نظریهٔ مجموعه‌ها

محسن خانی

افشین زارعی

۱۸ خرداد ۱۴۰۰

فهرست مطالب

پیش‌گفتار نویسندهٔ اول

در ترمهای گذشته، یعنی سالهای اول استخدامم در دانشگاه صنعتی اصفهان، برای هر درسی که ارائه می‌دادم یادداشتی تایپ‌شده تهیه می‌کردم. در تهیهٔ این یادداشتها عموما همسرم مرا یاری می‌کرد و بدون کمک ایشان تهیهٔ هیچکدام ممکن نبود.

همیشه اصرار داشته‌ام این یادداشتها، به صورت یادداشت و جزوه باقی بماند و از تبدیل یادداشتها به کتاب، که به دلایل مختلف، سبکی معمول در کشور ماست خودداری کرده‌ام. بزرگان ریاضی در زمینه‌های مختلف یادداشتهائی دارند و آنها را به رایگان در وبسایشان قرار داده‌اند و بسیاری از این یادداشتها از کتابهای معروف نیز سودمندترند. اقرار می‌کنم که چیزهائی را با خواندن کتابهای رایگان و حتی دانلودهای غیرقانونی یادگرفته‌ام، هیچگاه با کتابهائی که برای خریدشان پول داده‌ام یاد نگرفته‌ام. [۱]

در فرهنگ استاندارد ریاضی، کتابها توسط بزرگانی نوشته می‌شوند که نگاهی جامع بر گرایشهای مختلف ریاضی دارند. گاهی این کتابها نزدیک به هزار صفحه دارند و تا سالها مرجع مطالعه‌های دانشگاهی هستند. نیز اکثر آنها در سالهای میانی یا پایانی کارهای یک ریاضیدان نوشته شده‌اند. لزوماً چسباندن ترجمهٔ یک بخش از کتاب الف به کتاب ب ما را تبدیل به مولف نمی‌کند، هر چند در سیستمی این کار منجر به کسب امتیاز باشد.

علاوه بر دیدگاه بالا، در ترمهای گذشته، باز هم به کمک همسرم، به فیلم‌برداری برخی کلاسهای پرداختم و به این کار بسیار پر مشقت و پر زحمت علاقه‌مند شده بودم. از قضا، شیوع ویروس کرونا و پدیدار شدن عوالم جدید، منجر به ادامه‌ی این روش شد. در آن زمان، همسرم فداکارانه ساعتها به فیلم‌برداری و ویرایش فیلمهای کلاسهایم پرداخت. با این حال، بعدها متوجه شدم که یادداشتها از فیلمها بیشتر به کار می‌آیند و تصمیم گرفتم دوباره به شیوهٔ قبلی برگردم.

درس نظریهٔ مجموعه‌ها، در نیمسال دوم ۹۹ــ ۰۰ برای اولین بار تشکیل شده است. با وجود عدم هماهنگی کافی برای اعلام بموقع درس و عدم اطلاع‌رسانی مناسب این درس به حد نصاب رسید و این برای درسهای اینچنین فرصت غنیمتی است. از یک طرف بسیار علاقه‌مند به تشکیل این کلاس و گردآوری یادداشتهایم بودم و از یک طرف وقت کافی برای این کار نداشتم و همسرم نیز، که درگیر نگه‌داری پسرم، دانا، است فرصت حضور در کلاسم را ندارد. از افشین، درخواست کردم که به تایپ این یادداشتها، با سلیقه و روش خودش بپردازد و اگر به هر دلیل علاقه‌مند است، آنها را در نهایت برای خود (و من) تبدیل به کتاب کند. یادداشتهای پیش رو حاصل این همکاری است و از او بابت این همکاری سپاسگزارم.

درس را با اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها آغاز کرده‌ام، با مباحثی مانند قضیهٔ اردوش رادو بسط داده‌ام و با اثبات این که مدلی برای فرضیهٔ پیوستار تعمیم یافته وجود دارد به پایان برده‌ام. احتمالا در آینده فصلی دربارهٔ تکنیک فرسینگ نیز به این جزوه افزوده شود.

در این سالها، هیچ کتابی بهتر از کتاب منطق و هیچ کتابی بهتر از جزوه‌ی نظریهٔ مجموعه‌های مارتین زیگلر ندیده‌ام. هرگاه

[۱] زمان دانشجوئیم بوریس زیلبر به تازگی کتاب معروفش را درباره‌ی توپولوژی‌های زاریسکی نوشته بود. خودش در جلسه‌ای اعلام کرد که زودتر کتاب را از وبسایتم دانلود کنید، وگرنه بعداً باید پولش را بدهید.

سعی کردم از شیوه‌های نوشتار و تدریس او فاصل بگیرم، دوباره به همان سمت کشیده شدم و از عدول خود پشیمان گشتم! این جزوه نیز، حداقل در شالودهٔ اولیه، شباهت بسیار با جزوهٔ زیگلر دارد (که به زبانی آلمانی و در سایت خود او قابل رویت است). پیوند کلاسهای این درس در آپارات در زیر قرار داده شده است.

- پیوند به کلاسهای ضبط شده‌ام در درس نظریهٔ مجموعه‌ها:
  https://www.aparat.com/playlist/838861

فصل ۱

اصول‌موضوعهٔ نظریه‌ی مجموعه‌ها: BG و ZFC

تا به حال برایتان پیش آمده است که به کسی که فارسی نمی‌داند، با زبان فارسی صحبت کنید و به او زبان فارسی را آموزش دهید؟ احتمالاً کار دشواری باشد، ولی کودکان فارسی زبان، فارسی را از پدر و مادری می‌آموزند که فارسی صحبت می‌کنند. در آموزش زبان فارسی به کودک، نمی‌توان از همان ابتدا به رعایت دقیق ساختارهای دستوری توسط او اهتمام ورزید.

توضیح نظریه‌ی مجموعه‌ها در ریاضیات چنین وضعی دارد. همیشه باید میان تصورات «سهل‌انگارانه» و مفاهیم «فرمال» حرکت کرد و در نهایت صورت‌گرایی (فرمالیسم) نظریه‌ی مجموعه‌ها را آموزش داد.

اولین نیاز برای تعریف مجموعه، داشتن یک زبان مشترک میان ریاضی‌دانان برای سخن گفتن درباره‌ی آن است.

۱.۱ پیش‌نیازهای منطقی

برای بررسی هر نظریه‌ای در منطق، ابتدا نیاز است که زبان مورد نیاز برای بررسی نظریه را بیان کرد. برای مطالعه نظریه‌ی مجموعه‌ها، زبان ما فقط شامل یک رابطه‌ی دوموضعی $\in$ است. با استفاده از این زبان، باید ویژگی اشیائی که قرار است مجموعه نامیده شوند، بیان شود.

با استفاده از متغیرهای $x, y, z, \ldots$ و $a, b, c, \ldots$ و همچنین ادوات منطقی $\exists$، $\wedge$ و $\neg$ به ترتیبی که در تعریف زیر آمده است می‌توان جمله‌نویسی کرد. همچنین در جمله‌نویسی‌ها از نماد «$=$» هم می‌توان بهره جست. توجه داشته باشید، که بقیه‌ی ادوات منطقی شامل $\vee$، $\rightarrow$ و $\forall$، را می‌توان با استفاده از این ادوات بدست آورد. میان کلمات «فرمول» و «جمله» در منطق تفاوت وجود دارد ولی بررسی این تفاوت در این جا جزو نگرانی‌های ما نیست.

تعریف ۱. با استفاده از روش استقرایی، فرمول‌ها (یا جملات) به‌صورت زیر ساخته می‌شوند.

۱. ساده‌ترین فرمول‌ها، که به آنها فرمول‌های اتمی نیز گفته می‌شود، به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$z \in t,\ a \in b,\ x \in y, x = y, a = x, \cdots$$

به عبارتی دیگر، فرمول‌های اتمی حاصل استفاده کردن از رابطه‌های $\in$ و $=$ برای دو متغیر است.

۲. فرض کنید ϕ و ψ دو فرمول باشند، در این صورت $(\phi \wedge \psi)$ نیز فرمول است. به عنوان مثال با بکار بردن این قاعده و قاعده‌ی اول، فرمول $(x \in y \wedge z \in t \wedge a = x)$ قابل نوشتن است.

۳. فرض کنید ϕ یک فرمول باشد، در این صورت $(\neg\phi)$ نیز یک فرمول است. بنابراین با استفاده از این قاعده و قواعد قبل فرمول‌های $((x \in y \wedge z = t) \wedge (\neg(a \in b)))$ و $(\neg(x \in y \wedge z = t))$ را می‌توان ساخت.

۴. فرض کنید ϕ یک فرمول باشد، در این صورت $(\exists x\phi)$ نیز فرمول است. به عنوان مثال، با استفاده از این قاعده و قواعد قبل می‌توان فرمول $(\exists y(\exists x(x \in y \wedge \neg(y \in a)))$، را نوشت.

فرمول‌هایی که با استفاده از قواعد گفته شده، ساخته می‌شوند را *فرمول‌های مرتبه‌ی اول* در زبان $\mathcal{L} = \{\in\}$ می‌نامند. همچنین فرمول‌هایی که در آنها هیچ متغیر آزادی وجود نداشته باشد را جمله می‌نامیم. منظور از متغیر آزاد، متغیری است که در دامنه‌ی هیچ سوری نباشد.

بنابراین در سرتاسر این درس، زبان مکالمه‌ی ما مطابق با تعریف فوق است.

تذکر ۱. دقت کنید که با استفاده از این روش استقرایی ساخت فرمول‌ها، هیچ‌گاه نمی‌توان فرمولی، مثلاً به‌صورت $\forall x \in \mathbb{N}\ (x \in y)$ ساخت. مثلاً نمی‌توان نوشت:

$$\forall i \in \mathbb{N} \forall x_1, \ldots, x_i \quad \ldots$$

نمادگذاری ۲. برای راحتی کار، در بسیاری از کتاب‌ها و نوشته‌ها از نماد $\notin$ برای نقیض رابطه‌ی $\in$ استفاده می‌کنند و ما نیز از این نماد استفاده خواهیم کرد.

در ادامه هرگاه گفته‌ایم $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ یک ویژگی، یا یک فرمول است، منظورمان این است که ϕ با استفاده از قواعد بالا نوشته شده است و در آن $x_1, \ldots, x_n$ استفاده شده است. در واقع ϕ یک جمله، یا یک فرمول درباره‌ی $x_1, \ldots, x_n$ است.

وقتی می‌گوییم که یک جهان، مُدلی برای یک فرمول است، یعنی فرمول مورد نظر ما در آنجا برقرار است. هدف ما در ادامه‌ی درس، بیان یک سری فرمول، به عنوان اصول موضوعه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌هاست که قرار است در هر جهانی که می‌توان برای مجموعه‌ها تصور کرد، برقرار باشند.

اگر ϕ یک فرمول باشد، منظور از کوتاه‌نوشت، $\forall x \in A\ \phi$ این است که $\forall x(x \in A \rightarrow \phi)$. همچنین منظور از کوتاه‌نوشت، $\exists x \in A\ \phi$ این است که $\exists x(x \in a \wedge \phi)$. در ادامه‌ی درس گاهاً از این کوتاه‌نوشت‌ها استفاده می‌کنیم. همچنین در ادامه از کوتاه‌نوشت $\exists! x\phi$، برای بیان اینکه دقیقاً یک عنصر وجود دارد که دارای ویژگی ϕ است، استفاده می‌کنیم.

۲.۱ نظریه‌ی مجموعه‌ها

درک «ساده‌انگارانه» ما از «جهان مجموعه‌ها» این است که این جهان حاوی اشیائی به نام مجموعه است. هر مجموعه نیز از اشیائی تشکیل شده است که «ویژگی معینی» دارند. میان این اشیاء یک رابطه به نام رابطه‌ی تعلق وجود دارد:

تعریف ۳ (ساده‌انگارانه‌ی مجموعه)**.** گردایه‌ای از اشیاء مشخص است که به علت داشتن یک ویژگی یکسان گرد هم آمده‌اند.

در واقع آن گونه که از نظریه‌ی ساده‌انگارانه‌ی [1] مجموعه‌ها برمی‌آید، نظریه‌ی مجموعه‌ها تنها از اصول زیر پیروی می‌کند.

[1] naive

۱.۲.۱ اصول موضوعه‌ی نظریه‌ی ساده‌انگارانه‌ی مجموعه‌ها:

۱. *اصل گسترش* [۲]: این اصل بیان می‌کند دومجموعه‌ای که اعضای یکسانی دارند، با هم برابر هستند.

$$\forall x \forall y\, (\forall z\, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

۲. *اصل ادراک* [۳]: اشیایی که ویژگی مشخصی دارند، تشکیل یک مجموعه می‌دهند. به عبارتی دیگر برای هر عدد طبیعی n و عناصر $x_۱, \ldots, x_n$ که در جهان مجموعه‌ها قرار دارند، مجموعه‌ای وجود دارد که اعضایش ویژگی خاصی نسبت به این عناصر دارند. اگر این ویژگی خاص را ϕ بنامیم، آنگاه این اصل را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\forall x_۱, \cdots, x_n \exists y \forall x \big(x \in y \leftrightarrow \phi(x, x_۱, \cdots, x_n)\big).$$

به بیانی دیگر، فرض کنید $\phi(x, x_۱, \ldots, x_n)$ یک فرمول مرتبه‌ی اول در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها باشد (با استفاده از قواعد فرمول‌سازی، ساخته شده است). در این صورت اصل ادراک بیان می‌کند که مجموعه‌ای وجود دارد مثل y به‌طوری که $x \in y$ اگر و تنها اگر $\phi(x, x_۱, \ldots, x_n)$. به زبان آشناتر،

$$y = \{x | \phi(x, x_۱, \ldots, x_n)$$

یک مجموعه است.

به عنوان مثال فرض کنید ما می‌دانیم که عناصر $x_۱$ و $x_۲$ مجموعه (عناصری در جهان) هستند، در این صورت اگر ویژگی ϕ به‌صورت $(x \in x_۱) \wedge (x \in x_۲)$ باشد، بنا به اصل ادراک مجموعه‌ای وجود دارد که اعضای این مجموعه هم در مجموعه‌ی $x_۱$ قرار دارند و هم در مجموعه‌ی $x_۲$.

توجه داشته باشید که اصل ادراک یک اصل نیست، درواقع برای هر ویژگی ϕ یک اصل ادراک باید نوشته شود. یعنی به ازای هر ویژگی ϕ یک مجموعه‌ای وجود دارد که بنابه اصل گسترش، این مجموعه منحصر بفرد است.

اما این اصل‌بندی همان‌گونه که از نام آن برمی‌آید، دارای ایراد است. ویژگی $\phi(x) =: x \notin x$ را درنظر بگیرید. اصول بالا بیان می‌کنند که متناظر با این ویژگی، مجموعه‌ای وجود دارد. بنابراین $y = \{x | x \notin x\}$ یک مجموعه است. دقت کنید که $y \in y$ اگر و تنها اگر $y \notin y$. زیرا؛ اگر $y \in y$، در این صورت در ویژگی ϕ صدق می‌کند، یعنی $y \notin y$. همچنین اگر $y \notin y$، چون y مجموعه است و در ویژگی ϕ صدق می‌کند، پس $y \in y$.

به این پارادوکس، پارادوکس راسل [۴] می‌گویند و همان‌طور که مشاهده کردیم، از این اصول نتیجه می‌شود. بنابراین تعریف مجموعه یا ویژگی‌ها و یا اصول مجموعه‌ها را باید تغییر داد. نباید اصولی که برای مجموعه در نظر گرفته می‌شود، تناقضی را به اثبات برسانند.

در ریاضیات قرن بیستم، زدودن این مشکل از ریاضیات دستور کار می‌شود؛ اصول موضوعه‌های دقیق‌تری بیان می‌شود، که در آن اصول از رخ‌دادن پارادوکس راسل (یا هر پارادکس احتمالی دیگری!) جلوگیری شود. در ادامه اصول موضوعه برنیز– گودل [۵] را بیان خواهیم کرد.

[2] extensionality
[3] comprehension schema
[4] Russell's paradox
[5] Bernays-Gödel

در جهانی که در آن اصول موضوعه برنیز_ گودل بیان می‌شود، دو نوع از اشیا وجود دارند، نوع اول که آنها را با حروف بزرگ لاتین نمایش می‌دهیم که و آنها را **کلاسها** می‌نامیم و نوع دوم دیگر که آنها را با حروف کوچک لاتین نمایش می‌دهیم که همان **مجموعه‌ها** هستند. شهود این اصول در این است که کلاسها از مجموعه‌ها بزرگترند و مجموعه‌ها به نوعی کلاسهائی هستند که به اندازه‌ی کافی کوچک باشند.

بنابراین به عنوان مثال فرمول‌هایی که در اینجا قابل نوشتن هستند می‌توانند به‌صورت $a \in b$، $a \in A$، $A \in x$ و $A \in B$ باشند. علاوه بر این نمادهایی که در قبل آنها را معرفی کردیم، برای بیان این اصول موضوعه، نیازمند نماد رابطه‌ای یک‌موضعی Men[۶] نیز هستیم، که برای مشخص کردن مجموعه‌ها از آن استفاده می‌کنیم. برای مثال $\mathrm{Men}(X)$، به این معنی است که X یک مجموعه است. پس فرمول $\mathrm{Men}(X) \wedge (X \wedge Y)$ نیز قابل نوشتن است.

توجه داشته باشید که هر مجموعه، یک کلاس است ولی لزوماً هر کلاس، مجموعه نیست.

۳.۱ اصول موضوعه برنیز_ گودل

سه اصل اول نظریه‌ی مجموعه‌های برنیز_ گودل به‌صورت زیر است. [۷]

۱. عناصر متعلق به کلاس‌ها، مجموعه هستند، به این معنی که

$$\forall X \forall Y (X \in Y \rightarrow \mathrm{Men}(X)).$$

بنابراین در ادامه‌ی این درس، به راحتی اعضای کلاس‌ها را مجموعه در نظر می‌گیریم و برای نمایش اعضای کلاس‌ها از متغیرهای با حروف کوچک استفاده می‌کنیم.

۲. اصل گسترش: هر دو کلاس که از مجموعه‌های یکسانی تشکیل شده‌اند، با هم برابرند.

$$\forall X \forall Y (\forall z (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \rightarrow X = Y)$$

۳. اصل ادراک: برای هر ویژگی از *مجموعه‌ها* کلاسی وجود دارد که از مجموعه‌های دارای آن ویژگی تشکیل شده است. درواقع، تفاوت این اصل با اصل ادراک نظریه‌ی ساده‌انگارانه‌ی مجموعه‌ها، محدود کردن ویژگی است.

$$\forall X_۱, \cdots, X_n \exists Y \forall X (X \in Y \leftrightarrow (\mathrm{Men}(X) \wedge \phi(X, X_۱, \cdots, X_n))).$$

یا به بیانی دیگر، $Y = \{x | \phi(x, X_۱, \ldots, X_n)\}$ یک کلاس است (به کوچک و یا بزرگ بودن حروف دقت کنید).

اولین سوالی که به طور طبیعی به ذهن خطور می‌کند این است که «محدود کردن ویژگی، چه تغییری ایجاد می‌کند؟»

در ادامه چند نتیجه از این سه اصل را بیان می‌کنیم.

نتیجه ۴. کلاس همه‌ی مجموعه‌ها وجود دارد. به بیانی دیگر،

$$\mathbf{V} = \{x | x = x\}$$

یک کلاس است.

[۶] حرف اول کلمه‌ی آلمانی Menge به معنی مجموعه

[۷] این اصول در مقاله‌ی a system of axiomatic set theory در Journal of Symbolic Logic به چاپ رسیده‌اند و بقیه‌ی آنها را در ادامه‌ی درس معرفی خواهیم کرد.

نتیجه ۵. یک کلاس وجود دارد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود و به آن کلاس تهی می‌گوییم. به عبارتی دیگر

$$\emptyset = \{x | \neg(x \in x)\}$$

یک کلاس است. دقت کنید که $\mathbf{V} \neq \emptyset$ فعلا قابل اثبات نیست. همچنین در یک جهان برای نظریه‌ی مجموعه‌ها، در کلاس تهی هیچ مجموعه‌ای نیست (اثبات کنید!). همچنین توجه کنید که تا اینجا نمی‌توان ثابت کرد که $\mathbf{V}$ مجموعه است یا نه.

در قضیه‌ی زیر ساختار کلی هر مجموعه را معرفی می‌کنیم. در واقع مجموعه بودن، یعنی عضو یک کلاس بودن.

قضیه ۶. عنصر a مجموعه است اگر و تنها اگر عضوی از یک کلاس باشد.

اثبات. فرض کنید a عضوی از یک کلاس باشد، بنابه اصل اول، a یک مجموعه است. حال فرض کنید a یک مجموعه باشد، در این صورت $a \in \mathbf{V}$. □

از این به بعد، از نماد $x \in \mathbf{V}$ برای بیان «x مجموعه است»، استفاده می‌کنیم.

«تناقض راسل» در اینجا تبدیل به «قضیه‌ی راسل» می‌شود.

قضیه ۷ (راسل). یک کلاس سره [8] وجود دارد. به بیانی دیگر کلاسی وجود دارد که مجموعه نیست.

اثبات. قرار دهید $Y = \{x | x \notin x\}$. در این صورت بنابه اصل ادراک Y یک کلاس است. ادعا می‌کنیم که کلاس Y مجموعه نیست. زیرا در غیر این صورت اگر Y مجموعه باشد، مشابه پارادوکس راسل خواهیم داشت که $Y \in Y$ اگر و تنها اگر $Y \notin Y$. □

بنابراین محدود کردن ویژگی در اصل ادراک باعث می‌شود، کلاسی وجود داشته باشد که مجموعه نیست.

شاید از خود بپرسید که چرا «تناقض راسل» رخ نمی‌دهد. دقت کنید که $Y = \{x | x \notin x\}$ یک کلاس است و از آنجا که Y مجموعه نیست، $Y \notin Y$.

قبل از بیان ادامه‌ی اصول موضوعه، چند نماد جدید و کوتاه‌نوشت را معرفی می‌کنیم، که آنها فرمول‌نویسی‌های ما را ساده‌تر خواهند کرد.

(آ) اگر A و B دو کلاس باشند، در این صورت می‌گوییم که کلاس A زیرکلاس B است و از کوتاه‌نوشت $A \subseteq B$ استفاده می‌کنیم، هرگاه

$$\forall x (x \in A \to x \in B).$$

(ب) اگر A و B دو کلاس باشند، در این صورت تعریف می‌کنیم

$$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

که این کلاس را اجتماع این دو کلاس می‌نامیم. دقت کنید که طبق اصل ادراک چنین کلاسی وجود دارد.

[8] proper

(ج) اگر A و B دو کلاس باشند، در این صورت اشتراک این دو کلاس را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A \cap B = \{x|(x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

به طور مشابه، وجود این کلاس نیز از اصل ادراک نتیجه می‌شود.

(د) اگر A و B دو کلاس باشند، کلاس تفاضل آنها را با $A \setminus B$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A \setminus B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}.$$

(ه) اگر A یک کلاس باشد، در این صورت کلاس مکمل آن را با نماد A^c نمایش می‌دهیم و به‌صورت

$$A^c = \{x|\neg(x \in A)\}$$

تعریف می‌کنیم.

(و) اگر A یک کلاس باشد، در این صورت اجتماع همه‌ی اعضای این کلاس را اجتماع A می‌نامیم و به‌صورت

$$\bigcup A = \{x|\exists a(a \in A \wedge x \in a\}$$

نمایش می‌دهیم.

(ز) اگر A یک کلاس باشد، در این صورت کلاس

$$\bigcap A = \{x|\forall a(a \in A \to x \in a\}$$

را اشتراک کلاس A می‌نامیم.

(ح) برای کلاس A، کلاس $B(A)$ را کلاس همه‌ی زیرکلاس‌های A می‌نامیم، یعنی

$$B(A) = \{x|x \subseteq A\}.$$

۴. اصل تصریح [۹]: اشتراک یک مجموعه با یک کلاس، یک مجموعه است.

$$\forall a \forall A \; a \cap A \in \mathbf{V}$$

دقت کنید که این اصل را نمی‌توان از اصول دیگر نتیجه گرفت. از اصل اول می‌دانیم که اعضای یک کلاس، مجموعه هستند. ولی اینکه حاصل اشتراک یک کلاس با یک عضوِ خود، مجموعه است را نمی‌توان از اصل اول و بقیه‌ی اصول نتیجه گرفت.

گزاره‌های زیر از اصول بالا نتیجه می‌شوند.

نتیجه ۸. کلاس $\mathbf{V}$ مجموعه نیست.

اثبات. کلاس راسل را در نظر بگیرید، $\mathbf{A} = \{x|x \notin x\}$. اگر $\mathbf{V}$ مجموعه باشد، در این صورت $\mathbf{V} \cap \mathbf{A}$ یک مجموعه است. از طرفی $\mathbf{V} \cap \mathbf{A} = \mathbf{A}$، بنابراین $\mathbf{A}$ مجموعه است، که تناقض است. □

[9] specification

بنابراین $\mathbf{V}$ یک کلاس سره است.

سوال ۹. آیا $\mathbf{V} = \mathbf{A}$؟

نتیجه ۱۰. اگر A یک کلاس ناتهی باشد، آنگاه $\bigcap A$ یک مجموعه است.

اثبات. می‌دانیم که $\bigcap A$ یک کلاس است. از طرفی چون A یک کلاس ناتهی است، $a \in A$ را درنظر بگیرید. در این صورت با توجه به اصل تصریح، $a \cap \bigcap A$ یک مجموعه است. از طرفی $a \cap \bigcap A = \bigcap A$. بنابراین $\bigcap A$ یک مجموعه است. □

نتیجه ۱۱. اگر b یک مجموعه باشد و $A \subseteq b$، آنگاه A مجموعه است.

اثبات. از آنجایی که $b \cap A = A$، پس A طبق اصل تصریح، یک مجموعه است. □

در مثال زیر، جهانی را ارائه می‌دهیم که این جهان مُدلی برای این چند اصل است.

مثال ۱۲. جهانی را در نظر بگیرید که در آن فقط کلاس m وجود دارد و هیچ رابطه‌ی تعلق و همچنین هیچ مجموعه‌ای در آن جهان وجود ندارد. بنابراین کلاس همه‌ی مجموعه‌ها خود m است. در این جهان، تمام اصول فوق برقرار است. بنابراین این جهان یک مُدل برای این چند اصل است. ساده‌ترین مُدلی که می‌شود برای این اصول تصور کرد، این جهان است. دقت کنید که در این جهان $\mathbf{V} = m = \emptyset$.

۵. اصل مجموعه‌ی تهی: کلاس تهی یک مجموعه است.

$$\emptyset \in \mathbf{V}.$$

بنابراین افزودن این اصل به مجموعه‌ی اصول باعث می‌شود که جهانی که برای این اصول در نظر می‌گیریم، می‌بایست حداقل شامل کلاس همه‌ی مجموعه‌ها و مجموعه‌ی تهی و رابطه‌ی $\emptyset \in \mathbf{V}$ باشد. بنابراین جهانی که در مثال ۱۲ معرفی کردیم، دیگر مُدلی برای این اصول نیست.

تعریف ۱۳. فرض کنید a و b دو مجموعه باشند، کلاس تشکیل شده از این دو مجموعه را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{a, b\} = \{x | x = a \vee x = b\}.$$

به طور مشابه اگر n مجموعه‌ی $a_1, \ldots, a_n$ را داشته باشیم، می‌توانیم کلاس شامل همه‌ی این مجموعه‌ها را به‌صورت زیر در تعریف کنیم:

$$\{a_0, \cdots, a_n\} = \{x | x = a_0 \vee \cdots \vee x = a_n\}.$$

توجه داشته باشید که تا اینجا، ما هیچ عددی را در نظریه‌ی مجموعه‌ها تعریف نکرده‌ایم، پس عدد طبیعی n در اینجا را همان عدد طبیعی ساده‌انگارانه فرض کنید. وقتی می‌گوییم دو مجموعه‌های a_1 و a_2 و a_3 را در نظر بگیرید، منظورمان سه مجموعه است و می‌دانیم که کسی می‌تواند دو مجموعه را در نظر بگیرد، می‌تواند سومی را نیز در نظر بگیرد! در ادامه این درس اعداد طبیعی را در نظریهٔ مجموعه‌ها تعریف خواهیم کرد. خواننده در سرتاسر بحث، باید به تفاوت اعداد طبیعیِ سهل‌انگارانه‌ی آشنا و اعداد طبیعی فرمال در نظریه‌ی مجموعه‌ها فکر کند!

۶. اصل جفت‌سازی[10]: اگر a و b دو مجموعه باشند، آنگاه کلاس $\{a,b\}$، مجموعه است.

$$\forall a,b \quad \{a,b\} \in \mathbf{V}.$$

در جهان نظریه‌ی مجموعه‌ها، اعداد طبیعی دقیق را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\ulcorner ۰ \urcorner = \{\} = \emptyset \\
&\ulcorner ۱ \urcorner = \{\ulcorner ۰ \urcorner\} = \{\emptyset\} \\
&\ulcorner ۲ \urcorner = \{\ulcorner ۰ \urcorner, \ulcorner ۱ \urcorner\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&\ulcorner ۳ \urcorner = \{\ulcorner ۰ \urcorner, \ulcorner ۱ \urcorner, \ulcorner ۳ \urcorner\}
\end{aligned}$$

دقت کنید که مجموعه بودن کلاس $\ulcorner ۰ \urcorner$ از اصل مجموعه‌ی تهی نتیجه می‌شود و همچنین اصل جفت‌سازی نتیجه می‌دهد که کلاس‌های $\ulcorner ۱ \urcorner$ و $\ulcorner ۲ \urcorner$ مجموعه هستند. ولی با استفاده از اصول بالا نمی‌توان ثابت کرد که کلاس $\ulcorner ۳ \urcorner$ مجموعه است.

مثال ۱۴. جهانی را به عنوان مُدل این اصول در نظر بگیرید که در قسمت مجموعه‌هایش از $\emptyset$ و همه‌ی مجموعه‌هایی که توسط اصل زوج سازی از تهی به دست می‌آیند و همه‌ی زیرمجموعه‌های آنها تشکیل شده باشد. در این صورت بنابه اصل جفت‌سازی این کلاس در بخش مجموعه‌ها، شامل مجموعه‌ی $\{\emptyset\} = \{\emptyset, \emptyset\}$، و با استفاده‌ی مجدد از اصل جفت‌سازی شامل مجموعه‌ی $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ نیز است. از اصل جفت‌سازی می‌توان به هر تعداد استفاده کرد و از آن نتیجه گرفت که مثلا مجموعه‌های $\{\{\emptyset\}\}$، $\{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$، $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ و ... جزو مجموعه‌های این جهان هستند. توجه کنید که در این جهان $\ulcorner ۰ \urcorner$، $\ulcorner ۱ \urcorner$ و $\ulcorner ۲ \urcorner$ مجموعه‌اند ولی $\ulcorner ۳ \urcorner$ و $\ulcorner ۴ \urcorner$ و ... هر چند به عنوان کلاس در این جهان وجود دارند ولی فعلاً نمی‌توان اثبات کرد که مجموعه هستند.

دقت کنید که با توجه به این مثال، اضافه شدن اصل جفت‌سازی به اصول، باعث می‌شود که هیچ مُدل متناهی‌ای وجود نداشته باشد.

۷. اصل اجتماع: اگر a مجموعه باشد، $\bigcup a$ نیز مجموعه است.

$$\forall a \quad \bigcup a \in \mathbf{V}$$

از افزودن این اصل به اصول قبلی، نتایج زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱۵. اگر a و b مجموعه باشند، آنگاه $a \cup b$ نیز مجموعه است.

اثبات. بنابه اصل جفت‌سازی $\{a,b\}$ مجموعه است. اکنون از اصل اجتماع نتیجه می‌شود که $\bigcup\{a,b\} = a \cup b$ یک مجموعه است. $\square$

نتیجه ۱۶. از اصل اجتماع نتیجه می‌شود که $\ulcorner ۳ \urcorner$ مجموعه است. زیرا $\ulcorner ۳ \urcorner = \{\ulcorner ۲ \urcorner\} \cup \ulcorner ۲ \urcorner$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که هر عدد طبیعی دقیق که به‌صورت $\ulcorner n + ۱ \urcorner = \{\ulcorner n \urcorner\} \cup \ulcorner n \urcorner$ تعریف می‌شود، یک مجموعه است. دقت کنید که از این اصول نمی‌توان نتیجه گرفت که کلاس همه‌ی اعداد طبیعی دقیق، مجموعه است.

[10] pairing

برای بیان بقیه‌ی اصول، نیازمند تعاریف جدیدی هستیم که در زیر آنها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱۷ (زوج کوراتوفسکی [۱۱]). برای دو مجموعه‌ی a و b، زوجِ مرتب این دو عنصر را با نماد $\langle a, b\rangle$ نشان می‌دهیم و به‌صورت $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ تعریف می‌کنیم. به این زوج مرتب، زوجِ کوراتوفسکی می‌گویند. توجه داشته باشید که طبق اصل جفت‌سازی، زوج کوراتوفسکی دو مجموعه، یک مجموعه است.

از این تعریف به‌راحتی می‌توان لم زیر را نتیجه گرفت.

لم ۱۸. اگر a، b، a' و b' مجموعه باشند، آنگاه $\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle$ اگر و تنها اگر $a = a'$ و $b = b'$.

۸. اصل مجموعه‌ی توان: اگر a یک مجموعه باشد، آنگاه کلاس $B(a) = \{b | b \subseteq a\}$ یک مجموعه است. به بیانی دیگر، کلاس متشکل از همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه، یک مجموعه است.

$$\forall a \; B(a) \in \mathbf{V}.$$

دقت کنید که طبق اصل تصریح می‌دانیم که هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه، مجموعه است، اما تا قبل از این اصل نمی‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که کلاس متشکل از همه‌ی زیرمجموعه‌ها تشکیل یک مجموعه می‌دهد.

برای بیان اصل بعدی و همچنین نتایجی که از این اصل می‌گیریم، نیازمند تعاریفی هستیم، که ابتدا آنها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱۹.

