بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

میدان‌های اعداد حقیقی و اعداد مختلط با یک گروه کوچک ضربی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

رویا داودی

استاد راهنما

دکتر محسن خانی

۱۴۰۰

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض خانم رویا داودی

تحت عنوان

میدان‌های اعداد حقیقی و اعداد مختلط با یک گروه کوچک ضربی

در تاریخ ۸ آبان ۱۴۰۰ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر محسن خانی
۲- اســـــــــتاد داور ۱	دکتر مسعود پورمهدیان
۳- اســـــــــتاد داور ۲	دکتر مصطفی صمدی عین الله زاده

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر بیژن طائری

کلیه حقوق مالکیت مادی و معنوی مربوط به این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان و پدیدآورندگان است. این حقوق توسط دانشگاه صنعتی اصفهان و بر اساس خط مشی مالکیت فکری این دانشگاه، ارزش‌گذاری و سهم بندی خواهد شد.

هر گونه بهره برداری از محتوا، نتایج یا اقدام برای تجاری‌سازی دستاوردهای این پایان نامه تنها با مجوز کتبی دانشگاه صنعتی اصفهان امکان‌پذیر است.

تقدیم به:

پدر و مادرم

فهرست مطالب

فهرست مطالب سه

۱ مقدمات جبری ۱

۱.۱ عمل روی گروه ۱

۲.۱ توسیع میدان‌ها ۲

۳.۱ توسیع جدایی پذیر ۴

۴.۱ قضایای موردل لنگ ۵

۲ مقدمات مورد نیاز از نظریه‌ی مدل ۹

۱.۲ مقدمات عمومی ۹

۱.۱.۲ معادل بودن مقدماتی ۹

۲.۱.۲ تایپ‌ها ۱۲

۳.۱.۲ مجموعه‌های تعریف‌پذیر ۱۶

۴.۱.۲ حذف سور ۱۶

۵.۱.۲ تئوری میدان‌های بسته‌ی جبری ۱۸

۶.۱.۲ تئوری‌های مدل کامل ۱۹

۷.۱.۲ تئوری‌های بسیار کمینه ۲۱

۸.۱.۲ تئوری‌های پایدار و مدل‌های اشباع ۲۱

۲.۲ حذف سور میدان‌های بسته‌ی جبری ۲۲

۳ میدان اعداد مختلط به همراه یک مجموعه‌ی کوچک ضربی ۲۴

۱.۳ مجموعه‌های کوچک در یک ساختار ۲۴

۲.۳ زوج‌های میدان‌ها در نظریه‌ی مدل ۲۸

۳.۳ یک گروه ضربی کوچک در ساختار میدان‌های بسته‌ی جبری ۲۹

۴.۳ سامانه رفت و برگشتی ۳۳
۵.۳ حذف سور نسبی ۳۵
۶.۳ مجموعه‌های ضربی با یک ساختار اضافه ۳۷
۷.۳ یک تئوری حذف برای عمل‌های گروه ۳۸
۸.۳ ویژگی مان ۴۲
۹.۳ ویژگی مان ،ویژگی موردل-لنگ را نتیجه می‌دهد ۴۷
۱۰.۳ ویژگی موردل لنگ، ویژگی مان را نتیجه می‌دهد ۴۸
منابع **۵۲**
واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی **۵۴**
فهرست نمادها **۵۷**

چکیده:

فرض کنید $L = \{+, -, \cdot, ۰, ۱\}$ زبان حلقه‌ها و $L_m = \{۱, \cdot\}$ زبان نیم‌گروه‌های ضربی باشد. در این پایان‌نامه، به مطالعه‌ی توسیع ساختار میدانی اعداد مختلط توسط یک گروه ضربی کوچک که دارای ویژگی مان است می‌پردازیم. در واقع $L(U)$ساختار (K, G) را مورد بررسی قرار می‌دهیم به طوری که K یک میدان بسته‌ی جبری و U یک نماد رابطه‌ای تک موضعی است و در این ساختار به صورت یک زیر مجموعه‌ی ضربی G تعبیر شده که دارای ویژگی مان است. بدین منظور یک مجموعه‌ی کوچک ضربی را تعریف و برخی ویژگی‌های آن را در ساختار (K, G) مطالعه می‌کنیم. ابتدا نمادهای رابطه‌ای nموضعی Σ_k زیر را به زبان L_m اضافه می‌کنیم و زبان حاصل را با $L_m(\Sigma)$ نمایش می‌دهیم. سپس با تعبیر نمادهای رابطه‌ای Σ_k برای $k = (k_۱, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}$ به عنوان یک رابطه‌ی nموضعی روی G به صورت زیر:

$$\Sigma_k^G = \{(g_۱, \ldots, g_n) \in G^n : k_۱ g_۱ + \ldots + k_n g_n = ۰\}$$

نیم گروه ضربی G را به $L_m(\Sigma)$ساختار $G(\Sigma)$ بسط می‌دهیم و اثبات می‌کنیم هر مجموعه‌ی تعریف‌پذیر از G^n در $L(U)$ساختار (K, G) در $L_m(\Sigma)$ساختار $G(\Sigma)$ تعریف‌پذیر است. علاوه براین نشان می‌دهیم ایزومرفیسم‌های میان برخی از زیرساختارهای (K, G) و (L, H) تشکیل یک سامانه‌ی رفت و برگشتی می‌دهند و با استفاده از این سامانه‌ی رفت و برگشتی نشان می‌دهیم اگر G نسبت به میدان K کوچک و $G(\Sigma)$ یک $L_m(\Sigma)$ساختار ωپایدار باشد، آن‌گاه (K, G) یک $L(U)$ ساختار ωپایدار است. درپایان با مطالعه‌ی دقیق ویژگی مان، معادل بودن ویژگی مان و ویژگی موردل-لنگ که یادآور یک ویژگی در هندسه‌ی جبری است را اثبات می‌کنیم.

مقاله‌ی زیر منبع اصلی این پایان‌نامه است.

Van Den Dries, Lou and Günaydin, Ayhan. The fields of real and complex numbers with a small multiplicative group. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 93(1):43–81, 2006.

رده‌بندی موضوعی: 03C10, 03C35, 03C60

واژگان کلیدی: قضایای موردل-لنگ، ویژگی مان، حذف سور، میدان‌های بسته‌ی جبری، زوج مدل‌ها در نظریه‌ی مدل.

پیشگفتار

میدان‌های اعداد مختلط و اعداد حقیقی به طور گسترده در جبر، هندسه‌ی جبری و نظریه‌ی مدل مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در نظریه‌ی مدل، تارسکی با اثبات حذف سور برای این دو میدان تصمیم‌پذیری تئوری آن‌ها را ثابت کرد. این حذف سور موجب ارائه‌ی اثبات‌های کوتاه‌تر برای بسیاری از ویژگی‌های این میدان‌ها در جبر و هندسه‌ی جبری شد. به طور خاص از حذف سور تارسکی [۱] در مورد میدان اعداد مختلط نتیجه می‌شود که، تصویر یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنیِ جبری $X \subseteq \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ روی $\mathbb{C}^m$، یک مجموعه‌ی ساخته‌شدنی است.

از حذف سور تارسکی برای میدان مرتب اعداد حقیقی نتیجه می‌شود که تصویر یک مجموعه‌ی شبه‌جبری [۲] $X \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ روی $\mathbb{R}^m$ یک مجموعه‌ی شبه‌جبری است. نوع ویژگی‌ای که تارسکی برای میدان‌های اعداد مختلط و اعداد حقیقی ثابت کرد، نوعی «رام» بودن نظریه‌ی مدلی نامیده می‌شود. این ویژگی محققان را به مطالعه‌ی بسط‌های مختلف ساختارهای حقیقی و مختلط توسط مجموعه‌ها، گروه‌ها و اثبات رام بودن آن‌ها جلب کرد. گونایدن ثابت کرد که ساختار حاصل از افزودن گروه‌های کوچک ضربی به اعداد حقیقی رام است.

