

اثبات قضیه مورلی

با استفاده از قضیه بالدوین-لاخلان
محسن خانی

۱ خرداد ۱۴۰۴

من از مُفَصِّل این نکته مُجَمَّلی گفتم
تو خود حدیث مفصل بخوان از این مجمل
عمان ساسانی

قضیه مورلی یکی از نقاط عطف در نظریه مدلهاست. بنا به قضیه مورلی، اگر یک نظریه T در کاردینال $\aleph_1$ جازم باشد، در تمام کاردینالهای نامتناهی، جازم است. یک نظریه را در کاردینالی مانند κ ، جازم می‌نامیم، هرگاه همه مدل‌های آن نظریه که سایز آنها κ است، با هم ایزومرف باشند. به عنوان مثال، نظریه میدانهای بسته جبری در کاردینال $2^{\aleph_0}$ جازم است، زیرا تنها مدل آن از این سایز، مجموعه اعداد مختلط است. قضیه مورلی از قضیه بالدوین - لاخلان^۱ در زیر نتیجه می‌شود. اثبات این قضیه، بسیار پیچیده و جذاب است. در این یادداشت کوتاه کوشیده‌ام تا خط فکر رسیدن به اثبات را بیان کنم اما تفسیر آنچه در این یادداشت دو صفحه‌ای نوشته شده است، نوشتن حداقل صد صفحه ریاضیات آن هم از نوع جذابش می‌طلبد. نوشته پیش رو، بنابراین نوشته سختی است و تنها به درد کسانی می‌خورد که ضمن بهره‌مندی از دانش کافی در نظریه مدلها، می‌خواهند مسیر اثبات را بدانند.

قضیه ۱ (بالدوین - لاخلان). فرض کنید κ یک کاردینال نامتناهی باشد. تئوری شمارای T در کاردینال κ جازم است اگر و تنها اگر ω پایدار باشد و هیچ زوج وات نداشته باشد.

اثبات. حقایق زیر، ما را به اثبات قضیه خواهد رساند.

حقیقت ۱. اگر T در یک کاردینال نامتناهی، جازم باشد، ω پایدار است.

منظور از یک تئوری ω پایدار، تئوری‌ای است که در آن تعداد تاپیهای روی یک مجموعه شمارا از پارامترها، حداکثر شماراست. فرض کنید T جازم باشد ولی ω پایدار نباشد. در این صورت T یک مدل بزرگ دارد که در آن تعداد تاپیها زیاد است. از طرف دیگر، هر تئوری شمارا، دارای یک مدل بزرگ است که در آن حداکثر تعدادی شمارا تاپ برآورده می‌شود. چنین مدلی در واقع با استفاده از یک دنباله تمیزناپذیر بزرگ ساخته می‌شود. واضح است که این دو مدل معرفی شده نمی‌توانند با هم ایزومرف باشند.

حقیقت ۲. اگر T در یک کاردینال نامتناهی جازم باشد، هیچ زوج وات ندارد.

به یک زوج (N, M) از مدل‌های یک تئوری T یک زوج وات گفته می‌شود هرگاه M یک زیرساختار مقدماتی از N باشد و یک فرمول φ با نامتناهی جواب، وجود داشته باشد به طوری که $\varphi(M) = \varphi(N)$. وقتی یک تئوری دارای یک زوج وات است، آنگاه دارای یک زوج وات (N, M) است که در آن هر دو مدل، همگن و ایزومرف هستند. با استفاده از یک زنجیر بسیار بلند از چنین مدل‌هایی، می‌توان یک مدل N برای تئوری پیدا کرد که سایز آن $\aleph_1$ است اما یک فرمول φ وجود دارد به طوری که $\varphi(N)$ شماراست. از طرف دیگر، وقتی تئوری T در کاردینال κ جازم است، مدل‌های با سایز κ از این تئوری، اشباع هستند. علت این امر این است که تئوری‌های جازم پایدار هستند و تئوری‌های پایدار، مدل‌های اشباع دارند. در یک مدل κ اشباع از تئوری مورد نظر ما به نام N' هر مجموعه تعریف پذیر، حداقل دارای اندازه κ است. چنین مدلی، نمی‌تواند با مدل N که در بند قبلی معرفی شد، ایزومرف باشد. با استفاده از حقیقت ۱ و حقیقت ۲، یک سمت قضیه اثبات شده است.

حقیقت ۳. هر تئوری ω پایدار، بسیار متعالی است.

منظور از یک تئوری بسیار متعالی، تئوری‌ای است که در آن هیچ درختی از فرمولها پیدا نشود که در مسیرها سازگار و در سطرها ناسازگار باشد. اگر در تئوری T یک درخت پیدا شود، تعداد تاپیها به صورت نمایی زیاد می‌شود و ω پایدار بودن نقض می‌گردد.

حقیقت ۴. در یک تئوری بسیار متعالی، تاپیهای ایزوله چگال هستند.

هر فرمول φ که در هیچ تاپ ایزوله‌ای نباشد، به دو فرمول تجزیه می‌شود که آنها نیز در هیچ تاپ ایزوله‌ای نیستند و از این طریق یک درخت ایجاد می‌شود که بسیار متعالی بودن را نقض می‌کند.

حقیقت ۵. هر تئوری که در آن تاپیهای ایزوله چگال هستند، دارای یک مدل اول است.