- برای دو کلاس A و B، کلاس حاصلضرب آنها را با نماد $A \times B$ نشان می‌دهیم و به‌صورت

$$A \times B = \{\langle a, b\rangle | a \in A \wedge b \in B\}$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین می‌توان کلاس $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ را نیز تعریف کرد.

- به هر کلاس R که زیرکلاسی از $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ باشد، یک رابطه می‌گوییم. بنابراین رابطه‌ی R از زوج‌مرتب‌هایی تشکیل شده است که مولفه‌های آن در کلاس $\mathbf{V}$ قرار دارند. در ادامه‌ی این درس از نماد aRb برای بیان $\langle a, b\rangle \in R$ استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال رابطه‌ی تعلق را می‌توان به‌صورت $\text{“} \in \text{”} := \{\langle a, b\rangle | a \in b\}$ و رابطه‌ی تساوی را به‌صورت $\text{“} = \text{”} := \{\langle a, b\rangle | a = b\}$ تعریف کرد. توجه کنید که این روابط، کلاس هستند و نه مجموعه.

- فرض کنید R یک رابطه و A یک کلاس باشد. تحدید رابطه‌ی R به کلاس A را با نماد $R \restriction_A$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$R \restriction_A = R \cap (A \times \mathbf{V}).$$

- اگر R یک رابطه باشد، دامنه‌ی رابطه‌ی R را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$D(R) = \{x | \exists y (\langle x, y\rangle \in R\}.$$

[11] Kuratowski pair

به‌طور مشابه، بُرد رابطه‌ی R را با نماد $\mathrm{Wb}(R)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت $\mathrm{Wb}(R) = \{y|\exists x(\langle x,y\rangle \in R)\}$ تعریف می‌کنیم. همچنین اگر A یک کلاس باشد، تعریف می‌کنیم

$$R[A] = \{y|\exists x(x \in A \wedge xRy)\}.$$

که این کلاس را کلاس تصویر رابطه‌ی R برروی کلاس A می‌نامیم. درواقع، این کلاس از تحدید رابطه‌ی R بر کلاس A حاصل می‌شود.

- رابطه‌ی F را یک تابعال [۱۲] می‌نامیم، هرگاه از xFy_1 و xFy_2 نتیجه شود که $y_1 = y_2$.

خواننده باید بتواند بین تعریف تابعال و تعریفی که از قبل از تابع می‌داند، تمیز قائل شود.

قرارداد. اگر F یک تابعال باشد، از نماد $F : A \to B$ برای بیان اینکه $D(F) = A$ و $\mathrm{Wb}(F) \subseteq B$ استفاده می‌کنیم.

- تابعال F را تابع گوییم، هرگاه F مجموعه باشد.
- فرض کنید Q و R دو رابطه باشند، در این صورت ترکیب این دو رابطه را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Q \circ R = \{\langle x,y\rangle|\exists z(xRz \wedge zQy)\}.$$

- برای رابطه‌ی R، کلاس رابطه‌ی معکوس R را با R^{-1} نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$R^{-1} = \{\langle x,y\rangle|yRx\}.$$

از تعاریف بالا نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۲۰. اگر a و b مجموعه باشند، آنگاه $a \times b$ نیز مجموعه است.

اثبات. از آنجایی‌که

$$a \times b = \Big\{\{\{x\},\{x,y\}\}|x \in a \wedge y \in b\Big\} \subseteq B(B(a \cup b)),$$

پس طبق اصل مجموعه‌ی توانی و اصل تصریح $a \times b$ مجموعه است. $\square$

۹. اصل جانشانی [۱۳]: اگر F یک تابعال و a یک مجموعه باشد، آنگاه $F[a]$ یک مجموعه است. به بیانی دیگر، برای هر تابعال F

$$\forall a\ F[a] \in \mathbf{V}.$$

افزودن این اصل، نتایج زیر را به ارمغان می‌آورد.

لم ۲۱. (آ) اگر رابطه‌ی r مجموعه باشد و a یک مجموعه، آنگاه $r\restriction_a$ مجموعه است.

(ب) اگر r مجموعه باشد، آنگاه $D(r)$ نیز مجموعه است.

[12] functional
[13] replacement

(ج) اگر r مجموعه باشد، $\mathrm{Wb}(r)$ نیز مجموعه است.

(د) اگر رابطه‌های r و q مجموعه باشند، آنگاه $q \circ r$ نیز مجموعه است.

(ه) اگر r رابطه باشد، آنگاه $r^{-۱}$ نیز مجموعه است.

اثبات. (آ). از آنجایی‌که $r \restriction_a \subseteq r$، بنابراین $r \restriction_a$ مجموعه است.
(ب). چون $D(r) \subseteq \bigcup\bigcup r$ و $\bigcup\bigcup r$ مجموعه است، پس $D(r)$ نیز مجموعه است.
(ج). به‌طور مشابه، $\mathrm{Wb}(r) \subseteq \bigcup\bigcup r$ و بنابراین مجموعه است.
(د). طبق تعریف می‌دانیم که $qor = \{\langle x, y\rangle | \exists z(xrz \wedge zqy)\}$، پس $q \circ r \subseteq D(r) \times \mathrm{Wb}(q)$. از طرفی طبق موارد (ب) و (د) می‌دانیم که $D(r)$ و $\mathrm{Wb}(q)$ مجموعه هستند، بنابراین $D(r) \times \mathrm{Wb}(q)$ نیز مجموعه است. پس $q \circ r$ نیز طبق اصل تصریح، مجموعه است.
(ه). از آنجایی‌که $r^{-۱} \subseteq \mathrm{Wb}(r) \times D(r)$، پس مجموعه است. □

نتیجه ۲۲. فرض کنید F یک تابعال باشد. اگر $D(F)$ مجموعه باشد، آنگاه F یک تابع است.

اثبات. چون $D(F)$ مجموعه است، بنابه اصل جانشانی، $F[D(F)]$ نیز مجموعه است. از طرفی طبق تعریف تابعال $F \subseteq D(F) \times F[D(F)]$، و چون حاصل‌ضرب دو مجموعه، مجموعه است، پس تابعال F مجموعه است و لذا تابع است. □

این نتیجه را می‌توان به این صورت بیان کرد که هر تابعال $F : a \to B$، یک تابع است.

نمادگذاری ۲۳. اگر A و B دو کلاس باشند، کلاس همه‌ی تابعال‌های $F : A \to B$ را با نماد ${}^{A}B$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ۲۴. اگر B مجموعه باشد، ${}^{a}B$ یک مجموعه است.

اثبات. می‌دانیم که ${}^{a}B \subseteq B(a \times B)$، و از آنجا که حاصلضرب دو مجموعه، مجموعه است و همچنین طبق اصل مجموعه‌ی توانی، ${}^{a}B$ یک مجموعه است. □

توجه داشته باشید که تمامی اصول گفته شده تا اینجا، بجز اصل گسترش، در راستای تعمیر اصل ادراکِ ساده‌انگارانه بیان شده‌اند. با این حال سه اصل باقیمانده، که در زیر به آنها خواهیم پرداخت، اصولی کاملاً متفاوت با اصل ادارک هستند که برای برطرف کردن نیازهای دیگر ریاضیاتی به نظریهٔ مجموعه‌ها افزوده شده‌اند.

هدف اصلی اصل خوش‌بنیادی، که در زیر آن را بیان کرده‌ایم، این است که هر مجموعه‌ای خوش‌بنیاد است، یعنی اگر x یک مجموعه باشد، نمی‌توان یک دنبالهٔ نامتناهیِ

$$\ldots x_n \in \ldots x_۲ \in x_۱ \in x$$

پیدا کرد. یعنی هر مجموعه‌ای با استفاده از مجموعه‌ی تهی و با متناهی مرتبه به کارگیری اصول ساخت مجموعه‌ها ایجاد می‌شود. پیچیدگی‌های منطقی (مثلاً قضیه‌ی فشردگی) [۱۴] باعث می‌شود که خواسته‌ی بالا قابل برآورده شدن در

[۱۴] در نتیجه‌ی این قضیه همیشه مدلهائی پیدا می‌شوند که در آنها مجموعه‌های غیرخوش‌بنیاد وجود دارد.

تمام مدلهای نظریهٔ مجموعه‌ها نباشد. بیان اصل‌خوش‌بنیادی در زیر نیز شباهتی به گفته‌ی بالا ندارد، لیکن (در ادامه‌ی همین درس خواهیم دید) که هر مجموعه در یک مدل اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها در تناظر یک‌به‌یک با یک مجموعه‌ی خوش‌بنیاد است (و در نتیجه‌ی آن اگر مدلی از نظریه‌ی مجموعه‌ها را در نظر بگیریم، مجموعه‌های خوش‌بنیاد در آن مدل، دوباره مدلی برای نظریهٔ مجموعه‌ها هستند).

در زیر به بیان دقیق اصل خوش‌بنیادی و برخی نتایج آن پرداخته‌ایم و پیچیدگی‌های بالا را به جلسات بعدی موکول کرده‌ایم.

۱۰. اصل خوش‌بنیادی [15]: هر کلاس ناتهی مجموعه‌ای دارد، که با آن هیچ اشتراکی ندارد.

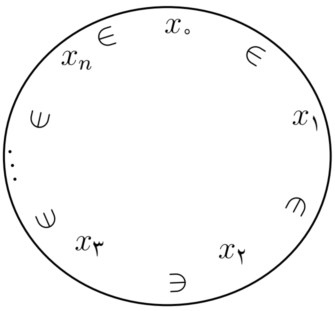
$$\forall A \neq \emptyset \ \exists a \in A \ (a \cap A = \emptyset)$$

یکی از مهمترین نتایجی که این اصل به ارمغان می‌آورد، نتیجه‌ی زیر است.

نتیجه ۲۵. کلاس همه‌ی مجموعه‌ها، $\mathbf{V}$، با کلاس راسل، $\mathbf{A}$، برابر است (به بیان دیگر برای هر $x \in \mathbf{V}$ داریم $\neg(x \in x)$).

اثبات. فرض کنید $\mathbf{A} \neq \mathbf{V}$ و $u \in \mathbf{V} \setminus \mathbf{A}$. در این صورت چون $u \notin \mathbf{A}$، پس $u \in u$. از طرفی $\{u\}$ یک مجموعه است (در نتیجه کلاس است) و $u \in u \cap \{u\}$. و این یک در تناقض با اصل خوش‌بنیادی است. □

نتیجه ۲۶. هیچ دور متناهی از مجموعه‌ها به صورت زیر یافت نمی‌شود.



اثبات. اگر چنین مجموعه‌هایی یافت شوند، در این صورت مجموعه‌ی $A = \{x_0, \ldots, x_n\}$ اصل خوش‌بنیادی را نقض می‌کند. □

بنا به اصل خوش‌بیادی، کلاس همه‌ی مجموعه‌ها یک «کلاس استقرائی» است:

نتیجه ۲۷. فرض کنید A کلاسی باشد که دارای ویژگی زیر است.

$$\forall a \big((\forall x \in a \ x \in A) \rightarrow a \in A \big).$$

در این صورت $A = \mathbf{V}$.

[15] foundation

به بیانی دیگر، $\mathbf{V}$ تنها کلاسی است که هر مجموعه‌ای که زیرمجموعه‌اش باشد، عضوش است. نیز به بیانی دیگر، V تنها کلاسی از مجموعه‌هاست که هرگاه همه‌ی عناصر یک مجموعه در آن باشد باشد، آنگاه خودِ آن مجموعه نیز در آن است.

اثبات. فرض کنید $A \neq \mathbf{V}$. در این صورت $\mathbf{V} \setminus A$ ناتهی است. بنابه اصل خوش‌بنیادی، مجموعه‌ی $b \in \mathbf{V} \setminus A$ موجود است که $b \cap (\mathbf{V} \setminus A) = \emptyset$. پس $b \subseteq A$، در نتیجه $b \in A$. که تناقض است. □

پس اگر φ یک ویژگی درباره‌ی مجموعه‌ها باشد به گونه‌ای که از این که همه‌ی مجموعه‌های موجود در یک مجموعه این ویژگی را دارا هستند نتیجه شود که خود آن مجموعه هم این ویژگی را داراست، آنگاه همه‌ی مجموعه‌ها ویژگی φ را دارا هستند. شباهت این گفته با استقراء دربارهٔ اعداد طبیعی، آن را روشن‌تر می‌کند: اگر φ یک ویژگی درباره‌ی اعداد طبیعی باشد و از این که اعدادِ کمتر از n دارای این ویژگی هستند بشود نتیجه گرفت که n هم دارای این ویژگی است، آنگاه همه‌ی اعداد طبیعی این ویژگی را دارا هستند.
توجه: اگر کلاس A شامل $\ulcorner \circ \urcorner$ و برای هر $x \in A$، $x \cup \{x\} \in A$ آنگاه هر $\ulcorner n \urcorner$ در کلاس A قرار می‌گیرد. توجه داشته باشید که ما هنوز نمی‌دانیم که کلاس A مجموعه است یا خیر. برای این منظور به اصل زیر نیز نیاز داریم.

۱۱. اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی: یک مجموعه مثل a موجود است به طوری که $\emptyset \in a$ و برای هر $x \in a$، $x \cup \{x\} \in a$.
به بیانی دیگر، این اصل بیان می‌کند که یک مجموعه‌ی نامتناهی وجود دارد.

سوال ۲۸. آیا $a = \mathbb{N}$؟

در ادامه‌ی درس به این سؤال پاسخ خواهیم داد.
برای بیان آخرین اصل، نیازمند تعریف زیر هستیم.

تعریف ۲۹. فرض کنید A کلاسی متشکل از مجموعه‌های ناتهی باشد. یک تابعال $F : A \to \mathbf{V}$ را یک تابعال انتخاب[16] گوییم، هرگاه برای هر $x \in A$، $F(x) \in x$.

۱۲. اصل انتخاب: هر مجموعه‌ای که از مجموعه‌های ناتهی تشکیل شده است، دارای یک تابع انتخاب است. به بیان دیگر، اگر a یک مجموعه باشد، آنگاه تابع $f : a \to \mathbf{V}$ وجود دارد که برای هر $x \in a$، $f(x) \in a$.
به بیانی بهتر، فرض کنید که گردایه‌ای از مجموعه‌های ناتهی مانند $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ داریم. اصل انتخاب بیان می‌کند که مجموعه‌ای وجود دارد مانند a به طوری که به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، عنصر b_i موجود است که $b_i \in a \cap a_i$. شاید در نگاه اول «انتخاب کردن» یک عضو از اعضای این گردایه که ناتهی هستند، بدیهی به نظر برسد، ولی همین «انتخاب کردن» و اینکه کلاس حاصل «مجموعه» است، از اصل انتخاب نتیجه می‌شود.
در ادامه بیشتر به این اصل و صورت‌های معادل این اصل خواهیم پرداخت.

مزیتی که اصول موضوعه‌ی برنیز_ گودل دارد، این است که به طور واضح و رسمی مفهوم کلاس را معرفی کرده و از آن استفاده می‌کند. بنابراین مفهوم یک مدل دارای پیچیدگی مختصری است، زیرا همواره باید بین کلاس و مجموعه تفاوت قائل شد. ولی در اصول موضوعه‌های دیگر برای نظریه‌ی مجموعه‌ها، مانند اصول موضوعه‌ی ZFC[17] فقط در مورد مجموعه‌ها صحبت

[16]choice functional
[17]Zermelo, Fränkel, (and axiom of) Choice

می‌کند و اصلا وارد مفهوم کلاس‌ها نمی‌شود. ولی در اصل تصریح، با زیرکی از فرمولی استفاده می‌کند تا از مفهوم کلاس رهایی یابد. بنابراین در این اصول موضوعه، اصل ادراک وجود ندارد، زیرا در آن صورت پارادوکس راسل رخ می‌دهد. در ادامه اصل موضوعه‌ی ZFC را بیان می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که این اصول موضوعه با اصول موضوعه‌ی برنیز_ گودل معادل است.

۴.۱ نظریه‌ی مجموعه‌های زِرمِلو_ فرانکل با اصل انتخاب

در اصول موضوعه‌ای که زِرمِلو و فرانکِل برای نظریه‌ی مجموعه‌ها ارائه کردند، فقط از مجموعه‌ها استفاده می‌شود و نامی از کلاس‌ها به میان نمی‌آید. با این حال، درکی ضمنی از کلاس در نظریه‌ی مجموعه‌های ZFC وجود دارد؛ بدین صورت که کلاس‌ها چیزهائی هستند که توسط فرمول‌ها تعریف می‌شوند و ممکن است مجموعه نباشند. بنابراین متغیرها، فقط متغیرهای مجموعه‌ای هستند که برای نمایش آنها از حروف کوچک استفاده می‌کنیم. مشابه اصول موضوعه‌ی برنیز_ گودل، رابطه‌ی تعلق، $\in$، نیز در زبان وجود دارد و فرمول‌ها با استفاده از این نماد رابطه‌ای و تساوی و ادوات منطقی‌ای که در ابتدای درس توضیح داده شد، ساخته می‌شوند. اصول موضوعه‌ی ZFC به شرح زیر است.

۱. اصل گسترش:

$$\forall x\forall y\big(\forall z(z\in x\leftrightarrow z\in y)\to x=y\big).$$

۲. اصل تصریح [۱۸]: اگر ϕ یک فرمول مرتبه‌ی اول در زبان نظریه‌ی مجموعه‌ها و x مجموعه باشد، آنگاه $\{y\in x|\phi(y)\}$ یک مجموعه است. به‌عبارتی دیگر

$$\forall x_1,\cdots,x_n\forall x\exists y\big(\forall x_0(x_0\in y\leftrightarrow x_0\in x\wedge\phi(x_0,x_1,\cdots,x_n))\big).$$

به این معنی که

$$y=\{x_0|x\in x_0\wedge\phi(x_0,x_1,\cdots,x_n)\}.$$

توجه کنید که برای هر فرمول، یک اصل وجود دارد، بنابراین این اصل درواقع شمایی از اصول است. درواقع، در این اصل به زیرکی با افزودن یک مجموعه‌ی x که ویژگی ϕ را دارد از رخ دادن پارادوکس راسل جلوگیری شده است. اما می‌توان این چنین فرض کرد که گردایه‌ی مجموعه‌هایی که ویژگی ϕ را دارند در تصور ZFC، یک کلاس هستند.

۳. اصل وجود مجموعه‌ی تهی: مجموعه‌ی تهی وجود دارد.

$$\exists y\ \forall x\neg(x\in y).$$

۴. اصل جفت‌سازی: اگر x و y مجموعه باشند، آنگاه $\{x,y\}$ مجموعه هستند.

$$\forall x\forall y\ \exists z(\forall t(t\in z\leftrightarrow t=x\vee t=y)).$$

۵. اصل اجتماع: اگر x مجموعه باشد، آنگاه $x\bigcup$ هم مجموعه است.

$$\forall x\exists y\ \forall t\big(t\in y\leftrightarrow\exists s(s\in x\wedge t\in s)\big).$$

[18] specification

۶. اصل وجود مجموعه‌ی توان: گردایه‌ی تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه، مجموعه است.

$$\forall x \exists y \forall t (t \in y \leftrightarrow t \subseteq x).$$

۷. اصل جای‌گذاری [۱۹] (شمای اصل): فرض کنید ϕ یک ویژگی و $x_۲, \ldots, x_n$ مجموعه باشند. همچنین فرض کنید برای هر مجموعه‌ی $x_۱$ بتوان تنها یک مجموعه‌ی $x_۰$ پیدا کرد که $\phi(x_۰, x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ برقرار باشد. به عبارتی دیگر، ویژگی ϕ فرمولی باشد که یک «تابع» تعریف می‌کند. آنگاه تصویرِ این تابع روی یک مجموعهٔ x تشکیل یک مجموعه می‌دهد. به بیان دقیق‌تر،

$$\forall x_۲, \cdots, x_n \forall x \Big((\forall x_۱ \exists ! x_۰ \phi(x_۰, x_۱, x_۲, \cdots, x_n)) \rightarrow \exists y \forall x_۰ (x_۰ \in y \leftrightarrow \exists x_۱ (x_۱ \in x \wedge \phi(x_۰, x_۱, x_۲, \cdots, x_n)) \Big).$$

در واقع این اصل بیان می‌کند که تصویر یک مجموعه، تحت یک تابع «تعریف‌پذیر»، مجموعه است. منظور از تابع تعریف‌پذیر، تابعی است که بتوان آن را با فرمولی در زبان تعریف کرد. بنابراین در این اصول موضوعه برای فرار از مفهوم کلاس در اصل جای‌گذاری، از مفهوم «تابعِ تعریف‌پذیر» استفاده می‌کند.

۸. اصل خوش‌بنیادی: در اصول گودل و برنیز، اصل خوش‌بنیادی بدین صورت بیان شد که هر کلاس، شامل مجموعه‌ای است که با آن اشتراک ندارد. مشابه اصل قبل، برای گریز از بکار بردن مفهوم کلاس، از یک شمای فرمولی برای بیان این اصل کمک می‌گیریم.

$$\forall x_۱, \cdots, x_n \Big(\exists x_۰ \phi(x_۰, x_۱, \cdots, x_n) \rightarrow \exists y (\phi(y, x_۱, \cdots, x_n) \wedge \forall z (z \in y \rightarrow \neg \phi(z, x_۱, \cdots, x_n)) \Big).$$

۹. اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی: یک مجموعه‌ی نامتناهی وجود دارد.

$$\exists x \ \big(\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x) \big).$$

۱۰. اصل انتخاب: هدفمان بیان این است که اگر x یک مجموعه باشد که از مجموعه‌های ناتهی تشکیل شده است، آنگاه یک تابع $f : x \rightarrow \bigcup x$ موجود است به طوری که $f(y) \in y$ برای هر $y \in x$. این اصل را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: اگر x از مجموعه‌های ناتهی تشکیل شده باشد، آنگاه مجموعه‌ای وجود دارد که با هر مجموعه‌ی موجود در x دقیقاً یک اشتراک دارد. در واقع اشتراک آن مجموعه با تک‌تک مجموعه‌های موجود در x، مقدار تابع در آن مجموعه است.

در ادامه قضیه‌ای اثبات خواهیم کرد که بیانگر معادل بودن اصول موضوعه برنیز_گودل و زدافسی است. به این معنی که اگر ϕ یک «جمله» در مورد مجموعه‌ها باشد، آنگاه اثبات شدن این جمله از منظر هر دو اصول موضوعهٔ یادشده یکسان است. پیش از آن چند پیش نیاز منطقی دیگر نیاز داریم.

[۱۹] فرانکل فقط این اصل را به اصول موضوعه‌ای که قبلاً توسط زِرمِلو ارائه شده بود، افزوده است.

۵.۱ چند پیش‌نیاز منطقی برای ادامهٔ بحث

توجه ۱: منظور از اینکه جمله‌ی ϕ از اصول موضوعه‌ی ZFC *اثبات* می‌شود این است که در تمام مُدل‌های ZFC فرمول ϕ درست است. این حقیقت را با نماد $\mathrm{ZFC} \vdash \phi$ نمایش می‌دهیم. خواننده‌ی آشنا با منطق می‌داند که زمانی یک جمله در تمام مدل‌های ZFC درست است که روشی متناهی برای اثبات آن وجود داشته باشد.
بنابراین $\mathrm{ZFC} \nvdash \phi$، هرگاه جهانی وجود داشته باشد که در آن تمامی اصول ZFC برقرار باشند ولی ϕ در آن درست نباشد. برای درک بهتر مطلب، موارد زیر را در نظر داشته باشید:

۱. اینکه $\mathrm{ZFC} \nvdash \phi$، بنا به تعاریف، معادل با این نیست که $\mathrm{ZFC} \vdash \neg\phi$. ممکن است که نه ϕ در ZFC ثابت شود و نه $\neg\phi$.

۲. اگر جمله‌ای مانند ϕ پیدا شود به طوری که $\mathrm{ZFC} \vdash \phi$ و $\mathrm{ZFC} \vdash \neg\phi$، آنگاه هیچ مدلی برای ZFC نمی‌تواند وجود داشته باشد؛ زیرا در صورت وجود مدل، در آن مدل تناقض رخ می‌دهد.

در ادامه‌ی این درس مهمترین سوالاتی که به دنبال پاسخ دادن به آنها خواهیم بود، دو سوال زیر هستند.

سوال ۳۰. ۱. آیا جمله‌ای مانند ϕ را می‌توان یافت به‌طوری که $\mathrm{ZFC} \nvdash \phi$ و همچنین $\mathrm{ZFC} \nvdash \neg\phi$؟

۲. آیا جمله‌ای مانند ϕ پیدا می‌شود به‌طوری که $\mathrm{ZFC} \vdash \phi$ و همچنین $\mathrm{ZFC} \vdash \neg\phi$؟

۶.۱ مقایسهٔ BG و ZFC

قضیه ۳۱. اصول موضوعه‌ی BG (برنیز_گودل)، یک توسیع نگهدارنده [20] از اصول موضوعه‌ی ZFC است.

اثبات. باید نشان دهیم که اگر ϕ جمله‌ای درباره‌ی مجموعه‌ها باشد آنگاه، $\mathrm{ZFC} \vdash \phi$ اگر و تنها اگر $\mathrm{BG} \vdash \phi$. فرض کنید $\mathrm{ZFC} \vdash \phi$، در این صورت از آنجایی که تمام اصول ZFC در BG درست است (این اصول درباره‌ی مجموعه‌ها هستند)، پس $\mathrm{BG} \vdash \phi$. حال فرض کنید $\mathrm{ZFC} \nvdash \phi$، در این صورت فرض کنید M مُدلی برای ZFC باشد و در M نقیض ϕ برقرار باشد. یک مُدل برای BG پیدا می‌کنیم که در آن نقیض ϕ برقرار است. برای این منظور، همین مُدل M برای ZFC را به مُدلی برای BG تبدیل می‌کنیم. کلاس‌های این مُدل را به‌صورت $\{x|\phi(x, y_1, \dots, y_n)\}$ در نظر بگیرید. دقت کنید که در فرمول ϕ فرمولی به‌صورت $x \in a$ نباید باشد، زیرا در این صورت این کلاس تبدیل به مجموعه می‌شود و هیچ کلاس سره‌ای وجود ندارد. در این صورت جهان مُدل BG را اجتماع کلاس‌هایی که به این صورت ساخته می‌شوند، K، و مجموعه‌هایی که در مُدل M قرار دارند، S، در نظر بگیرید، یعنی $K \cup S$. در این صورت بررسی اینکه $(K \cup S, \in)$ که $\in$ در مجموعه‌ها، مانند همان تعلق در M تعبیر می‌شود و $\in$ در کلاس‌ها معادل با برقرار بودن فرمولی که کلاس را تعریف می‌کند است، یک مُدلی برای BG است را به‌طور مختصر بیان می‌کنیم. باید نشان بدهید که تمام اصول BG در این جهان برقرار است. توجه داشته باشید که فقط برای اثبات اصل ادراک، نیاز به دقت بیشتری است، زیرا بقیه اصول دیگر یا خود اصل (مانند اصل انتخاب) یا به گونه‌ای دیگر در ZFC بیان شده‌اند. اصل ادراک به‌صورت زیر است:

$$\forall B_1, \cdots, B_n \exists A (x \in A \leftrightarrow \phi(x, B_1, \cdots, B_n))$$

[20] conservative extension

این اصل را می‌توان به‌صورت زیر نیز بیان کرد.

$$\forall x_1, \cdots, x_k \Big(\bigwedge \phi_{B_i}(x_1, \cdots, x_k) \to \exists A (x \in A \leftrightarrow \phi(x, x_1, \cdots, x_k)) \Big),$$

که ϕ_{B_i} فرمولی است که کلاس B_i را تعریف می‌کند. در این بیان اصل ادراک از کلاس‌ها استفاده نشده است، بنابراین این اصل را می‌توان در ZFC بیان کرد، پس این اصل نیز در جهان جدیدمان نیز برقرار است. بنابراین اگر جمله‌ای در جهان M برقرار نباشد، این جمله در جهان $K \cup S$، که آن را به مُدلی برای BG تبدیل کردیم نیز برقرار نیست. □

۷.۱ تمرین

تمرین ۱. فرض کنید $B_\omega(\mathbb{N})$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های متناهی $\mathbb{N}$ باشد. می‌دانیم که بین $B_\omega(\mathbb{N})$ و $\mathbb{N}$ یک تناظر یک‌به‌یک وجود دارد. مثلا فرض کنید که تناظر یک‌به‌یک زیر برقرار باشد.

$$g : B_\omega(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$\{n_1, \cdots, n_k\} \mapsto g(\{n_1, \cdots, n_k\})$$

جهانی را درنظر بگیرید که مجموعه‌های آن عناصر $\mathbb{N}$ باشند و کلاسهای سرهٔ آن تمام زیرمجموعه‌های نامتناهی $\mathbb{N}$ باشند. به این معنی که زیرمجموعه‌های نامتناهی، کلاس‌هایی هستند که مجموعه نیستند.
رابطه‌ی تعلق را نیز به‌صورت زیر تعریف کنید:

- بین مجموعه‌ها و کلاس‌هایی که مجموعه نیستند: رابطه‌ی تعلقِ طبیعی.
- بین مجموعه‌ها و مجموعه‌ها:

$$n_1 \in n_2 \iff n_1 \in g(n_2)$$

جهان بالا را $\mathfrak{M}$ بنامید. نشان دهید که $\mathfrak{M}$ مدل تمامی اصول بالا است مگر اصل خوش‌بنیادی. چه تابع gای پیشنهاد می‌کنید که اصل خوش‌بنیادی برقرار باشد.

تمرین ۲. صورت اصل انتخاب در اصول موضوعه ZFC را به‌صورت دقیق بنویسید.

فصل ۲

اصل خوش‌ترتیبی و لم زرن

در این فصل دو معادل اصل انتخاب، یعنی خوش‌ترتیبی و لم زُرن را بیان می‌کنیم. برای این منظور ابتدا تعاریف و پیش‌نیازهای آن را بیان می‌کنیم.

۱.۲ خوش‌ترتیبی

تعریف ۱. فرض کنید u یک مجموعه باشد و r یک رابطه روی u باشد ($r \subseteq u \times u$).

- رابطه‌ی ترتیبی: رابطه‌ی r ترتیبی است هرگاه خاصیت پادبازتابی و متعدی داشته باشد، به این معنی که

$$\forall x \ \neg(xrx),$$
$$\forall x, y, z \ ((xry) \wedge (yrz) \to xrz).$$

- رابطه‌ی ترتیبی خطی: رابطه‌ی ترتیبی r را خطی گوییم هرگاه همه عناصر با هم قابل مقایسه باشند. به این معنی که

$$\forall x, y \ \big((xry) \vee (yrx) \vee (x = y)\big).$$

می‌توان به‌طور شهودی فرض کرد که رابطه‌ی ترتیبی خطی شبیه به رابطه‌ی «$<$» است. اگر رابطه‌ی ترتیب خاصیت خطی بودن را نداشت، یعنی تمام عناصر با هم قابل مقایسه نبودند، آن را ترتیب جزیی [1] می‌نامیم.

- رابطه‌ی ترتیبی خطی خوش‌بنیاد: رابطه‌ی ترتیبی خطی r روی u را خوش‌بنیاد نامیم هرگاه هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از u دارای عنصر ابتدا نسبت به رابطه‌ی r باشد. این عنصر را با نماد $\min_r$ نمایش می‌دهیم. به این معنی که

$$\forall a \subseteq u \big(a \neq \emptyset \to \exists x \in a \ (\forall y \in a(\ x = y \vee xry))\big).$$

توجه داشته باشید که فرمول بالا، فرمولی مرتبه اول است.

در این صورت می‌گوییم $\bar{u} = (u, r)$ یک خوش‌ترتیبی است.

[1] partial ordering

مشاهده ۲. اگر u ناتهی باشد و (u,r) خوش‌بنیاد نباشد، آنگاه زیرمجموعه‌ی ناتهی $a \subseteq u$ وجود دارد که عنصر ابتدا ندارد. پس اگر $b_0 \in a$، آنگاه چون b عنصر ابتدای مجموعه‌ی a نیست، پس عنصر $b_1 \in a$ وجود دارد که $b_1 r b_0$. به‌طور مشابه می‌توان عناصر $b_2, b_3, \ldots \in a$ را طوری یافت که $\ldots r b_3 r b_2 r b_1$. بنابراین یک دنباله‌ی نزولی (!) نامتناهی را می‌توان در a پیدا کرد. هر چند این مشاهده با درک ساده‌انگارانهٔ ما از اعداد طبیعی به راحتی قابل توجیه است، برای اثبات آن به صورت دقیق در نظریه‌ی مجموعه‌ها (یعنی با در نظر گرفتن اعداد طبیعی در جهان نظریهٔ مجموعه‌ها) نیاز به ابزارهائی داریم که فعلاً در اختیار نداریم. فعلا این شهود را برای خود کنار می‌گذاریم ولی در بخشهای آیندهٔ درس دوباره بدان خواهیم پرداخت.

به‌طور مشابه زوج کلاسی $\bar{U} = (U,R)$ یک خوش‌ترتیبی است، هرگاه R یک رابطه‌ی ترتیبی خوش‌بنیاد باشد و علاوه بر آن برای هر $x \in U$ کلاس زیر، یک مجموعه باشد.

$$U_{(x)} = \{y \in U | yRx\}.$$

اگر $\bar{U} = (U,R)$ یک خوش‌ترتیبی باشد، آنگاه U دارای عنصر ابتدای a است. حال مجموعه‌ی $U \setminus \{a\}$ را در نظر بگیرید. این کلاس نیز دارای عنصر ابتدای b نسبت به رابطه‌ی R است. بنابراین هر عنصر در U دارای *تالی*‌ای نسبت به رابطه‌ی R است. تالی هر عنصر a نسبت به رابطه‌ی R را می‌توان به‌صورت عنصر ابتدای کلاس $U \setminus (U_{(a)} \cup \{a\})$ درنظر گرفت. توجه داشته باشید که هر عنصری، دارای یک تالی است ولی لزوماً تالی عنصری دیگر نیست. به عناصری که تالی هیچ عنصری نباشند و همچنین بزرگترین عنصر کلاس نباشند، عنصر *حدی* می‌گوییم.