ون دن دریز [۳] در مرجع [۲] ساختار اعداد حقیقی را به همراه تمامی توابع محدود شده‌ی تحلیلی مورد مطالعه قرار داده و نتایج قضیه‌ی تارسکی را برای مجموعه‌های شبه‌تحلیلی [۴] ارائه می‌کند. الکس ویلکی [۵] در [۱۸] ساختار اعداد حقیقی را به همراه تابع نمائی بررسی کرده و مشابه قضیه‌ی تارسکی را برای مجموعه‌های شبه‌جبری نمائی ارائه می‌کند. کریس میلر [۶] در [۱۱] انواع بسط‌های میدان اعداد حقیقی را معرفی سپس رام بودن برخی از آن‌ها را اثبات می‌کند.

در یک یادداشت منتشر نشده [۱۹] بوریس زیلبر [۷] به ساختار اعداد مختلط به همراه مجموعه‌ی همه‌ی ریشه‌های واحد پرداخته است. مهمترین ویژگی گروه ریشه‌های واحد، داشتن ویژگی مان است. ویژگی مان را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد. فرض کنید K یک میدان و G یک زیرگروه دلخواه از $K^\times$ باشد. معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1 \qquad (1\text{-}0)$$

به طوری که $a_1, \ldots, a_n$ در میدان اول $\mathbb{F}$ از K باشند. چندتایی $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ را یک جواب ناتباهیده برای معادله‌ی (۱-۰) گوییم هرگاه برای هر $\emptyset \neq I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ داشته باشیم:

$$\sum_{i \in I} a_i g_i \neq 0$$

---

[۱] Alfred Tarski
[۲] semialgebraic
[۳] Van den Dries
[۴] semianalytic
[۵] Wilkie
[۶] Miller
[۷] Zilber

علاوه براین، می‌گوییم G دارای ویژگی مان [۸] (در F) است، هرگاه هرمعادله‌ی به شکل (۰-۱) دارای تعداد متناهی جواب ناتباهیده در G باشد. علت نام‌گذاری ویژگی فوق این است که مان در [۸] نشان داد U در میدان $\mathbb{C}$ دارای ویژگی مان می‌باشد که U یک گروه ضربی از ریشه‌های یکتا در میدان اعداد مختلط است. در سال ۱۹۸۶ اثبات شد که گروه‌ها با مرتبه‌ی متناهی در هر میدان با مشخصه‌ی صفر دارای ویژگی مان هستند. برای مطالعه‌ی دقیق‌تر می‌توانید به مراجع [۳، ۷، ۱۷] مراجعه کنید.

با بررسی دو ساختاری که در بند قبل معرفی شدند، ون دن دریز و گونایدن [۹] در [۱۶] نشان داده‌اند که ویژگی مان، ویژگی تعیین کننده‌ای در رام بودن توسیع‌های میدان اعداد حقیقی و مختلط توسط گروه‌های ضربی هستند. از طرفی آن‌ها ثابت می‌کنند که ویژگی مان برای زیرگروه‌های میدان‌های بسته‌ی جبری، با ویژگی موردل-لنگ که در هندسه‌ی جبری اهمیت زیادی دارد معادل می‌شود. ویژگی موردل-لنگ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

فرض کنید K یک میدان بسته جبری [۱۰] و G یک زیرگروه از $K^\times$ باشد، می‌گوییم G دارای ویژگی موردل-لنگ است هرگاه برای هر مجموعه‌ی جبری $V \subseteq K^n$، $V \cap G^n$ یک اجتماع متناهی از هم‌دسته‌های زیر گروه‌های G^n باشد. علت نام‌گذاری ویژگی موردل-لنگ به این نام، قضایایی در هندسه‌ی جبری تحت همین عنوان هستند. این قضایا به تعداد نقاط گویای چندگوناهای جبری می‌پردازند. کلی‌ترین تعمیم قضیه‌ی موردل-لنگ در مشخصه‌ی دلخواه توسط هراشوفسکی [۱۱] و با ابزارهای نظریه‌ی مدل بیان شده است. در فصل اول به قضایای موردل-لنگ و تعمیم‌های آن‌ها به طور مختصر اشاره خواهیم کرد.

فرض کنید ساختار $(\mathbb{R}, ۲^{\mathbb{Z}})$ میدان اعداد حقیقی به همراه گروه ضربی کوچک از توان‌های عدد ۲ باشد. تئوری مقدماتی ساختار $(\mathbb{R}, ۲^{\mathbb{Z}})$ در مرجع [۱۵] بیان شده و ون دن دریز در آن نشان می‌دهد که روابط تعریف‌پذیر در ساختار $(\mathbb{R}, ۲^{\mathbb{Z}})$، به صورت ترکیبی بولی از روابط تعریف‌پذیر وجودی هستند. اما گروه‌های ضربی مانند $۲^{\mathbb{Q}}$ و $۲^{\mathbb{Z}}۳^{\mathbb{Z}}$ چنین ویژگی ندارند. با استفاده از نتایج زیلبر و مان در [۸، ۱۹] برای ساختار $(\mathbb{C}, U)$ یک اصل بندی مطرح می‌شود. همچنین مان نشان می‌دهد که هر رابطه‌ی تعریف‌پذیر در ساختار $(\mathbb{R}, U)$ ترکیبی بولی از روابط تعریف‌پذیر وجودی است.

در این پایان‌نامه به مطالعه‌ی توسیع ساختار میدانی اعداد مختلط توسط یک گروه ضربی کوچک که دارای ویژگی مان است خواهیم پرداخت و نتایج مطرح شده را به تمام گروه‌های ضربی با مرتبه‌ی متناهی در میدان‌های اعداد مختلط گسترش می‌دهیم. در واقع به بررسی نظریه مدلی $L(U)$ ساختار (K, G) می‌پردازیم به طوری که L زبان حلقه‌ها و U نماد رابطه‌ای تک موضعی است که در این ساختار به صورت یک زیر مجموعه‌ی ضربی G تعبیر شده و دارای ویژگی مان است. اثبات گزاره‌ی زیر مهمترین موضوع این پایان‌نامه است.

گزاره ۰-۱. فرض کنید K یک میدان بسته جبری و G یک زیرگروه از $K^\times$ باشد، موارد زیر معادلند:

۱) گروه G دارای ویژگی مان است.

۲) برای هر مجموعه‌ی جبری $V \subseteq K^n$، $V \cap G^n$ یک اجتماع متناهی از هم‌دسته‌های زیر گروه‌های G^n است.

۳) برای هر مجموعه‌ی تعریف پذیر $X \subseteq K^n$ در (K, G) مجموعه‌ی $X \cap G^n$ در گروه G تعریف‌پذیر است.

[۸] Mann property
[۹] Gunaydin
[۱۰] Algebraic closed field
[۱۱] Hrushovski

طبق این شرایط، ویژگی مان و ویژگی موردل–لنگ باهم معادلند.

در فصل اول مفاهیم و تعاریفی از جبر و هندسه‌ی جبری که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را مرور می‌کنیم. همچنین درباره‌ی قضایای موردل–لنگ نکات و نتایجی را بیان می‌کنیم.

هدف از بیان فصل دوم مطالعه‌ی مفاهیم مقدماتی مورد نیاز از نظریه‌ی مدل است که در اثبات قضایای اصلی موثر هستند. سپس تئوری میدان‌های بسته‌ی جبری را مرور می‌کنیم و نشان می‌دهیم این تئوری حذف سور دارد. در اخر این فصل نکاتی از مدل‌های اشباع که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم ابتدا مجموعه‌های کوچک در یک ساختار را مورد مطالعه قرار داده و به بررسی گروه‌های ضربی کوچک در ساختار میدان‌های بسته‌ی جبری می‌پردازیم. سپس یک سامانه‌ی رفت و برگشتی را میان زیر ساختارهای (K, G) و (L, H) معرفی کرده و حذف سور داشتن تئوری آن‌ها را اثبات می‌کنیم. در اخر این فصل با بررسی دقیق ویژگی مان و اثبات کردن چند گزاره، قضیه‌ی اصلی (۰–۱) مطرح شده در این پایان‌نامه را اثبات می‌کنیم.

