

# امتحان میان‌ترم درس توپولوژی

۴ دی ۱۴۰۱

## سوال ۱.

- تعریف توپولوژی (با استفاده از مجموعه‌های باز و بسته)، مقایسه دو توپولوژی، نشان دادن این که دو توپولوژی هاسدورف فشرده روی یک مجموعه  $X$  یا غیرقابل مقایسه و یا مساوی‌اند.
- تعریف یک پایه برای توپولوژی، توپولوژی تولید شده توسط یک پایه.
- معرفی چند پایه برای توپولوژی روی مجموعه اعداد حقیقی و توانهای آن.

سوال ۲.  $X$  موضعاً فشرده است اگر و تنها اگر یک فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف  $Y$  موجود باشد به طوری که  $X$  هومئومورف با یک زیرمجموعه باز آن باشد.

سوال ۳. اگر  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  هم‌بند و باز باشد آنگاه  $X$  هم‌بند مسیری است.

سوال ۴. اگر  $A$  هم‌بند مسیری باشد، هم‌بند است.

سوال ۵. اگر  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته باشد آنگاه برای هر  $f(a) < d < f(b)$  یک  $a < c < b$  موجود است که  $f(c) = d$ . قضیه مقدار میانی را در کلی‌ترین حالت بیان کنید.

سوال ۶. زیرمجموعه‌های هم‌بند  $\mathbb{R}$  دقیقاً بازه‌ها هستند.

سوال ۷. فرض کنید  $f : X \rightarrow Y$  پیوسته باشد و  $A \subseteq X$  هم‌بند باشد. در این صورت  $f(A)$  هم‌بند است.

سوال ۸. اگر  $A$  همبند باشد و  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$  آنگاه  $B$  همبند است.

سوال ۹. فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه همبند باشند و  $A \cap B \neq \emptyset$  در این صورت  $A \cup B$  همبند است.

سوال ۱۰. مجموعه‌های فشرده در فضاهاى هاسدوف بسته‌اند. زیرمجموعه‌های بسته یک مجموعه فشرده، همواره فشرده‌اند.

سوال ۱۱. یک زیرمجموعه از  $\mathbb{R}^n$  فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کراندار باشد.

سوال ۱۲. فرض کنید  $A \subseteq X$  و  $B \subseteq Y$  فشرده باشند. در این صورت  $A \times B \subseteq X \times Y$  فشرده است.

سوال ۱۳. فرض کنید  $X$  یک فضای متریک باشد. همچنین فرض کنید  $A \subseteq X$  به گونه‌ای باشد که هر دنباله نامتناهی در  $A$  دارای یک زیردنباله همگرا به عنصری در  $A$  باشد. در این صورت  $A$  فشرده است.

سوال ۱۴. فرض کنید  $A \subseteq X$  یک مجموعه فشرده باشد. همچنین فرض کنید  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  یک دنباله از اعضای  $A$  باشد. در این صورت  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  دارای یک زیردنباله همگرا به یک عنصر  $a \in A$  است.

سوال ۱۵. فرض کنید  $f: X \rightarrow Y$  پیوسته باشد و  $Y$  یک فضا با توپولوژی ترتیبی باشد.  $X$  یک فضای توپولوژی دلخواه است. همچنین فرض کنید  $A \subseteq X$  فشرده است. در این صورت  $f$  در  $A$  دارای ماکزیمم و مینیوم مطلق است. یعنی نقاط  $c_1$  و  $c_2$  در  $A$  موجودند به طوری که

$$\forall x \in A : f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2).$$

سوال ۱۶. کنید  $f: X \rightarrow Y$  یک تابع پیوسته باشد. همچنین فرض کنید  $A \subseteq X$  فشرده باشد. در این صورت

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y$$

فشرده است.

سوال ۱۷.  $\mathbb{R}^\omega$  با توپولوژی جعبه‌ای متریک‌پذیر نیست.  $\mathbb{R}^\omega$  با توپولوژی حاصلضربی متریک‌پذیر است. در مورد  $\mathbb{R}^J$  که در آن  $J$  ناشماراست چطور؟

**سوال ۱۸.** تابع  $f : A \rightarrow X \times Y$  را در نظر بگیرید. در این صورت برای هر  $a \in A$  داریم  $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$  که  $f_1 : A \rightarrow X$  و  $f_2 : A \rightarrow Y$ . آنگاه  $f$  پیوسته است اگر و تنها اگر  $f_1$  و  $f_2$  هر دو پیوسته باشند.

**سوال ۱۹.**  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (با توپولوژی ترتیبی) برابر با توپولوژی دایره‌ای است. ترتیبی  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  گسسته همان توپولوژی ایجادشده با ترتیب قاموسی است.

**سوال ۲۰.** تابع  $f : X \rightarrow Y$  پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه  $A \subseteq X$  داشته باشیم،  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ . به بیان دیگر اگر  $x$  یک نقطه حدی  $A$  باشد،  $f(x)$  یک نقطه حدی برای  $f(A)$  باشد  $(x \in \overline{A} \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)})$ .

**سوال ۲۱.** در فضای هاسدورف، حد یک دنباله همگرا، یکتاست.

**سوال ۲۲.** منظور از مؤلفه همبندی یک مجموعه چیست؟ نشان دهید هر مجموعه همبند، زیرمجموعه یک مؤلفه همبندی است.

**سوال ۲۳.** منظور از عدد لبگ یک پوشش باز چیست؟

**سوال ۲۴.** فرض کنید  $X$  فشرده و هاسدوف و  $A, B \subseteq X$  دو مجموعه بسته باشند. نشان دهید که بازهای  $U_1, U_2$  موجودند به طوری که  $A \subseteq U_1, B \subseteq U_2$  و  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

**سوال ۲۵.** نشان دهید که  $[0, 1]^2$  با ترتیب قاموسی همبند است اما همبند مسیری نیست.

**سوال ۲۶.** نشان دهید که «شانه محذوف» همبند است اما همبند مسیری نیست.