تعریف ۳. فرض کنید (U,R) و (V,R) دو خوش‌ترتیبی باشند و $V \subseteq U$. می‌گوییم V یک *بخش ابتدایی*[2] از U است هرگاه برای هر $x \in V$، $V_{(x)} = U_{(x)}$. به‌عبارتی دیگر برای هر $x \in V$ و هر $y \in U$، اگر yRx آنگاه $y \in V$. در نتیجهٔ زیر دلیل نامگذاری «بخش ابتدائی» روشن شده است.

نتیجه ۴. فرض کنید (U,R) خوش‌ترتیبی باشد. اگر V یک بخش ابتدایی از U باشد آنگاه یا $V = U$ یا $V = U_{(a)}$ برای یک $a \in U$.

اثبات. فرض کنید $V \neq U$. در این صورت $U \setminus V$ زیرکلاسی ناتهی از U است. بنابراین دارای عنصر ابتدا است. قرار دهید $a = \min_R(U \setminus V)$. ادعا می‌کنیم که $V = U_{(a)}$. فرض کنید $x \in V$. چون $a = \min_R(U \setminus V)$، پس xRa. حال چون V قسمت ابتدایی U است، پس $x \in V_{(a)} = U_{(a)}$. حال فرض کنید که $x \in V_{(a)} = U_{(a)}$، در این صورت xRa، پس $x \in V$. □

از آنجا که برای هر $a \in U$، $U_{(a)}$ یک بخش ابتدایی از U است (چرا؟)، بنابراین با توجه به نتیجه بالا بخش‌های ابتدایی کلاس U دقیقاً به‌صورت $U_{(a)}$ برای یک $a \in U$، هستند.

تعریف ۵. فرض کنید $\bar{U} = (U,R)$ و $\bar{V} = (V,S)$ دو خوش‌ترتیبی باشند. تابعال یک‌به‌یک و پوشای $F : (U,R) \to (V,S)$ را ایزومرفیسم [3] گوییم هرگاه برای هر دو عنصر x و y در U، داشته باشیم xRy اگر و تنها اگر $F(x)SF(y)$. در این صورت می‌گوییم $\bar{U}$ با $\bar{V}$ ایزومرف است.

اگر دو خوش‌ترتیبی $\bar{u} = (u,r)$ و $\bar{v} = (v,s)$ ایزومرف باشند، می‌نویسیم $\bar{u} \cong \bar{v}$.

[2] initial part
[3] isomorphism

قضیه ۶. فرض کنید $\bar{U} = (U, R)$ و $\bar{V} = (V, S)$ دو کلاس خوش‌ترتیب باشند. همچنین فرض کنید V با دو بخش ابتدایی از U ایزومرف باشد. در این صورت آن دو بخش ابتدایی با هم برابر هستند. به بیان دیگر، فرض کنید $F : \bar{V} \to \bar{U}$ و $G : \bar{V} \to \bar{U}$ دو ایزومرفیسم میان V و دو بخش ابتدایی U باشند. در این صورت برای هر $x \in V$، $F(x) = G(x)$.

اثبات. فرض کنید برای $a, b \in U$، $F : V \to U$ و $G : V \to U$. دو ایزومرفیسم باشند به طوری که $F[V]$ و $G[V]$ بخشهای اولیه‌ای از U باشند. دقت کنید که $F(\min V) = G(\min V) = \min U$. همچنین فرض کنید که مقادیر F روی $V_{(x)}$ را بدانیم. در این صورت

$$F(x) = \min(U - f[V_{(x)}]).$$

برای اثبات گفتهٔ بالا فرض کنید که $\min(U - f[V_{(x)}]) = y$. اگر $F(x)Ry$ اگر $yRF(x)$ آنگاه آنگاه عنصری کمتر از x باید وجود داشته باشد که F آن را به y ببرد. اما y خارج از $F[V_{(x)}]$ است. اگر $F(x)Ry$ آنگاه داریم $F(x) \in F[V_{(x)}]$ و این بنا به ایزومرفیسم بودن F ناممکن است.

حال فرض کنید $F[V] \neq G[V]$. بنابراین $x \in V$ چنان موجود است که $F(x) \neq G(x)$. در این صورت چون $\{x|F(x) \neq G(x)\}$ زیرکلاسی ناتهی از V است، پس دارای عنصر ابتدا است. قرار دهید $m = \min(\{x|F(x) \neq G(x)\})$. در این صورت $F[V_{(m)}] = G[V_{(m)}]$ و از این رو بنا به بند قبل، $F(m) = G(m)$ و این تناقض است. □

از اثبات نتیجه بالا مشاهده زیر را می‌توان نتیجه گرفت.

مشاهده ۷. دو خوش‌ترتیبی U و V ایزومرف هستند اگر و تنها اگر هر بخش ابتدایی از U با یک بخش ابتدایی از V ایزومرف باشد.

در ادامه‌ی درس، سعی داریم ترتیبی بین خوش‌ترتیبی‌ها تعریف کنیم به گونه‌ای که خوش‌ترتیب باشد.

تعریف ۸. فرض کنید $\bar{u}$ و $\bar{v}$ دو خوش‌ترتیبی باشند. در این صورت می‌گوییم $\bar{u}$ از $\bar{v}$ کوچکتر است و می‌نویسیم $\bar{u} < \bar{v}$ هرگاه $\bar{u}$ با یک بخش ابتداییِ سره از $\bar{v}$ ایزومرف باشد. به طور مشابه این تعریف را می‌توان برای کلاس‌ها تعمیم داد.

این رابطه، خاصیت پادبازتابی دارد:

نتیجه ۹. هیچ مجموعه‌ی خوش‌ترتیبی با یک بخش ابتداییِ سره‌ی خود ایزومرف نیست.

اثبات. فرض کنید $\bar{u}$ یک خوش‌ترتیبی باشد. در این صورت $\bar{u} \cong \bar{u}$. حال اگر برای یک $a \in u$ داشته باشیم $\bar{u} \cong \bar{u}_{(a)}$، در این صورت بنا به قضیه‌ی ۶، $\bar{u} = \bar{u}_{(a)}$ که تناقض است. □

به‌سادگی می‌توان نشان داد که این رابطه متعدی نیز است و در نتیجه این رابطه، یک ترتیب است. علاوه بر آن این رابطه، شبیه یک رابطه‌ی ترتیبِ خطی نیز است.

قضیه ۱۰. اگر $\bar{U}$ و $\bar{V}$ دو کلاس خوش‌ترتیب باشند، آنگاه یا $\bar{V} < \bar{U}$، یا $\bar{U} < \bar{V}$ و یا $\bar{U} \cong \bar{V}$.

اثبات. فرض کنید $\bar{U} = (U, R)$ و $\bar{V} = (V, S)$. قرار دهید $F = \{(a, b)|a \in U \wedge b \in V \wedge U_{(a)} \cong V_{(b)}\}$. چون دو کلاس U و V، خوش‌ترتیبی هستند، پس کلاس F ناتهی است (زیرا $(\min_R(U), \min_S(V)) \in F$). توجه کنید که بنابه قضیه‌ی ۱۰، F یک تابعال است. علاوه بر این، $D(F)$ یک بخش ابتدایی از U و همچنین $\mathrm{Wb}(F)$ نیز یک بخش ابتدایی از

V است. زیرا اگر $x \in D(F)$، آنگاه $U_{(x)} \cong V_{(F(x))}$. بنابراین اگر $y \in U$ و yRx، آنگاه $y \in U_{(x)}$ پس $y \in D(F)$. به طور مشابه هم می‌توان نشان داد که بُرد F نیز یک بخش ابتدایی از V است. حال اگر $D(F) = U$، در این صورت U با یک بخش ابتدایی از V ایزومرف است. همچنین اگر $\mathrm{Wb}(F) = V$، آنگاه V با یک بخش ابتدایی U ایزومرف است. حال اگر هم $D(F) \neq U$ و $\mathrm{Wb}(F) \neq V$، آنگاه قرار دهید $a = \min_R(U - D(F))$ و $b = \min_S(\mathrm{Wb}(F))$. در این صورت $D(F) = U_{(a)}$ و $\mathrm{Wb}(F) = V_{(b)}$. بنابراین $V_{(b)} \cong U_{(a)}$، به این معنی که $(a,b) \in F$. که این تناقض است، زیرا a کوچکترین عنصری از U بود که در دامنه‌ی F قرار نداشت. بنابراین دامنه یا بُرد F نمی‌توانند همزمان بخش ابتدایی باشند. پس یا $\bar{U} < \bar{V}$، یا $\bar{V} < \bar{U}$ و یا $\bar{U} \cong \bar{V}$. □

از این قضیه، نتیجه‌ی جالب زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱۱. در حد ایزومرفیسم، حداکثر یک کلاس سره‌ی خوش‌ترتیب موجود است. به بیان بهتر، دو کلاس خوش‌ترتیب سره‌ی غیرایزومرف وجود ندارد.

اثبات. فرض کنید U و V دو کلاس سره‌ی خوش‌ترتیب غیرایزومرف باشند، در این صورت یا $U < V$ و یا $V < U$. بدون کاسته شده از کلیت مساله، فرض کنید $U < V$. در این صورت $U \cong V_{(a)}$، برای یک $a \in V$. اما چنین چیزی امکان‌پذیر نیست، زیرا $V_{(a)}$ یک مجموعه است و طبق اصل جای‌گذاری نمی‌تواند با یک کلاسِ سره ایزومرف باشد. □

اما آیا حداقل یک کلاس سره‌ی خوش‌ترتیب وجود دارد؟ پاسخ این سوال را در ادامه درس خواهیم داد.

یکی از مهمترین قضایای این فصل، قضیه‌ی زیر است.

قضیه ۱۲ (اصل خوش‌ترتیبی). هر مجموعه را می‌توان خوش‌ترتیب کرد؛ یعنی روی هر مجموعهٔ داده شده می‌توان ترتیبی قرار داد که مجموعه‌ی مورد نظر با این ترتیب، خوش‌ترتیب باشد.

این قضیه بیان می‌کند که روی هر مجموعه می‌توان یک رابطه تعریف کرد که آن مجموعه را خوش‌ترتیب کند.

اثبات قضیه‌ی ۱۲. فرض کنید u مجموعه‌ای دلخواه باشد. فرض کنید f تابع انتخابی باشد که برای هر $a \subsetneq u$ عنصری خارج از a انتخاب می‌کند. یک مجموعه‌ی $a \subseteq u$ را یک مجموعه‌ی خوش‌ترتیبِ خوب بنامید هرگاه a خوش‌ترتیب باشد و همچنین

$$\forall x \in a \; x = f(a_{(x)}).$$

یعنی ترتیب را با استفاده از تابع انتخاب تعریف کرده‌ایم. به بیانی بهتر، اولین عنصر بعد از هر بخش ابتدایی، همانی باشد که تابع f انتخاب می‌کند.

لم ۱۳. اگر $a, b \subseteq u$ دو مجموعه‌ی خوش‌ترتیبِ خوب باشند، آنگاه یا a یک بخش ابتدایی b است یا b یک بخش ابتدایی a است.

اثبات. بنابه قضیه‌ی ۱۰ و بدون کاستن از کلیت، فرض کنید a با یک بخش ابتدایی b ایزومرف باشد. فرض کنید g این ایزومرفیسم باشد. نشان می‌دهیم که این ایزومرفیسم، تابع همانی است. از آنجایی‌که اولین عنصر a عنصری است که تابع انتخاب آن را خارج از مجموعه‌ی تهی انتخاب می‌کند و همین عنصر اولین عنصر b نیز است. در این صورت واضح است که ایزومرفیسم g روی این عنصر مانند تابع همانی عمل می‌کند. حال قرار دهید $x = \min\{x | g(x) \neq x\}$. در این صورت چون $x = f(a_{(x)}) = f(b_{(x)})$ و نیز $g[a_{(x)}] = g[b_{(x)}]$، پس $g(x) = x$. که تناقض است، بنابراین ایزومرفیسم g همان تابع همانی است که نتیجه می‌دهید a یک بخش ابتدایی از b است. □

لم ۱۴. فرض کنید $\{(a_i, r_i) | i \in I\}$ خانواده‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌هایی از u باشند که خوش‌ترتیبِ خوب هستند. در این صورت $(\bigcup a_i, \bigcup r_i)$ نیز یک مجموعه‌ی خوش‌ترتیبِ خوب است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $(\bigcup a_i, \bigcup r_i)$ یک ترتیبِ خطی است. برای این منظور فرض کنید $x \in \bigcup a_i$، بنابراین $x \in a_j$ برای یک $j \in I$. از آنجایی که $\neg(x, x) \in r_j$، پس $\neg(x, x) \in \bigcup r_i$. حال فرض کنید $x, y, z \in \bigcup a_i$ و $(x, y) \in \bigcup r_i$ و $(y, z) \in \bigcup r_i$. از آنجایی که برای هر دو زیرمجموعه‌ی خوبِ خوش‌ترتیب داریم که یکی از آنها زیرمجموعه‌ی دیگری است، بنابراین $j \in I$ موجود است به‌طوری که $x, y, z \in a_j$. پس $(x, y) \in r_j$ و $(y, z) \in r_j$. حال چون رابطه‌ی r_j خوش‌ترتیبی است، پس $(x, z) \in r_j$، بنابراین $(x, z) \in \bigcup r_i$. حال فرض کنید $x, y \in \bigcup a_i$، در این صورت با استدلالی مشابه، $x, y \in a_j$ برای یک $j \in I$. پس یا $(x, y) \in r_j$ یا $(y, x) \in r_j$. پس $(x, y) \in \bigcup r_i$ یا $(y, x) \in \bigcup r_i$. بنابراین رابطه‌ی $\bigcup r_i$ یک رابطه‌ی ترتیب خطی روی $\bigcup a_i$ است. حال نشان می‌دهیم که این رابطه‌ی ترتیب خوش‌ترتیب است. برای این منظور فرض کنید x زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\bigcup a_i$ باشد. در این صورت $x \cap a_{i_\circ} \neq \emptyset$ برای برخی از $i_\circ \in I$. در این صورت نشان می‌دهیم که $\min x = \min x \cap a_{i_\circ}$. برای این منظور نشان می‌دهیم که اگر x با دو مجموعه اشتراک داشته باشد، آنگاه کوچکترین عنصری که در اشتراک x با هر کدام از این مجموعه‌ها قرار دارد، با هم برابر است. بنابراین فرض کنید $x \cap a_i \neq \emptyset$ و $x \cap a_j \neq \emptyset$. با توجه به لم قبل یا $a_i \subset a_j$ یا $a_j \subset a_i$. بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید $a_i \subset a_j$، در این صورت $x \cap a_i \subset x \cap a_j$. حال چون $x \cap a_i \neq \emptyset$، پس $\min x \cap a_i = \min x \cap a_j$. پس $(\bigcup a_i, \bigcup r_i)$ یک خوش‌ترتیبی است.

اثبات خوش‌ترتیبِ خوب بودن، آخرین گام اثبات است. برای این منظور فرض کنید $x \in \bigcup a_i$، در این صورت از آنجایی که $x \in a_j$ برای یک $j \in I$، پس $x = f(a_{j_{(x)}})$. حال چون $a_j \subset \bigcup a_i$، پس $a_{j_{(x)}} = (\bigcup a_i)_{(x)}$. بنابراین $f(a_{j_{(x)}}) = f((\bigcup a_i)_{(x)})$. به این معنی که $(\bigcup a_i, \bigcup r_i)$ یک زیرمجموعه‌ی خوش‌ترتیبِ خوب است. □

حال ادعا می‌کنیم که $\bigcup a_i = u$. فرض کنید $u \setminus \bigcup a_i \neq \emptyset$. در این صورت تابع انتخاب می‌تواند خارج از $\bigcup a_i$ عنصری انتخاب کند. بنابراین یک زیرمجموعه‌ی خوش‌ترتیبِ خوب وجود دارد که $\bigcup a_i$ زیرمجموعه‌ی سره‌ای از آن است، که این تناقض است. زیرا $\bigcup a_i$ بزرگترین زیرمجموعه‌ی خوش‌ترتیبِ خوب از u است. پس $u = \bigcup a_i$ و $(u, \bigcup r_i)$ یک مجموعه‌ی خوش‌ترتیب است. □

در این قضیه نشان دادیم که از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها می‌توان اصل خوش‌ترتیبی را نتیجه گرفت.

$$\text{BG} \models \text{اصل خوش‌ترتیبی}$$

می‌توان از با استفاده ازاصول نظریه‌ی مجموعه‌ها به جز اصل انتخاب و همچنین اصل خوش‌ترتیبی، اصل انتخاب را اثبات کرد.

قضیه ۱۵. اصل انتخاب از اصل خوش‌ترتیبی و بقیه‌ی اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها اثبات می‌شود. به بیانی دیگر

$$\text{BG} - \text{اصل انتخاب} + \text{اصل خوش‌ترتیبی} \models \text{اصل انتخاب}.$$

اثبات. فرض کنید a یک مجموعه متشکل از مجموعه‌های ناتهی باشد. نشان می‌دهیم تابع $f : a \to \bigcup a$ چنان موجود است که برای هر $x \in a$، $f(x) \in a$. بنابه اصل خوش ترتیبی می‌توان $\bigcup a$ را خوش‌ترتیب کرد. حال برای هر $x \in a$، تعریف کنید $f(x) = \min x$. این تابع، را همان تابع انتخاب در نظر می‌گیریم. □

از دو قضیه‌ی بالا معادل بودن اصل انتخاب و اصل خوش‌ترتیبی حاصل می‌شود.

۲.۲ لم زُرن

اصل انتخاب صورت‌های معادل زیادی دارد که در اینجا ما به بیان یک صورت معادل آن، یعنی لم زُرن [۴] می‌پردازیم.

برای بیان لم زُرن به تعاریف زیر نیاز است.

تعریف ۱۶.

- فرض کنید (u, r) یک خوش‌ترتیبی باشد و $a \subseteq u$. در این صورت عنصر $b \in u$ را یک *کران بالا* برای a می‌نامیم هرگاه

$$\forall x(x \in a \to (x = b \vee (x, b) \in r).$$

- فرض کنید (u, r) یک مجموعه‌ی مرتبِ جزیی باشند، در این صورت می‌گوییم b عنصری *ماکسیمال* برای u است، هرگاه

$$\forall x \in u \quad \neg\big((b, x) \in r\big).$$

قضیه ۱۷ (لم زُرن). فرض کنید (a, r) یک مجموعه‌ی مرتبِ جزیی ناتهی باشد، به طوری که هر زیرمجموعه‌ی مرتبِ خطی (b, r) دارای یک کران بالا در a باشد. در این صورت مجموعه‌ی a دارای حداقل یک عنصر ماکسیمال است.

با استفاده از اصل انتخاب. اگر کران بالای یک مجموعه‌ی مرتب خطی در خودِ آن مجموعه باشد، این کران بالا، یک عنصر ماکزیمال است. پس فرض کنید کرانهای بالای هر زیرمجموعه‌ی خطی از a خارج از خود آن مجموعه باشد.

فرض کنید a دارای عنصر ماکسیمال نباشد. از آنجایی که هر زیرمجموعه‌ی مرتبِ خطی آن دارای کران بالا است، فرض کنید f تابعی باشد که برای هر زیرمجموعه‌ی مرتب خطی (زنجیر) کران بالایی خارج از آن مجموعه انتخاب می‌کند (اگر کران بالا به خود آن مجموعه تعلق داشته باشد، این کران بالا همان عنصر ماکسیمال است). یک زنجیر b را خوب می‌گوییم هرگاه یک زیرمجموعه‌ی خوش‌ترتیب از a باشد و همچنین هر $x \in b$، $x = f(b')$ برای یک $b' \in b$. حال مشابه اثبات اصل خوش‌ترتیبی، خانواده‌ی همه‌ی زنجیرهای خوب را در نظر بگیرید. در این صورت اگر اجتماع همه‌ی این زنجیرهای خوب را c بنامیم، در این صورت c نیز یک زنجیر خوب است. حال چون a عنصر ماکسیمال ندارد، پس کران بالای c در مجموعه‌ی c قرار ندارد. پس تابع انتخاب کران بالای این مجموعه را خارج از این مجموعه انتخاب می‌کند. یعنی اجتماع مجموعه‌ی c با این کران بالا، یک زنجیرِ خوب است که تناقض با بزرگترین زنجیرِ خوب بودن c دارد. پس a دارای یک عنصر ماکسیمال است. □

مشابهاً از لم زُرن می‌توان اصل انتخاب را نیز نتیجه گرفت.

قضیه ۱۸. لم زُرن اصل انتخاب را نتیجه می‌دهد.

$$\text{BG} - \text{اصل انتخاب} + \text{Zorn} \models \text{اصل انتخاب}$$

[4] Zorn's lemma

اثبات. فرض کنید a یک مجموعه باشد که از مجموعه‌های ناتهی تشکیل شده است. فرض کنید $x \in a$. در این صورت x مجموعه‌ای ناتهی است. عنصر $y \in x$ را درنظر بگیرید. قرار دهید $g = \{(x, y)\}$. در این صورت g یک تابع انتخاب جزئی است، یعنی تابع انتخابی است که دامنه‌ی آن کل مجموعه‌ی a نیست. قرار دهید

$$\mathcal{A} = \{g : x \to \bigcup a | x \subseteq a, \text{یک تابع انتخاب است } g\}.$$

مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ ناتهی است. رابطه‌ی $\leq$ را روی مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall g_1, g_2 \in \mathcal{A} \; g_1 \leq g_2 \iff g_1 \subseteq g_2.$$

دقت کنید که این رابطه، یک رابطه‌ی ترتیب جزئی است. حال فرض کنید $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ یک زنجیر دلخواه در $\mathcal{A}$ باشد. به این معنی که $(\mathcal{B}, \leq)$ یک رابطه‌ی ترتیبِ خطی است. ادعا می‌کنیم زنجیر $\mathcal{B}$ دارای یک کرانِ بالا در $\mathcal{A}$ است (اثبات: تمرین). بنابه لم زُرن، $\mathcal{A}$ دارای عنصر ماکسیمال f است. ادعا می‌کنیم که $f : a \to \bigcup a$ همان تابع انتخاب مورد نظر ما است. باید نشان دهیم که $D(f) = a$. فرض کنید $x \in a \setminus D(f)$. از آنجایی‌که x ناتهی است پس $y \in x$ را درنظر بگیرد. در این صورت $f \cup \{(x, y)\}$ یک تابع انتخاب جزئی است و همچنین در مجموعه‌ی $\mathcal{A}$ قرار دارد و همچنین $f \leq f \cup \{(x, y)\}$. که این متناقض با ماکسیمال بودن f دارد، پس $a = D(f)$. $\square$

۳.۲ تمرین

تمرین ۱. فرض کنید a یک مجموعه و $((u_i, r_i), i \in I)$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های خوش‌ترتیب a باشد به‌طوری که برای هر $i, j \in I$ یا u_i بخش ابتدایی u_j باشد، یا برعکس. نشان دهید که $(\bigcup u_i, \bigcup r_i)$ یک کلاس خوش‌ترتیب است و هر u_i یک بخش ابتدایی از $\bigcup u_i$ است.

تمرین ۲. ثابت کنید زنجیر $\mathcal{B}$ که در اثبات قضیه‌ی ۱۸ گفته شد، دارای کرانِ بالا در $\mathcal{A}$ است.

فصل ۳

اُردینال‌ها

۱.۳ معرفی اُردینالها

احتمالا از فصل گذشته به خاطر دارید که یکی از مهم‌ترین اصول نظریهٔ مجموعه‌ها، اصل خوش‌بنیادی است. نیز به طور غیر رسمی بیان کردیم که خوش‌بنیادی مجموعه‌ها قرار است بدین معنی باشد که از یک مجموعه، نتوانیم یک دنبالهٔ نزولیِ تعلقیِ نامتناهی تا مجموعه‌ی تهی پیدا کنیم. در چند فصل پیش رو، آثار این اصل را واکاوی کرده‌ایم تا بالاخره معنای عبارت بالا را به خوبی منتقل کنیم.

فرض کنید $\bar{u}$ یک خوش‌ترتیبی باشد، کانتور [1] عبارت زیر را به‌عنوان یک *اُردینال* [2] تعریف کرده بود:

$$\{\bar{v} | \bar{v} \cong \bar{u} \text{ و } \bar{v} \text{ یک خوش‌ترتیبی باشد}\}$$

مهمترین مشکل این تعریف این است که عبارت بالا نه یک مجموعه، که یک کلاس است و در نظر گرفتن این تعریف ما را وارد پیچیدگی‌های کلاسها می‌کند. زِرملو تعریفِ بهتری برای اُردینال ارائه داد که در ادامه آن را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱. فرض کنید $\bar{\alpha} = (\alpha, <)$ یک مجموعه‌ی خوش‌ترتیب باشد. خوش‌ترتیبی $\bar{\alpha}$ را یک اُردینال می‌نامیم هرگاه برای هر $\beta \in \alpha$ داشته باشیم

$$\alpha_{(\beta)} = \{x \in \alpha | x < \beta\} = \beta.$$

اُردینال‌ها را با حروف یونانی کوچک α، β و ... نشان می‌دهیم. چند نتیجهٔ فوری از تعریف بالا را در زیر آورده‌ایم.

نتیجه ۲.

۱. ترتیب روی α، همان رابطه‌ی $\in$ است. به بیانی دیگر،

$$\forall x, y \in \alpha (x < y \leftrightarrow x \in y).$$

۲. اگر $\beta \in \alpha$ آنگاه $\beta \subseteq \alpha$.

[1] Cantor
[2] Ordinal

۳. مجموعه‌ی α نسبت به رابطه‌ی تعلق، متعدی [۳] است. به بیانی دیگر اگر $\beta_1 \in \alpha$ و $\beta_2 \in \beta_1$ آنگاه $\beta_2 \in \alpha$.

اثبات. مورد اول به راحتی از تعریف نتیجه می‌شود. از آنجایی‌که $\beta = \{x \in \alpha | x < \beta\}$، پس $\beta \subseteq \alpha$. مورد سوم بیانی دیگر از مورد دوم است. $\square$

بنابراین می‌توان تعریف اردینال را به‌صورت زیر بازنوشت:

اُردینال یک مجموعه‌ی $(\alpha, \in)$ است به‌طوری که اولاً رابطه‌ی $\in$ روی مجموعه‌ی α متعدی است و ثانیاً این رابطه خوش‌بنیاد است.

با توجه به این بیان از اُردینال به نظر می‌رسد که مفهوم اُردینال با اصل خوش‌بنیادی رابطه‌ی بسیار نزدیکی دارد.

مشاهده ۳. کوچکترین عنصر هر اُردینال، مجموعه‌ی تهی است. همچنین کوچکترین عنصر غیرِتهی آن $\emptyset \cup \{\emptyset\}$ است. بنابراین تمام اعداد طبیعی دقیق، اُردینال هستند و همچنین عناصر ابتدایی هر اُردینالی، اعداد طبیعی دقیق هستند. علاوه بر این، اگر $\beta \in \alpha$، آنگاه اُردینالِ تالیِ بلافصلِ β، اُردینال $\beta \cup \{\beta\}$ است.

در فصل قبل بین مجموعه‌های خوش‌ترتیب رابطه‌ای را تعریف کردیم و دیدم که این رابطه نیز به نحوی خوش‌ترتیب است. بنابراین می‌توان بین اُردینال‌ها نیز ترتیبی تعریف کرد.

قضیه ۴. فرض کنید α و β دو اُردینال باشند. اگر α با یک بخش ابتدایی از β ایزومرف باشد، آنگاه α برابر با همان بخش ابتدایی است.

اثبات. فرض کنید $f : \alpha \to \beta$ یک ایزومرفیسم بین α و یک بخش ابتدایی از β باشد. در این صورت f کوچکترین عضو α را به کوچکترین عضو β می‌نگارد، یعنی $f(\emptyset) = \emptyset$. حال فرض کنید $x = \min\{x | f(x) \neq x\}$. در این صورت $f(x) = x$. بنابراین این ایزومرفیسم، نگاشت همانی است. پس α برابر با یک بخش ابتدایی از β است. $\square$

نتیجه ۵. اگر α و β دو اُردینال باشند، آنگاه یا $\beta < \alpha$ یا $\alpha < \beta$ یا $\alpha = \beta$. به بیانی دیگر، رابطه‌ی ترتیب روی اُردینال‌ها یک رابطه‌ی ترتیب خطی است.

توجه داشته باشید اگر α و β دو اُردینال باشند آنگاه $\beta < \alpha$ اگر و فقط اگر $\alpha \in \beta$. همچنین $\beta \leq \alpha$ اگر و فقط اگر $\alpha \subseteq \beta$.

نمادگذاری ۶. کلاس همه‌ی اُردینال‌ها را با On نشان می‌دهیم.

با توجه به مطالب گفته شده، $(\mathrm{On}, \in)$ یک کلاس مرتب است.

قضیه ۷ (بدون استفاده از اصل خوش‌بنیادی)**.** کلاس همه‌ی اُردینال‌ها با رابطه‌ی عضویت، $(\mathrm{On}, \in)$، یک کلاس خوش‌ترتیب است.

اثبات. ابتدا ویژگی‌های ترتیبِ خطی را بررسی می‌کنیم. بدون استفاده از اصل خوش‌بنیادی می‌دانیم که اگر α یک اُردینال باشد، آنگاه $\neg(\alpha \in \alpha)$. زیرا در غیر این صورت، α با یک بخش ابتدایی خودش ایزومرف است که تناقض است. اگر α، β و γ سه اُردینال باشند و $\alpha \in \beta$ و $\beta \in \gamma$، چون رابطه‌ی عضویت روی اُردینال‌ها متعدی است، پس $\alpha \in \gamma$. همچنین می‌دانیم که

[۳] به تعریف متعدی بودن دقت کنید و آن را با متعدی بودن یک رابطه اشتباه نگیرید. منظور از متعدی بودن در اینجا فقط این است که عناصرِ عناصرِ یک مجموعه، در آن باشند.

برای هر دو اُردینال α و β یا $\beta < \alpha$ یا $\alpha < \beta$ یا $\alpha = \beta$. با توجه به مطالب گفته شده در قبل از این قضیه، می‌توان رابطه‌ی $\in$ را با $<$ جایگزین کرد. اگر $\beta \in \mathrm{On}$ آنگاه $\mathrm{On}_{(\beta)} = \{x \in \mathrm{On} | x \in \beta\} = \beta$، پس $\mathrm{On}_{(\beta)}$ یک مجموعه است. حال فرض کنید $\emptyset \neq A \subseteq \mathrm{On}$. فرض کنید $\alpha \in \mathrm{On}$ و $A \cap \alpha \neq \emptyset$. در این صورت مشابه اثبات‌های قبلی می‌توان نشان داد که $\min(A \cap \alpha) = \min(A \cap \mathrm{On}) = \min A$. □

از این قضیه نتیجه می‌شود که On شبیه اُردینال‌ها است. اما آیا On یک اُردینال است؟ اگر On یک مجموعه باشد، پاسخ این سوال مثبت است. ولی، On یک کلاس سره است. زیرا در غیر این صورت، On یک اُردینال است و بنابراین $\mathrm{On} \in \mathrm{On}$. چنین چیزی با استفاده از اصل خوش‌بنیادی امکان‌پذیر نیست. در عین حال این که $On \in On$ بدون استفاده از اصل خوش‌بنیادی هم امکان‌پذیر نیست، زیرا در این صورت On با یک بخش ابتدایی سره‌ی خود ایزومرف است که چنین چیزی امکان‌پذیر نیست.

حال که On یک کلاسِ خوش‌ترتیبِ سره است. در فصل گذشته دیدیم که در حد ایزومرفیسم تنها یک کلاسِ سره‌یِ خوش‌ترتیب وجود دارد؛ آن کلاس همین کلاس On است.

نتیجه ۸ (بدون اصلِ خوش‌بنیادی). هر مجموعه‌ی خوش‌ترتیب با یک اُردینال ایزومرف است. به این اُردینال، نوعِ اُردینالی [۴] آن مجموعه گفته می‌شود و آن را با نماد Ot نشان می‌دهیم.

اثبات. فرض کنید (a, r) یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب باشد. در این صورت a با یک بخش ابتدائی سره از On ایزومرف است. هر بخش ابتدائی سره از On یک اُردینال است. □

تا اینجا از استفاده از اصل خوش‌بنیادی سر باز زدیم. اما اصل خوش‌بنیادی تعریف جذاب دیگری برای اردینالها فراهم می‌کند:

قضیه ۹. فرض کنید α یک مجموعه باشد. در این صورت موارد زیر با هم معادل‌اند (با فرض اصل خوش‌بنیادی):

۱. α یک اُردینال است.

۲. $(\alpha, \in)$ متعدی و همبند است.

متعدی بودن به این معنی است که اگر $\alpha \in \beta$ و $\beta \in \gamma$ آنگاه $\gamma \in \alpha$. همبندی به این معنی است که برای هر x و y در α، یا $y \in x$ یا $x \in y$ یا $x = y$.

اثبات. (۲ $\implies$ ۱) بدیهی است. فرض کنید $(\alpha, \in)$ متعدی و همبند باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که $(\alpha, \in)$ خوش‌ترتیبی است. فرض کنید $x \in \alpha$. در این صورت بنا به اصل خوش‌بنیادی، $\neg(x \in x)$. حال فرض کنید $\emptyset \neq a \subseteq \alpha$. در این صورت بنا به اصل خوش‌بنیادی عنصر $x \in a$ موجود است که $x \cap a = \emptyset$، در این صورت x کوچکترین عنصر a است. حال چون برای هر $x \in \alpha$،

$$\alpha_{(x)} = \{y \in \alpha | y \in x\} = \{y | y \in x\},$$

که تساوی آخر از متعدی بودن نتیجه می‌شود. پس α یک اُردینال است. □

با استفاده از اصل خوش‌بنیادی تعریف جالب‌تری می‌توان از اُردینال نوشت. در اثبات قضیهٔ زیر، استقراء خوش‌بنیادی به نحو زیبایی استفاده شده است.