فصل ۱

مقدمات جبری

در این فصل، در ابتدا بنا به نیاز در فصل‌های بعد عمل روی گروه را تعریف می‌کنیم. سپس برخی از مفاهیم و تعاریف در جبر میدان‌ها و مباحثی درباره‌ی میدان‌های جدایی پذیر و همچنین نمادهایی که به طور مکرر در فصل‌های بعد از آن‌ها استفاده خواهیم کرد، را مرور می‌کنیم. در پایان ویژگی موردل لنگ را معرفی کرده و به بررسی مختصر آن می‌پردازیم.

۱.۱ عمل روی گروه

تعریف ۱-۱. فرض کنید G یک گروه و S یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. گوییم گروه G بر مجموعه‌ی S عمل می‌کند، هرگاه نگاشتی چون μ از $G \times S$ به S وجود داشته باشد به گونه‌ای که

الف) به ازای هر g_1 و g_2 در G و هر x در S

$$\mu(g_1, \mu(g_2, x)) = \mu(g_1 g_2, x)$$

ب) به ازای هر x در S

$$\mu(e, x) = x.$$

که در آن e عضو خنثای گروه G است.

در این صورت μ را یک عمل گروه G بر مجموعه‌ی S می‌نامیم. از این پس برای راحتی در نوشتار به جای $\mu(g, x)$ خواهیم نوشت gx.

مثال ۱-۲. عمل گروه $\mathbb{Z}_2$ روی یک خط:
در این مثال داریم $S = \mathbb{R}$ و $G = \{e, I\}$ با عمل‌های زیر

$$ex = \mu(e, x) := x, \quad Ix = \mu(I, x) := -x$$

به راحتی دیده می‌شود که G یک عمل بر S است.

اگر گروه G بر مجموعه‌ی S عمل کند، می‌توان روی S رابطه هم‌ارزی زیر را تعریف کرد:

$$x \sim x' \quad \text{اگر و تنها اگر عضوی مانند } g \text{ در } G \text{ باشد که } \quad gx = x'$$

هر رده هم‌ارزی S نسبت به این رابطه را یک مدار S (تحت عمل G) گوییم و با $\mathrm{orb}(x)$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned}\mathrm{orb}(x) &= \{r \in X \mid x \sim r\}\\ &= \{r \in X \mid \exists g \in G, r = g \cdot x\}\\ &= \{g \cdot x \mid g \in G\}.\end{aligned}$$

۲.۱ توسیع میدان‌ها

اکنون همان طور که در ابتدای فصل گفته شد، مباحث مربوط به توسیع‌های میدانی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱-۳. فرض کنید $K \subseteq L$ دو میدان باشند. عنصر $\alpha \in L - K$ را روی K جبری می‌نامیم هرگاه یک چند جمله‌ای $f \in K[X]$ موجود باشد به طوری که $f(\alpha) = 0$ و عنصر $\alpha \in L - K$ را روی K غیر جبری *(متعالی)* می‌نامیم هرگاه جبری نباشد؛ یعنی ریشه هیچ چند جمله‌ای باضرایب در K نباشد.

تعریف ۱-۴. توسیع میدانی $K \subseteq L$ را یک توسیع جبری گوییم هرگاه تمام عناصر $L - K$ روی میدان K جبری باشند.

اگر $K \subseteq L$ یک توسیع میدانی باشد، در این صورت L را می‌توان به عنوان یک فضای برداری روی میدان K در نظر گرفت.

تعریف ۱-۵. فرض کنید $K \subseteq L$ یک توسیع میدانی باشد. بعد فضای برداری L روی میدان K را با $[L : K]$ نشان می‌دهیم. می‌گوییم توسیع $K \subseteq L$ یک توسیع متناهی است هرگاه $[L : K]$ متناهی باشد.

نتیجه ۱-۶. فرض کنید $K \subseteq L$ یک توسیع متناهی باشد. آن‌گاه این توسیع جبری است.

اثبات. (برهان خلف) فرض کنید عنصر $\alpha \in L - K$ روی K متعالی باشد.در این صورت عناصر $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots\}$ روی K مستقل خطی هستند؛ زیرا در غیر این صورت یک چند جمله‌ای وجود خواهد داشت که α ریشه آن چند جمله‌ای است. بنابراین $[L : K]$ نامتناهی است که با فرض متناقض می‌باشد. □

تعریف ۱-۷. فرض کنید $f \in K[X]$. فرض کنید $K \subseteq L$ توسیع میدانی باشد به طوری که همه‌ی ریشه‌های چند جمله‌ای f در میدان L قرار داشته باشند. فرض کنید $S \subseteq L$ مجموعه‌ی همه‌ی ریشه‌های f در L باشد. میدان تولید شده توسط K و S ($K(S)$) را یک میدان شکافنده‌ی چند جمله‌ای f می‌نامیم.

اگر f یک چند جمله‌ای در میدان $K[X]$ باشد، یک میدان شامل K مانند L وجود دارد به طوری که تمام ریشه‌های f در L هستند. پس f در L به‌طور کامل تجزیه می‌شود به طوری که L یکتا و میدان شکافنده‌ی f است.

قضیه ۱-۸. فرض کنید L یک میدان شکافنده برای $f \in K[X]$ و g یک چندجمله‌ای تحویل ناپذیر در $K[X]$ باشد حال اگر g یک ریشه در L داشته باشد آن‌گاه g به طور کامل در L تجزیه می‌شود.

توجه ۱-۹. فرض کنید توسیع $K \subseteq L$ موجود باشد به طوری که L میدان شکافنده تمام چند جمله‌ای های میدان K باشد در این صورت

- میدان L یک توسیع جبری از K است زیرا فرض کنید S مجموعه‌ی ریشه همه‌ی چند جمله‌ای های در K یاشد بنابراین $L = K(S)$ پس اگر $\alpha \in L$ لذا $\alpha \in S$ پس $\alpha \in K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ پس α روی میدان K جبری است.

- هیچ توسیع جبری $L \subsetneq L'$ وجود ندارد(از لحاظ جبری میدان L اشباع است.) زیرا اگر چنین توسیع جبری از L موجود باشد پس L' توسیع جبری از K است لذا اگر L' شامل عنصری باشد که روی K آن‌گاه چون L شامل تمام عناصر بدین شکل است داریم $L' \subsetneq L$ که تناقض است.

بنابراین هر چند جمله‌ای از $L[X]$ را در نظر بگیریم چون این میدان توسیع جبری دیگری ندارد پس تمام چند جمله‌ای ها با ضرایب در L دارای ریشه در خود L هستند.

تعریف ۱-۱۰. میدان L را بسته‌ی جبری می‌گوییم هرگاه هر چند جمله‌ای با ضرایب در میدان L همه‌ی ریشه‌هایش در میدان L باشد.

تعریف ۱-۱۱. میدان $K \subseteq L$ را یک بستار جبری K می‌نامیم هرگاه

- $K \subseteq L$ یک توسیع جبری باشد.
- L بسته‌ی جبری باشد.

(یک توسیع جبری ماکسیمال است)

قضیه ۱-۱۲. فرض کنید K^{alg} بستار جبری میدان K باشد و α, β ریشه‌های چندجمله‌ای f در K^{alg} باشند. در این صورت یک اتومرفیسم (خود ریختی) $\sigma : K^{alg} \to K^{alg}$ وجود دارد که ریشه‌ی α را به β می‌برد.

۳.۱ توسیع جدایی پذیر

دراین بخش نحوه‌ی رفتار دو گسترش K و L از میدان k نسبت به هم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۱-۱۳. فرض کنید میدان های بسته‌ی جبری K و L زیرمجموعه‌ایی از میدان Ω باشند، می‌گوییم K از L روی k از لحاظ خطی جدا است هرگاه هر مجموعه‌ی متناهی از اعضای K که روی k مستقل خطی هستند، روی L نیز مستقل خطی باشند. همچنین می‌گوییم K از L روی k آزاد است هرگاه هر مجموعه‌ی متناهی از اعضای K که روی k مستقل جبری هستند، روی L نیز مستقل جبری باشند.

