(y,x) < r\} = \{x\}.$$

و اگر $r > 1$ داریم:

$$B_r(x) = \{y | d(y,x) < r\} = X.$$

همچنین گفتیم یک مجموعه باز است اگر و تنها اگر اجتماعی از گوی‌های باز باشد، پس هر زیرمجموعهٔ دلخواه از $X$ باز است. زیرا می‌توان آن را به صورت اجتماع مجموعه‌های تک عضوی نوشت.

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}.$$

همچنین هر زیرمجموعهٔ $X$ بسته است زیرا متمم آن باز است.

مجموعه‌های متناهی در $X$ فشرده هستند و مجموعه‌های نامتناهی فشرده نیستند (ثابت کنید).