[۴] ordinal type

قضیه ۱۰ (با فرض اصل خوش‌بنیادی). فرض کنید x یک مجموعه باشد. در این صورت x یک اُردینال است اگر و تنها اگر x و تمام عناصر موجود در x متعدی باشند.

اثبات. اگر x اُردینال باشد، آنگاه واضح است که x و تمام اعضای x متعدی هستند. حال فرض کنید x و تمام عناصر موجود در آن متعدی باشند. فرض کنید $y \in x$. در این صورت y متعدی است. اگر $z \in y$ در این صورت با توجه به متعدی بودن x، $z \in x$، پس z نیز متعدی است. با توجه به بیان دیگری که برای اصل خوش‌بنیادی داشتیم، فرض کنید برای هر $y \in x$ اگر از اینکه y و تمام مجموعه‌های موجود در آن متعدی هستند، نتیجه شود y اُردینال است. در این صورت x مجموعه‌ای از اُردینال‌هاست که متعدی است. بنابراین x هم‌بند است (چون همه‌ی اُردینال‌ها با هم قابل مقایسه هستند). حال از قضیه‌ی ۹، نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی x یک اُردینال است. $\square$

تعریف ۱۱. اُردینال β را *تالی*[5] گوییم هرگاه $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$ برای یک اُردینال α. همچنین به اُردینالِ ناصفری که تالی نباشد، *اُردینال حدی*[6] گوییم.

اما آیا اُردینالِ حدی وجود دارد؟ یا معادلاً آیا همه‌ی اُردینال‌هایِ ناصفر تالی هستند؟ در ادامه‌ی درس به این پرسش پاسخ خواهیم داد.

نمادگذاری ۱۲. با ω کلاس همهٔ اردینالهائی را نشان می‌دهیم که متعلق به همهٔ اردینالهای حدی هستند. یعنی کلاس اُردینال‌هایی که از همه‌ی اُردینال‌هایِ حدی (در صورت وجود) کوچکتر یا مساوی هستند.

توجه کنید که ω یک بخش ابتدایيِ On است. بنابراین اگر هیچ اُردینال حدی وجود نداشته باشد، آنگاه $\mathrm{On} = \omega$. همچنین اگر اُردینالِ حدی وجود داشته باشد، آنگاه ω کوچکترینِ آنها است. اما آیا اُردینالِ حدی وجود دارد؟ یا معادلاً آیا همه‌ی اُردینال‌هایِ ناصفر تالی هستند؟ در ادامه‌ی درس به این پرسش پاسخ خواهیم داد.

قضیه ۱۳. از اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی، وجود اُردینالِ حدی نتیجه می‌شود.

اثبات. فرض کنید a مجموعه‌ای باشد که در اصل اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی صدق کند، که بنابه این اصل چنین مجموعه‌ای وجود دارد. می‌دانیم که صفر در مجموعه‌ی a قرار دارد. کوچکترین اُردینالی را که از تمامی اُردینال‌های موجود در a بزرگتر است را α بنامید. نشان می‌دهیم که α یک اُردینال حدی است. اگر α اُردینال تالی باشد، در این صورت $\alpha = \beta \cap \{\beta\}$ برای یک β. توجه داشته باشید که β یا برابر با یک اُردینال در a است یا متعلق به یک اُردینال در مجموعه‌ی a. زیرا $\beta < \alpha$ و α کوچکترین اُردینالی است که از تمامی اُردینال‌های موجود در a بزرگتر است. اما این تناقض است، زیرا مجموعه‌ی a در شرایط اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی صادق است که در این صورت α نیز باید در مجموعه‌ی a باشد و همین‌طور $\alpha + ۱$. پس α نمی‌تواند تالی باشد. $\square$

از این قضیه، می‌توان معادلی برای اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی نوشت.

قضیه ۱۴. اصل وجود مجموعه‌ی متناهی معادل با مجموعه بودن ω است.

[5] successor
[6] limit ordinal

اثبات. فرض کنید a یک مجموعه باشد که در شرایط اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی صادق باشد. مشابه اثبات بالا، کوچکترین اُردینالی که از همه‌ی اُردینال‌های موجود در a بزرگتر است را α بنامید. طبق قضیه قبل، α یک اُردینال حدی است. بنابراین ω یک بخش ابتدایی سره از On است، پس ω یک اُردینال است و بنابراین یک مجموعه است. حال فرض کنید $\omega \in \mathbf{V}$. در این صورت ω در اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی صدق می‌کند. □

بنابراین با توجه به تعریف ω، می‌دانیم که $\ulcorner ۰ \urcorner \in \omega$، $\ulcorner ۱ \urcorner \in \omega$ و .... بنابراین $\{\ulcorner ۰ \urcorner, \ulcorner ۱ \urcorner, \ulcorner ۲ \urcorner, \ldots\} \subseteq \omega$. اما اینکه آیا اشیای دیگری نیز در مجموعه‌ی ω وجود دارد، سوالی است که از بحث فعلی درس خارج است. در بخشی از درس، به نام «اعداد طبیعی» دوباره به این بحث بازخواهیم گشت.

۲.۳ قضیهٔ بازگشت، استقراء فرامتناهی و حساب اُردینال‌ها

پیش از پرداختن به حساب اردینال‌ها (یعنی تعریف جمع، ضرب، و توان روی آنها) نیازمند معرفی استقرای فرامتناهی و قضیه‌ی بازگشت هستیم.

تعریف ۱۵ (استقرای فرامتناهی). اگر $p(۰)$ برقرار باشد و برای هر اُردینال α از برقراری $p(\beta)$ برای هر $\beta < \alpha$، برقراری $p(\alpha)$ نتیجه شود، آنگاه برای هر اُردینال α، $p(\alpha)$ برقرار است. به این گونه استقرا، *استقرای فرامتناهی*[7] گفته می‌شود.

بیان دیگری از استقرای متناهی به‌صورت زیر است:

فرض کنید p حکمی درباره‌ی اُردینال‌ها باشد، به‌طوری که شرط‌های زیر برقرار باشند.

۱. $p(۰)$ برقرار باشد.

۲. اگر $p(\alpha)$ درست باشد، آنگاه $p(\alpha + ۱)$ درست است.

۳. اگر α یک اُردینال حدی باشد و $p(\beta)$ برای همه‌ی $\beta \in \alpha$ درست باشد، آنگاه $p(\alpha)$ درست است.

در این صورت برای هر $\alpha \in \mathrm{On}$، $p(\alpha)$ برقرار است.

دقت کنید که استقراء فرامتناهی منجر به اثبات حکمی برای یک اردینال می‌شود. اما برای پیدا کردن یک تابع از کلاس همهٔ اردینالها، به چیزی بیش از استقرأ نیاز است.

قضیه ۱۶ (قضیه‌ی بازگشت[8]). فرض کنید $G : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ یک تابعال باشد. در این صورت تابعالِ یکتای $F : \mathrm{On} \to \mathbf{V}$ موجود است به‌طوری که برای هر $\alpha \in \mathrm{On}$ داریم $F(\alpha) = G(F \restriction_{\alpha})$.

اثبات. یکتایی: فرض کنید تابعال $F_۱$ و $F_۲$ موجود باشند به‌طوری که برای هر اُردینال α داشته باشیم $F_۱(\alpha) = G(F_۱ \restriction \alpha)$ و همچنین $F_۲(\alpha) = G(F_۲ \restriction \alpha)$. فرض کنید $F_۱ \neq F_۲$. بنابراین فرض کنید α کوچکترین اُردینالی باشد که $F_۱(\alpha) \neq F_۲(\alpha)$. در این صورت $F_۱(\alpha) = G(F_۱ \restriction \alpha) = G(F_۲ \restriction \alpha) = F_۲(\alpha)$. که تناقض است، پس در صورت وجود، یک تابعال یکتا وجود دارد.

وجود: ابتدا با استقرای فرامتناهی نشان می‌دهیم که برای هر اُردینال α، تابع $F : \alpha + ۱ \to \mathbf{V}$ موجود است به‌طوری که

[7] transfinite induction
[8] recursion theorem

برای هر $\beta \in \alpha + ۱$، حکم قضیه‌ی بازگشت برقرار باشد. قرار دهید $F(۰) = ۰$ و فرض کنید برای هر $\beta \in \alpha$ تابعال $f : \beta + ۱ \to \mathbf{V}$ با شرایط قضیه وجود دارد. قرار دهید

$$F = \bigcup_{\substack{f:\beta+۱\to\mathbf{V}\\ \beta\in\alpha}} f \cup \{\langle \alpha, G(\bigcup f)\rangle\}.$$

در این صورت تابعال $F : \alpha + ۱ \to \mathbf{V}$ همان تابعال مورد نظر است. حال تابعال F که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، در شرایط قضیه صدق می‌کند.

$$F = \bigcup_{\substack{f:\alpha+۱\to\mathbf{V}\\ \alpha\in\mathrm{On}}} f.$$

$\square$

معمولا کاربرد زیر از قضیه بالا مورد استفاده قرار می‌گیرد، که مشابها این قضیه‌ی زیر را می‌توان مانند قضیه‌ی فوق ثابت کرد.

قضیه ۱۷. فرض کنید $G_۱ : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ و $G_۲ : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ دو تابعال باشند. در این صورت تابعال یکتای $F : \mathrm{On} \to \mathbf{V}$ وجود دارد به‌طوری که $F(۰) = \alpha$، $F(\alpha + ۱) = G_۱(\alpha, f(\alpha))$ و برای اُردینال حدی γ، $F(\gamma) = G_۲(F \restriction_\gamma)$.

نتیجه‌ی زیر که یک تعمیم از قضیه‌ی بازگشت است را می‌توان به عنوان نتیجه‌ای از آن نیز درنظر گرفت.

قضیه ۱۸. فرض کنید $G : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ یک تابعال باشد. در این صورت تابعال یکتای $F : \mathbf{V} \times \mathrm{On} \to \mathbf{V}$ موجود است به‌طوری که $F(x, \alpha) = G(x, F_x \restriction \alpha)$ که جایی $F_x(\beta) = F(x, \beta)$. به طور معادل $F(x, \alpha) = G(x, \{(\beta, F(\beta)) | \beta \in \alpha\}$.

اثبات. برای هر $x \in \mathbf{V}$ تابعال یکتای $F_x : \mathrm{On} \to \mathbf{V}$ موجود است به‌طوری که $F_x(\alpha) = G(x, \{(\beta, F(\beta)) | \beta \in \alpha\}$.
حال قرار دهید $F = \bigcup F_x$. همان تابعال یکتا مورد نظر است. $\square$

از این قضیه‌ها برای تعریف حساب بر روی اُردینال‌ها استفاده می‌کنیم. با استفاده از قضیه‌ی بازگشت جمع اُردینال‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۹. جمع اُردینال‌ها یک تابعال $+ : \mathrm{On} \times \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ است که شرایط زیر را دارد.

۱. $\alpha + ۰ = \alpha$

۲. $\alpha + (\beta + ۱) = (\alpha + \beta) + ۱$

۳. برای اُردینال حدی γ،

$$\alpha + \gamma = \bigcup_{\beta\in\gamma} \alpha + \beta.$$

یا معادلا $\alpha + \bigcup_{\beta\in\gamma} \beta = \bigcup_{\beta\in\gamma} \alpha + \beta$.

به شرط سوم، پیوستگی تابع جمع گفته می‌شود.

برای اثبات این که تابعال جمع وجود دارد، تابعال $G : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ که $G(x) = x \cup \{x\}$ را در نظر بگیرید و قضیه‌ی بازگشت را برای این تابعال به‌کار ببرید.

بنابراین جمع اردینال‌ها را با استفاده از قضیه‌ی بازگشت (استقرا) تعریف کردیم.

تعریف ۲۰. ضرب اُردینال‌ها نیز با استفاده از قضیه‌ی بازگشت به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

۱. $\alpha \cdot 0 = 0$

۲. $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \beta$

۳. اگر γ یک اردینال حدی باشد، $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\beta \in \gamma} \alpha \cdot \beta$.

توجه شود که در تعریف ضرب اردینال‌ها از تابعال جمع استفاده شده است.

همچنین به‌طور مشابه توان اردینال‌ها با استفاده از قضیه‌ی بازگشت به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

۱. $\alpha^{0} = 1$

۲. $\alpha^{\beta+1} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha$

۳. برای اردینال حدی γ، $\alpha^{\gamma} = \bigcup_{\beta \in \gamma} \alpha^{\beta}$.

دقت شود که از تابعال جمع در تعریف توان استفاده شده است.

توجه کنید که این اعمال اردینال‌ها جابجایی نیست. برای مثال

$$1 + \omega = \bigcup_{n \in \omega} (1 + n) = \bigcup_{n \in \omega} n = \omega.$$

از طرفی دیگر، $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$. پس $1 + \omega = \omega \in \omega + 1$، به این معنی که $1 + \omega \neq \omega + 1$. همچنین

$$2 \cdot \omega = \bigcup_{n \in \omega} (2 \cdot n) = \bigcup_{n \in \omega} n = \omega.$$

از طرفی دیگر، $\omega \cdot 2 = \omega \cdot (1 + 1) = \omega + \omega$. پس $2 \cdot \omega = \omega < \omega + \omega = \omega \cdot 2$.

همچنین عمل ضرب روی عمل جمع از سمت چپ، پخش‌پذیری نیست. به‌طور مثال:

$$(1 + 1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega \neq \omega + \omega.$$

بنابراین می‌توان اُردینال‌ها را به‌صورت صعودی به‌صورت زیر در نظر گرفت.

$$0, 1, 2, \cdots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \cdots, \underbrace{\omega \cdot 2}_{\omega+\omega}, \omega \cdot 2 + 1, \cdots, \omega \cdot 3, \cdots, \underbrace{\omega^{2}}_{\omega \cdot \omega},$$

$$\omega^{2} + 1, \cdots, \omega^{2} + \omega, \cdots \omega^{2} + \omega \cdot 2, \cdots \omega^{2} + \omega \cdot 3, \cdots, \omega^{2} \cdot 2, \cdots \omega^{2} \cdot 3, \cdots, \omega^{3}, \cdots, \cdots, \omega^{\omega}, \cdots$$

دقت داشته باشید از هر اردینال نمی‌توان یک دنباله نزولی نامتناهی یافت. برای مثال با شروع از $\omega + \omega$، اردینال کمتر از آن به صورت $\omega + n$ است و از آن تا ω متناهی اردینال وجود دارد و هر اردینال کمتر از ω یک عدد طبیعی است که کمتر از آن هم متناهی اردینال وجود دارد، بنابراین از هر اردینال نمی‌توان دنباله‌ای نزولی از اردینال‌ها ساخت. این مشاهده را در ادامه‌ی این درس به‌طور دقیق بیان خواهیم کرد.

در قضیه‌ی زیر برخی ویژگی‌های مهم اردینال‌ها را لیست کرده‌ایم.

قضیه ۲۱. اعمال اردینال‌ها دارای خواص زیر هستند.

۱. $0 + \alpha = \alpha$

۲. $\alpha \cdot 1 = \alpha$

۳. $1 \cdot \alpha = \alpha$

۴. $\alpha^1 = \alpha$

۵. $0 \cdot \alpha = 0$

۶. برای اردینال $\alpha > 0$، $0^\alpha = 0$.

۷. $1^\alpha = 1$.

۸. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

۹. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

۱۰. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

۱۱. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta + \alpha^\gamma$

۱۲. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\alpha \cdot \gamma}$

اثبات. ۱. این حکم را با استفاده از استقرای فرامتناهی اثبات می‌کنیم. طبق تعریف عمل جمع $0 = 0 + 0$. حال فرض کنید $\alpha = \alpha + 0$، در این صورت طبق تعریف عمل جمع داریم

$$0 + (\alpha + 1) = (0 + \alpha) + 1 = \alpha + 1.$$

فرض کنید که γ اردینالی حدی باشد و برای هر $\gamma > \beta$ بدانیم که $\beta = \beta + 0$، در این صورت طبق تعریف

$$0 + \gamma = \bigcup_{\beta \in \gamma} 0 + \beta = \bigcap_{\beta \in \gamma} \beta = \gamma.$$

۲. طبق تعریف عمل ضرب داریم $\alpha \cdot 1 = \alpha \cdot (0 + 1) = \alpha \cdot 0 + \alpha = 0 + \alpha = \alpha$.

۳. با استفاده از استقرای فرامتناهی این حکم را ثابت می‌کنیم. طبق تعریف $0 = 0 \cdot 1$. همچنین

$$1 \cdot (\alpha + 1) = 1 \cdot \alpha + 1 = \alpha + 1$$

که تساوی آخر از فرض استقرا نتیجه می‌شود. حال فرض کنید γ اردینال حدی باشد و برای تمام اردینال‌های $\gamma > \beta$ بدانیم که $1 \cdot \beta = \beta$، طبق تعریف ضرب داریم

$$1 \cdot \gamma = \bigcup_{\beta \in \gamma} 1 \cdot \beta = \bigcup_{\beta \in \gamma} \beta = \gamma.$$

۴. طبق تعریف و موارد فوق داریم

$$\alpha^{0+1} = \alpha^0 \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

۵. این حکم را نیز با استقرای فرامتناهی نشان می‌دهیم. طبق تعریق $0 = 0 \cdot 0$. فرض کنید $0 = 0 \cdot \alpha$، در این صورت طبق تعریف عمل ضرب $0 = 0 + 0 \cdot \alpha = 0 \cdot (\alpha + 1)$. حال فرض کنید γ یک اردینال حدی باشد و برای هر $\gamma > \beta$ داشته باشیم $0 \cdot \beta = 0$، در این صورت

$$0 \cdot \gamma = \bigcup_{\beta \in \gamma} 0 \cdot \beta = \bigcup_{\beta \in \gamma} 0 = 0.$$

موارد ۶ و ۷ را با استقرای فرامتناهی و به‌طور مشابه اثبات می‌شوند.

۸. این حکم را با استقرای فرامتناهی بر روی γ ثابت می‌کنیم. با توجه به تعریف می‌دانیم که $\alpha + (\beta + \circ) = \alpha + \beta = (\alpha + \beta) + \circ$. فرض کنید $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$، در این صورت با استفاده از تعریف جمع داریم

$$(\alpha+\beta)+(\gamma+1) = ((\alpha+\beta)+\gamma)+1 = (\alpha+(\beta+\gamma))+1 = \alpha+((\beta+\gamma)+1) = \alpha+(\beta+(\gamma+1)).$$

حال فرض کنید γ یک اردینال حدی باشد و برای $\delta < \gamma$ بدانیم که $(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta)$ در این صورت با توجه به تعریف جمع اردینال‌ها داریم

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \bigcup_{\delta\in\gamma}((\alpha + \beta) + \delta) = \bigcup_{\delta\in\gamma}(\alpha + (\beta + \delta)) = \alpha + \bigcup_{\delta\in\gamma}(\beta + \delta) = \alpha + (\beta + \gamma).$$

۹. تمرین.

۱۰. این حکم را نیز با استقرای فرامتناهی بر روی γ ثابت می‌کنیم. با توجه به تعریف جمع و ضرب داریم $\alpha \cdot (\beta + \circ) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \circ$. حال فرض کنید که حکم برای اردینال γ برقرار باشد، در این صورت طبق تعریف عمل جمع و ضرب و موارد فوق داریم

$$\alpha\cdot(\beta+(\gamma+1)) = \alpha\cdot((\beta+\gamma)+1) = \alpha\cdot(\beta+\gamma)+\alpha = (\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma)+\alpha = \alpha\cdot\beta+(\alpha\cdot\gamma+\alpha) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot(\gamma+1).$$

حال فرض کنید که γ یک اردینال حدی باشد و برای هر $\delta < \gamma$ داشته باشیم $\alpha \cdot (\beta + \delta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta$. در این صورت طبق این فرض و تعریف عمل جمع و ضرب و موارد فوق داریم

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot(\bigcup_{\delta\in\gamma}(\beta+\delta)) = \bigcup_{\delta\in\gamma}(\alpha\cdot(\beta+\delta)) = \bigcup_{\delta\in\gamma}(\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta) = \alpha\cdot\beta+\bigcup_{\delta\in\gamma}(\alpha\cdot\delta) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.$$

موارد ۱۱ و ۱۲ نیز به‌صورت مشابه با استقرای فرامتناهی اثبات می‌شوند.

$\square$

توجه کنید که اعمال اعداد طبیعی نیز در این تعریف اعمال اردینال‌ها نهفته است.

۳.۳ معنای اعمال بر روی اردینال‌ها

در بخش قبلی، اعمال اردینالها را به صورت استقرائی تعریف کردیم. در این بخش از آنجایی‌که هر مجموعه با یک اردینال ایزومرف است، در این زیر بخش می‌خواهیم اعمال اردینال‌ها را با مجموعه‌ها بیان کنیم. بدین معنی که اگر بدانیم که مجموعه‌ی x با اردینال α ایزومرف و مجموعه‌ی y با اردینال β ایزومرف است، آنگاه کدام مجموعه‌ها با اردینال‌های $\alpha + \beta$، $\alpha \cdot \beta$ و α^β ایزومرفند. برای این منظور از لم کاربردی زیر استفاده خواهیم کرد.

لم ۲۲. فرض کنید α یک اردینال و $f : \alpha \to \mathrm{On}$ یک تابع اکیدا صعودی باشد. در این صورت برای هر $\beta \in \alpha$، داریم $\beta \leq f(\beta)$

اثبات. با استقرای فرامتناهی بر روی β حکم را ثابت می‌کنیم. واضح است که $\circ \leq f(\circ)$. فرض کنید برای $\beta' \in \alpha$، $\beta' \leq f(\beta')$. از طرفی f تابعی اکیداً صعودی است، پس $f(\beta') < f(\beta' + 1)$. بنابراین $\beta' < f(\beta' + 1)$ و لذا

$f(\beta'+۱) \leq \beta'+۱$. حال فرض کنید $\beta \in \alpha$ یک اردینال حدی باشد و برای هر $\beta' \in \beta$ بدانیم که $\beta' \leq f(\beta')$. حال از آنجایی‌که f تابعی صعودی است، پس $f(\beta') < f(\beta)$ برای هر $\beta' \in \beta$. پس

$$\bigcup_{\beta' \in \beta} \beta' \leq \bigcup_{\beta' \in \beta} f(\beta') \leq f(\beta).$$

$\square$

۱.۳.۳ معنای جمع اردینال‌ها

در این بخش خواهیم دید که جمع دو اردینالِ به صورت $\alpha+\beta$ اردینالی است که از قرار گرفتن β پس از α ایجاد می‌شود. برای این منظور، ابتدا چند لم مورد نیاز را بیان می‌کنیم.

لم ۲۳. جمع اردینال‌ها در درایه‌ی دوم، اکیداً صعودی است. به این معنی که برای هر اردینال‌های α، β و γ، اگر $\beta < \gamma$ آنگاه $\alpha+\beta < \alpha+\gamma$.

اثبات. طبق تعریف می‌دانیم که $\alpha+\beta < \alpha+(\beta+۱)$. حال فرض کنید اگر $\beta < \beta'$، آنگاه $\alpha+\beta < \alpha+\beta'$. همچنین فرض کنید $\beta < \beta'+۱$، در این صورت $\beta \leq \beta'$. اگر $\beta < \beta'$، آنگاه طبق فرض استقرا $\alpha+\beta < \alpha+\beta' < (\alpha+\beta')+۱ = \alpha+(\beta'+۱)$. همچنین اگر $\beta = \beta'$ آنگاه $\alpha+\beta = \alpha+\beta' < (\alpha+\beta')+۱ = \alpha+(\beta'+۱)$. حال فرض کنید $\beta < \gamma$ و γ حدی باشد و فرض کنید برای هر $\beta' \in \gamma$، اگر $\beta < \beta'$ آنگاه $\alpha+\beta < \alpha+\beta'$. فرض کنید $\beta < \gamma = \bigcup_{\beta' \in \gamma} \beta'$. بنابراین اردینالی مانند $\beta' \in \gamma$ وجود دارد که $\beta < \beta'$. زیرا برای تمام اردینال‌های $\beta' \in \gamma$ نمی‌توانند همگی بخش ابتدایی از β باشند (زیرا در غیر این صورت تناقض با $\beta < \gamma$ دارد). حال چون $\beta < \beta'$، طبق فرض استقرا

$$\alpha+\beta < \alpha+\beta' \leq \bigcup_{\beta' \in \gamma} (\alpha+\beta') = \alpha+\gamma.$$

$\square$

قضیه ۲۴. اگر $\alpha \leq \gamma$، آنگاه اردینال یکتای β موجود است که $\gamma = \alpha+\beta$.

اثبات. قرار دهید $S = \{\beta' | \alpha+\beta' \leq \gamma\}$. مجموعه‌ی S مجموعه‌ای از اردینال‌ها است که دارای کران بالا مثلا γ است. زیرا برای هر $\beta' \in S$، همواره $\alpha+\beta' \leq \gamma = ۰+\gamma \leq \alpha+\gamma$. قرار دهید $\beta = \sup S$. ادعا می‌کنیم که $\alpha+\beta \leq \gamma$. زیرا در غیراین صورت، $\gamma < \alpha+\beta = \alpha+\sup S$. بنابراین $\beta' \in S$ موجود است که $\gamma < \alpha+\beta'$، که تناقض است. حال ادعا می‌کنیم که $\alpha+\beta = \gamma$. فرض کنید $\alpha+\beta < \gamma$، در این صورت $\alpha+(\beta+۱) \leq \gamma$. بنابراین $\beta+۱ \in S$ که با سوپریمم بودن β تناقض دارد. حال نشان می‌دهیم که یکتا است. فرض کنید $\alpha+\beta_۱ = \gamma$ و $\alpha+\beta_۲ = \gamma$ و $\beta_۱ \neq \beta_۲$. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $\beta_۱ < \beta_۲$. چون عمل جمع در درایه‌ی دوم صعودی اکید است، پس $\gamma = \alpha+\beta_۱ < \alpha+\beta_۲ = \gamma$، که تناقض است. $\square$

قضیه‌ی بالا نتیجه‌ی جالب زیر که همان معنای عمل جمع اردینال‌ها است، را به ارمغان می‌آورد.

نتیجه ۲۵ (معنای جمع اردینال‌ها). فرض کنید α و β دو اردینال باشند. مجموعه‌ی $(\alpha \times \{۰\}) \cup (\beta \times \{۱\})$ را با رابطه‌ی زیر درنظر بگیرید.

$$(x, y) < (x', y') \iff (y < y' \vee (y = y' \wedge x < x'))$$

در این صورت $((\alpha \times \{۰\}) \cup (\beta \times \{۱\}), <)$ با اردینال $\alpha + \beta$ ایزومرف است. به بیانی دیگر

$$\mathrm{Ot}((\alpha \times \{۰\}) \cup (\beta \times \{۱\}), <) = \alpha + \beta.$$

اثبات. نگاشت $f : \alpha + \beta \to (\alpha \times \{۰\} \cup \beta \times \{۱\}, <)$ را با ضابطه‌ی زیر درنظر بگیرید.

$$f(\gamma) = \begin{cases} (\gamma, ۰) & \gamma \in \alpha \\ (\beta', ۱) & \gamma = \alpha + \beta' \end{cases}$$

اثبات ایزومرفیسم بودن f را به عهده خواننده واگذار می‌کنیم. □

۲.۳.۳ معنای ضرب اردینال‌ها

مشابه تعریف معنای جمع اردینال‌ها، برای بیان معنای ضرب اردینال‌ها نیز ابتدا چند لم بیان می‌کنیم. **در این بخش خواهیم دید که یک حاصلضرب به صورت $\alpha \cdot \beta$ از قرار دادن β طبقه از اردینالِ α ایجاد می‌شود.**

لم ۲۶. عمل ضرب اردینال‌ها در درایه‌ی دوم، اکیداً صعودی است. به این معنی که برای اردینال ناصفر α، اگر $\beta < \beta'$ آنگاه $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \beta'$.

اثبات. با استفاده از استقرای فرامتناهی بر روی اردینال β' حکم را نشان می‌دهیم. ابتدا با توجه به لم ۲۳ داریم $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot (\beta + ۱) = \alpha \cdot \beta + \alpha$. حال فرض کنید برای اردینال β'، اگر $\beta < \beta'$ آنگاه $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \beta'$. همچنین فرض کنید $\beta < \beta' + ۱$. در این صورت $\beta \leq \beta'$. اگر $\beta < \beta'$، آنگاه طبق فرض استقرا پس $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \beta' < \alpha \cdot (\beta' + ۱)$. اگر $\beta = \beta'$، آنگاه $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta' < \alpha \cdot (\beta' + ۱)$. حال فرض کنید β' یک اردینال حدی باشد و برای هر $\gamma \in \beta'$ داشته باشیم که اگر $\beta < \beta'$ آنگاه $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$. فرض کنید $\beta < \beta' = \bigcup_{\gamma \in \beta'} \gamma$. در این صورت $\beta \in \bigcup_{\gamma \in \beta'} \gamma$، پس $\beta < \gamma$ برای یک $\gamma \in \beta'$. اما فرض استقرا نتیجه می‌دهد که $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$. پس $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma \leq \bigcup_{\gamma \in \beta'} (\alpha \cdot \gamma) = \alpha \cdot \beta'$. □

الگوریتم تقسیم برای اردینال‌ها برقرار است. این حکم را در لم زیر مشاهده می‌کنید.

قضیه ۲۷. فرض کنید $\alpha \geq \gamma$، در این صورت اردینال‌های منحصر بفرد β و μ چنان موجودند که $\gamma = \alpha \cdot \beta + \mu$ که $\mu < \alpha$.

اثبات. قرار دهید $S = \{\beta' | \alpha \cdot \beta' \leq \gamma\}$. از آنجایی‌که خود اردینال γ یک کران بالا برای این مجموعه است، پس این مجموعه کران‌دار است و قرار دهید $\beta = \sup S$. ادعا می‌کنیم که $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$. زیرا در غیر این صورت، $\gamma < \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \sup S$. پس $\beta' \in S$ وجود دارد که $\gamma < \alpha \cdot \beta'$، که این تناقض است. حال چون $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$، طبق لم ۲۶ $\gamma = \alpha \cdot \beta + \mu$. ابتدا توجه داشته باشید که $\mu < \alpha$. زیرا در غیر این صورت طبق لم ۲۶، $\mu = \alpha + \beta'$ آنگاه $\gamma = \alpha \cdot \beta + (\alpha + \beta') = \alpha \cdot (\beta + ۱) + \beta'$ که این تناقض با سوپریمم بودن β دارد. حال ادعا می‌کنیم که β و μ به‌صورت یکتا مشخص می‌شوند. فرض کنید $\gamma = \alpha \cdot \beta_۱ + \mu_۱$

که $\alpha > \mu_1$ و $\mu_2 > \alpha$ که $\gamma = \alpha \cdot \beta_2 + \mu_2$. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید که $\beta_1 > \beta_2$. در این صورت $\beta_2 = \beta_1 + \beta'$. بنابراین

$$\alpha \cdot \beta_2 + \mu_2 = \alpha \cdot (\beta_1 + \beta') + \mu_2 = \alpha \cdot \beta_1 + (\alpha \cdot \beta' + \mu_2).$$

از طرفی دیگر، چون $\mu_1 > \alpha$ و همچنین چون عمل ضرب و جمع در درایه‌ی دوم اکیداً صعودی است، داریم

$$\mu_1 < \alpha \cdot \beta' < \alpha \cdot \beta' + \mu_2.$$

پس

$$\gamma = \alpha \cdot \beta_1 + \mu_1 < \alpha \cdot \beta_1 + (\alpha \cdot \beta' + \mu_2) = \alpha \cdot \beta_2 + \mu_2 = \gamma$$

که تناقض است. پس β یکتا است. حال طبق قضیه‌ی ۲۴، μ نیز یکتا است. □

نتیجه ۲۸ (معنای ضرب اردینال‌ها)**.** نوع اردینالی مجموعه‌ی $\alpha \times \beta$ با رابطه‌ی ترتیب عکسِ قاموسی

$$(x, y) < (x', y') \iff (y < y') \vee (y = y' \wedge x < x')$$

اردینال $\alpha \cdot \beta$ است. به بیانی دیگر $\mathrm{Ot}(\alpha \times \beta, <) = \alpha \cdot \beta$.

اثبات. قرار دهید نگاشت $f : \alpha \cdot \beta \to \alpha \times \beta$ به طوری که برای هر $\gamma \in \alpha \cdot \beta$ $f(\gamma) = (\mu, \beta')$ که $\gamma = \alpha \cdot \beta' + \mu$. توجه داشته باشید که γ طبق قضیه‌ی قبل به‌صورت یکتا به این صورت نوشته می‌شود. بنابراین نگاشت فوق یک تابع است. تحقیق ایزومرفیسم بودن این تابع را به‌عهده خواننده واگذار می‌کنیم. □

توجه کنید که عمل ضرب اردینال‌ها روی درایه‌ی اول صعودی (و نه اکید) است.

۳.۳.۳ معنای توان اردینال‌ها

در این بخش خواهیم دید که α^β تایپ اردینالی مجموعهٔ توابعی از β به α است که تقریباً همه‌جا صفرند. مشابه دو عمل دیگر، برای بیان معنای توان اردینال‌ها، ابتدا چند لم را بیان می‌کنیم.

لم ۲۹. توان اردینال‌ها در درایه‌ی دوم اکیداً صعودی است. به این معنی که اگر $\beta' > \beta$، آنگاه $\alpha^{\beta'} > \alpha^\beta$.