لم ۱-۱۴. فرض کنید میدان‌های K و L روی k از لحاظ خطی جدا باشند، آن‌گاه K و L روی k آزاد هستند.

اثبات. مرجع [۶]، صفحه‌ی ۳۶۶، قضیه‌ی ۲ − ۱۴ را ببینید. □

تعریف ۱-۱۵. فرض کنید F یک میدان باشد و $f(x) \in F[X]$ یک چند جمله‌ای باشد. برای چندجمله‌ای $f(x)$ روی یک میدان شکافنده فاکتورگیری زیر را داریم

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} \dots (x - \alpha_k)^{n_k}$$

که $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ عناصر مجزای میدان شکافنده هستند و برای $i = 1, \dots, k$، و داریم $n_i \geq 1$. می‌گوییم α_i یک ریشه‌ی مضاعف است هرگاه $n_i > 1$. همچنین α_i را یک ریشه‌ی ساده گوییم هرگاه $n_i = 1$.

تعریف ۱-۱۶. یک چندجمله‌ای روی میدان F را جدایی پذیر [1] گوییم هرگاه ریشه‌ی مضاعف نداشته باشد. به عبارتی تمام ریشه‌های آن متمایز باشند.

برای مثال چندجمله‌ای $x^2 - 2$ روی $\mathbb{Q}$ جدایی پذیر است. (از آن‌جا که دارای دو ریشه‌ی مجزای $+\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ است. توجه داریم که اگر چندجمله‌ای $f(x)$ در یک میدان شکافنده دارای ریشه‌های مجزا باشد در هر میدان شکافنده‌ی دیگر نیز دارای ریشه‌های مجزا است.)

تعریف ۱-۱۷. توسیع جبری $F \subseteq E$ را یک توسیع جدایی پذیر گوییم هرگاه برای هر $\alpha \in E$ و هر چندجمله‌ای مینیمال α یک چندجمله‌ای جدایی پذیر روی F باشد.

توجه داریم که هر توسیع جبری از یک میدان با مشخصه صفر و میدان متناهی جدایی پذیر است.

لم ۱-۱۸. فرض کنید K یک گسترش از میدان k و K^{alg} بستار جبری میدان K باشد، در این صورت شرایط زیر معادل هستند.

۱) k یک میدان بسته‌ی جبری در K، *(یعنی هر عضو از K که روی k جبری باشد متعلق به میدان k است.)* و K روی k جدایی پذیر است.

[1] separble

۲) K و k^{alg} روی K از لحاظ خطی جدا هستند.

تعریف ۱-۱۹. گسترش K از k را منظم [۲] گوییم هرگاه در یکی از شرایط معادل فوق صدق کند.

لم ۱-۲۰. فرض کنید K, L, E زیر میدان‌های یک میدان Ω باشند به طوری که $E \subseteq K, E \subseteq L$ و K گسترش منظم از E باشد. اگر K, L روی E آزاد باشند، آن‌گاه K, L روی E از لحاظ خطی جدا هستند.

اثبات. مرجع [۶] صفحه‌ی ۳۷۴ قضیه‌ی ۴.۱۲ را ببینید. □

گزاره ۱-۲۱. فرض کنید میدان‌های K و L روی k از لحاظ خطی جدا باشند. آن‌گاه میدان‌های K و L روی k آزاد هستند.

اثبات. مرجع [۶] صفحه‌ی ۳۶۳ گزاره‌ی ۳.۲ را ببینید □

۴.۱ قضایای موردل لنگ

نظریه مدل کاربرد قابل توجهی در هندسه جبری دارد. هراشوفسکی [۳] برای سوال لنگ که به آن حدس موردل لنگ می گویند، اثبات نظریه‌ی مدلی ارائه کرده است. در ادامه به معرفی حدس موردل-لنگ [۴] می‌پردازیم و به طور مختصر قضایای موردل-لنگ را مرور می‌کنیم.

سوال لنگ در ابتدا در هندسه‌ی دیوفانتی مطرح شد که با ریشه‌های سیستم‌های چند جمله‌ای‌ها روی میدان گویای $\mathbb{Q}$ یا یک میدان اعداد $\mathcal{F}$ سرو کار دارد. منظور از میدان اعداد $\mathcal{F}$، یک توسیع میدانی با درجه‌ی متناهی از میدان $\mathbb{Q}$ است. برای بررسی این قضایا، در ابتدابرخی مفاهیم مقدماتی مانند مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی را مرور می‌کنیم. سپس قضایای موردل-لنگ را به طور مختصر مرور می‌کنیم.

مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی

فرض کنید K یک میدان باشد و $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$. تعریف کنید $V(S) = \{\bar{a} \in K^n \,|\, \forall f \in S(f(\bar{a}) = 0)\}$. به هر زیرمجموعه به‌صورت $X = V(S)$ یک مجموعه‌ی بسته‌ی زاریسکی [۵] گفته می‌شود.

مثال ۱-۲۲. $\{(x, y) \in K^2 \,|\, y = x^2\}$ بسته‌ی زاریسکی است.

فرض کنید $A \subseteq K^n$ یک مجموعه‌ی دلخواه باشد. تعریف کنید $I(A) = \{f(\bar{x}) \in K[\bar{x}] \,|\, \forall \bar{a} \in A \; f(\bar{a}) = 0\}$.

لم ۱-۲۳. اگر X و Y بسته‌ی زاریسکی باشند، آن‌گاه $X \cup Y$ و $X \cap Y$ بسته‌ی زاریسکی هستند.

---

[۲] regular
[۳] Hrushovski
[۴] Mordell-Lang
[۵] Zariski closed

مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی، مجموعه‌های بسته‌ی یک توپولوژی روی K^n هستند؛ یعنی:

۱. $\emptyset$ و K^n بسته‌ی زاریسکی هستند.

۲. اجتماع تعدادی متناهی از مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی، بسته‌ی زاریسکی است.

۳. اشتراک هر تعداد مجموعه‌ی بسته‌ی زاریسکی بسته‌ی زاریسکی است.

توجه ۱-۲۴. فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری باشد. فرض کنید $X \subseteq K^n$ توسط یک فرمول بدون سور تعریف شده باشد. آن‌گاه X ترکیب بولی متناهی از مجموعه‌های بسته‌ی زاریسکی است.

تعریف ۱-۲۵. فرض کنید K یک میدان باشد و $f_1, \ldots, f_k \in K[x_1, \ldots, X_n]$ در این صورت مجموعه‌ی

$$V(f_1, \ldots, f_k) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n \mid f_1(a_1, \ldots, a_n) = 0, \ldots, f_k(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$$

را چندگونای جبری $f_1, \ldots, f_k$ یا چندگونای $f_1, \ldots, f_k$ می‌نامیم.

در ادامه مباحث مرتبط با یک خم بیضوی [۶] را به طور مختصر و تحت عنوان یک نکته مرور می‌کنیم. فرض می‌کنیم خواننده با این مفاهیم آشنایی دارد. از آنجایی که این تعاریف به طور مستقیم به این پایان‌نامه مرتبط نیستند، برای مطالعه‌ی بیشتر مراجع [۴] و [۱۰] را ببینید.

چند گوناهای X و Y در نظر بگیرید. اگر X زیرمجموعه‌ی Y باشد، X را یک زیر چند گونای Y گوییم.

تعریف ۱-۲۶. فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری با مشخصه‌ی صفر باشد. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک چند گونای آبلی است که روی میدان K تعریف شده است. زیر گروه Γ از $\mathcal{A}$ را یک زیر گروه مرتبه متناهی [۷] می‌نامیم هرگاه زیر گروه متناهیا تولید شده‌ی Γ_0 موجود باشد به طوری که

$$\Gamma \subseteq \{g \in \mathcal{A} : ng \in \Gamma_0\}.$$

نکته ۱-۲۷. ریشه‌های یک چندجمله‌ای همگن غیر ثابت $F(X, Y, Z) \in K[X, Y, Z]$ را یک خم تصویری روی میدان K می‌نامند. نقطه‌ی (X_1, Y_1, Z_1) روی خم تصویری E با معادله‌ی $F(X, Y, Z)$ را منفرد نامند هرگاه این نقطه ریشه‌ی مشترک مشتقات جزئی مرتبه اول معادله‌ی $F(X, Y, Z)$ باشد. خم تصویری E را هموار گوییم هرگاه هیچ نقطه‌ی منفردی نداشته باشد. خم تصویری، تحویل‌ناپذیر مطلق و هموار E روی میدان K با گونای یک که حداقل یک نقطه‌ی مشخص داشته باشد را یک خم بیضوی نامند.