¹Morley, Baldwin, Lachlan

منظور از یک مدل اول، مدلی است که در هر مدل دیگر به صورت مقدماتی بنشیند. برای پیدا کردن مدل اول، کافی است یک مدل پیدا کنیم که تایپ همه چندتایی‌های آن ایزوله، یعنی معادل با فقط یک فرمول، باشد. به بیان معادل باید مدلی پیدا کنیم که تایپ جزئی زیر را حذف کند:

$$\{\neg\varphi(\bar{x})\}_{\varphi \in A}$$

که در آن A مجموعه همه فرمولهایی است که تایپ ایزوله می‌کنند. اما حذف تایپ بالا، معادل چگال بودن تایپهای ایزوله است.

حقیقت ۶. در هر مدل از یک تئوری بسیار متعالی، هر فرمولی شامل یک فرمول کمینه است.

منظور از یک فرمول کمینه در یک مدل M فرمولی است مانند φ به طوری که برای هر فرمول ψ یا $\varphi \wedge \psi$ یا $\varphi \wedge \neg\psi$ در مدل M متناهی باشند. اگر φ یک فرمول دلخواه در یک تئوری بسیار متعالی باشد که کمینه نیست، به ψ و $\neg\psi$ تجزیه می‌شود که هر دوی آنها نامتناهی هستند. این تجزیه، به صورت درختی ادامه پیدا می‌کند و با این روش، بسیار متعالی بودن تئوری نقض می‌شود.

حقیقت ۷. اگر یک تئوری، هیچ جفت وات نداشته باشد، سور $\exists^\infty$ را حذف می‌کند.

می‌گوییم تئوری T سور $\exists^\infty$ را حذف می‌کند هرگاه در هر مدل M اگر در خانواده $\{\varphi(M, \bar{a})\}_{\bar{a} \in M}$ تمام مجموعه‌ها، متناهی باشند، یک عدد n_φ وجود داشته باشد که از اندازه تمام آنها بیشتر باشد. فرض کنید تئوری T سور $\exists^\infty$ را برای یک فرمول φ حذف نکند، در این صورت می‌توان می‌توان در زبان $L_p = L \cup \{p\}$ و با استفاده از متناهی ثابت، یک تئوری نوشت که یکی از مدل‌های آن زوجی واتى مانند (N, M) نسبت به فرمول φ باشد. در واقع عدم حذف سور $\exists^\infty$ منجر به ایجاد یک مدل می‌شود که در آن φ توسط نامتناهی عنصر برآورده شود.

حقیقت ۸. اگر یک تئوری سور $\exists^\infty$ را حذف کند، در آن هر فرمول کمینه، بسیار کمینه است.

منظور از یک فرمول بسیار کمینه در یک مدل M فرمولی است که نه تنها در M بلکه در تمام توسیعیهای مقدماتی آن نیز کمینه باشد. وقتی تئوری T سور $\exists^\infty$ را برای یک فرمول φ حذف می‌کند، فرمولی مانند ψ پیدا می‌شود به طوری که:

$$\exists^\infty x \quad \varphi(x, \bar{a}) \leftrightarrow \psi(\bar{a}).$$

بنابراین وقتی φ در M کمینه است در تمام توسیعیهای مقدماتی نیز کمینه می‌شود.

تا اینجا ثابت شد که اگر یک تئوری هیچ زوج واتى نداشته باشد و ω پایدار باشد در آن یک فرمول بسیار کمینه پیدا می‌شود.

حقیقت ۹. اگر فرمول φ یک فرمول بسیار کمینه باشد، آنگاه عملگر

$$A \mapsto \varphi(M) \cap \text{acl}(A)$$

یک شبه هندسه در مدل‌های تئوری ایجاد می‌کند. شبه هندسه منجر به ایجاد مفهوم بُعد می‌شود. هر دو مدل تئوری که بعد یکسانی داشته باشند، با هم ایزومرف هستند.

علت این که فرمولهای بسیار کمینه موجب ایجاد شبه هندسه می‌شوند، به شرح خلاصه زیر است. هر تایپی که شامل یک فرمول بسیار کمینه باشد، فقط یک توسیع غیر جبری دارد. این توسیع غیر جبری طبیعتاً از فرمولهایی تشکیل می‌شود که عطف آنها با فرمول مورد نظر، نامتناهی جواب دارد. حال فرض کنید $p(x)$ همان یکتا تایپ غیرجبری شامل فرمول φ باشد. در این صورت همه چندتایی‌های $a_1, \dots, a_n$ که تایپ p را برآورده کنند و $a_{i+1} \notin \text{acl}(a_1, \dots, a_i)$ دارای تایپ یکسانی هستند. برای اثبات این گفته از استقرا استفاده کنید و به این نکته توجه کنید که اگر a_1 تایپ p را برآورده کند، می‌توان تایپ p روی مجموعه A را به مجموعه $a_1 A$ به نحو یکتای غیرجبری گسترش داد. این امر تایپ $a_2 a_1$ را در صورتی که $a_2 \notin \text{acl}(a_1)$ معلوم می‌کند.

حال برای اثبات ویژگی «تبادل» به صورت زیر عمل کنید. فرض کنید $a \notin \text{acl}(b)$. در این صورت تایپ ba به نحوی یکتا معلوم است. می‌توان یک دنباله نامتناهی $A = a_1, \dots$ از عناصر همتایپ با a پیدا کرد به طوری که $b \notin \text{acl}(A)$. در این صورت تایپ تمام $a_i b$ ها مثل هم و مثل تایپ ab است. پس b نمی‌تواند روی a جبری باشد.

برای به پایان رساندن اثبات قضیه بالدوین - لاخان، حال فرض کنید M_1 و M_2 دو مدل با سائز κ باشند که κ کاردینالی نامماراست. در این صورت هر دوی این مدلها باید دارای پایه‌ای به سائز κ باشند و از این رو با هم ایزومرف هستند. □