اثبات. با استقرای فرامتناهی روی β' حکم را ثابت می‌کنیم. ابتدا فرض کنید $\beta + 1 > \beta$، در این صورت طبق تعریف عمل توان داریم $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$. حال چون عمل ضرب در درایه‌ی دوم صعودی است داریم

$$\alpha^\beta < \alpha^\beta \cdot \alpha = \alpha^{\beta+1}.$$

حال فرض کنید اگر $\beta' > \beta$ آنگاه $\alpha^{\beta'} > \alpha^\beta$. فرض کنید $\beta' + 1 > \beta$. در این صورت $\beta' \leq \beta$. اگر $\beta' > \beta$، آنگاه طبق فرض استقرا $\alpha^{\beta'} > \alpha^\beta$ و چون ضرب اردینال‌ها در درایه‌ی دوم اکیدا صعودی است پس $\alpha^{\beta'} < \alpha^{\beta'} \cdot \alpha = \alpha^{\beta'+1}$ و بنابراین $\alpha^{\beta'+1} > \alpha^\beta$. حال اگر $\beta' = \beta$، در این صورت چون عمل ضرب اردینال‌ها در درایه‌ی دوم صعودی است، پس $\alpha^\beta = \alpha^{\beta'} < \alpha^{\beta'} \cdot \alpha = \alpha^{\beta'+1}$. حال فرض کنید β' یک اردینال حدی باشد و برای هر اردینال $\gamma < \beta'$ داشته باشیم که اگر $\gamma > \beta$ آنگاه $\alpha^\gamma > \alpha^\beta$. همچنین فرض کنید $\beta' = \bigcup_{\gamma \in \beta'} \gamma > \beta$. پس $\gamma \in \beta'$ موجود است که $\gamma > \beta$. حال طبق فرض استقرا داریم $\alpha^\gamma > \alpha^\beta$. از طرفی دیگر $\alpha^\gamma \leq \bigcup_{\gamma \in \beta'} \alpha^\gamma = \alpha^{\beta'}$. پس $\alpha^\beta < \alpha^{\beta'}$. □

همان‌طور که در اعداد طبیعی هر عدد را در مبنای عددی داده شده نوشت، مثلا $۱۲ = ۱\cdot ۲^۳ + ۱\cdot ۲^۲ + ۰\cdot ۲^۱ + ۰\cdot ۲^۰$. در اردینال‌ها هم همین ویژگی برقرار است.

قضیه ۳۰. فرض کنید اردینال α داده شده باشد. در این صورت برای هر اردینال γ، اردینال‌های یکتای β، $\mu < \alpha$ و $\delta < \alpha^\beta$ موجود هستند به طوری که $\gamma = \alpha^\beta \cdot \mu + \delta$.

اثبات. قرار دهید $S = \{\beta' | \alpha^{\beta'} \leq \gamma\}$. مجموعه‌ی S از بالا کراندار است زیرا γ یک کران بالا برای این مجموعه است. بنابراین دارای سوپریمم است. قرار دهید $\sup S = \beta$. ادعا می‌کنیم که $\alpha^\beta \leq \gamma$. زیرا درغیر این صورت $\gamma < \alpha^\beta$. پس $\beta' \in S$ موجود است که $\gamma \leq \alpha^{\beta'}$ که تناقض است. حال بنابر قضیه‌ی ۲۴ اردینال‌های μ و $\delta < \alpha^\beta$ چنان موجوداند که $\gamma = \alpha^\beta \cdot \mu + \delta$. اما $\mu < \alpha$. زیرا در غیراین صورت طبق قضیه‌ی ۱۶ $\mu = \alpha + \mu'$ برای یک اردینال $۰ \leq \mu'$. بنابراین $\alpha^\beta \cdot \mu = \alpha^\beta \cdot (\alpha + \mu') = (\alpha^\beta \cdot \alpha) + (\alpha^\beta \cdot \mu') = \alpha^{\beta+۱} + (\alpha^\beta \cdot \mu')$. بنابراین $\beta + ۱ \in S$، که تناقض با کران بالا بودن β برای مجموعه‌ی S دارد. حال یکتایی این اردینال‌ها را نشان می‌دهیم. فرض کنید $\mu_۱ < \alpha$ و $\delta < \alpha^\beta$ و $\gamma = \alpha^{\beta_۱} \cdot \mu_۱ + \delta_۱$. همچنین $\gamma = \alpha^{\beta_۲} \cdot \mu_۲ + \delta_۲$ برای یک $\mu_۲ < \alpha$ و $\delta_۲ < \alpha^\beta$.

بدون کاسته‌شدن از کلیت، فرض کنید $\beta_۱ < \beta_۲$. در این صورت طبق قضیه‌ی ۱۶ $\beta_۲ = \beta_۱ + \beta'$ برای یک $\beta' \geq ۱$. در این صورت

$$\gamma = \alpha^{\beta_۲} \cdot \mu_۲ + \delta_۲ = \alpha^{\beta_۱ + \beta'} \cdot \mu_۲ + \delta_۲ = (\alpha^{\beta_۱} \cdot \alpha^{\beta'}) \cdot \mu_۲ + \delta_۲ = \alpha^{\beta_۱} \cdot (\alpha^{\beta'} \cdot \mu_۲) + \delta_۲.$$

از آنجایی‌که $\delta_۱ < \alpha^{\beta_۱}$ و عمل جمع در درایه‌ی دوم صعودی اکید است، پس

$$\alpha^{\beta_۱} \cdot \mu_۱ + \delta_۱ < \alpha^{\beta_۱} \cdot \mu_۱ + \alpha^{\beta_۱} = \alpha^{\beta_۱} \cdot (\mu_۱ + ۱). \quad (۱.۳)$$

از طرفی دیگر $\mu_۱ + ۱ \leq \alpha \leq \alpha^{\beta'} < \alpha^{\beta'} \cdot \mu_۲$. حال چون عمل ضرب در درایه‌ی دوم صعودی اکید است، پس

$$\alpha^{\beta_۱} \cdot (\mu_۱ + ۱) < \alpha^{\beta_۱} \cdot (\alpha^{\beta'} \cdot \mu_۲) \leq \alpha^{\beta_۱} \cdot (\alpha^{\beta'} \cdot \mu_۲) + \delta_۲ = \gamma. \quad (۲.۳)$$

توجه کنید که در نامساوی آخر از صعودی اکیدا بودن عمل جمع در درایه‌ی دوم و $\delta_۲ \geq ۰$ استفاده کرده‌ایم. اما با ترکیب رابطه‌ی (۱.۳) و رابطه ی (۲.۳) داریم $\gamma = \alpha^{\beta_۱} \cdot \mu_۱ + \delta_۱ < \alpha^{\beta_۱} \cdot (\mu_۱ + ۱) < \gamma$، که تناقض است. پس اردینال β یکتا است. حال قضیه‌ی ۲۷، یکتایی اردینال‌های μ و δ را نتیجه می‌دهد. $\square$

لم ۳۱. برای اردینال α داده شده، هر اردینال γ دارای نمایشی یکتا در مبنای α به‌صورت زیر است.

$$\gamma = \alpha^{\beta_۱} \cdot \mu_۱ + \cdots + \alpha^{\beta_n} \cdot \mu_n$$

که در آن n یک عدد طبیعی، $\beta_۱ > \ldots > \beta_n$ و $\mu_i < \alpha$.

اثبات. با استقرا روی اردینال γ، حکم را ثابت می‌کنیم. اگر $\gamma = ۱$ که حکم بدیهی است. فرض کنید برای اردینال‌های $\gamma' < \gamma$ چنین نمایش یکتایی داشته باشیم. حال طبق قضیه‌ی بالا اردینال‌های یکتای β، $\mu < \alpha$ و $\delta < \alpha^\beta$ چنان موجودند که $\gamma = \alpha^\beta \cdot \mu + \delta$. حال چون $\delta < \alpha^\beta$، پس $\delta < \gamma$ و فرض استقرا حکم را نتیجه می‌دهد. $\square$

نتیجه ۳۲. هر اردینال γ دارای نمایش یکتای زیر است.

$$\gamma = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot n_k$$

که به این نمایش صورت نرمال کانتور [9] می‌گویند.

نمادگذاری ۳۳. فرض کنید α و β دو اردینال باشند. مجموعه‌ی همه‌ی $f : \beta \to \alpha$ که در حداکثر تعداد متناهی عنصر ناصفر است (تقریبا همه‌جا [10] صفر)، را با نماد $\mathrm{AZ}({}^{\beta}\alpha)$ نشان می‌دهیم. همچنین برای تابع $f \in \mathrm{AZ}({}^{\beta}\alpha)$ تعریف می‌کنیم $\mathrm{supp}(f) = \{\gamma \in \beta | f(\gamma) \neq 0\}$. توجه داشته باشید که این مجموعه متناهی است.

فرض کنید توابع f_1 و f_2 دو تابع در مجموعه‌ی $\mathrm{AZ}({}^{\beta}\alpha)$ باشند. در این صورت قرار دهید

$$\delta = \max\{\gamma \in \beta | f_1(\gamma) \neq f_2(\gamma)\}.$$

در این صورت تعریف می‌کنیم $f_1 < f_2$ هرگاه $f_1(\delta) < f_2(\delta)$. مجموعه‌ی $\mathrm{AZ}({}^{\beta}\alpha)$ با این رابطه خوش‌ترتیب است.

نتیجه ۳۴. برای اردینال‌های α و β، $\mathrm{Ot}(\mathrm{AZ}({}^{\beta}\alpha), <) = \alpha^{\beta}$. که رابطه‌ی $<$ همان رابطه‌ای است که در بالا تعریف شده است.

اثبات. نگاشت $F : \mathrm{AZ}({}^{\beta}\alpha) \to \alpha^{\beta}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F(f) = \sum_{\gamma \in \mathrm{supp}(f)} \alpha^{\gamma} \cdot f(\gamma).$$

دقت کنید که نگاشت فوق یک تابع یک‌به‌یک و پوشا است. حال با توجه به تعریف رابطه‌ی ترتیب روی مجموعه‌ی $\mathrm{AZ}({}^{\beta}\alpha)$، این نگاشت حافظ ترتیب نیز است، پس نگاشت F یک ایزومرفیسم است (تمرین). $\square$

۴.۳ تمرین

تمرین ۱. نشان دهید اگر α یک اُردینال باشد، آنگاه $\alpha \cup \{\alpha\}$ اولین اُردینال بعد از α است.

تمرین ۲. نشان دهید اگر $(\alpha_i)_{i \in I}$ یک خانواده از اُردینال‌ها باشد که اندیس I در آن یک مجموعه است، آنگاه $\bigcup \alpha_i$ کوچکترین اُردینالی است که از همه‌ی α_iها بزرگتر یا مساوی است، بعبارتی دیگر

$$\sup\{\alpha_i | i \in I\} = \bigcup_{i \in I} \alpha_i.$$

تمرین ۳. نشان دهید که ω کوچکترین اُردینالِ حدی است.

تمرین ۴. استقرای اعداد طبیعی، استقرای فرامتناهی و بیان دیگر استقرای فرامتناهی را ثابت کنید.

تمرین ۵. فرض کنید α یک اُردنیال حدی باشد، نشان دهید $\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta$. همچنین آیا چنین حکمی برای اُردینال‌های تالی نیز برقرار است؟

[9] Cantor normal form
[10] almost everywhere

تمرین ۶. در تعاریف ضرب و توان اردینال‌ها از قضیه‌ی بازگشت چگونه استفاده شده است.

تمرین ۷. نشان دهید $(\omega \cdot ۲)^۲ = \omega^۲ \cdot ۲ < \omega^۲ \cdot ۴$.

تمرین ۸. نشان دهید که عمل ضرب اردینال‌ها خاصیت انجمنی دارد، یعنی برای هر سه اردینال α، β و γ، همواره $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

تمرین ۹. نشان دهید که جمع اردینال‌ها در درایه‌ی اول صعودی است، به این معنا که اگر $\alpha < \alpha'$ آنگاه $\alpha + \beta \leq \gamma + \beta$.

تمرین ۱۰. نشان دهید نگاشت تعریف شده در اثبات نتیجه‌ی ۳۴، یک ایزومرفیسم است.

تمرین ۱۱. قضیه‌ی ۳۷ را ثابت کنید.

تمرین ۱۲. نشان دهید عمل $+$ و $\cdot$ روی ω جابجایی هستند. به این معنی که برای هر $m, n \in \omega$، $m + n = n + m$ و $m \cdot n = n \cdot m$.

تمرین ۱۳. نشان دهید برای هر $m, n \in \omega$، $(n \cdot m)^\ell = n^\ell \cdot m^\ell$.

فصل ۴

اعداد طبیعی و سلسله‌مراتب فُن‌نویمَن

۱.۴ اعداد طبیعی

همان‌طور که دیدیم ω کوچکترین اردینال حدی است و بنابراین تمام اردینال‌های ناصفر موجود در ω تالی هستند. مجموعه‌ی ω را مجموعه‌ی اعداد طبیعی می‌نامیم و هر $n \in \omega$ را یک عدد طبیعی می‌نامیم. اما سوالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا $\omega = \{\ulcorner ۰ \urcorner, \ulcorner ۱ \urcorner, \ulcorner ۲ \urcorner, \ldots\}$؟ پاسخ سوال خیر است. در بعضی از مدل‌های نظریه‌ی مجموعه‌ها، چه BG و چه ZFC، مجموعه‌ی ωی آنها ممکن است علاوه بر این اعداد طبیعی دقیق شامل عناصری باشند که از همه‌ی این اعداد طبیعی دقیق بزرگتر هستند. دانشجویانی که علاقه‌مند هستند چنین مدل‌هایی را بشناسند، در نظریه‌ی مُدل [1] و به‌ویژه با استفاده از قضیه‌ی فشردگی [2] به‌راحتی می‌توان چنین مدل‌هایی ساخت. ولی با اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها نمی‌توان ثابت کرد که مجموعه‌ی ω دقیقا مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی دقیق است.

اما اعداد طبیعی را می‌توان به‌طریق دیگری نیز تعریف کرد.

لم ۳۵. عنصر n یک عدد طبیعی است اگر و تنها اگر یک اردینال باشد که هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از آن دارای عنصر ماکزیمم است (با رابطه‌ی تعلق). به بیانی دیگر، اردینال n یک عدد طبیعی است هرگاه با رابطه‌ی $\ni$ (عکس تعلق)، نیز خوش‌ترتیب باشد.

اثبات. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد و $\emptyset \neq a \subseteq n$. قرار دهید $b = \sup a$. توجه کنید که b یک اردینال حدی نیست، زیرا $b \in \omega$. بنابراین $b = b' + ۱$، برای یک $b' \in a$. پس عنصر $x \in a$ موجود است که $b' < x$، که در این‌صورت $b \leq x$، که با توجه به تعریف سوپریمم، $b = x$. بنابراین $b \in a$، پس $b = \max a$. حال فرض کنید اردینال n عدد طبیعی نباشد، بنابراین $\omega \leq n$. پس $\omega \subseteq n$ و ω دارای ماکزیمم نیست. $\square$

توجه کنید که در هر مدل از BG یک مجموعه‌ی ω به نام مجموعه‌ی اعداد طبیعی وجود دارد.

تابع $s : \omega \to \omega$ را به‌صورت $s(x) = x + ۱ = x \cup \{x\}$ را درنظر بگیرید. به سه‌تایی $\mathfrak{N} = (\omega, \circ, s)$ ساختار اعداد طبیعی گفته می‌شود. همانطور که در درس مبانی ریاضی، دیده‌اید، ساختار اعداد طبیعی دارای اصل‌بندی‌ای [3] است که یکی از

[1] model theory

[2] compactness theorem

[3] axiomatization

اصل‌بندی‌های آن *اصول پئانو*[4] است. در قضیه‌ی زیر این اصل را به‌صورت دقیق بیان می‌کنیم.

قضیه ۳۶ (اصول پئانو). ساختار $\mathfrak{N}$ تحت ایزومرفیسم به‌طور یکتا توسط ویژگی‌های زیر مشخص می‌شود.

الف) s تابعی یک‌به‌یک است.

ب) عنصر صفر در برد تابع s نیست ($0 \notin \mathrm{Wb}(s)$).

ج) (استقرا) اگر $a \subset \omega$ و $0 \in a$ و برای هر x، از $x \in a$ نتیجه شود $s(x) \in a$، آنگاه $a = \omega$.

به بیانی دیگر، اگر ساختار $\mathfrak{M} = (M, O, S)$ ویژگی‌های بالا را داشته باشد، آنگاه $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$.

اثبات. ابتدا توجه کنید که ساختار اعداد طبیعی، $\mathfrak{N} = (\omega, 0, s)$، ویژگی‌های الف) و ب) را دارد. حال فرض کنید $a \subset \omega$ و $0 \in a$ و برای هر x، از $x \in a$ نتیجه شود $s(x) \in a$. قرار دهید $b = \min(\omega - a)$. چون $b \in \omega$، پس b یک اردینال تالی است، پس $b = s(b')$ که $b' \in a$. اما در این صورت، طبق ویژگی‌های مجموعه‌ی a، $b \in a$ که تناقض است. بنابراین $a = \omega$.
تا اینجا نشان دادیم که ساختار $\mathfrak{N}$ ویژگی‌های قضیه را دارد. حال فرض کنید ساختار $\mathfrak{M} = (M, O, S)$ ویژگی‌های قضیه را داشته باشد. با استفاده از قضیه‌ی بازگشت، تعریف کنید $f : \omega \to M$ به‌طوری که $f(0) = O$ و $f(s(n)) = S(f(n))$.
ادعا می‌کنیم تابع f یک‌به‌یک، پوشا و ایزومرفیسم بین دو ساختار است.
اثبات ایزومرفیسم بودن: با توجه به تعریف تابع f، چون $f(0) = O$ و $f(s(n)) = S(f(n))$، پس f ایزومرفیسم است.
اثبات پوشا بودن: اگر $k \in \mathrm{Wb}(f)$، آنگاه $S(k) \in \mathrm{Wb}(f)$. بنابراین $\mathrm{Wb}(f) \subseteq M$ که $O \in \mathrm{Wb}(f)$ و اگر $k \in \mathrm{Wb}(f)$ آنگاه $S(k) \in \mathrm{Wb}(f)$. پس طبق ویژگی سوم، $\mathrm{Wb}(f) = M$.
اثبات یک‌به‌یک بودن: کافی است نشان دهیم که برای هر $n \in \omega$ اگر $n > m$ آنگاه $f(m) \neq f(n)$. قرار دهید $A = \{n \in \omega | \forall m > n f(n) \neq f(m)\}$. نشان می‌دهیم که $A = \omega$. فرض کنید $m > 0$، در این صورت چون $f(m) \in \mathrm{Wb}(S)$، پس $f(m) \neq O = f(0)$. حال فرض کنید $n \in A$. فرض کنید $m > s(n)$. در این صورت $m' > n$ برای m' که $s(m') = m$. حال بنابه فرض استقرا، $f(m') \neq f(n)$ و چون f ایزومرفیسم است، پس $f(m) = f(s(m')) = S(f(m')) \neq S(f((n)) = f(s(n))$. بنابراین $A = \omega$. □

توجه کنید که در ریاضیات روزمره، هر عدد طبیعی با متناهی بار استفاده از تابع s از 0 بدست می‌آید. اما می‌توان ساختارهایی از نظریه‌ی مجموعه‌ها ساخت که برخی اعداد طبیعی این ویژگی را ندارند. در ادامه‌ی درس این موضوع را دقیق‌بیان می‌کنیم.

قضیه ۳۷. مجموعه‌ی ω تحت اعمال اردینال‌ها بسته است.

اثبات. تمرین. □

قبلا بارها گفته بودیم که اصل خوش‌بنیادی قرار است بیانگر این باشد که هیچ دنبالهٔ نزولی نامتناهی با رابطهٔ عضویت وجود ندارد. در این جا امکانات لازم برای اثبات این گفته را کسب کرده‌ایم.

تعریف ۳۸. هر تابع $a : \omega \to \mathbf{V}$ را یک دنباله‌ی نامتناهی می‌نامیم و با $(a_i)_{i\in\omega}$ نشان می‌دهیم. اگر دامنه‌ی این تابع یک عدد طبیعی باشد، آن را یک دنباله‌ی متناهی می‌نامیم.

با استفاده از این تعریف، معادلی برای اصل خوش‌بنیادی بیان می‌کنیم.

[4] Peano Axioms

قضیه ۳۹. از اصل خوش‌بنیادی نتیجه می‌شود که هیچ دنباله‌ی نزولی (با رابطه‌ی تعلق) و نامتناهی در یک جهان نظریه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.

اثبات. فرض کنید $a : \omega \to \mathbf{V}$ یک دنباله‌ی نزولی نامتناهی باشد. به این معنی که برای هر $i, j \in \omega$، اگر $i \in j$ آنگاه $a_j \in a_i$. در این صورت بنابه اصل جایگزینی $A = \{a_i | i \in \omega\}$ تشکیل یک مجموعه می‌دهد. این مجموعه اصل خوش‌بنیادی را نقض می‌کند، زیرا هر $a_i \in A$ با مجموعه‌ی A اشتراک دارد ($a_{i+1} \in a_i \cap A$). □

برای اثبات عکس قضیهٔ بالا، یعنی اثبات این که از عدم وجود دنبالهٔ نامتناهی نزولی، اصل خوش‌بنیادی نتیجه می‌شود، نیاز به مقدماتی داریم:

تعریف ۴۰ (پوسته‌ی متعدی[5]). فرض کنید a یک مجموعه باشد. کوچکترین مجموعه‌ی متعدی شامل a را پوسته‌ی متعدی a می‌نامیم و با $\mathrm{th}(a)$ نشان می‌دهیم.

اگر حداقل یک مجموعه‌ی متعدی شامل a وجود داشته باشد، آنگاه پوسته‌ی متعدی a پیدا می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{th}(a) = \bigcap_{\substack{a \subseteq b \\ \text{متعدی } b}} b$$

بنابراین زمانی می‌توانیم پوسته‌ی متعدی برای یک مجموعه بیابیم که حداقل یک مجموعه‌ی متعدی شامل آن وجود داشته باشد. اما، آیا برای هر مجموعه‌ی a آیا یک مجموعه‌ی متعدی شامل آن وجود دارد؟ یک روش برای پیدا کردن یک مجموعه‌ی متعدی شامل a این است که از اجتماعِ اعضای a، اجتماعِ اجتماع اعضایِ a و به همین ترتیب ادامه دهیم و در پایان از همه‌ی این مجموعه‌ها اجتماع بگیریم. مجموعه‌ی حاصل، متعدی خواهد بود. در قضیه‌ی زیر این گفته را به‌طوردقیق بیان می‌کنیم.

قضیه ۴۱. از اصل وجود مجموعه‌ی نامتناهی نتیجه می‌شود برای هر مجموعه‌ای یک مجموعه‌ی متعدی شامل آن وجود دارد.

اثبات. فرض کنید a یک مجموعه باشد. با استفاده از قضیه‌ی بازگشت، تعریف کنید $f : \omega \to \mathbf{V}$ که $f(0) = a$ و $f(n+1) = \bigcup f(n)$. از آنجا که ω یک مجموعه است، پس $\bigcup_{n\in\omega} f(n)$ یک مجموعه است که متعدی است. زیرا برای هر $x \in \bigcup_{n\in\omega} f(n)$، اگر $y \in x$. در این صورت برای یک $n \in \omega$، $x \in f(n)$. بنابراین $y \in \bigcup f(n) = f(n+1)$. پس $y \in \bigcup_{n\in\omega} f(n)$. در واقع $\bigcup_{n\in\omega} f(n) = a \cup \bigcup a \cup \bigcup\bigcup a \cup \ldots$. □

نتیجه ۴۲. اگر اصل خوش‌بنیادی برقرارنباشد، یک دنباله‌ی نامتناهی نزولی پیدا می‌شود.

اثبات. فرض کنید A یک مجموعه باشد و برای $a \in A$ اصل خوش‌بنیادی برقرار نباشد. در این صورت مجموعه‌ی ناتهی $\mathrm{th}(a) \cap A$ را درنظر بگیرید. با استفاده از اصل انتخاب تابع انتخاب روی $\mathrm{th}(a) \cap A$ را درنظر می‌گیریم. در این صورت برای هر $x \in \mathrm{th}(a) \cap A$، $f(x) \in x$. حال با استفاده از قضیه‌ی بازگشت، تابع $g : \omega \to \mathbf{V}$ را به صورت $g(0) = a_0$ برای یک a_0 دلخواه در a و $g(n+1) = f(g(n))$ تعریف کنید. در این صورت $g(0) \ni g(1) \ni g(2) \ni \ldots$، پس g یک دنباله‌ی نزولی نامتناهی است. □

بنابراین اصل خوش‌بنیادی معادل با عدم وجود دنباله‌ی نامتناهی نزولی است.

نکته ۴۳. کلاس همه‌ی مجموعه‌هایی که پوسته‌ی متعدی آنها خوش‌بنیاد است، مدلی برای اصل خوش‌بنیادی است.

[5] transitive hall

۲.۴ سلسله‌مراتب فُن‌نویمن

یکی از سوالات جالبی که در مورد اصل خوش‌بنیادی مطرح می‌شود این است که اصل خوش‌بنیادی در ساخت مجموعه‌ها چه چیزی را تضمین می‌کند؟ همچنین، آیا با استفاده از اصل خوش‌بنیادی و مجموعه‌ی تهی می‌توان همه‌ی مجموعه‌ها را ساخت؟ در ادامه و در این زیربخش به دنبال پاسخ دادن به سوالاتی از این قبیل در هستیم. برای این منظور، ابتدا سلسله‌مراتب فُن‌نویمن [۶] را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۴۴ (سلسله‌مراتب فُن‌نویمن). با استفاده از قضیه‌ی بازگشت(استقرا)، *سلسله‌مراتب فُن‌نویمن* را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} V_{۰} &= \emptyset \\ V_{\alpha+۱} &= \mathfrak{B}(V_\alpha) \\ V_\gamma &= \bigcup_{\alpha\in\gamma} V_\alpha, \qquad \text{برای اردینال حدی } \gamma \end{aligned}$$

بنابراین سلسله‌مراتب فُن‌نویمن به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned} & V_{۰} = \emptyset \\ & V_{۱} = \mathfrak{B}(V_{۰}) = \{\emptyset\} \\ & V_{۲} = \mathfrak{B}(V_{۱}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ & V_{۳} = \mathfrak{B}(V_{۲}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ & \quad \vdots \\ & V_\omega = \bigcup_{n\in\omega} V_n \\ & V_{\omega+۱} = \mathfrak{B}(V_\omega) \\ & \quad \cdots \end{aligned}$$

اولین ویژگی‌ای که هر طبقه از این سلسله‌مراتب دارد، متعدی بودن هر طبقه است.

لم ۴۵. برای هر اردینال α، V_α متعدی است.

اثبات. با استقرا لم را ثابت می‌کنیم. واضح است که $V_{۰} = \emptyset$ متعدی است. حال فرض کنید V_α متعدی باشد. فرض کنید $x \in V_{\alpha+۱}$ و $y \in x$. از آنجایی‌که $V_{\alpha+۱} = \mathfrak{B}(V_\alpha)$، پس $x \subseteq V_\alpha$، بنابراین $y \in V_\alpha$، که متعدی بودن V_α نتیجه می‌دهد $y \subseteq V_\alpha$. پس $y \in V_{\alpha+۱}$. حال فرض کنید γ اردینال حدی باشد و برای هر $\alpha \in \gamma$، V_α متعدی باشد. فرض کنید $x \in V_\gamma$ و $y \in x$. چون $x \in \bigcup_{\alpha\in\gamma} V_\alpha$، پس $x \in V_\alpha$ برای یک $\alpha \in \gamma$. حال چون V_α متعدی است، پس $y \in V_\alpha \subseteq V_\gamma$. $\square$

لم ۴۶. اگر $\alpha < \beta$ دو اردینال باشند، آنگاه $V_\alpha < V_\beta$.

[6] von Neumann hierarchy

اما با استفاده از این سلسله‌مراتب می‌توان ساخته شدن تمام مجموعه‌ها را با استفاده از مجموعه‌ی تهی نتیجه گرفت.

قضیه ۴۷. اصل خوش‌بنیادی نتیجه می‌دهد که هر مجموعه‌ای در یک طبقه از سلسله‌مراتب فُن‌نویمن واقع است. به‌عبارتی دیگر

$$\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha.$$

اثبات. با استفاده از استقرای خوش‌بنیادی این قضیه را نتیجه می‌گیریم. فرض کنید x یک مجموعه باشد. نشان می‌دهیم اگر همه‌ی اعضای x در $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ باشند، آنگاه x نیز در $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ است. در این صورت استقرای خوش‌بنیادی قضیه را نتیجه می‌دهد. فرض کنید $y \in x$. چون $y \in \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$، تعریف کنید $\alpha_y = \min\{\alpha | y \in V_\alpha\}$. بنابراین برای هر $y \in x$، $y \in V_{\alpha_y}$. قرار دهید $\beta = \bigcup_{y \in x} \alpha_y$. در این صورت $x \subseteq V_\beta$ (چرا؟)، پس $x \in V_{\beta+1}$. □

بنابراین برای هر مجموعه می‌توان مرتبه‌ای با توجه به پیچیدگی ساخت آن در سلسله‌مراتب فُن‌نویمن تعریف کرد. مرتبه‌ی هر عنصر را کوچکترین اردینالی درنظر می‌گیریم که x در طبقه‌ی مربوط به آن اردینال قرار دارد.

۳.۴ تمرین

تمرین ۱۴. برای مجموعه‌ی دلخواه ناتهی x، نشان دهید $\mathrm{th}(x) = \bigcup_{y \in x} \mathrm{th}(y)$.

تمرین ۱۵. بدون استفاده از اصل خوش‌بنیادی نشان دهید که موارد زیر برای یک مجموعه‌ی a با هم معادل‌اند:

۱. هیچ دنباله‌ی نزولی نامتناهی با شروع از a وجود ندارد.

۲. هر زیرمجموعه ای $\mathrm{th}(a)$ دارای عنصر ابتدا نسبت به رابطه‌ی $\in$ است.

از این تمرین نتیجه می‌شود که مجموعه‌ی $\mathrm{th}(a)$ خوش‌بنیاد است.

تمرین ۱۶. الف) بدون استفاده از اصل خوش‌بنیادی نشان دهید که $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ برابر است با همه‌ی مجموعه‌هایی که پوسته‌ی متعدی آنها خوش‌بنیاد است.

ب) نشان دهید که $\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ اصل خوش‌بنیادی را نتیجه می‌دهد.

فصل ۵

کاردینال‌ها

هدف از این بخش، آشنایی با کاردینال‌ها [1] و همچنین حساب کاردینال‌ها است. بنابراین ابتدا به تعریف و ویژگی‌های کاردینال‌ها می‌پردازیم.

۱.۵ تعریف کاردینال

برای مقایسه‌ی اندازه‌ی هر مجموعه، تنها ابزاری که می‌توان از آن استفاده کرد، تابع‌های یک‌به‌یک و پوشا هستند. می‌دانیم که اگر بین دو مجموعه یک تابع یک‌به‌یک و پوشا وجود داشته باشد، آن دو مجموعه «هم‌اندازه» هستند. اما، هم‌اندازه بودن به چه معنا است و آن را چگونه می‌توان به‌صورت دقیق تعریف کرد.

تعریف ۱. فرض کنید x و y دو مجموعه باشند. می‌گوییم x و y *هم‌توان* هستند، هرگاه یک تابع یک‌به‌یک و پوشا بین آنها وجود داشته باشد. در این صورت می‌نویسیم $x \sim y$.

توجه کنید که رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی بین مجموعه‌ها است. همچنین دقت کنید که در تعریف رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ از هیچ ترتیبی استفاده نشده است

از فصل قبل می‌دانیم که هر مجموعه با یک اردینال ایزومرف است (اصل خوش‌ترتیبی). حال چون اردینال‌ها را می‌توان با هم مقایسه کرد، بنابراین تعریف زیر را برای مجموعه‌ها داریم.

تعریف ۲. برای مجموعه‌ی x، اندازه‌ی مجموعه‌ی x را کوچکترین اردینالی می‌نامیم که با x هم‌توان است و آن را با $|x|$ نشان می‌دهیم.

بنابراین اندازه‌ی هر مجموعه یک اردینال است و بین آن دو یک تابع یک‌به‌یک و پوشا وجود دارد. اما دسته‌ای از اردینال‌ها هستند که که با خودشان هم‌توان هستند.

تعریف ۳ (کاردینال). به اردینال‌هایی که اندازه‌ی یک مجموعه هستند، *کاردینال* می‌گویند.

از این تعریف نتایج زیر حاصل می‌شود.

[1] cardinals

لم ۴. برای هر اردینال α همواره $\alpha \leq |\alpha|$ و همچنین تساوی زمانی رخ می‌دهد که α یک کاردینال باشد.

از لم فوق می‌توان نتیجه گرفته که اردینال‌هایی که با اندازه‌ی خود برابر هستند، کاردینال هستند.

لم ۵. دو مجموعه‌ی x و y هم‌توان هستند، اگر و تنها اگر $|y| = |x|$.

اثبات. چون x و y هم‌توان هستند و $|x|$ کوچکترین اردینالی که با x هم‌توان است، کوچکترین اردینالی است که با y هم‌توان است. حال فرض کنید که $\alpha = |y| = |x|$، بنابراین $\alpha \sim x$ و $\alpha \sim y$. از آنجا که رابطه‌ی $\sim$ هم‌ارزی است، پس $x \sim y$. $\square$

بنابراین دو مجموعه زمانی با هم هم‌توان هستند که هم‌اندازه باشند.

لم ۶. برای هر دو مجموعه‌ی x و y، موارد زیر با هم معادل‌اند.

الف) $|x| \leq |y|$

ب) یک تابع یک‌به‌یک $f : x \to y$ وجود دارد.

ج) یا $x = \emptyset$ یا یک تابع پوشا $f : y \to x$ موجود است.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که موارد الف) و ب) با هم معادل هستند. فرض کنید $g_1 : \alpha \to x$ و $g_2 : \beta \to y$ دو ایزومرفیسم باشند. حال فرض کنید $|x| = \alpha \leq \beta = |y|$. در این صورت α یک بخش ابتدایی β است، بنابراین تابع همانی $\mathrm{id} : x \to y$ یک‌به‌یک است. در این صورت تعریف کنید $f : x \to y$ به‌طوری که برای هر $t \in x$، $f(t) = g_2(g_1^{-1}(t))$. تابع f تابعی یک‌به‌یک و $f : x \to y$ است.
ابتدا ادعا می‌کنیم که اگر $a \subseteq \alpha$، آنگاه اردینالی که با مجموعه‌ی a ایزومرف است، کمتر از α است. طبق اصل خوش‌ترتیبی اردنیال β و ایزومرفیسم $g : \beta \to a$ موجود هستند. چون تابع g صعودی است، پس برای هر $x \in \beta$، داریم $x \leq g(x) \in \alpha$، پس $\beta \leq \alpha$. حال فرض کنید $f : x \to y$ تابعی یک‌به‌یک باشد و $\alpha = |x|$ و $\beta = |y|$. در این صورت یک تابع یک‌به‌یک $g : \alpha \to \beta$ وجود دارد. همچنین $g[\alpha]$ زیرمجموعه‌ای از β است که با α هم‌توان است. بنابر ادعای قبل، اگر $g[\alpha] \sim \beta'$ آنگاه $\beta' \leq \beta$. پس $\alpha < \beta$.