موردل در سال ۱۹۲۲ مسئله‌ی زیر را بیان کرد.

حدس ۱-۲۸. *(حدس موردل).* فرض کنید X یک خم با گونای بیشتر از یک روی میدان اعداد $\mathcal{F}$ باشد. آن‌گاه مجموعه‌ی نقاط $\mathcal{F}$-گویا روی خم X متناهی هستند.

[۶] elliptice curve

[۷] finite rank

توجه ۱-۲۹. طبق قضیه‌ی موردل و ویل [۸] ، اگر $\mathcal{A}$ یک چند گونای آبلی روی میدان اعداد مختلط باشد و روی میدان اعداد $\mathcal{F}$ تعریف شده باشد. آن‌گاه مجموعه نقاط G از مجموعه نقاط گویای $\mathcal{F}$ روی $\mathcal{A}$ یک زیر گروه متناهی مولد است.

بنابراین حدس موردل را می‌توان به طور کلی به شرح زیر بیان کرد.

حدس ۱-۳۰. *(موردل)* فرض کنید $\mathcal{A}$ یک چند گونای آبلی روی میدان $\mathcal{C}$ باشد و X یک خم روی $\mathcal{C}$ باشد که در $\mathcal{A}$ نشانده شده است. فرض کنید $\mathcal{G}$ یک زیر گروه متناهیا تولید شده از $\mathcal{A}$ باشد. آن‌گاه X یک خم بیضوی است یا $X \cap \mathcal{G}$ متناهی است.

حدس زیر یک سوال مشابه است که در سال **۱۹۶۳** توسط مانین [۹] و مامفورد [۱۰] مطرح شده بود.

حدس ۱-۳۱. *(مانین- مامفورد)*. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک چند گونای آبلی روی میدان $\mathcal{C}$ باشد و X یک خم روی میدان $\mathcal{C}$ باشد که در $\mathcal{A}$ نشانده شده است. فرض کنید $\mathcal{G} = T$ یا $\mathcal{G} = \mathcal{A}$ یک زیر گروه بدون تاب از $\mathcal{A}$ باشد. آن‌گاه X یک خم بیضوی است یا $X \cap \mathcal{G}$ متناهی است.

حدس‌های موردل و مانین-مامفورد را می‌توان به عنوان دو مورد خاص از حدس کلی زیر دانست.

حدس ۱-۳۲. *(موردل- لنگ)*. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک چند گونای آبلی روی میدان $\mathcal{C}$ باشد و X یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی زاریسکی *(زیر چند گونا)* از $\mathcal{A}$ باشد و $\mathcal{G}$ یک زیر گروه مرتبه متناهی از $\mathcal{A}$ باشد. آن‌گاه $X \cap \mathcal{G}$ اجتماع متناهی از همدسته‌های زیر گروه‌های $\mathcal{G}$ است.

این حدس توسط لنگ در دهه‌ی ۶۰ میلادی مطرح شده بود و آن را حدس موردل-لنگ می‌نامند. حدس موردل-لنگ درستی حدس موردل را اثبات می‌کند؛ برای بررسی دقیق این موضوع می‌توانید مرجع [۹] را مطالعه کنید. اکنون سابقه و افراد مختلفی که راه حل‌هایی برای اثبات حدس موردل-لنگ ارائه داده اند را به طور مختصر بیان می‌کنیم. حدس موردل در سال **۱۹۸۳** توسط فالتینگز [۱۱] اثبات شد. انعکاس این نتیجه بسیار گسترده بود زیرا این حدس به طور غیر مستقیم بیانی از آخرین قضیه‌ی فرماست. در حقیقت با استفاده از حدس موردل یا به بیان دقیق‌تر قضیه‌ی فالتینگز، خم تصویری زیر

$$x^n + y^n = z^n \quad n \geq ۳$$

روی میدان $\mathbb{Q}$ برای هر n فقط تعداد متناهی صفر به دست می آید(مجموعه‌ی نقاط خم متناهی است). همچنین در سال **۱۹۸۳** حدس مانین و مامفورد توسط راینود [۱۲] اثبات شد. در ابتدا حدس موردل-لنگ در یک مورد خاص که گروه مورد نظر متناهی تولید باشد، توسط فالتینگز اثبات شد. سپس مک کوییلان [۱۳] با استفاده از کارهای فالتینگز یک را حل کلی مثبت ارائه کرد. تاکنون مباحث ذکر شده در میدان‌هایی با مشخصه‌ی صفر و میدان اعداد بیان شده است. هراشوفسکی اولین اثبات را برای حدس موردل-لنگ در هر مشخصه‌ی دلخواه بیان کرده است. یک بیان معقول تر از حدس ۱-۳۲ در شرایط کلی برای یک مشخصه‌ی دلخواه(صفر یا p) به شرح زیر است.

[۸] Weil
[۹] Manin
[۱۰] Mumford
[۱۱] Faltings
[۱۲] Raynaud
[۱۳] Mcquillan

حدس ۱-۳۳. فرض کنید $K_0 \subseteq K$ میدان‌های بسته‌ی جبری باشند. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک چندگونای آبلی روی K باشد که در نقطه صفر برخورد دارد. اگر X یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی زاریسکی از $\mathcal{A}$ و $\mathcal{G}$ یک زیر گروه مرتبه متناهی از $\mathcal{A}$ باشد. آن‌گاه $X \cap \mathcal{G}$ اجتماع متناهی از همدسته‌های زیر گروه‌های $\mathcal{G}$ است.

این فرم ازحدس موردل-لنگ در سال **۱۹۹۴** توسط بویوم [۱۴] در مشخصه‌ی صفر اثبات شد.

قضیه ۱-۳۴. *(هراشوسکی)* حدس ۱-۳۳ در هر میدان بسته‌ی جبری با مشخصه‌ی دلخواه یک گزاره‌ی درست است.

[۱۴] Alexanderu Buium

فصل ۲

مقدمات مورد نیاز از نظریه‌ی مدل

در این فصل، برخی تعاریف مورد نیاز در نظریه‌ی مدل مانند سامانه‌های رفت و برگشتی و حذف سور و تایپ و مدل‌های اشباع را مرور و برخی از ویژگی‌های آن‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم. همچنین مفاهیم مقدماتی که در اثبات قضیه‌های فصل سوم کاربرد دارند را بیان کنیم. فرض می‌کنیم خواننده با برخی تعاریف و مفاهیم اولیه نظریه‌ی مدل مانند تعریف یک زبان L و یک Lترم و ... آشنایی دارد. در این نوشتار از نمادهای استاندارد نظریه‌ی مدل استفاده می‌کنیم.

۱.۲ مقدمات عمومی

این بخش را با برخی از مفاهیم مقدماتی نظریه‌ی مدلی که در فصل بعدی کاربردهای زیادی دارند آغاز می‌کنیم، سپس تئوری میدان‌های بسته‌ی جبری را بیان و حذف سور پذیرفتن آن‌ها را اثبات می‌کنیم.

۱.۱.۲ معادل بودن مقدماتی

تعریف ۲-۱. فرض کنید L یک زبان مرتبه‌ی اول باشد. دو Lساختار $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ را معادل مقدماتی می‌گوییم و می‌نویسیم $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ هرگاه برای هر L جمله‌ی φ داشته باشیم:

$$\mathcal{M} \models \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi$$

مثال ۲-۲. فرض کنید $L = \{<\}$. نشان می‌دهیم $(\mathbb{Z}, <) \not\equiv (\mathbb{Q}, <)$. برای این منظور فرض کنید

$$\varphi = \forall x, y \quad \exists z \quad x < z < y.$$

در این صورت داریم

$$(\mathbb{Q}, <) \models \varphi$$

اما

$$(\mathbb{Z}, <) \not\models \varphi.$$

تعریف ۲-۳. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک Lساختار باشد. تئوری کامل $\mathcal{M}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$Th(\mathcal{M}) = \{\varphi \mid \mathcal{M} \models \varphi \quad \text{و} \quad \varphi \text{ یک جمله است}\}$$

توجه ۲-۴. برای هر $\mathcal{L}$جمله‌ی φ داریم $\varphi \in Th(\mathcal{M})$ یا $\neg\varphi \in Th(\mathcal{M})$.

توجه ۲-۵. اگر $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو $\mathcal{L}$ساختارِ هم ارز مقدماتی باشند، هرجمله‌ای که در $\mathcal{M}$ درست باشد در ساختار $\mathcal{N}$ نیز درست است، یعنی برای هر $\varphi \in Th(\mathcal{M})$ داریم $\mathcal{N} \models \varphi$، به عبارتی داریم $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$ این‌گونه نیز می‌نویسیم $\mathcal{N} \models Th(\mathcal{M})$ و $\mathcal{M} \models Th(\mathcal{N})$.

تعریف ۲-۶. فرض کنید L یک زبان مرتبه‌ی اول باشد، به هر مجموعه از Lجمله‌ها یک تئوری گفته می‌شود.

مثال ۲-۷. تئوری میدان‌ها: $L = \{+, \cdot, ۰, ۱\}$
اصول میدان‌ها:

- مربوط به جمع $\begin{cases} \forall x, y, z \ x + (y + z) = (x + y) + z \\ \forall x \ \exists y \ x + y = ۰ \\ \forall x, y \ x + y = y + x \\ \forall x \ x + ۰ = x \end{cases}$
- مربوط به ضرب $\begin{cases} \forall x, y, z \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \\ \forall x \neq ۰ \ \exists y \ x \cdot y = ۱ \\ \forall x, y \ x \cdot y = y \cdot x \\ \forall x \ x \cdot ۱ = x \end{cases}$
- $۱ \neq ۰$
- $\forall x, y, z \ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

تعریف ۲-۸. یک $\mathcal{L}$تئوری T را کامل می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathcal{L}$جمله‌ی φ داشته باشیم $T \models \varphi$ یا $T \models \neg\varphi$ و حتما یکی از این دو حالت اتفاق می‌افتد.

معادلاً T کامل است هرگاه هر دو مدل $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$، هم ارز مقدماتی باشند. همچنین T را کامل است هرگاه برای هر برای هر $\mathcal{M} \models T$ داشته باشیم $T \equiv Th(\mathcal{M})$.

تعریف ۲-۹. دو Lساختار $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ را ایزومرف می‌نامیم هرگاه یک نگاشت یک به یک و پوشای $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ موجود باشد به طوری که

- برای هر ثابت $c \in L$، $c^{\mathcal{M}} \mapsto c^{\mathcal{N}}$.
- برای هر تابع $f \in L$ و هر $a_1, \ldots, a_n \in M$،

$$f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) \mapsto^F f^{\mathcal{N}}(F(a_1), \ldots, F(a_n)).$$

- برای هر رابطه‌ی $R \in \mathcal{L}$ و هر $a_1, \ldots, a_n \in M$،

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \mapsto^F (F(a_1), \ldots, F(a_n)) \in R^{\mathcal{N}}.$$

تعریف ۲-۱۰. فرض کنید $\Gamma = \{f : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}\}$ یک مجموعه از ایزومرفیسم‌های میان برخی زیر ساختارهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ باشد، Γ را یک سامانه رفت و برگشتی از ایزومرفیسم‌ها می‌نامیم هرگاه

۱) $\Gamma \neq \emptyset$.

۲) برای هر $t \in \mathcal{M}$ و هر $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \in \Gamma$ یک ایزومرفیسم $g \in \Gamma$ موجود باشد به طوری که $f \subseteq g$ ، $g \restriction_{\mathcal{A}} = f$ و $t \in Dom(g)$. *(رفت)*

۳) برای هر $t \in \mathcal{N}$ و هر $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \in \Gamma$ یک ایزومرفیسم $g \in \Gamma$ موجود باشد به طوری که $f \subseteq g$ ، $g \restriction_{\mathcal{A}} = f$ و $t \in Im(g)$. *(برگشت)*

تعریف ۲-۱۱. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک Lساختار باشد و $A \underset{\text{زیرمجموعه}}{\subseteq} \mathcal{M}$. آن‌گاه Lساختار تولید شده توسط A به صورت زیر است:

$$\langle A \rangle = \{t^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in A \text{ و } t \text{ یک } L\text{-ترم است}\}$$

تعریف ۲-۱۲. فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو Lساختار باشند و $\mathcal{A} \underset{\text{زیرمجموعه}}{\subseteq} \mathcal{M}$ و $\mathcal{B} \underset{\text{زیرمجموعه}}{\subseteq} \mathcal{N}$. تابع $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ را یک ایزومرفیسم جزئی می‌نامیم هرگاه

۱. برای هر تابع $F(x_1, \ldots, x_n) \in L$ و $a_1, \ldots, a_n, b \in A$ داشته باشیم:

$$\mathcal{M} \models F(a_1, \ldots, a_n) = b \iff \mathcal{N} \models F(f(a_1), \ldots, f(a_n)) = f(b)$$

۲. $f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$ *($c^{\mathcal{M}} \in A$ و $c^{\mathcal{N}} \in \mathcal{B}$)*

۳. $\mathcal{M} \models R(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathcal{N} \models R(f(a_1), \ldots, f(a_n))$

توجه ۲-۱۳. فرض کنید $A \subseteq \mathcal{M}$، $B \subseteq \mathcal{N}$ و $f : A \to B$ یک ایزومرفیسم جزئی باشد. آن‌گاه f را می‌توان به طور یکتا به ایزومرفیسمی میان $\langle A \rangle$ و $\langle B \rangle$ گسترش داد.

قضیه ۲-۱۴. فرض کنید که $\mathcal{M}$ و $\mathcal{M}$ دو Lساختار باشند. اگر یک سامانه‌ی رفت و برگشتی از ایزومرفیسم‌های جزئی میان $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ وجود داشته باشد آن‌گاه $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}$.

نتیجه ۲-۱۵. اگر بین هر دو مدل به اندازه کافی اشباع $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ یک سامانه‌ی رفت و برگشتی پیدا شود، آن‌گاه T کامل است.

۲.۱.۲ تایپ‌ها

تعریف ۲-۱۶ (تایپ). فرض کنید $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$-ساختار باشد و $A \subseteq M$ (A زیرمجموعه‌ی جهان $\mathcal{M}$) و $a_1, \ldots, a_n \in A$. تایپ $a_1, \ldots, a_n$ در $\mathcal{M}$ روی مجموعه A را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\frac{a_1, \ldots, a_n}{A}) = \{\varphi(x_1, \ldots, x_n, b_1, \ldots, b_m) | n, m \in \mathbb{N}, b_i \in A, \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})\}$$

که $\bar{a} = a_1, \ldots, a_n$ و $\bar{b} = b_1, \ldots, b_n$. در واقع تایپ $a_1, \ldots, a_n$ در $\mathcal{M}$ همه ویژگی های $a_1, \ldots, a_n$ است. بنابراین اگر $A = \emptyset$ آن‌گاه داریم

$$\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = \{\varphi(x_1, \ldots, x_n) | \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)\}$$

فرض کنید $\mathcal{M}$ یک Lساختار باشد و $A \underset{\text{زیرمجموعه}}{\subseteq} \mathcal{M}$. می‌گوییم $p(\bar{x}) \in S_n^M(A)$ یک تایپ کامل در M روی A است هرگاه

۱. $p(\bar{x})$ یک مجموعه‌ی نامتناهی از فرمول‌های به صورت $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ است که در آن $\bar{a} \in A$ (تغییر می‌کند) ولی متغیرها یکسان هستند.

$$p(\bar{x}) = \{\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \,|\, \bar{a} \in A\}$$

برای مثال $p(x) = \{x > 1, x > 2, x > 3, \ldots\}$ یک تایپ در $S_1^{\mathbb{R}}(\mathbb{N})$ است.