اکنون ثابت می‌کنیم که موارد ب) و ج) با هم معادل هستند. فرض کنید $f : x \to y$ تابعی یک‌به‌یک باشد و $x \neq \emptyset$. پس فرض کنید $x_0 \in x$. اکنون تعریف کنید $g : y \to x$ به‌طوری که برای هر $t \in y \cap f[x]$، $g(y) = f^{-1}(t)$ و برای هر $t \notin f[x]$، قرار دهید $g(t) = x_0$. در این صورت، تابع g پوشا است. زیرا برای هر $t \in x$، $f(t) \in y \cap f[x]$. بنابراین طبق تعریف تابع g، داریم $g(f(t)) = t$.
حال فرض کنید $f : y \to x$ تابعی پوشا باشد. خانواده‌ی $\{g^{-1}(t) | t \in x\}$ را درنظر بگیرید. این خانواده از مجموعه‌های ناتهی تشکیل شده است. بنابه اصل انتخاب، این خانواده دارای تابع انتخاب f است. در این صورت نگاشت $h : x \to y$، که برای هر $t \in x$، $h(t) = f(t)$. در این صورت، h یک تابع یک‌به‌یک است. $\square$

از این لم نتیجه‌ی مهم زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۷ (قضیه‌ی شرودر ـ برنشتاین[2][3]). اگر یک تابع یک‌به‌یک $f : x \to y$ و همچنین یک تابع یک‌به‌یک $g : y \to x$ موجود باشند، آنگاه x و y هم‌توان هستند.

[2]Schröder–Bernstein theorem

[3] به این قضیه، قضیه‌ی کانتور ـ برنشتاین نیز گفته می‌شود.

اثبات. بنابه لم قبل، $|y| \leq |x|$ و $|x| \leq |y|$، بنابراین $|y| = |x|$. پس x و y هم‌توان هستند. $\square$

توجه داشته باشید که در اثبات نتیجه‌ی بالا از اصل خوش‌ترتیبی استفاده کردیم، اما اثباتی دیگر برای این نتیجه وجود دارد که در آن اثبات از اصل انتخاب و صورت‌های معادل آن، هیچ استفاده‌ای نمی‌شود.

اثبات دوم نتیجه‌ی ۷، مستقل از اصل انتخاب. فرض کنید توابع $f : x \to y$ و $g : y \to x$ توابعی یک‌به‌یک باشند. برای هر $t \in y$، مدار مربوط به t را به‌صورت زیر زیر تعریف می‌کنیم.

$$m_t = \{t, g(t), f(g(t)), g(f(g(t))), \cdots\}$$

توجه داشته باشید که چون f و g یک‌به‌یک هستند، برای هر $t \in y$ مدار مربوط به آن، m_t نامتناهی است و همچنین هیچ دو مداری با هم اشتراک ندارند. حال تابع $h : x \to y$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$h(s) = \begin{cases} g^{-۱}(s) & \exists t\ s \in m_t \\ f(t) & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

در تعریف این تابع از اصل انتخاب و صورت‌های معادل آن استفاده نشده است. اما تابع h یک‌به‌یک و پوشا است (تمرین) و بنابراین x و y هم‌توان هستند. $\square$

لم ۸. هر عدد طبیعی یک کاردینال است.

اثبات. نشان می‌دهیم که برای هر $n \in \omega$، $n = |n|$. از آنجایی‌که $|n| \leq n$، کافی است نشان دهیم که فقط حالت تساوی رخ می‌دهد. برای این منظور، با استقرا نشان می‌دهیم که اندازه‌ی هر عدد طبیعی نمی‌تواند کوچکتر از آن عدد باشد. فرض کنید $n < m$ و $n = |m|$. در این صورت یک تابع یک‌به‌یک و پوشای $f : m \to n$ موجود است. در این صورت نشان می‌دهیم که می‌توانیم تابعی یک‌به‌یک و پوشا مانند $g : m - ۱ \to n - ۱$ بیابیم، که با فرض استقرا در تناقض است. تعریف کنید

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \neq m - ۱ \\ f(m - ۱) & f(x) = m - ۱ \end{cases}.$$

تابع فوق یک‌به‌یک و پوشا است. $\square$

توجه کنید که اثبات فوق، اثبات اصل لانه‌ی کبوتری در نظریه‌ی مجموعه‌ها است.

لم ۹. اردینال ω نیز یک کاردینال است.

اثبات. اگر $|\omega| < \omega$، آنگاه $|\omega| = n$ برای یک $n \in \omega$. در این صورت یک تابع یک‌به‌یک از ω به n پیدا می‌شود. اما این تابع را می‌توان به $n + ۱$ تحدید کرد. بنابراین یک تابع یک‌به‌یک از $n + ۱$ به n پیدا می‌شود. بنابراین $|n + ۱| \leq |n|$، که تناقض است. $\square$

اما در فصل‌های قبل، بدون اینکه مفهوم متناهی را تعریف کنیم، گاهاً از این مفهوم استفاده می‌کردیم. البته یک مجموعه‌ی متناهی توسط یک فرمول که تعداد اعضایش را مشخص می‌کرد، قابل تعریف بود. اما اینکه هر مجموعه دلخواه متناهی است، با یک فرمول مرتبه اول قابل بیان نیست. مفهوم کاردینال این امکان را فراهم می‌کند.

تعریف ۱۰. مجموعه‌ی a را *متناهی* می‌نامیم هرگاه $n = |a|$ برای یک $n \in \omega$. همچنین هرگاه مجموعه‌ی a با ω هم‌توان باشد، آن را *شمارا* می‌نامیم.

فرض کنید A یک کلاس از اردینال‌ها باشد. توجه داشته باشید که A خوش‌ترتیب است. در این‌صورت اگر A یک کلاس سره باشد، آنگاه تابعال اکیداً صعودی $f : \mathrm{On} \to A$ موجود است. به این تابعال، یک شمارشی از A نیز گفته می‌شود. همچنین اگر A مجموعه باشد، آنگاه یک تابع شمارش $f : \alpha \to A$ موجود است. بنابراین هر کلاس از اردینال‌ها دارای یک تابعال شمارش است، به این معنی که می‌توان اعضای آنها را شمرد.

تعریف ۱۱. کلاس A از اردینال‌ها را بسته در On می‌نامیم هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی $b \subseteq A$ داشته باشیم $\sup b \in A$.

به‌عنوان مثال، کلاس همه‌ی اردینال‌ها، On، یک کلاس بسته است. در فصل قبل دیدیم که $\sup b = \bigcup_{\alpha\in b}\alpha$. حال اگر $\sup b$ یک اردینال تالی باشد، به‌عنوان مثال فرض کنید $\sup b = \beta + ۱$ برای یک اردینال β. از طرفی، β یک کران بالا برای مجموعه‌ی b نیست، پس اردینال $\alpha \in b$ موجود است که $\beta < \alpha$. اما $\alpha = \beta + ۱$، پس $\sup b \in b$. حال اگر $\sup b$ اردینال حدی λ باشد، آنگاه $\sup b = \lambda \in A$. بنابراین این تعریف بیان می‌کند که کلاس A بسته است هرگاه اشتراکش با هر اردینال حدی موجود در A، اردینالی حدی متعلق به کلاس باشد. به‌طور مشابه، مجموعه‌ی a را در اردینال α بسته می‌نامیم هرگاه برای هر $\lambda \in \alpha$، $\sup(a \cap \lambda) = \lambda$ آنگاه $\lambda \in a$.

قضیه ۱۲. کلاس کاردینال‌ها در On بسته و بی‌کران است. بی‌کران به این معنی که از هر اردینالی، کاردینالی بزرگتر یافت می‌شود.

برای اثبات این قضیه، ابتدا قضیه‌ی کانتور [۴] را بیان و اثبات می‌کنیم. از قضیه‌ی کانتور می‌توان بی‌کران بودن کاردینال‌ها را نتیجه گرفت.

قضیه ۱۳ (قضیه‌ی کانتور)**.** برای هر مجموعه‌ی a، همواره $|a| < |\mathfrak{B}(a)|$.

اثبات. می‌دانیم که تابع $f : a \to \mathfrak{B}(a)$ با ضابطه‌ی $f(x) = \{x\}$، تابعی یک‌به‌یک است، بنابراین $|a| \leq |\mathfrak{B}(a)|$. حال نشان می‌دهیم که هیچ تابع پوشایی از a به $\mathfrak{B}(a)$ وجود ندارد، که در این صورت $|a| < |\mathfrak{B}(a)|$. فرض کنید $g : a \to |\mathfrak{B}(a)|$ تابعی دلخواه باشد. مجموعه‌ی $b = \{x \in a | x \notin g(x)\}$ را درنظر بگیرید. این زیرمجموعه‌ی a، در برد g قرار نمی‌گیرد. زیرا درغیر این‌صورت، اگر $y \in b$، در این صورت $y \in g(y)$ اگر و تنها اگر $y \notin g(y)$. □

حال از این قضیه، برای اثبات قضیه‌ی ۱۲ استفاده می‌کنیم.

اثبات قضیه‌ی ۱۲. بی‌کران بودن کلاس همه‌ی کاردینال‌ها، از قضیه‌ی کانتور نتیجه می‌شود. فرض کنید $\{\alpha_i | i \in I\}$، خانواده‌ای از کاردینال‌ها باشد. نشان می‌دهیم $\lambda = \bigcup_{i\in I}\alpha_i$ کاردینال است. برای هر $\beta \in \lambda$، یک $i \in I$ وجود دارد که $\beta < \alpha_i$. بنابراین $\beta < \alpha_i = |\alpha_i| \leq |\lambda|$. که از این نتیجه می‌شود $\lambda \subseteq |\lambda|$، یا $\lambda \leq |\lambda|$. پس $|\lambda| = \lambda$. □

نمادگذاری ۱۴. کلاس کاردینال‌های نامتناهی را با Card نشان می‌دهیم.

توجه داشته باشید که $\mathrm{Card} \subseteq \mathrm{On}$، بنابراین تابعال شمارشی وجود دارد که آن را با $\aleph : \mathrm{On} \to \mathrm{Card}$ نشان می‌دهیم. بنابراین برای هر اردینال α، منظور از $\aleph_\alpha$، αـ‌اُمین کاردنیال نامتناهی است. پس به‌ترتیب کاردینال‌های نامتناهی را به‌صورت

[۴] Cantor theorem

زیر می‌توان شمارش کرد.

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \cdots$$

توجه کنید که بنابه قضیه‌ی کانتور $|\mathfrak{B}(\omega)| \geq \aleph_1$. اما *فرضیه‌ی پیوستار* [5] که آن را با CH نشان می‌دهند، بیان می‌کند که $|\mathfrak{B}(\omega)| = \aleph_1$. همچنین *فرضیه‌ی پیوستارِ تعمیم‌یافته* [6] یا به‌طور مختصر GCH، بیان می‌کند که برای هر اردینال α، $|\mathfrak{B}(\aleph_\alpha)| = \aleph_{\alpha+1}$. اما آیا فرضیه‌ی پیوستار و یا فرضیه‌ی پیوستار تعمیم‌یافته از اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها نتیجه می‌شود؟ در ادامه‌ی این درس به این سوال خواهیم پرداخت.

تعریف ۱۵. فرض کنید κ یک کاردینال باشد، اولین کاردینال بعد از κ را با κ^+ نشان می‌دهیم. کاردینال‌های به‌صورت κ^+ را کاردینال تالی می‌نامیم. همچنین اگر کاردینالی تالی نباشد، آن را کاردینال حدی می‌نامیم. بنابراین کاردینال‌های حدی غیر از ω، به‌صورت $\aleph_\lambda$ هستند، که λ اردینال حدی است.

بنابراین فرضیه‌ی پیوستار تعمیم‌یافته بیان می‌کند که $2^\kappa = \kappa^+$.

لم ۱۶. هر کاردینال نامتناهی یک اردینال حدی است.

اثبات. فرض کنید $\lambda \in \mathrm{Card}$. اگر λ اردینال تالی باشد، چون $\omega < \lambda$، بنابراین اردینال یکتای α وجود دارد که $\lambda = (\omega+\alpha)+1$. در این صورت $|\lambda| = |(\omega+\alpha)+1| = |\omega+\alpha| < \lambda$. که این متناقض با کاردینال بودن λ است. $\square$

۲.۵ اعمال کاردینال‌ها

مشابه اعمالی که برای اردینال‌ها تعریف کردیم، همین اعمال را می‌توان برای کاردینال‌ها تعریف کرد. تعریف عمل جمع و ضرب کاردینال‌ها آسان است. در سراسر این فصل از اندیس c برای تمایز بین عمل کاردینال‌ها از اردینال‌ها استفاده می‌کنیم. فرض کنید κ و μ دو کاردینال باشند، در این صورت جمع کاردینالی این دو را با $\kappa +_c \mu$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\kappa +_c \mu = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\})|.$$

بنابراین $\kappa +_c \mu = |\kappa + \mu|$. همچنین ضرب این دو کاردینال را با $\kappa \cdot_c \mu$ نشان می‌دهیم و به‌صورت

$$\kappa \cdot_c \mu = |\kappa \times \mu|$$

تعریف می‌شود و به‌صورت مشابه $\kappa \cdot_c \mu = |\kappa \cdot \mu|$. توان کاردینال‌ها را هم به‌صورت مشابه می‌توان به‌صورت $(\kappa^\mu)_c = |{}^\mu\kappa|$، تعریف می‌شود که منظور از ${}^\mu\kappa$، مجموعه‌ی همه‌ی توابع از μ به κ است. توجه داشته باشید که این تعریف از توان کاردینالی با توان اردینالی کاملاً متفاوت است. به‌عنوان مثال، $(2^\omega)_c = |\mathfrak{B}(\omega)| > \omega$، درحالی که $2^\omega = \bigcup_{n\in\omega} 2^n = \omega$.

اما این اعمال را می‌توان به‌صورت زیر به بیانی دیگر تعریف کرد.

$$|u| +_c |v| = |(u \times \{0\}) \cup (v \times \{1\})|$$
$$|u| \cdot_c |v| = |u \times v|$$
$$(|u|^{|v|})_c = |{}^v u|$$

[5] continuum hypothesis

[6] general continuum hypothesis

۱.۲.۵ ویژگی‌های اعمال کاردینال‌ها

اعمال کاردینال‌ها خواص جالبی دارند، که در این بخش برخی از آنها را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۷. برای هر $\kappa \in \mathrm{Card}$، $\kappa \cdot_c \kappa = \kappa$.

اثبات. با استقرا روی κ این حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید حکم برای اردینال‌های کمتر از κ برقرار باشد، یعنی برای هر $\lambda < \kappa$، $|\lambda| \cdot_c |\lambda| = |\lambda|$. روی مجموعه‌ی $\kappa \times \kappa$ ترتیب زیر را درنظر بگیرید. برای هر $(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa$ و $(\alpha', \beta') \in \kappa \times \kappa$،

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta) < (\alpha',\beta') \iff \Big(& \max\{\alpha,\beta\} < \max\{\alpha',\beta'\} \vee \\ & (\max\{\alpha,\beta\} = \max\{\alpha',\beta'\} \wedge \beta < \beta') \vee \\ & (\max\{\alpha,\beta\} = \max\{\alpha',\beta'\} \wedge \beta = \beta' \wedge \alpha < \alpha')\Big).\end{aligned}$$

توجه کنید که این ترتیب را می‌توان به‌صورت ترتیب قاموسی معکوس برروی $\{(\alpha, \beta, \max\{\alpha, \beta\}) | (\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa\} \subseteq \kappa \times \kappa \times \kappa$ درنظر گرفت. به‌عنوان مثال، با این ترتیب عناصر کمتر از $(۳,۳)$ به‌ترتیب صعودی مجموعه‌ی زیر است.

$$\{(۰,۰),(۱,۰),(۲,۰),(۳,۰),(۰,۱),(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱),(۰,۲),(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲)\}$$

به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که این رابطه، یک خوش‌ترتیبی روی $\kappa \times \kappa$ است. بنابراین $\kappa \times \kappa$ یک اردینال است. نشان می‌دهیم که $\kappa \leq |\kappa \times \kappa|$. دقت کنید که $|\kappa \times \kappa|$ کوچکترین اردینالی است که با $\kappa \times \kappa$ ایزومرف است. حال اگر یک بخش ابتدایی $|\kappa \times \kappa|$ با $\kappa \times \kappa$ ایزومرف باشد، نشان می‌دهیم که اندازه‌ی آن کوچکتر یا مساوی با κ است. توجه کنید که یک بخش ابتدایی سره‌ی $\kappa \times \kappa$ به‌صورت $(\kappa \times \kappa)_{(\alpha,\beta)} = \{(x, y) | (x, y) < (\alpha, \beta)\}$ است، برای یک $(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa$. حال قرار دهید، $\lambda = \max\{\alpha, \beta\}$. واضح است که $\lambda < \kappa$. در این صورت $(\kappa \times \kappa)_{(\alpha,\beta)} \subseteq (\kappa \times \kappa)_{(\lambda,\lambda)}$. بنابراین $|(\kappa \times \kappa)_{(\alpha,\beta)}| \leq |\lambda| \cdot_c |\lambda|$. اما چون $\lambda < \kappa$ بنابه فرض استقرا، $|\lambda| \cdot_c |\lambda| = |\lambda|$. از طرفی دیگر، $|\lambda| \leq \kappa$. بنابراین اندازه‌ی هر بخش ابتدایی سره‌ی $\kappa \times \kappa$ از κ کمتر یا مساوی است. پس $|\kappa \times \kappa| \leq \kappa$. از طرفی دیگر، $\kappa \subset \kappa \times \kappa$، پس $\kappa \leq |\kappa \times \kappa|$. بنابراین $\kappa \cdot_c \kappa = \kappa$. □

دانشجویان رشته‌ی ریاضی، در درس مبانی ریاضی با ویژگی‌های اعمال کاردینال‌ها آشنا می‌شوند، به‌همین دلیل برخی ویژگی‌های اعمال کاردینال‌ها را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

فرض کنید κ، λ و γ کاردینال باشند، در این صورت موارد زیر برقرار هستند.

۱. $\left(\kappa^{\lambda +_c \gamma}\right)_c = (\kappa^\lambda)_c \cdot_c (\kappa^\gamma)_c$

۲. $\left(\kappa^{\lambda \cdot_c \gamma}\right)_c = \left((\kappa^\lambda)_c^\gamma\right)_c$

از قضیه‌ی ۱۷ نتایج زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱۸. فرض کنید κ و μ دو کاردینال نامتناهی باشند، در این صورت موارد زیر برقرار هستند.

۱. $\kappa +_c \mu = \max\{\kappa, \mu\}$،

۲. $\kappa \cdot_c \mu = \max\{\kappa, \mu\}$، ۳. $\left(۲^\kappa\right)_c = \left(\kappa^\kappa\right)_c$

اثبات. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $\max\{\kappa, \mu\} = \mu$. در این صورت

$$\mu \leq \kappa +_c \mu \leq \mu +_c \mu = ۲ \cdot_c \mu \leq \mu \cdot_c \mu = \mu,$$

پس $\kappa +_c \mu = \mu$. همچنین

$$\kappa \cdot_c \mu \leq \mu \cdot_c \mu = \mu \leq \kappa \cdot_c \mu,$$

پس $\kappa \cdot_c \mu = \max\{\kappa, \mu\}$. از آنجایی‌که

$$(۲^\kappa)_c \leq (\kappa^\kappa)_c \leq ((۲^\kappa)^\kappa_c)_c = (۲^{\kappa \cdot_c \kappa})_c = (۲^\kappa)_c,$$

بنابراین $\left(۲^\kappa\right)_c = \left(\kappa^\kappa\right)_c$. □

اگر خانواده‌ای از کاردینال‌ها را داشته باشیم، حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب آنها نیز قابل تعریف است.

تعریف ۱۹. فرض کنید $(\kappa_i)_{i\in I}$ یک خانواده از کاردینال‌ها باشند، در این صورت حاصل‌جمع همه‌ی این کاردینال‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = |\bigcup_{i\in I} \kappa \times \{i\}|$$

به‌طور مشابه حاصل‌ضرب این کاردینال‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = |\{f : I \to \bigcup \kappa_i | \forall i \in I \ f(i) \in \kappa_i\}|$$

نتیجه ۲۰. فرض کنید I مجموعه‌ای نامتناهی باشد و $(\kappa_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از کاردنیال‌های ناصفر باشند. در این صورت

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \max\{|I|, \sup \kappa_i\}.$$

اثبات. فرض کنید $\mu = \sup \kappa_i$. طبق تعریف

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \mu \leq |I| \cdot_c \mu = \max\{|I|, \sup \kappa_i\}.$$

ادامه‌ی اثبات را به‌عنوان تمرین به عهده خواننده واگذار می‌کنیم. □

۳.۵ توان کاردینال‌ها و هم‌پایانی

برای محاسبه‌ی توان کاردینال‌ها، نیاز به مفاهیم جدیدی داریم که در این قسمت آنها را تعریف می‌کنیم و درنهایت با استفاده از این مفهوم‌ها، توان کاردینال‌ها را محاسبه می‌کنیم.

۱.۳.۵ هم‌پایانی

تعریف ۲۱. فرض کنید α یک اردینال باشد. مجموعه‌ی $B \subseteq \alpha$ را *هم‌پایان* [7] با α می‌نامیم، هرگاه برای هر عنصری در α عنصری بزرگ‌تر از این عنصر در مجموعه‌ی B یافت شود.

$$\forall x \in \alpha \exists y \in B y \geq x$$

به‌بیانی دیگر، مجموعه‌ی B در مجموعه‌ی α بی‌کران باشد. به‌صورت مشابه، می‌توان مفهوم هم‌پایان بودن را برای مجموعه‌ها نیز تعریف کرد.

به‌عنوان مثالی شهودی، مجموعه‌ی اعداد طبیعی در مجموعه‌ی اعداد حقیقی بی‌پایان است (خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی).

تعریف ۲۲. فرض کنید که α یک اردینال باشد، *هم‌پایانی* [8] α را با نماد $\mathrm{cf}(\alpha)$ نشان می‌دهیم و برابر با کوچکترین اندازه‌ی مجموعه‌ای است که با اردینال α هم‌پایان است.

$$\mathrm{cf}(\alpha) = \min\{|\mathrm{B}| \mid \text{هم‌پایان با } \alpha \ \mathrm{B} \subseteq \alpha\}$$

به‌طور مشابه، برای مجموعه‌ی A، $\mathrm{cf}(\mathrm{A})$ تعریف می‌شود.

مثال ۲۳. ۱. $\mathrm{cf}(0) = 0$

۲. برای هر اردینال α، از آنجا که مجموعه‌ی $\{\alpha\}$ با اردینال $\alpha + ۱$ هم‌پایان است، پس $\mathrm{cf}(\alpha + 1) = 1$.

۳. $\mathrm{cf}(\omega) = \omega$.

۴. $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$.

۵. اگر κ یک کاردینال نامتناهی باشد، آنگاه $\mathrm{cf}(\kappa^+) = \kappa^+$. زیرا درغیر این صورت اگر $\mathrm{cf}(\kappa^+) \leq \kappa$، آنگاه فرض کنید $(\alpha_i)_{i\in \mathrm{cf}(\kappa^+)}$ یک مجموعه‌ی بی‌پایان با اندازه‌ی $\mathrm{cf}(\kappa^+)$ باشد. در این صورت $\sup_{i\in \mathrm{cf}(\kappa^+)} \alpha_i = \kappa^+$. بنابراین $|\bigcup_{i\in \mathrm{cf}(\kappa^+)} \alpha_i| = |\kappa^+|$. اما چنین چیزی امکان‌پذیر نیست. زیرا عبارت سمت چپ یک کاردینال حدی است درحالی که عبارت سمت راست یک کاردینال تالی است.

آخرین مثال بالا، دسته‌ای جالب از اردینال‌ها را معرفی می‌کند.

تعریف ۲۴. اردینال α را *منتظم* [9] می‌نامیم هرگاه $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$. همچنین اردینال α را تکین [10] می‌نامیم هرگاه $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$.

بنابراین اردینال‌های ω و تمام کاردینال‌های نامتناهی تالی، منتظم هستند. اما آیا کاردینالِ حدیِ منتظمی غیر از ω وجود دارد؟ در ادامه‌ی درس به این سوال پاسخ خواهیم داد. توجه کنید که عبارت فوق مستقل از BG و ZFC است [11].

در لم زیر برخی ویژگی‌های هم‌پایانی را بیان می‌کنیم.

[7] cofinal
[8] cofinality
[9] regular
[10] singular

[11] جمله‌ی φ را مستقل از BG می‌گوییم هرگاه $\mathrm{BG} \nvdash \varphi$ و $\mathrm{BG} \nvdash \neg\varphi$.

لم ۲۵. الف) برای هر اردینال α، $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$.

ب) اگر B یک مجموعه‌ی هم‌پایان با اردینال α باشد، آنگاه $\mathrm{cf(B)} = \mathrm{cf}(\alpha)$.

ج) هر اردینال α دارای یک زیرمجموعه‌ی هم‌پایانِ بسته با تایپ اردینالی $\mathrm{cf}(\alpha)$ است.

د) برای هر اردینال α، $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

اثبات. از آنجایی که اردینال α با خودش هم‌پایان است، پس هم‌پایانی آن از α کوچکتر یا مساوی است. اگر B مجموعه‌ای هم‌پایان در اردینال α باشد، آنگاه هر مجموعه‌ای که با مجموعه‌ی B هم‌پایان باشد، با α نیز هم‌پایان است، بنابراین $\mathrm{cf(B)} = \mathrm{cf}(\alpha)$. فرض کنید α یک اردینال باشد و $|\mathrm{B}| = \mathrm{cf}(\alpha)$ و B هم‌پایان با α باشد. بنابراین یک نگاشت یک‌به‌یک و پوشا $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \mathrm{B}$ وجود دارد. تابع $F : \mathrm{cf}(\alpha) \to \mathrm{On}$ را به‌صورت $F(x) = \sup\{f(y)|y \leq x\}$ تعریف می‌کنیم. توجه کنید که $F(x) \in \alpha$. در این صورت $F[\alpha]$ مجموعه‌ای هم‌پایان بسته با اردینال α است. اما $\mathrm{Ot}(F[B]) = \mathrm{Ot}(B)$. برای اثبات قسمت د)، از آنجایی‌که $\mathrm{cf}(\alpha)$ مجموعه‌ای هم‌پایان با α است، از قسمت ب) نتیجه می‌شود $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf})\alpha($. □

از قسمت آخر این لم نتیجه می‌شود که برای هر اردینال α، $\mathrm{cf}(\alpha)$ یک کاردینال منتظم است. بنابراین می‌توان مثال‌های زیادی از کاردینال‌های منتظم ساخت.

تعریف ۲۶. کاردینالِ حدیِ منتظمِ غیر از ω را *دست‌نیافتنیِ ضعیف* [۱۲] گوییم.

فرض کنید که $\aleph_\lambda$ یک کاردینال دست‌نیافتنی ضعیف باشد. از طرفی، چون مجموعه‌ی $\{\aleph_\alpha | \alpha \in \lambda\}$ مجموعه‌ای هم‌پایان با $\aleph_\lambda$ است، پس $\mathrm{cf}(\aleph_\lambda) = \mathrm{cf}(\lambda)$. از طرفی دیگر $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \lambda$. حال چون $\aleph_\lambda$ دست‌نیافتنی ضعیف است، پس $\mathrm{cf}(\aleph_\lambda) = \aleph_\lambda$. بنابراین $\lambda \leq \aleph_\lambda \leq \lambda$، پس $\lambda = \aleph_\lambda$. بنابراین در پاسخ به اینکه آیا کاردینال حدی منتظم غیر از ω (دست‌نیافتنی ضعیف) وجود دارد، می‌توان گفت اگر $\aleph_\lambda$ چنین کاردینالی باشد، آنگاه $\lambda = \aleph_\lambda$. اما دقت کنید که هر کاردینالی که به‌صورت $\lambda = \aleph_\lambda$ باشد، لزوماً دست‌نیافتنی ضعیف نیست. به‌عنوان مثال، دنباله‌ی زیر را درنظر بگیرید.

$$a_۰ = \aleph_۰, a_{n+۱} = \aleph_{a_n}$$

حال قرار دهید $\bigcup_{n\in\omega} a_n = a_\omega = \lambda$. در این صورت $\lambda = \aleph_\lambda$. اما $\mathrm{cf}(\aleph_\lambda) = \omega$. زیرا همین دنباله‌ی $(a_n)_{n\in\omega}$ با این اردینال هم‌پایان است.

فرض کنید که μ یک کاردینال نامتناهی باشد، از آنجایی‌که $\mu = \sup_{i\in\mathrm{cf}(\mu)} \alpha_i$، ادعا می‌کنیم که

$$\mu = \sum_{i\in\mathrm{cf}(\mu)} |\alpha_i|.$$

چون $\sum_{i\in\mathrm{cf}(\mu)} |\alpha_i| = \max\{\sup_{i\in\mathrm{cf}(\mu)} \alpha_i, \mathrm{cf}(\mu)\}$. حال از طرفی $\mu \leq \sup_{i\in\mathrm{cf}(\mu)} |\alpha_i|$ و از طرفی دیگر $\sup_{i\in\mathrm{cf}(\mu)} |\alpha_i| \leq \mu$ و $\mathrm{cf}(\mu) \leq \mu$. بنابراین $\mu = \max\{\sup_{i\in\mathrm{cf}(\mu)} \alpha_i, \mathrm{cf}(\mu)\}$. پس برای هر کاردینال نامتناهی، نمایشی براساس هم‌پایانی آن کاردینال وجود دارد.

[12] weakly inaccessible

۲.۳.۵ نقش مفهوم هم‌پایانی در محاسبهٔ توان کاردینالها

هدفمان در این بخش، بیان این نکته است که در محاسبهٔ توان کاردینالها، دانستنِ $\kappa^{cf(\kappa)}$ نقش مهمی بازی می‌کند. برای راحتی کار، ابتدا دو نماد را معرفی می‌کنیم.

نمادگذاری ۲۷. فرض کنید κ و μ دو کاردینال باشند، در این صورت نمادهای زیر را معرفی می‌کنیم.

$$\underset{\smile}{\kappa}^{\mu} = \sup_{\alpha<\kappa}(\alpha^{\mu})_c$$
$$\kappa^{\underset{\smile}{\mu}} = \sup_{\alpha<\mu}(\kappa^{\alpha})_c$$

توجه کنید که اگر μ کاردینالی متناهی باشد و κ متناهی باشد، آنگاه $(\kappa^{\mu})_c = \kappa$. همچنین اگر μ نامتناهی باشد و $\mu \leq \kappa \leq ۲$، آنگاه $(\kappa^{\mu})_c = (\mu^{\mu})_c$. اما درصورتی که هر دو کاردینال نامتناهی باشند، از قضایای زیر در محاسبه‌ی توان کاردینال‌ها بهره می‌گیریم.