۲. برای هر فرمول $\varphi(x, \bar{a})$ با پارامتر در A یا $\varphi(x, \bar{a}) \in p(\bar{x})$ یا $\neg\varphi(x, \bar{a}) \in p(\bar{x})$

۳. برای هر تعداد متناهی فرمولِ $\varphi_1(\bar{x}, \bar{a}_1), \ldots, \varphi_n(\bar{x}, \bar{a}_n) \in p(\bar{x})$ یک عنصر $\bar{b} \in M$ وجود دارد به طوری که

$$M \models \varphi_1(\bar{b}, \bar{a}_1) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(\bar{b}, \bar{a}_n) \in p(\bar{x})$$

به بیان دیگر $p(\bar{a}) \cup \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ سازگار باشد.

مثال ۲-۱۷. ساختار $(\mathbb{N}, +, \cdot, ۰, ۱, <)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$\pi(\bar{x}) = \{x > ۱, x > ۱ + ۱, x > ۱ + ۱ + ۱, \ldots\}$$

- مجموعه‌ی پارامترها: $\emptyset$.
- هر تعداد متناهی از فرمول‌های $x > n$ در $\mathbb{N}$ برآورده می‌شوند.
- ولی همه‌ی این فرمول‌ها به صورت همزمان در $\mathbb{N}$ برآورده نمی‌شوند.

تعریف ۲-۱۸. فرض کنید M یک $\mathcal{L}$-ساختار باشد، $A \subseteq M$ و $\bar{b} \in M$.

$$\mathrm{tp}^M(\bar{b}/A) = \{\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \mid \bar{a} \in A, M \models \varphi(\bar{b}, \bar{a})\}$$

$\mathrm{tp}^M(\bar{b}/A)$ تمامی ویژگی‌های مرتبه اول $\bar{b}$ و یک تایپ کامل است.

اگر M یک L-ساختار باشد و $p(\bar{x}) \in S_n^M(A)$. آن‌گاه یک ساختارِ $N \underset{\text{توسیع مقدماتی}}{\prec} M$ موجود است که در آن عنصری مانند $\bar{b}$ موجود است به طوری که $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}^N(\bar{b}/A)$ می‌گوییم $\bar{b}$ تایپ p را برآورده می‌کند.

مثال ۲-۱۹. یک توسیع مقدماتی از $(\mathbb{N}, +, \cdot, ۰, ۱, <)$ وجود دارد که در آن عنصری نااستاندارد پیدا می‌شود (یعنی عنصری که از تمام اعداد طبیعی بزرگتر است). زیرا مجموعه‌ی $\Sigma(x) = \{x > ۱, x > ۱ + ۱, x > ۱ + ۱ + ۱, \ldots\}$ در $\mathbb{N}$ متناهیاً ارضاپذیر است. پس در یک توسیع مقدماتی $\mathbb{N} \prec N$ عنصری مانند a موجود است که تمامی فرمول‌های موجود در Σ را برآورده می‌کند.

توجه ۲-۲۰. فرض کنید M یک L-ساختار است، $a \in M$ و $A \subseteq M$. در این صورت

$$\mathrm{tp}^M(a/A) = \{\varphi(x) \mid M \models \varphi(a)\}.$$

بنابراین اگر $M \preceq N$ آن‌گاه $\mathrm{tp}^M(a) = \mathrm{tp}^N(a)$. در حالت کلی داریم:

$$(M \prec N) \quad p(x_۱, \ldots, x_n) = \mathrm{tp}^N(\frac{a_۱, \ldots, a_n}{A}) \iff p(x_۱, \ldots, x_n) \in S_n^M(A)$$

لم ۲-۲۱. فرض کنید M و N دو L-ساختار باشند و $a \in M$ و $b \in N$. آن‌گاه $\mathrm{tp}^M(a) = \mathrm{tp}^N(b)$ هرگاه دو $L \cup \{c\}$-ساختارِ (M, a) و (N, b) هم‌ارز مقدماتی باشند.

لم ۲-۲۲. فرض کنید M و N دو L-ساختار باشند و همچنین $a \in M$ و $b \in N$. فرض کنید یک سامانه‌ی رفت و برگشتی از ایزومرفیسم‌های میان زیرساختارهای M و N موجود باشد که نگاشت $f_۰ : \langle a \rangle^M \to \langle b \rangle^N$ جزو آن باشد. آن‌گاه $\mathrm{tp}^M(a) \equiv \mathrm{tp}^N(b)$.

لم ۲-۲۳. اگر $\mathrm{p(x)} \in \mathrm{s_n^{\mathcal{M}}(A)}$ آن گاه یک توسیعِ مقدماتی $\mathcal{M} < \mathcal{N}$ و عناصر $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{N}$ موجودند به طوری که $\mathrm{p(\bar{x})} = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\frac{\mathrm{a_1,\ldots,a_n}}{\mathrm{A}})$.

اثبات. تئوری $T = \mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M}) \cup p(\bar{c})$ را در زبان $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \cup \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \cup \{\bar{c}\}$ در نظر بگیرید.
توجه داریم که $\mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M}) = \{\varphi(\bar{m}) | \bar{m} \in \mathcal{M}, \mathcal{M} \models \varphi(\bar{m})\}$.
حال اگر نشان دهیم تئوری T دارای مدل است در واقع نشان دادیم که مدلی مانند $\mathcal{N}$ توسیعی از $\mathcal{M}$ موجود است که همه ی ویژگی های عنصر $\bar{m}$ را دارا است. اما واضح است که تئوری T متناهیا سازگار می‌باشد بنابراین دارای مدل است.(چون $\mathrm{p(x)} \in \mathrm{s_n^{\mathcal{M}}(A)}$)
پس یک تایپ کامل مجموعه ویژگی های یک عنصر در مدل بالاتر می‌باشد. □

توجه ۲-۲۴. فرض کنید $\mathcal{M} < \mathcal{N}$ و $A \subseteq \mathcal{M}$ و $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}$.
در این صورت $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\frac{\bar{a}}{A}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\frac{\bar{a}}{A})$ که $(\mathcal{M}, \bar{a})$ و $(\mathcal{N}, \bar{a})$ دو $\mathcal{L}$-ساختار می باشند.

قضیه ۲-۲۵. اگر $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\frac{\bar{a}}{A}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\frac{\bar{b}}{A})$ آنگاه یک گسترش مقدماتی $\mathcal{M} < \mathcal{N}$ و یک اتومرفیسم $\sigma \in (\frac{\mathcal{N}}{A})$ پیدا می شوند به طوری که $\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$.

اثبات. فرض کنید $f_0 : \bar{a} \longrightarrow \bar{b}$ یک نگاشت جزئی مقدماتی باشد.برای راحتی فرض کنید $\mathcal{M}$ شمارا باشد.
قرار دهید $\mathrm{p(x)} = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\frac{\mathrm{m_1}}{\bar{\mathrm{a}}}) = \{\varphi(\mathrm{x}, \bar{\mathrm{a}}) | \mathcal{M} \models \varphi(\mathrm{m_1}, \bar{\mathrm{a}})\}$.
قرار دهید $\mathrm{q(x)} = \{\varphi(\mathrm{x}, \bar{\mathrm{b}}) | \varphi(\mathrm{x}, \bar{\mathrm{a}}) \in \mathrm{p}\}$. $\mathrm{q(x)}$ نیز یک تایپ کامل در $\mathcal{M}$ است. می‌دانیم که $\exists x \varphi_1(x, \bar{b}) \wedge \varphi_2(x, \bar{b})$ و با توجه به فرض داریم $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\frac{\bar{a}}{A}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\frac{\bar{b}}{A})$ تایپ q متناهیا سازگار و کامل است.
بنابراین ساختار $\mathcal{M} < \mathcal{N}_1$ و $n_1 \in N_1$ موجود است به طوری که $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}_1}(\frac{n_1}{b}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\frac{m_1}{a})$.
حال قرار دهید $\mathrm{p(x)} = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\frac{\mathrm{m_2}}{\mathrm{m_1}\bar{\mathrm{a}}})$. فرض کنید f_1 یک نگاشت مقدماتی جزئی از $\mathcal{M}$ به $\mathcal{N}_1$ است به طوری که

$$f_1 : \bar{a} \longrightarrow \bar{b}$$

$$m_1 \mapsto n_1$$

و داریم $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}m_1) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}n_1)$. بنابراین ساختار $\mathcal{M} < \mathcal{N}_1 < \mathcal{N}_2$ و عنصر $n_2 \in N_2$ یافت می‌شوند به طوری که $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}_2}(n_2 n_1 \bar{b}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(m_2 m_1 \bar{a})$.