قضیه ۲۸. فرض کنید μ و κ دو کاردینال نامتناهی باشند. در این صورت

$$(\kappa^{\lambda})_c = \left((\kappa^{\underset{\smile}{\mu}})^{\mathrm{cf}(\mu)}\right)_c.$$

اثبات. از آنجایی‌که $\mu = \sum_{i\in\mathrm{cf}(\mu)}|\alpha_i|$، بنابراین

$$(\kappa^{\mu})_c = (\kappa^{\sum_{i\in\mathrm{cf}(\mu)}|\alpha_i|})_c = \prod_{i\in\mathrm{cf}(\mu)}\kappa^{|\alpha_i|} \leq \prod_{i\in\mathrm{cf}(\mu)}\kappa^{\underset{\smile}{\mu}} = \left((\kappa^{\underset{\smile}{\mu}})^{\mathrm{cf}(\mu)}\right)_c.$$

از طرفی دیگر،

$$\left((\kappa^{\underset{\smile}{\mu}})^{\mathrm{cf}(\mu)}\right)_c \leq \left((\kappa^{\mu})_c^{\mu}\right)_c = (\kappa^{\mu\cdot_c\mu})_c = (\kappa^{\mu})_c.$$

□

برای محاسبه‌ی توان کاردینال‌ها، دو حالت را درنظر می‌گیریم، حالت اول زمانی که کاردینالی که در توان است از هم‌پایانی کاردینالی که در پایه است بیشتر باشد و در غیر این صورت حالت دوم را درنظر می‌گیریم. در قضایای زیر در هر یک از این حالت‌ها توان کاردینال‌ها را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۲۹. فرض کنید μ و κ دو کاردینال نامتناهی باشند و $\mu < \mathrm{cf}(\kappa)$. در این صورت

$$(\kappa^{\mu})_c = \max\{\kappa, \underset{\smile}{\kappa}^{\mu}\}.$$

اثبات. از آنجایی‌که $\kappa \leq (\kappa^{\mu})_c$ و $\underset{\smile}{\kappa}^{\mu} \leq (\kappa^{\mu})_c$، پس $(\kappa^{\mu})_c \geq \max\{\kappa, \underset{\smile}{\kappa}^{\mu}\}$. از طرفی دیگر طبق تعریف می‌دانیم که $(\kappa^{\mu})_c = |{}^{\mu}\kappa|$. حال چون $\mu < \mathrm{cf}(\kappa)$، در نتیجه اردینال μ در اردینال κ کران‌دار است. پس هر تابعی از μ به κ، درحقیقت تابعی از μ به اردینالی کوچکتر از κ مثل α است، بنابراین $^{\mu}\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa}^{\mu}\alpha$. بنابراین

$$(\kappa^{\mu})_c \leq \sum_{\alpha<\kappa}|\alpha|^{\mu} = \max\{\kappa, \sup_{\alpha<\kappa}|\alpha|^{\mu} = \max\{\kappa, \underset{\smile}{\kappa}^{\mu}\}.$$

□

قضیه ۳۰. اگر μ و κ دو کاردینال نامتناهی باشند و $\mu \geq \mathrm{cf}(\kappa)$، آنگاه

$$(\kappa^{\mu})_c = \left((\underset{\smile}{\kappa}^{\mu})^{\mathrm{cf}(\kappa)}\right)_c.$$

اثبات. از آنجایی‌که $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \mu$، بنابراین

$$\left((\underset{\smile}{\kappa}^{\mu})^{\mathrm{cf}(\kappa)}\right)_c \leq \left((\kappa^{\mu})_c^{\mathrm{cf}(\kappa)}\right)_c = (\kappa^{\mu})_c.$$

ادامه‌ی اثبات را به‌عنوان تمرین، به خواننده واگذار می‌کنیم. □

اگر μ و κ دو کاردینال نامتناهی باشند، آنگاه دو قضیه‌ی فوق به‌صورت خلاصه، رابطه‌ی زیر را برای محاسبه‌ی توان کاردینال‌ها بیان می‌کنند.

$$(\kappa^{\mu})_c = \begin{cases} \max\{\kappa, \underset{\smile}{\kappa}^{\mu}\} & 2 \leq \mu < \mathrm{cf}(\kappa) \\ \left((\underset{\smile}{\kappa}^{\mu})^{\mathrm{cf}(\kappa)}\right)_c & \mathrm{cf}(\kappa) < \mu \\ (\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)})_c & \mu = \mathrm{cf}(\kappa) \end{cases} \quad (۱.۵)$$

توجه داشته باشید که همواره $(\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)})_c > \kappa$. (تمرین)

نتیجه ۳۱. اگر فرضیه‌ی پیوستار تعمیم‌یافته برقرار باشد، آنگاه

$$(\kappa^{\mu})_c = \begin{cases} \kappa & \mu < \mathrm{cf}(\kappa) \\ \kappa^{+} & \mathrm{cf}(\kappa) \leq \mu \leq \kappa \\ \mu^{+} & \kappa \leq \mu \end{cases} \quad (۲.۵)$$

اثبات. فرض کنید $\mu < \mathrm{cf}(\kappa)$. در این صورت طبق رابطه‌ی (۱.۵)، $(\kappa^{\mu})_c = \max\{\kappa, \underset{\smile}{\kappa}^{\mu}\}$. اما $\underset{\smile}{\kappa}^{\mu} = \sup_{\alpha\in\kappa}(\alpha^{\mu})_c$ که کوچکتر از $(\kappa^{\mu})_c$ است، بنابراین در این حالت $(\kappa^{\mu})_c < \kappa^{+}$، یعنی $(\kappa^{\mu})_c = \kappa$. حال اگر $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \mu \leq \kappa$، در این صورت، طبق رابطه‌ی (۱.۵)، $(\kappa^{\mu})_c = \left((\underset{\smile}{\kappa}^{\mu})^{\mathrm{cf}(\kappa)}\right)_c$. اما $(\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)})_c \leq \kappa$، پس $(\kappa^{\mu})_c = \kappa^{+}$. حال اگر $\kappa \leq \mu$، آنگاه، از طرفی $(\kappa^{\mu})_c \leq (\mu^{\mu})_c = \mu^{+}$. از طرفی دیگر $(\kappa^{\mu})_c \geq (2^{\mu})_c = \mu^{+}$. □

نهایتاً، برای درک قضیه‌های بالا، این فصل را با محاسبه‌ی یک توان کاردینالی به‌پایان می‌رسانیم. برای راحتی در خواندن، تمام اعمالی که در این مثال نوشته می‌شوند، اعمال کاردینالی هستند، بنابراین ما از ذکر اندیس c در این محاسبات خودداری کرده‌ایم.

مثال ۳۲. از آنجایی‌که $\mathrm{cf}(\aleph_{\omega}) = \omega$، بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۲۸ داریم

$$(\aleph_{\omega})^{\aleph_{\omega}} = \left(\aleph_{\omega}^{\underset{\smile}{\aleph_{\omega}}}\right)^{\aleph_0} = \left(\sup_{n\in\omega}(\aleph_{\omega}^{\aleph_n})\right)^{\aleph_0}.$$

بنابراین باید $\aleph_{\omega}^{\aleph_n}$ را محاسبه کرد. حال چون $\aleph_{\mathrm{n}} < \omega = \mathrm{cf}(\aleph_{\omega})$، از رابطه‌ی (۱.۵)، نتیجه می‌شود

$$\aleph_{\omega}^{\aleph_n} = \left(\underset{\smile}{\aleph_{\omega}}^{\aleph_n}\right)^{\aleph_0} = \left(\sup_{m\in\omega}(\aleph_{m}^{\aleph_n})\right)^{\aleph_0}.$$

بنابراین کافی است که $\aleph_m^{\aleph_n}$ را برای mهای بزرگ محاسبه کنیم. حال چون $\mathrm{cf}(\aleph_\mathrm{m}) = \aleph_\mathrm{m} > \aleph_\mathrm{n}$، از رابطه‌ی (۱.۵) نتیجه می‌شود

$$\aleph_m^{\alpha_n} = \max\{\aleph_m, {\utilde{\aleph_m}}^{\aleph_n}\}.$$

بنابراین باید ${\utilde{\aleph_m}}^{\aleph_n}$ را محاسبه کرد، که این مقدار هم برحسب کاردینال‌های کمتر محاسبه می‌شود. با ادامه دادن این روند، داریم

$$\aleph_m^{\alpha_n} = \max\{\aleph_m, {\utilde{\aleph_m}}^{\aleph_n}\} = \cdots = \max\{\aleph_m, ۲^{\aleph_n}\}.$$

بنابراین برای محاسبه‌ی توان کاردینالی $\aleph_\omega^{\aleph_\omega}$ به‌صورت نزولی و تودرتو پیش رفتیم تا نهایتاً به عبارتی رسیدیم که محاسبه‌ی آن آسان بود و بعداز محاسبه‌ی آن به‌صورت بالارونده پیش می‌رویم و مقدار توان مورد نظر را بدست می‌آوریم.

۴.۵ تمرین

تمرین ۱. ثابت کنید تابع h تعریف شده در اثباتی که بدون استفاده از اصل انتخاب برای قضیه‌ی شرودرــ برنشتاین ارائه شد، یک‌به‌یک و پوشا است.

تمرین ۲. ثابت کنید که یک کلاس بی‌کران از اردینال‌ها بسته است اگر و فقط اگر تابعال شمارش آن پیوسته باشد. پیوسته بودن به این معنا است که اگر f تابعال شمارش باشد، آنگاه $f(\bigcup \alpha_i) = \bigcup f(\alpha_i)$.

تمرین ۳. فرض کنید I مجموعه‌ای نامتناهی و μ کاردینالی ناصفر باشد. نشان دهید $\sum_{i\in I} \mu \leq |I| \cdot_c \mu$.

تمرین ۴. اثبات نتیجه‌ی ۲۰ را کامل کنید. یعنی نشان دهید $\sup \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \kappa_i$ و همچنین $|I| \leq \sum_{i\in I} \kappa_i$.

تمرین ۵. فرض کنید که α و β دو اردینال باشند که یکی از آنها متناهی نیست. نشان دهید که $|\alpha^\beta| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$. دقت کنید که عبارت سمت چپ، توان اردینالی است.

تمرین ۶. نشان دهید که اگر μ و κ دو کاردینال نامتناهی باشند، آنگاه

$$(\kappa^\mu)_c \leq \left(({\utilde{\kappa}}^{\mu})^{\mathrm{cf}(\kappa)}\right)_c.$$

تمرین ۷. نشان دهید که $\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$.

فصل ۶

قضایای رمزی، اردوش ـ رادو، کونیگ

۱.۶ رمزی نامتناهی

اصل لانه‌ی کبوتری بیانگر این است که اگر یک مجموعه‌ی نامتناهی را به متناهی قسمت تقسیم کنیم، حداقل یکی از این قسمت‌ها نامتناهی است. به بیان دیگر اگر A نامتناهی باشد و $f : A \to m$ نگاشتی از A به یک عدد طبیعی m باشد، آنگاه f روی یک مجموعه‌ی نامتناهی، ثابت است. قضیه‌ی رمزی تعمیمی از اصل لانه‌ی کبوتری است.

فرض کنید مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های n عضوی یک مجموعه‌ی متناهیِ A را به m قسمت تقسیم کنیم. در این صورت، بنا به قضیه‌ی رمزی، A دارای یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی است که همه‌ی زیرمجموعه‌های n عضوی آن در یک قسمت یکسان از این تقسیم‌بندی قرار می‌گیرد. به عنوان مثال اگر همه‌ی یال‌های یک گراف کامل نامتناهی را با سه رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم، آنگاه گراف مورد نظر دارای یک **زیرگراف کامل** نامتناهی است که همه‌ی یال‌های آن هم‌رنگ هستند. در ادامه، قضیه‌ی رمزی را به طور دقیق بیان و اثبات کرده‌ایم.

مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های n عضوی A را با نماد $[A]^n$ نشان می‌دهیم؛ پس

$$[A]^n = \{b \subseteq A : |b| = n\}.$$

قضیه ۱ (رمزی). فرض کنید A یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد و $f : [A]^n \to m$. در این صورت A دارای یک زیرمجموعه‌ی نامتناهیِ B است به طوری که f روی $[B]^n$ ثابت است.

مجموعه‌ی B با ویژگی بالا را یک مجموعه‌ی همگن برای A و نگاشت f می‌نامیم.

اثبات. حکم را با استقراء روی n ثابت می‌کنیم. در $n = ۰$ قضیه بدیهی است. پس فرض می‌کنیم که $n > ۰$.

در ادامه، یک دنباله‌ی نزولیِ $A_۰ \supset A_۱ \supset A_۲ \ldots$ از زیرمجموعه‌های A و یک دنباله‌ی $a_۰, a_۱, \ldots$ از عناصرِ A به‌گونه‌ای می‌سازیم که

$$a_i \in A_j \Leftrightarrow i \geq j.$$

قرار دهید $A = A_۰$ و فرض کنید که A_i ساخته شده است. عنصر دلخواهِ $a_i \in A_i$ را در نظر بگیرید و یک تابع

$f_i : [A_i - \{a_i\}]^{n-1} \to m$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f_i(b) = f(\{a_i\} \cup b).$$

حال A_{i+1} را مجموعه‌ی همگنِ A_i تحت تابع f_i در نظر بگیرید.

فرض کنید که m_i مقدار تابع f روی مجموعه‌ی $[A_{i+1}]^{n-1}$ باشد. فرض کنید $k = m_i$ نامتناهی بار ایجاد شده باشد. مجموعه‌ی زیر، مجموعه‌ی با شرایط خواسته شده‌ی قضیه است:

$$B = \{a_i | m_i = k\}.$$

فرض کنید که $C \subseteq B$ و $|C| = n$. در این صورت $C = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_n}\}$ که در آن اندیس‌ها با ترتیب صعودی نوشته شده است. پس $C = \{a_{i_1}\} \cup b$ که در آن b زیر مجموعه‌ای از $[A_{i_1+1}]^{n-1}$ است. □

تعریف ۲. فرض کنید که κ، μ و ν سه کاردینال باشند و $n \in \omega$. منظور از نمادگذاریِ

$$\kappa \to (\mu)^n_\nu$$

این است که برای هر تابعِ $f : [\kappa]^n \to \nu$ یک مجموعه‌ی همگن با اندازه‌ی μ وجود دارد.

تذکر ۲.

۱. قضیه‌ی رمزی با نمادگذاری بالا بدین صورت قابل بیان است: $\omega \to (\omega)^m_n$ برای هر $m, n \in \omega$.

۲. اگر κ یک کاردینال نامتناهی باشد و $\mu < cf(\kappa)$ آنگاه $\kappa \to (\kappa)^1_\mu$. (تمرین ساده).

قضیه ۳.

$$2^{\aleph_0} \not\to (\aleph_1)^2_2.$$

اثبات. مجموعه‌ی اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، دارای اندازه‌ی $2^{\aleph_0}$ است. فرض کنید $<$ ترتیب عادی اعداد حقیقی و $\prec$ یک خوش‌ترتیبی روی $\mathbb{R}$ باشند. تابع $f : [\mathbb{R}]^2 \to 2$ را به‌گونه‌ی زیر تعریف کنید:

$$f(\{c,d\}) = \begin{cases} 1 & <_{\{c,d\}} = \prec_{\{c,d\}} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

اگر $B \subseteq \mathbb{R}$ یک مجموعه‌ی همگن نسبت به تابع f باشد، آنگاه یا $(B, <)$ و یا $(B, <^{-1})$ خوش‌ترتیب است. ادعا می‌کنیم که یک زیرمجموعه‌ی این‌چنین از $\mathbb{R}$ حداکثر شمارا است.

فرض کنید $(r_\alpha)_{\alpha \in \gamma}$ یک شمارش برای B باشد. بین هر دو عنصر متوالی، یک عدد گویا وجود دارد و تعداد اعداد گویا شماراست. □

ترکیب قضیه‌ی رمزی با لم کونیگ نسخه‌ی متناهی قضیه‌ی رمزی را فراهم می‌کند (این نسخه را در ادامه ثابت خواهیم کرد).

قضیه ۴ (رمزی صورت متناهی). برای هر $k, m, n < \omega$ عدد $l < \omega$ موجود است به‌طوری که

$$l \to (m)^n_k.$$

در ادامه‌ی درس، هدفمان اثبات قضیه‌ی اردوش رادو است که بنا به آن برای هر دو کاردینالِ μ و ν و هر عدد طبیعیِ n یک کاردینال κ موجود است به‌طوری که $\kappa \to (\mu)^n_\nu$.

۲.۶ اردوش ـ رادو

تعریف ۵. منظور از یک درخت، یک مجموعه‌ی مرتب جزئیِ $(T, <)$ است که در آن مجموعه‌ی

$$T_{(x)} = \{y : y < x\}$$

برای هر $x \in T$ یک مجموعه‌ی مرتب خطی خوش‌ترتیب است.

(از تعریف بالا نتیجه می‌شود که درخت فقط به سمت بالا شاخه می‌زند). هر درخت یک مجموعه‌ی خوش‌بنیاد است (یعنی در آن دنباله‌ی نزولی نامتناهی وجود ندارد).

مثال ۶. $^{<\lambda}A = \bigcup_{\alpha<\lambda} {}^{\alpha}A$ با ترتیب شمول یک درخت است. (تمرین)

تعاریفی که در زیر آمده‌اند، عموماً طبیعی هستند (هر چند ظاهرشان ترسناک به نظر برسد).

- $S \subseteq T$ را یک زیردرخت می‌نامیم هرگاه S یک بخش ابتدائیِ T باشد؛ یعنی برای هر $s \in S$ و هر $t \in T$ اگر $t < s$ آنگاه $t \in S$.
- منظور از یک شاخه از درخت، یک زیرمجموعه‌ی مرتب خطی خوش‌ترتیب از آن است.
- برای هر $x \in T$ ارتفاع x به‌صورت $h(x) = \mathrm{Ot}(T_{(x)})$ تعریف می‌شود.
- مجموعه‌ی عناصری را که ارتفاع آنها برابر با α است، αاُمین طبقه می‌نامیم و آن را با T_α نمایش می‌دهیم.
- فرض کنید که $x \in T_\alpha$ و $\beta \le \alpha$. در این صورت تنها یک عنصرِ $y \in T_\beta$ موجود است به طوری که $y \le x$. می‌نویسیم $y = x \restriction \beta$.
- ارتفاع درخت T که آن را با $h(T)$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\min\{\alpha | T_\alpha = \emptyset\}.$$

- طول یک شاخه، همان نوع اردینالی آن، یا به بیان دیگر ارتفاع آن شاخه به عنوان یک درخت است.
- درخت T را λ *شاخه‌زننده* می‌نامیم هرگاه برای هر شاخه‌ی z مجموعه‌ی $N(z) = \{x | T_{(x)} = z\}$ (مجموعه‌ی تالی‌های z در درخت) دارای اندازه‌ی حداکثر برابر با λ باشد. برای مثال درخت $^{<\kappa}\lambda$.

تذکر ۳. توجه کنید که ارتفاع یک درخت، کوچکترین اردینالی است که درخت در ارتفاع آن تهی است. بنابراین وقتی ارتفاع یک درخت ω است، یعنی فقط تا هر ارتفاع متناهی، عنصر داریم و در واقع هیچ عنصری به ارتفاع ω نداریم. حتی شاید هیچ شاخه‌ای به ارتفاع ω نداشته باشیم.

لم ۷. فرض کنید $\kappa \in \mathrm{Card}$ و $h(T) \leq \kappa$. اگر T یک درخت λ شاخه‌زننده باشد، آنگاه $|T| \leq \lambda^{\underset{\smile}{\kappa}}$.

اثبات. برای هر شاخه‌ی z یک تابع یک‌به‌یکِ $f_z : N(z) \to \lambda$ انتخاب کنید. برای هر $x \in T_\alpha$ یک تابعِ $g_x : (\alpha + ۱) \to \lambda$ در نظر بگیرید به طوری که

$$g_x(\beta) = f_{T_{(x \restriction \beta)}}(x \restriction \beta).$$

بررسی کنید که اگر $y \neq x$ آنگاه $g_x \neq g_y$. بنابراین $|T_\alpha| \leq \lambda^{|\alpha+۱|} \leq \lambda^{\underset{\smile}{\kappa}}$. در نتیجه

$$|T| \leq |h(T)| \cdot_c \lambda^{\underset{\smile}{\kappa}} = \lambda^{\underset{\smile}{\kappa}}.$$

□

قضیه ۸. از $\kappa^+ \to (\mu)^n_\nu$ نتیجه می‌شود که $(۲^\kappa)^+ \to (\mu)^{n+۱}_\nu$ (با فرض این که $\nu \leq \kappa$).

اثبات. فرض کنید A یک مجموعه با اندازه‌ی $(۲^\kappa)^+$ باشد که روی آن خوش‌ترتیبیِ $\prec$ قرار دارد. فرض کنید $B \subset A$ و $a \in B - A$. منظورمان از تایپِ a روی B که آن را با $\mathrm{tp}(a/B)$ نشان می‌دهیم، تابع زیر است:

$$\mathrm{tp}(a/B) : [B]^n \to \nu$$

$$b \mapsto b \cup \{a\}.$$

پس وقتی می‌گوییم

$$\mathrm{tp}(a/B) = \mathrm{tp}(a'/B)$$

منظورمان این است که برای هر مجموعه‌ی n عضویِ $b \subseteq B$ داریم $f(b \cup \{a\}) = f(b \cup \{a'\})$.

برای هر $a \in A$ تابع $g_a : ON \to A$ را به‌صورتی تعریف می‌کنیم که

$$g_a(\alpha) = \min\{x \in A - g_a[\alpha] : \mathrm{tp}(x/g_a[\alpha]) = \mathrm{tp}(a/g_a[\alpha])\}.$$

از آنجا که g_a یک تابع یک‌به‌یک است یک اردینالِ δ_a موجود است به‌طوری که $g_a(\delta_a) = a$ بنابراین تابع g_a روی $\delta_a + ۱$ تعریف شده است. حال A را تبدیل به درخت می‌کنیم: می‌گیریم $b < a$ هرگاه g_a یک بخش ابتدائی از g_b باشد. در این صورت ارتفاع a برابر است با δ_a. در واقع روی این درخت زمانی شاخه زده می‌شود که تایپ‌ها متفاوت شود.

ادعا می‌کنیم که ارتفاع درخت A از κ^+ بیشتر است. در غیر این صورت، همه‌ی δ_aها از κ^+ کمتر خواهند بود و همچنین حداکثر $۲^\kappa \geq \nu^\kappa$ تایپ متفاوت روی $g_a[\delta_\alpha]$ وجود خواهد داشت (زیرا تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی یک مجموعه‌ی κ عضوی برابر با κ است و اگر قرار باشد هر کدام رنگ متفاوتی داشته باشد، تعداد حالات ν^κ خواهد بود). یعنی درخت A یک درخت ۲^κ شاخه‌زننده است و از این رو، بنا به لم قبلی، $|A| \leq (۲^\kappa)^{\underset{\smile}{\kappa^+}} = ۲^\kappa$.

حال فرض کنید که a عنصری با ارتفاعِ κ^+ باشد. بنا به فرض استقرا می‌دانیم که $\kappa^+ \to (\mu)^n_\nu$. تابعِ $\mathrm{tp}(a/A_{(a)})$ تابعی از مجموعه‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های n عضویِ یک مجموعه‌ی κ^+ عضوی به یک مجموعه‌ی ν عضوی است. بنابراین مجموعه‌ی

$B \subseteq A_{(a)}$ با اندازه‌ی μ موجود است به‌طوری که $\mathrm{tp}(a/B)$ یک تابع ثابتِ با مقدارِ مثلاً ϵ است. حال اگر $c \in [B]^{n+1}$ آنگاه $c = b \cup \{x\}$ که در آن $b \subseteq A_{(x)}$. از آن جا که $\mathrm{tp}(a/A_{(x)}) = \mathrm{tp}(c/A_{(x)})$ نتیجه می‌گیریم که

$$f(c) = f(b \cup \{x\}) = f(b \cup \{a\}) = \epsilon$$

یعنی، B یک مجموعه‌ی همگن برای f است. □

تعریف ۹ (بِ . ان . کاپا).

$$\beth_0(\kappa) = \kappa$$

$$\beth_{n+1}(\kappa) = 2^{\beth_n(\kappa)}$$

نتیجه ۱۰ (قضیه‌ی اردوش رادو).

$$(\beth_n(\kappa))^+ \to (\kappa^+)^{n+1}_\kappa$$

اثبات. با استقراء و با توجه به این که $\kappa^+ \to (\kappa^+)^1_\kappa$، و بنا به قضیه‌ی قبل. □

یکی از قضایای پرکاربرد دیگر در ترکیبیات، لم کونیگ است. در بخش بعدی، ضمن بیان این لم، از آن برای اثبات قضیه‌ی رمزی متناهی استفاده خواهیم کرد.

۳.۶ کونیگ و رمزی متناهی

قضیه ۱۱ (کونیگ). در هر درختِ نامتناهیِ متناهی شاخه‌زننده حداقل یک مسیر نامتناهی وجود دارد. [1] [2]

اثبات. فرض کنید که T یک درخت نامتناهیِ متناهی‌شاخه‌زننده باشد. با استفاده از قضیه‌ی بازگشت، یک دنباله‌ی صعودیِ $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ خواهیم ساخت که در آن ارتفاع هر a_i برابر با i است و

$$T^{a_i} = \{b \in T | a_i \leq b\}$$

نامتناهی است. در این صورت a_i همان مسیر نامتناهی مد نظر است.

می‌دانیم که $T = \bigcup_{c \in T_0} T^c$ و T_0 (یعنی طبقه‌ی صفرم درخت) متناهی است. بنابراین $a_0 \in T_0$ موجود است به طوری که T_{a_0} نامتناهی است. فرض کنید a_n پیدا شده باشد. قرار دهید $T^{a_n} = \{a_n\} \cup \bigcup_{c \in N_{(a_n)}} T^c$ و به روش مشابه a_{n+1} را پیدا کنید. □

تذکر ۴. درختی که ارتفاع آن یک اردینال حدی α باشد لزوماً شاخه‌ای به طول $h(T) = \alpha$ ندارد (چنین شاخه‌ای را شاخه‌ی پیش‌رونده‌تاانتها بنامیم). تذکر ۳ را نیز ببینید.

در زیر مثالی از یک درخت با ارتفاع α بدون هیچ شاخه‌ی پیش‌رونده‌تاانتها آورده‌ایم.

[1] برای تلفظِ ö در König در حالی که دهان برای ضمه باز شده است کسره ادا می‌شود!

[2] در کاتگوری مجموعه‌ها، لم کونیگ دارای تعمیم جالبی است: حد معکوس یک خانواده معکوس از مجموعه‌های متناهی ناتهی، ناتهی است.

مثال ۱۲. قرار دهید $T=\{(\gamma,\delta)|\gamma\leq\delta<\alpha\}$ و ترتیب زیر را روی T در نظر بگیرید:

$$(\gamma,\delta)<(\gamma',\delta')\Leftrightarrow \gamma<\gamma' \text{ و } \delta=\delta'.$$

این درخت برای هر $\delta<\alpha$ شاخه‌ائی موازی به طول δ دارد. اندازه‌ی هر T_β برابر با $|\alpha\backslash\beta|$ است. اگر $\alpha=\kappa$ یک کاردینال باشد همه‌ی طبقه‌ها دارای اندازه‌ی κ خواهند بود.

منظور از یک درختِ κ آرونشان [3]، درختی است با ارتفاع یک $\kappa\in\mathrm{Card}$ که اندازهی هر طبقه‌ی آن کمتر از κ است و هیچ شاخه‌ی پیش‌رونده‌تاانتها ندارد. لم کونیگ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

قضیه ۱۳ (بیان دیگر قضیه‌ی کونیگ)**.** هیچ درختِ ω آرونشان وجود ندارد.

از بحث درباره‌ی وجود درخت‌های آرونشان پرهیز و تنها به بیان قضیه‌ی زیر بسنده می‌کنیم.

قضیه ۱۴. یک درختِ ω_1 آرونشان وجود دارد.

همان طور که وعده داده بودیم با استفاده از لم کونیگ می‌توانیم حالت متناهی قضیه‌ی رمزی را اثبات کنیم (البته اثبات اصلی این قضیه با استفاده از نسخه‌ی نامتناهی نبوده است و حاوی نوع دیگری ترکیبیات پیچیده و جذاب است). اثبات زیر به فهم بهترِ لم کونیگ نیز کمک می‌کند.

قضیه ۱۵ (رمزی متناهی)**.** برای هر $k,m,n<\omega$ عدد $l<\omega$ موجود است به‌طوری که

$$l\rightarrow(m)^n_k.$$

اثبات. فرض کنید چنین عدد l موجود نباشد. برای هر $l<\omega$ مجموعه‌ی T_l را متشکل از تمام توابعی مانند $f:[\{0,\ldots,l-1\}]^n\rightarrow k$ در نظر بگیرید که برای آنها هیچ زیرمجموعه‌ی همگنی با اندازه‌ی m وجود ندارد. هر T_l متناهی است و اگر $f\in T_{l+1}$ آنگاه $g\in T_l$ به طور یکتا وجود دارد به طوری که $g\subset f$. بنابراین $T=\bigcup T_l$ با ترتیب شمول، یک درختِ نامتناهیِ متناهی‌شاخه‌زننده است (از آنجا که هر T_l ناتهی است، درخت مورد نظر نامتناهی است).

حال بنا به لم کونیگ، می‌توانیم یک مسیرِ نامتناهی

$$f_0\subset f_1\subset f_2\ldots$$

در این درخت پیدا کنیم که در آن $f_i\in T_i$.

تابعِ $f=\bigcup f_i:[\mathbb{N}]^n\rightarrow k$ را در نظر بگیرید. این تابع بنا به قضیه‌ی رمزی نامتناهی باید دارای یک زیرمجموعه‌ی همگنِ نامتناهیِ $X=\{x_1,\ldots,x_m,\ldots\}$ باشد؛ اما در این صورت مجموعه‌ی متشکل از m عنصر اول این مجموعه، مجموعه‌ای همگن برای هر تابعِ f_s برای $s>x_m$ خواهد بود. $\square$

۴.۶ تمرین

تمرین ۱. فرض کنید G یک گراف نامتناهی باشد. نشان دهید که یا G یک زیرگراف کامل نامتناهی دارد یا G یک زیرگراف نامتناهی دارد که بین هیچکدام از رأس‌های آن یالی نیست.

[3] Aronszajn, https://en.wikipedia.org/wiki/Nachman_Aronszajn

تمرین ۲. مورد دوم در تذکر ۲ را ثابت کنید.

تمرین ۳. مثال ۶ را اثبات کنید.

تمرین ۴. اندازه‌ی یک درخت دوشاخه‌زننده‌ی با ارتفاعِ ω چقدر است؟ **تعداد** مسیرهای موجود در آن چقدر است؟

فصل ۷

مدلهای متعدی نظریهٔ مجموعه‌ها

بدون خواندن دو بخش مقدمات اول و مقدمات دوم نیز می‌توان بحث را دنبال کرد.

۱.۷ مقدمات اول

در ابتدای این درس یک سری اصول اولیه نوشتیم و گفتیم که اگر در جهانی این اصول رخ دهند، در آن جهان اعداد طبیعی، اردینالها، کاردینالها و سلسله‌مراتب فون‌نویمن وجود دارند. اما آیا جهانی وجود دارد که در آن اصول ما برقرار باشند؟

چگونه این را ثابت کنیم؟ در واقع زمانی جهانی وجود دارد که از اصول ما پیروی کند که ما با اصول خود بتوانیم ثابت کنیم جهانی وجود دارد که از اصول ما پیروی کند. اما قضیهٔ ناتمامیت گودل می‌گوید که زمانی ما می‌توانیم با اصول خود ثابت کنیم که جهانی برای اصول ما وجود دارد که جهانی برای اصول ما وجود نداشته باشد!

قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل می‌گوید که

(ZFC هیچ مدلی نداشته باشد) $\Leftrightarrow$ ($ZFC \models$ ZFC دارای مدل است)

به بیان دیگر تنها زمانی در هر مدل احتمالی از نظریهٔ مجموعه‌ها، یک مجموعه وجود دارد که تمام اصول نظریهٔ مجموعه‌ها در آن برقرارند، که هیچ مدلی برای نظریهٔ مجموعه‌ها وجود نداشته باشد. پس اگر مدلی برای نظریهٔ مجموعه‌ها وجود داشته باشد، مدلی وجود دارد که هیچ کدام از مجموعه‌های موجود در آن مدل زدافسی نیست.

اما چگونه ZFC اثبات کند که ZFC دارای مدل است؟ اولا توجه کنید که تمام جملاتی که در اصول ZFC نوشته شده‌اند را می‌توان با استفاده از اعداد طبیعی کُد گذاری کرد. یعنی اصول ZFC مجموعه‌هایی در یک مدل ZFC هستند. از طرفی نظریهٔ مدل، زیرمجموعه‌ای از نظریهٔ مجموعه‌هاست. یعنی می‌توان یک فرمول نوشت مثلا به صورت $\phi(m,x)$ که بگوید $m \models x$. دقت کنید که x یک جمله است که در نظریهٔ مجموعه‌ها کد گذاری شده است.

۲.۷ مقدمات دوم

فرض کنید که m یک مجموعه باشد به طوری که $m \models ZFC$. در این صورت ZFC دارای مدلهایی با اندازه‌های دلخواه است؛ مثلا یک مدل شمارا دارد. در این مدل شمارا، هم مجموعه‌ی اعداد طبیعی وجود دارد و هم مجموعه‌ی اعداد حقیقی

(و هم سلسه مراتب فون‌نویمن و غیره). نیز در این مدل شمارا مجموعه‌ی اعداد حقیقی (که اعضای آن در این مدل هستند) ناشماراست! در واقع این مدل شمارا، خودش از کوچکی خودش بی‌خبر است ولی از بیرون (یعنی از داخل یک مدل بزرگتر نظریهٔ مجموعه‌ها) که به آن نگاه شود، این مدل شماراست! این گفته را پارادوکس اسکولم می‌نامند.

۳.۷ بحث اصلی

منظور از یک مدل برای نظریهٔ مجموعه‌ها، ساختاری به صورت $\mathrm{m} = (m, e)$ است که در آن اصول زدافسی برقرارند. دقت کنید که وقتی صحبت از ساختار می‌شود، یعنی m یک مجموعه است.

وقتی می‌گوییم مجموعهٔ m یک مدل است، منظورمان این است که ساختارِ $(m, \in\restriction m)$ یک مدل است. چنین مدلی را متعدی می‌نامیم هرگاه مجموعهٔ m متعدی باشد.

تا اینجا به درکی از روابط خوش‌بنیاد رسیده‌ایم: رابطهٔ r روی یک مجموعه، خوش‌بنیاد است هرگاه هر زیرمجموعه از m با این رابطه دارای عنصر ابتدا باشد. معادلا یک رابطه زمانی خوشی‌بنیاد است که منجر به ایجاد یک دنبالهٔ نزولی نامتناهی نشود.[۱]

قضیه ۱ (فروریزشِ موستوفسکی). برای یک ساختارِ $\mathrm{m} = (m, e)$ موارد زیر معادلند:

۱. m با یک مجموعهٔ متعدی ایزومرف است.

۲. m مدلی برای اصل گسترش است و e یک رابطهٔ خوش‌بنیاد است.

اثبات. ۲ $\Rightarrow$ ۱. رابطهٔ تعلق (روی یک مجموعهٔ متعدی) یک رابطهٔ خوش‌بنیاد است. فرض کنید a یک مجموعهٔ متعدی باشد و $x, y \in a$ و $x \neq y$. در این صورت عنصری مانند $z \in x - y$ (یا $z \in y - x$) موجود است. بنا به متعدی بودن a داریم $z \in a$. پس، در این صورت x, y در a نیز عناصر یکسانی نخواهند داشت.

۱ $\Rightarrow$ ۲. ابتدا نشان می‌دهیم که در صورت برقراری حکم، مجموعهٔ متعدی مورد نظر یکتا است. فرض کنید $f : m \to a$ یک ایزومرفیسم باشد. در این صورت برای هر $x \in m$ داریم

$$f[m_{(x)}] = f(x) \cap a.$$

بنابراین وقتی a متعدی است، داریم

$$f[m_{(x)}] = f(x).$$

عبارت بالا، یکتائی f را نتیجه می‌دهد.

فرض کنید $f : m \to V$ تابعی باشد که شرط بالا را برآورده کند (اثبات این که چنین تابعی موجود است را قبلاً در تمرینها دیده‌ایم). تصویر m تحت این تابع، که آن را با a نشان می‌دهیم، مجموعهٔ متعدی مورد نظر ماست. علت متعدی بودن تصویر m این است که هر عنصر در آن به صورت $f[m_{(x)}]$ است. یک به یک بودن تابع، با استقراء و بنا به برقراری اصل گسترش روی m اثبات می‌شود: برای این منظور باید نشان دهیم که هر عنصر $b \in a$ دارای تنها یک تصویر وارون است. فرض کنید $f(x) = f(y) = b$. در این صورت، بنا به فرض استقراء

$$f^{-1}[b] = m_{(x)} = m_{(y)}.$$

[۱] دقت کنید که وقتی می‌خواهیم رابطهٔ تعلق، خوش‌بنیاد باشد باید این رابطه روی یک مجموعهٔ متعدی تعریف شده است.

بنا به اصل گسترش روی m از این که $m_{(x)} = m_{(y)}$ نتیجه می‌گیریم که $x = y$. $\square$

تعریف ۲. فرض کنید m یک مجموعه باشد. اگر ساختارِ $\mathrm{m} = (m, \in\restriction m)$ اصل گسترش را برآورده کند، آنگاه مجموعهٔ متعدی‌ای را که بنا به قضیهٔ بالا با m ایزومرف است **فروریخت متعدی** m می‌نامیم. [2]

توجه کنید که هر مدل خوش بنیادِ $\mathrm{m} = (m, e)$ [3] اصل خوش‌بنیادی را برآورده می‌کند؛ اما عکس این گفته برقرار نیست. با استفاده از قضیهٔ فشردگی در نظریهٔ مدل (به علت وجود دنباله‌های نزولی متناهی بزرگ) می‌توان مدلهائی پیدا کرد در آنها دنباله‌های نامتناهی نزولی وجود دارد. [4] در ادامهٔ این فصل خواهیم گفت که وجود مدل برای زدافسی، وجود مدل خوش‌بنیاد برای زدافسی را نتیجه نمی‌دهد.

اگر زدافسی سازگار باشد (یعنی حداقل یک مدل داشته باشد) بنا به قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل، این را که زدافسی دارای مدل است نمی‌توان در زدافسی ثابت کرد. [5] در عین حال، همان گونه که در ادامه خواهیم دید، برای هر قطعهٔ متناهی از زدافسی می‌توان وجود یک مدل (حتی متعدی) را ثابت کرد.

تعریف ۳. می‌گوییم مجموعهٔ a فرمولِ $\phi(x_۱, \ldots, x_n)$ را بازتاب می‌دهد (در این فرمول متغیرهای کلاسی نداریم) هرگاه برای هر $b_۱, \ldots, b_n \in a$ داشته باشیم

$$\phi(b_۱, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a \models \phi(b_۱, \ldots, b_n).$$

(نیز گفته می‌شود که فرمولِ ϕ برای مجموعهٔ a مطلق است).

فرض کنید فرمولهای $\phi_۱, \ldots, \phi_m$ داده شده باشند.

قضیه ۴ (بازتاب). برای α های به اندازهٔ کافی بزرگ، V_α فرمولهای $\phi_۱, \ldots, \phi_m$ را بازتاب می‌دهد.

اثبات. کافی است نشان دهیم که برای هر فرمولِ ϕ یک زیرکلاس بستهٔ بی‌کرانِ C_ϕ از ON [6] موجود است به طوری که برای هر $\alpha \in C_\alpha$، V_α فرمولِ C_ϕ را بازتاب می‌دهد.

این گفته را با استقراء روی پیچیدگی فرمولِ ϕ ثابت می‌کنیم.

فرمولهای بدون سور، توسط همهٔ مجموعه‌ها بازتاب می‌یابند. همچنین قرار دهید $C_{\neg\phi} = C_\phi$ و $C_{\phi\wedge\psi} = C_\phi \cap C_\psi$.

برای هر فرمول به صورت $\phi(x_۱, \ldots, x_n) = \exists x_۰ \quad \psi(x_۰, x_۱, \ldots, x_n)$ تابعی به صورت تعریف کنید:

$$F(b_۱, \ldots, b_n) = \begin{cases} ۰ & \neg\phi(b_۱, \ldots, b_n) \\ \min\{\alpha : \exists x_۰ \in V_\alpha \quad \psi(x_۰, b_۱, \ldots, b_n)\} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

همچنین قرار دهید

$$G(\beta) = \sup\{F(b_۱, \ldots, b_n) : b_۱, \ldots, b_n \in V_\beta\}.$$

[2] transitive collapse

[3] منظور این است که e خوش‌بنیاد باشد

[4] برخی دانشجویان با من درس منطق گذرانده‌اند و می‌توانند معنی این جمله را متوجه شوند. باقی بهتر است فقط حکم آن را در نظر بگیرند و فعلا پی اثبات نروند.

[5] این گزاره را نیز در درس منطق ثابت کرده‌ام. در جزوهٔ درس منطقم می‌توانید اثبات آن را ببینید

[6] چنین زیرکلاسی را کلاب می‌نامند: club

عناصری از C_ψ که تحت تابعِ G بسته هستند تشکیل یک زیرکلاس بستهٔ بی‌کران از اردینالها می‌دهند (چرا؟)؛ [۷] کلاس این عناصر را C_ϕ می‌گیریم. حال برای $\alpha \in C_\phi$ و $b_1, \dots, b_n \in V_\alpha$ داریم

$$\phi(b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow \tag{۱.۷}$$

$$\exists b_0 \in V_\alpha \quad \psi(b_0, \dots, b_n) \Leftrightarrow \tag{۲.۷}$$

$$V_\alpha \models \phi(b_0, \dots, b_n). \tag{۳.۷}$$

□

نتیجه ۵. فرض کنید T یک قطعهٔ متناهی از ZFC باشد. در این صورت T مدلی به صورت یک V_α دارد.

تذکر ۵. توجه کنید که آنچه که اثبات کرده‌ایم عبارت زیر است:

فرض کنید T یک قطعهٔ متناهی از ZFC باشد. در این صورت

$$ZFC \models \text{دارای مدل است } T$$

اما اثبات نکرده‌ایم که

$$ZFC \models \text{هر قطعهٔ متناهی از زدافسی دارای مدل است.}$$

اما اگر مورد دوم را اثبات کرده‌بودیم آنگاه با استفاده از فضیهٔ فشردگی (که آن هم در زدافسی اثبات‌پذیر است) نتیجه می‌شد که

$$ZFC \models \text{زدافسی مدل دارد}$$

و از این رو (بنا به ناتمامیت دوم) زدافسی ناسازگار می‌شد.

تعریف ۶. با $Def(m)$ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های (با پارامتر) تعریف‌پذیرِ m را نشان می‌دهیم. به بیان دیگر $Def(m)$ از مجموعه‌های به صورت زیر تشکیل شده است:

$$\{a_0 \in m | m \models \phi(a_0, a_1, \dots, a_n)\}$$

که در آن ϕ یک فرمول است و $a_1, \dots, a_n \in m$.

قضیه ۷. یک مجموعهٔ متعدیِ m مدلی برای زدافسی است اگروتنهااگر شرایط زیر را برآورده کند:

۱. $a \in m \wedge b \in Def(m) \Rightarrow a \cap b \in m$.

۲. $\emptyset \in m$.

۳. $a, b \in m \Rightarrow \{a, b\} \in m$.

۴. $a \in m \Rightarrow \bigcup a \in m$.

[۷] اردینال α را بسته تحت تابع G می‌نامیم هرگاه برای هر $\beta \in \alpha$ داشته باشیم $G(\beta) \in \alpha$. برای پیدا کردن اردینالی که تحت تابعِ G بسته است کافی است از یک اردینال α شروع کنیم و اردینالِ $\bigcup_{n \in \omega} G^n(\alpha)$ را در نظر بگیریم.

۵. $a \in m \Rightarrow B(a) \cap m \in m$.

۶. اگر $f \in Def(m)$ یک تابع باشد و $a \in m$ آنگاه $f[a] \in m$.

۷. $\omega \in m$.

۸. هر $a \in m$ که مجموعهٔ تهی را شامل نباشد دارای یک تابع انتخاب در m باشد.

از اثبات کامل قضیهٔ بالا خودداری و به بیان این نکته اکتفا می‌کنیم: در اثبات قضیهٔ ۱ نشان دادیم که در یک مجموعهٔ متعدی اصول خوش‌بنیادی و گسترش برقرارند. نیز قبلا نشان داده‌ایم که اصل وجود مجموعهٔ نامتناهی با $\omega \in V$ معادل است. سایر اصولی که در بالا فهرست شده‌اند، اصول زدافسی هستند که نسبت به مجموعهٔ m تنظیم شده‌اند.

تعریف ۸. منظور از یک فرمولِ Δ_0، فرمولی است که سورهای آن محدود شده‌اند؛ به بیان دیگر فرمولی که سورها در آن تنها به صورت $\exists x(x \in y \wedge \ldots)$ یا $\forall x(x \in y \rightarrow \ldots)$ ظاهر شوند. یک فرمول را Δ_0^{ZFC} می‌نامیم هرگاه در ZFC اثبات شود که با یک فرمول Δ_0 معادل است.

مثال ۹. اثبات لم پایین با استقرا روی فرمولها آسان است:

لم ۱۰. فرمولهای Δ_0 برای مجموعه‌های متعدی مطلق هستند (= توسط مجموعه‌های متعدی بازتاب داده می‌شوند). فرمولهای Δ_0^{ZFC} برای مدلهای متعدی زدافسی مطلق هستند.

فرمولهای زیر مثالهائی از Δ_0 فرمولها هستند:

۱. $x = \emptyset \Leftrightarrow \forall y \in x \neg y \in x$.

۲. $x = \{y, z\} \Leftrightarrow y \in x \wedge z \in x \wedge \forall w \in x(w = y \vee w = z)$

۳. $x = (y, z) \Leftrightarrow \exists u, v \in x(x = \{u, v\} \wedge u = \{y\} \wedge v = \{y, z\})$.

۴. $x = \bigcup y \Leftrightarrow ((\forall w \in x \exists z \in y w \in z) \wedge (\forall z \in y \forall w \in z w \in x))$.

۵. $x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z \in x\ z \in y$.

۶. x متعدی است $\Leftrightarrow \forall y \in x\ y \subseteq x$.

۷. x یک اردینال است (که این را با $x \in On$ نشان می‌دهیم) $\Leftrightarrow \forall y \in x \forall z \in y(z \in x \wedge \forall w \in z\ w \in y)$.

۸. x یک اردینال حدی است (که این را با $Lim(x)$ نشان می‌دهیم) $\Leftrightarrow x \in ON \wedge \neg x = \emptyset \wedge \forall y \in x \exists z \in x\ y \in z$.

۹. $x \in \omega \Leftrightarrow x \in On \wedge \neg Lim(x) \wedge \forall y \in x \neg Lim(y)$ (x یک عدد طبیعی است).

نتیجه ۱۱. V_α مدلی برای زدافسی (به استثناء احتمالاً اصول بی‌نهایت و جایگذاری) است اگروتنها اگر α یک اردینال حدی باشد. اصل بی‌نهایت برقرار است اگروفقط اگر $\alpha > \omega$. [۸]

[۸] اگر α یک اردینال دست‌نیافتنی قوی باشد اصل جانشانی هم برقرار است. منظور، یک کاردینال حدی منتظم غیرشمارای κ است به طوری که برای هر $\mu < \kappa$ داشته باشیم $2^\mu < \kappa$. اثبات این گفته را به عنوان تمرین رها می‌کنم.

اثبات. کافی است موارد ذکر شده در قضیهٔ ۷ را بررسی کنیم. فرض کنید α یک اردینال حدی باشد و V_α را در نظر بگیرید. نخست توجه کنید که V_α متعدی است.

فرض کنید $a \in V_\alpha$ و $b \in Def(V_\alpha)$. پس اردینال $\beta \in \alpha$ موجود است به طوری که $a \in V_\beta$. در این صورت $a \cap b \subseteq a$ و در نتیجه $a \cap b \in V_{\beta+1}$. پس $a \cap b \in V_\alpha$.

واضح است که $\emptyset \in V_\alpha$.

فرض کنید $a, b \in V_\alpha$. در این صورت $\beta \in \alpha$ موجود است به طوری که $a, b \in V_\beta$. پس $\{a, b\} \in \mathfrak{B}(V_\beta) = V_{\beta+1}$.

فرض کنید $a \in V_\alpha$. در این صورت $a \in V_\beta$ برای یک $\beta \in \alpha$. پس $\bigcup a \subseteq V_\beta$ یعنی $\bigcup a \in \mathfrak{B}(V_\beta)$.

فرض کنید $a \in V_\alpha$. در این صورت $a \in V_\beta$ برای یک $\beta \in \alpha$. هر زیرمجموعه از a زیرمجموعه‌ای از V_β نیز هست. پس $\mathfrak{B}(a)$ زیرمجموعه‌ای از $\mathfrak{B}(V_\beta)$ است؛ یعنی در $V_{\beta+2}$ است.

حال ادعا می‌کنیم که $\omega \in V_\alpha$ زمانی برقرار است که $\alpha > \omega$. برای این منظور کافی است نشان دهیم $\omega \subseteq V_\omega$. اگر $n \in V_m$ آنگاه $\{n\} \in V_{m+1}$ و $\{\{n\}\} \in V_{n+2}$. پس $n \cup \{n\} \in V_\omega$. بنابراین $\omega \subseteq V_\omega$ پس $\omega \in V_{\omega+1}$. □

فرض کنید ϕ, ψ جملاتی در نظریهٔ مجموعه‌ها باشند. مثلاً جملاتی نظیر این جمله که «یک کاردینال دست‌نیافتنی وجود دارد». منظور از جملهٔ $Con(\phi)$ جملهٔ به صورت زیر است:

$ZFC + \phi$ سازگار است.

پس وقتی مثلا می‌گوییم

$$ZFC \vdash Con(\phi) \to Con(\psi)$$

یعنی در ZFC اثبات می‌شود که اگر مدلی برای $ZFC + \phi$ وجود داشته باشد آنگاه مدلی برای $ZFC + \psi$ وجود دارد.

تمرین ۱.

۱. فرض کنید m مدلی برای ZFC باشد. عبارت $m \models Con(\phi)$ یعنی چه؟

۲. عبارت «$ZFC + Con(\phi)$ سازگار است» یعنی چه؟

تعریف ۱۲. می‌گوییم قدرت سازگاری ϕ بیشتر از قدرت سازگاری ψ است هرگاه

$$ZFC \vdash Con(\phi) \to Con(\psi).$$

همچنین می‌گوییم قدرت سازگاری ϕ اکیداًبیشتر از قدرت سازگاری ψ است هرگاه (علاوه بر شرط بالا) با فرض این که $ZFC + Con(\psi)$ سازگار باشد (یعنی در ZFC اثبات نشود که مدلی برای $ZFC + \psi$ وجود ندارد) بتوان اثبات کرد که

$$ZFC \nvdash Con(\psi) \to Con(\phi).$$

واضح است که اگر $ZFC \vdash \phi \to \psi$ آنگاه قدرت سازگاری ϕ بیشتر از قدرت سازگاری ψ است. لم زیر از قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل نتیجه می‌شود.

لم ۱۳. قدرت سازگاری $Con(\phi)$ اکیدا بیشتر از قدرت سازگاری ϕ است.

اثبات. اولاً

$$\vdash Con(Con(\phi)) \to Con(\phi).$$

اگر $Con(\phi) \vdash Con(Con(\phi))$ آنگاه بنا به ناتمامیت دوم گودل، $Con(\phi)$ ناسازگار خواهد بود. □

قضیه ۱۴. جملات زیر به ترتیب قدرت سازگاری اکید نوشته شده‌اند: [۹]

۱. $0 = 0$.

۲. ZFC دارای مدل است.

۳. ZFC دارای یک مدل متعدی است.

۴. یک کاردینال دست‌نیافتنی قوی وجود دارد.

۵. یک کاردینال فشردهٔ ضعیف وجود دارد.

۶. یک کاردینال اندازه‌پذیر وجود دارد.

اثبات. فقط از یک تا سه را بررسی می‌کنیم. اینکه ۲ از ۱ قوی تر است از لم قبل نتیجه می‌شود. در زیر اثبات کرده‌ایم که چرا ۳ از۲ اکیدا قوی‌تر است.

اگر ZFC دارای یک مدل متعدی، مثلا به نام m باشد آن گاه $Con(ZFC)$ برقرار است. بنا به قضیهٔ تمامیت، یک جملهٔ به صورتِ $Con(\phi)$ بنا بر آنچه در فصل خواهیم دید (و بنا به قضیهٔ تمامیت) برای مدلهای متعدی زدافسی مطلق است (زیرا یک جملهٔ حسابی است). بنابراین m مدلی برای $Con(ZFC)$ نیز هست. پس نشان داده‌ایم که

$$ZFC \vdash (\text{یک مدل متعدی برای زدافسی وجود دارد}) \to Con(Con(ZFC))$$

بنا به لم قبل، خواستهٔ قضیه اثبات می‌شود. □

فرض کنید m یک مجموعه و E یک رابطهٔ دوتائی روی آن و از این رو (m, E) یک ساختار مرتبهٔ اول باشد. می‌توان در ZFC عبارت زیر را نوشت:

$$\text{“}(m, E) \models ZFC''$$

پس عبارت زیر معنی دارد:

$$ZFC \models \text{“}(m, E) \models ZFC''$$

اما در ادامه توضیح داده‌ایم که وقتی می‌گوییم یک **کلاس**، مدلی برای ZFC است منظورمان چیست.

اولا کلاسها توسط فرمولها قابل تعریف هستند؛ مانند کلاس V که توسط فرمولِ $x = x$ قابل تعریف است. ثانیا باید توجه داشته باشیم که برای کلاسها، نظریهٔ مدل نداریم: یعنی هیچ فرمولی (مثلا به صورت $\phi(K, x)$) وجود ندارد که برای **کلاسهای** K بگوید:

$$x \text{ یک جمله است و } (K \models x)$$

[۹] موارد ۴ تا ۶ در این درس تعریف نشده‌اند و تنها برای خوانندهٔ آشنا با این مفاهیم در این جا نوشته شده‌اند.

اما در عین حال برای یک جملهٔ واحدِ ϕ و کلاس K می‌توان فرمولِ

$$K \models \phi$$

را می‌توان نوشت (برای این کار تنها کافی است که سورهای فرمولِ ϕ را نسبت به K تنظیم کنیم).

بنا بر آن چه گفته شد، برای هر اصل ϕ در ZFC می‌توان در ZFC (به وضوح!) ثابت کرد که

$$V \models \phi.$$

اما عبارت

$$V \models ZFC$$

به هیچ وجه قابل فرمول‌بندی نیست. اگر چنین چیزی امکان پذیر بود می‌شد در ZFC مدل داشتن ZFC اثبات می‌شد، که این بنا به قضیهٔ ناتمامیت دوم گودل به معنی عدم سازگاری ZFC است.

در ادامه، هر جا نوشته‌ایم $K \models ZFC$ منظورمان تمام آن بی‌نهایت جملهٔ به صورت $K \models \phi$ است که ϕ جزو اصول ZFC است.

قضیه ۱۵. فرض کنید دنبالهٔ $(K_\alpha)_{\alpha \in On}$ از مجموعه‌های متعدی داده شده باشد به طوری که $K_\alpha \in K_{\alpha+1}$ و $K_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} K_\alpha$ برای هر اردینال حدی λ. نیز قرار دهید $K = \bigcup_{\alpha \in On}$. در این صورت اگر برای هر α داشته باشیم $Def(K_\alpha) \in K$ آنگاه K مدلی برای ZF است.

تعریف ۱۶. سلسله‌مراتب ساختی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_0 = \emptyset$$

$$L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$$

$$L_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha \quad \text{برای اردینال حدی } \lambda$$

نتیجه ۱۷. فرض کنید $L = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha$، کلاس همهٔ مجموعه‌های ساخته‌شدنی باشد. در این صورت L مدلی برای ZF است.

تذکر ۶. در فصل بعدی خواهیم دید که L مدل ZFC است و GCH هم در آن برقرار است.

فصل ۸

$V = L$

تعریف ۱۸.

۱. منظور از یک فرمولِ $\sum_1$ فرمولی به صورت زیر است:

$$\exists x \, \phi$$

که در آن ϕ یک فرمول Δ_0 است.

۲. منظور از یک فرمول $\sum_1^{ZFC}$، فرمولی است که در ZFC اثبات می‌شود که با یک فرمول $\sum_1$ معادل است.

۳. منظور از یک تابعِ $\sum_1^{ZFC}$ یک تابعال روی V^n است که توسط یک فرمولِ $\sum_1^{ZFC}$ تعریف می‌شود و تعریف شدن تابع توسط این فرمول نیز در ZFC اثبات پذیر است.

لم ۱۹.

۱. فرض کنید که ϕ یک فرمول $\sum_1$ باشد و m یک مجموعهٔ متعدی باشد. در این صورت برای هر $a_1, \ldots, a_n \in m$ داریم

$$m \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \phi(a_1, \ldots, a_n).$$

(در حالت بالا بگوییم که فرمول مورد نظر برای m متداوم است).

۲. توابعِ $\sum_1^{ZFC}$ برای مدلهای متعدی ZFC مطلق هستند؛ بدین معنی اگر F و m به ترتیب چنین تابع و مدلی باشند، آنگاه برای هر $a_0, \ldots, a_n \in m$

$$m \models a_0 = F(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow a_0 = F(a_1, \ldots, a_n).$$

همچنین مدلهای متعدی تحت توابعِ $\sum_1^{ZFC}$ بسته هستند.

لم ۲۰. فرمولهای $\sum_1^{ZFC}$ تحت موارد زیر بسته هستند:

۱. $\vee$

۲. $\wedge$

۳. $\exists$

۴. $\forall x \in y$

۵. جایگذاریِ توابع $\sum_1^{ZFC}$.

اثبات. فرض کنید $\phi_i = \exists x_0 \psi_i(x_0, \dots, x_n)$ دو فرمولِ $\sum_1$ باشد. می‌توان در ZFC موارد زیر را ثابت کرد:

$$\phi_1 \vee \phi_2 \leftrightarrow \exists x_0 (\psi_1 \vee \psi_2)$$

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \leftrightarrow \exists y (\exists x_0 \in y \psi_1) \wedge (\exists x_0 \in y \psi_2))$$

$$\exists x_1 \phi_1 \leftrightarrow \exists y \exists x_1 \in y \exists x_0 \in y \psi_1$$

$$\forall x_1 \in y \phi_1 \leftrightarrow \exists z \forall x_1 \in y \exists x_0 \in z \psi_1$$

$$\phi_1(F(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists x_1 (x_1 = F(x_2, \dots, x_n) \wedge \phi_1)$$

□

در لم بعدی خواهیم دید که قضیهٔ بازگشت دارای یک نسخهٔ $\sum_1^{ZFC}$ است.

لم ۲۱. برای هر تابعِ $G : V \times V \to V$ مانند $\sum_1^{ZFC}$ یک تابعِ یکتای $F : V \times On \to V$ مانند $\sum_1^{ZFC}$ موجود است به طوری که $F(x, \alpha) = G(x, F_x \restriction \alpha)$ که در آن $F_x : On \to V$ به صورت $F_x(y) = F(x, y)$ تعریف شده است.

اثبات. داریم

$$y = F(x, \alpha) \Leftrightarrow \exists f ((\text{تابع است } f) \wedge \alpha \in On \; \forall \beta \in (\alpha + 1) \; f(\beta) = G(x, f \restriction \beta) \wedge f(\alpha) = y)$$

همچنین عبارت «x یک تابع است» فرمولی Δ_0 است. □

تعریف ۲۲. به هر رابطه‌ای که در ساختارِ $(\omega, \circ, +, \cdot, <)$ قابل تعریف باشد، یک رابطهٔ حسابی گفته می‌شود.

نتیجه ۲۳. روابط حسابی، Δ_1^{ZFC} هستند. (فرمولی را Δ_1^{ZFC} می‌نامیم که خودْ و نقیضش $\sum_1^{ZFC}$ باشند.)

از اثبات قضیهٔ زیر خودداری می‌کنیم.

قضیه ۲۴. $x \mapsto Def(x)$ یک تابعِ $\sum_1^{ZFC}$ است.

از قضیهٔ بالا و لمِ ۲۱ نتیجه می‌گیریم که:

نتیجه ۲۵. تابعالِ $\alpha \to L_\alpha$ یک تابعالِ $\sum_1^{ZFC}$ است.

نتیجه ۲۶ (گودل). L برای مدلهای متعدی M از نظریهٔ مجموعه‌ها که شامل اردینالها هستند، مطلق است؛ یعنی برای یک چنین مدل M داریم

$$L^M = L.$$

اثبات. فرض کنید M یک مدل متعدی از ZFC باشد. از آنجا که M تحت تابعِ $\alpha \to L_\alpha$ بسته است و این تابع $\sum_1^{ZFC}$ است، نتیجه می‌گیریم که L^M تصویر On^M است. از آنجا که On یک محمولِ Δ_0 است داریم $On^M = On \cap M$. حال اگر M شامل همهٔ اردینالها باشد داریم $L^M = L$. □

تذکر ۷. دو نکته جالب توجه در اثبات بالا وجود دارند.

۱. این که اردینال بودن یک جملهٔ Δ_0 است باعث می‌شود که اردینالهای M همان اردینالهائی باشند که در M هستند؛ یعنی در M بر حسب اتفاق چیز دیگری غیر از اردینالهای V اردینال نمی‌شود.

۲. در پایان اثبات اگر M شامل همهٔ اردینالها نمی‌بود، آنگاه $On \cap M$ یک اردینال حدیِ α می‌شد و می‌داشتیم $L^M = L_\alpha$.

تمرین ۲. نشان دهید که L شامل اردینالهاست.

نتیجه ۲۷.

$$L \models V = L.$$

توجه کنید که در ساختن L از اصل انتخاب استفاده نشده است. پس:

نتیجه ۲۸. اگر ZF سازگار باشد آنگاه $ZF + V = L$ نیز سازگار است.

قضیه ۲۹ (گودل).

$$ZFC + V = L \vdash GCH.$$

ایدهٔ اثبات. نشان می‌دهیم که $|L_\alpha| = |\alpha|$ و هر $a \subset \kappa$ در یک L_β با $\beta < \kappa^+$ واقع می‌شود. از این رو $\mathfrak{B}(\kappa)$ زیرمجموعه‌ای از L_{κ^+} و دارای اندازهٔ حداکثر κ^+ است. □

شرح کامل اثبات. برای اثبات نخست به یک لم نیاز داریم، که اثبات آن چندان دشوار نیست ولی بدان نخواهیم پرداخت.

لم ۳۰. برای هر اردینالِ نامتناهی α داریم $|L_\alpha| = |\alpha|$.

یک فرمولِ $\phi(x_0, x_1) \in \sum_1$ در نظر بگیرید که تابعِ $\alpha \mapsto L_\alpha$ توسط آن تعریف شده است. (برای راحتی، فرمول مورد نظر را به صورت $x_0 = L_{x_1}$ تصور کنید). با فرضِ $V = L$ جملهٔ زیر درست است:

$$\psi = \forall x \exists y, z \quad \phi(y, z) \wedge x \in y$$

جملهٔ بالا واقعیت زیر را بیان می‌کند:

$$\forall x \exists y, z \quad x \in y \wedge y = L_z.$$

یک زیرمجموعهٔ نامتناهیِ دلخواهِ a از یک کاردینالِ κ را در نظر بگیرید. فرض کنید α به اندازه‌ای بزرگ باشد که $\kappa \cup \{a\} \subset L_\alpha$. (چون $V = L$ این کار امکان‌پذیر است). بنا به قضیهٔ ۴ [1] می‌توان α را به گونه‌ای در نظر گرفت که

$$L_\alpha \models \psi.$$

حال قضیهٔ لون‌هایم اسکولم را برای ساختارِ $(L_\alpha, \in \restriction L_\alpha)$ و زیرمجموعهٔ $\kappa \cup \{a\}$ به کار می‌بریم. نخست این قضیه را یادآوری می‌کنیم.

[1] در واقع مشابه همان قضیه برای L_α نیز قابل اثبات است و ما به آن نسخه نیازمندیم.

قضیه ۳۱ (لونهایم اسکولم). فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک ساختار در یک زبان شمارا و B یک زیرمجموعهٔ نامتناهی از A باشند. در این صورت $\mathfrak{A}$ یک زیرساختارِ مقدماتیِ C شامل B و هم‌اندازهٔ آن دارد. [۲]

حال فرض کنید که C یک زیرساختار مقدماتی از L_α باشد که همهٔ $\beta < \kappa$ و a را داراست و اندازهٔ آن برابر با κ است. بنا به مقدماتی بودن این زیرساختار داریم:

$$C \models \psi \wedge (\text{اصل گسترش})$$

فرض کنید که $f : C \to D$ ایزومرفیسمی باشد که بنا به قضیهٔ فروریزش ۱ به دست می‌آید. از آنجا که $\kappa \cup \{a\}$ متعدی است، تابعِ f روی $\kappa \cup \{a\}$ همانی است. بنابراین $D \subseteq \kappa$ و $a \in D$.

از آنجا که فرمولِ ψ در D نیز برقرار است، عناصرِ $y, z \in D$ و عنصر $a \in y$ موجودند به طوری که $D \models \phi(y, z)$.

فرمولِ ϕ برای D متداوم است؛ بنابراین $\phi(y, z)$ برقرار است و y برابر با یک L_β است که $L_\beta \in D$. از آنجا که D متعدی است، L_β زیرمجموعه‌ای از آن است بنابراین $|L_\beta| \leq \kappa$. حال از این که $\beta \subseteq L_\beta$ نتیجه می‌گیریم که $\beta < \kappa^+$.

بنا بر آنچه گفته شد هر $a \subset \kappa$ در یک L_β (که $\beta < \kappa^+$) واقع می‌شود. از این رو $\mathfrak{B}(\kappa)$ زیرمجموعه‌ای از L_{κ^+} و دارای اندازهٔ حداکثر κ^+ است. □

قضیه ۳۲.

$$ZF + V = L \vdash AC.$$

ایدهٔ اثبات. روی L یک خوش‌ترتیبی تعریف می‌کنیم. برای این کار لازم است که روی همهٔ مجموعه‌های تعریف‌پذیر خوش‌ترتیبی داشته باشیم و برای این لازم است روی همهٔ فرمولها خوش‌ترتیبی داشته باشیم. در تعریف خوش‌ترتیبی یادشده از اصل انتخاب استفاده نمی‌کنیم. در پایان می‌دانیم که وجود خوش‌ترتیبی اصل انتخاب را نتیجه می‌دهد. □

اثبات. این که تعداد فرمولهای نظریهٔ مجموعه‌ها شماراست، بدون استفاده از AC قابل اثبات است. فرض کنید $<$ یک خوش‌ترتیبی روی همهٔ فرمولها باشد.

نخست (در بند بعدی) نشان می‌دهیم که اگر x یک مجموعهٔ خوش‌ترتیب باشد می‌توان روی $Def(x)$ یک خوش‌ترتیبی قرار داد. دقت کنید که هر مجموعه در $Def(x)$ توسط یک فرمول با یک تعداد پارامتر تعریف می‌شود؛ پس کافی است زوجهای به صورت (ϕ, a) را مرتب کنیم که در آن ϕ یک فرمول است و a یک پارامتر.

فرض کنید x یک مجموعه شامل $\emptyset$ باشد و $<$ یک خوش‌ترتیبی روی آن باشد که با $\emptyset$ شروع می‌شود. مجموعهٔ x^* متشکل از تمام دنباله‌های نامتناهی از عناصر x که تقریباً همه‌جا برابر با $\emptyset$ هستند دارای یک خوش‌ترتیبی کانونی (قاموسی) است. مجموعهٔ زیر را با ترتیب قاموسی در نظر بگیرید:

$$\{(\phi, a) : a \in x^* \text{ و } \phi\text{یک فرمول است}\}$$

هر زوج مرتب در مجموعهٔ بالا یک مجموعهٔ $c \in Def(x)$ به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$c = \{b \in x | x \models \phi(b, a)\}.$$

در نتیجه یک خوش‌ترتیبی کانونی روی $Def(x)$ به صورت پیش رو وجود دارد: تعریف می‌کنیم $c < c'$ هر گاه نتوان c' را توسط یک زوج مرتبِ (ϕ', a') تعریف کرد به طوری که (ϕ', a') کوچکتر از (ϕ, a) باشد.

[۲] منظور از زیرساختار مقدماتی، زیرساختاری است که همهٔ فرمولها را بازتاب می‌دهد.

در ادامه به صورت بازگشتی یک تابعال تعریف خواهیم کرد که هر اردینال α را با یک خوش‌ترتیبیِ $<_\alpha$ روی L_α متناظر کند به گونه‌ای که اگر $\alpha < \beta$ آنگاه $(L_\beta, <_\beta)$ یک بخش ابتدائی از $(L_\alpha, <_\alpha)$ باشد. برای $\alpha = ۰$ و $\alpha = ۱$ هیچ انتخابی وجود ندارد و برای هر اردینال حدی λ می‌توان $<_\lambda$ را اجتماع تمام $<_\alpha$ های قبلی گرفت.

حال فرض کنید که برای اردینال α ترتیب $<_\alpha$ تعریف شده باشد. بنا بر آنچه گفتیم روی $L_{\alpha+۱} = Def(L_\alpha)$ یک ترتیب کانونی وجود دارد که در حالت کلی، لزومی ندارد که توسیعی از $<_\alpha$ باشد. بنابراین تعریف می‌کنیم

$$c <_{\alpha+۱} c' \Leftrightarrow \begin{cases} c <_\alpha c' & c, c' \in L_\alpha \\ c < c' & c, c' \notin L_\alpha \\ c \neq c' & c \in L_\alpha, c' \notin L_\alpha. \end{cases}$$

در این صورت $\bigcup_{\alpha \in On} <_\alpha$ یک خوش‌ترتیبی روی L است. $\square$

بحث را با نتیجهٔ زیر به پایان می‌بریم.

نتیجه ۳۳. اگر ZF سازگار باشد، ZFC نیز سازگار است.