به همین ترتیب دنباله $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq \ldots$ که $\{f_i\}_{i \in \mathbb{W}}$ نگاشت های مقدماتی هستند را بسازید. در این صورت

$$\bigcup f_i : \mathcal{M} \longrightarrow \bigcup \mathcal{N}_i$$

$$\bar{a} \mapsto \bar{b}$$

یک نگاشت مقدماتی است. در نظر بگیرید $\bigcup f_i = \mathcal{F}_1$ و $\bigcup \mathcal{N}_i = N_1$. پس تا این لحظه نشان دادیم که ساختار $\mathcal{M} < N_1$ و نگاشت مقدماتی $\mathcal{F}_1 : \mathcal{M} \longleftrightarrow N_1$ موجود است به طوری که $\mathcal{F}_1(\bar{a}) = \bar{b}$. در نتیجه

$\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{N_1}(\bar{b})$.

با ادامه این روند داریم $\mathcal{M} < N_1 < \mathcal{M}_1 < N_2 < \mathcal{M}_2 < \ldots$. حال اگر فرض کنیم

$$\mathcal{F}_i : \mathcal{M}_i \longrightarrow N_i$$

$$\bar{a} \mapsto \bar{b}$$

واضح است که $\bigcup \mathcal{M}_i = \bigcup N_i$

در نتیجه

$$\bigcup \mathcal{F}_i : \bigcup \mathcal{M}_i \longrightarrow \bigcup \mathcal{N}_i$$

همان اتومرفیسم مورد نظر ماست یعنی اگه در نظر بگیریم $\bigcup \mathcal{M}_i = M$ و $\bigcup \mathcal{N}_i = N$ داریم

$$\sigma : M \longrightarrow N$$

$$\bar{a} \mapsto \bar{b}$$

در نتیجه

$$\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}) \longleftrightarrow \exists \mathcal{N}$$

□

تعریف ۲-۲۶. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ ساختار باشدو $a_1, \ldots, a_n \in M$ و $A \subseteq M$.

$$\mathrm{qftp}(\frac{a_1, \ldots, a_n}{A}) = \{\varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{b}) | \bar{b} \in A, \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}, \bar{b}), \text{یک فرمول باشد که هیچ سوری ندارد} \varphi\}$$

یک تایپ جزئی است.در واقع $\mathrm{qftp}(\frac{a_1, \ldots, a_n}{A})$ ویژگی های بدون سور $a_1, \ldots, a_n$ است.

قضیه‌ی زیر کاربرد زیادی در قضایای فصل بعدی دارد.

قضیه ۲-۲۷. فرض کنید یک سامانه رفت و برگشتی از ایزومرفیسم ها میان زیرساختارهای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ موجود باشد و $a \in \mathcal{M}$ و $b \in \mathcal{N}$. همچنین یکی از این ایزومرفیسم ها a را b ببرد. در این صورت $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(b)$.

اثبات. با استقرا روی پیچیدگی فرمول φ نشان می‌دهیم که $\varphi(x) \in \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(b) \Leftrightarrow \varphi(x) \in \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a)$.

اگر φ

$\exists x \psi(x) \in \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a)$ در این صورت عنصر $c \in \mathcal{M}$ موجود است به طوری که $\mathcal{M} \models \psi(c)$ یعنی تصویر c در فرمول ψ صدق می‌کند در نتیجه $\mathcal{N} \models \exists x \psi(x)$. □

توجه ۲-۲۸. ساختار $\bar{R} = (\mathbb{R}, +, ., 0, 1, <)$ را در نظر بگیرید داریم

$$\bar{R} \models (\exists x a x^2 + bx + c = 0) \Leftrightarrow (b^2 - 4ac \geqslant 0) \bigvee (a = b = c = 0).$$

۳.۱.۲ مجموعه‌های تعریف‌پذیر

تعریف ۲-۲۹. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک Lساختار باشد و $A \subseteq M$. می‌گوییم مجموعه‌ی $X \subseteq M^n$ یک مجموعه‌ی Aتعریف‌پذیر است هرگاه فرمول $\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$ موجود باشد که در آن $a_i \in A$ و

$$X = \{(b_1, \ldots, b_n) \in \mathcal{M}^n \,|\, \mathcal{M} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n, a_1, \ldots, a_m)\}$$

می‌گوییم X، $\emptyset$تعریف‌پذیر است هرگاه $X = \{\bar{b} \,|\, \varphi(\bar{b})\} = \{(b_1, \ldots, b_n) \,|\, \mathcal{M} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)\}$.

مثال ۲-۳۰. در ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ مجموعه زیر $\{a_1, a_2, a_3\}$تعریف‌پذیر است *(فرض کنید $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$)*

$$X = \{b \in \mathbb{R} \,|\, a_1 + a_2 b + a_3 b^2\}$$

و مجموعه‌ی $X = \{b \in \mathbb{R} \,|\, b^2 - 1 \neq 0\}$، $\emptyset$تعریف پذیر است.

مثال ۲-۳۱. در ساختارِ $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ مجموعه‌ی $X = \{(a, b) \,|\, a \leqslant b\}$ تعریف پذیر است. همچنین در این ساختار رابطه‌ی ترتیب $\emptyset$- قابل تعریف است. یعنی مجموعه‌ی $X = \{(a, b) \,|\, a \leqslant b\} \subseteq \mathbb{R}^2$ یک مجموعه‌ی قابل تعریف است.

$$X = \{(x, y) \,|\, \mathbb{R} \models \exists z \; x + z^2 = y\}$$

۴.۱.۲ حذف سور

حذف سور یک ویژگی جبری برای تئوری هاست. فرض کنید T یک تئوری مرتبه اول باشد. می‌گوییم T سورها را در زبان L حذف می‌کند (T حذف سور دارد) هرگاه برای هر فرمول $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ در زبان L یک فرمولِ بدون سورِ $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ در زبان L موجود باشد به طوری که $\mathrm{T} \models \forall \bar{\mathrm{x}}(\varphi(\bar{\mathrm{x}}) \Leftrightarrow \psi(\bar{\mathrm{x}}))$. به بیان دیگر اگر $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ آن‌گاه هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر از هر $\mathcal{M}^n$ توسط یک فرمول بدون سور تعریف شود.

قضیه ۲-۳۲ (یک محک جبری برای بررسی حذف سور). فرض کنید برای هر دو مدل $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathrm{T}$ و هر زیر ساختار مشترک $A \subseteq \mathcal{M}, \mathcal{N}$ و هر $a_1, \ldots, a_n \in A$ داشته باشیم $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$. در این صورت فرمولِ بدون سورِ ψ پیدا می‌شود به طوری که $\mathrm{T} \models \varphi(\bar{\mathrm{x}}) \Leftrightarrow \psi(\bar{\mathrm{x}})$.

اثبات. قرار دهید

$$\Gamma = \{\psi(x) | \mathrm{T} \vdash \forall \bar{\mathrm{x}}(\varphi(\bar{\mathrm{x}}) \Leftrightarrow \psi(\bar{\mathrm{x}})), \text{بدون سور باشد} \psi\}$$

ادعای اول: $\mathrm{T} \cup \Gamma(\bar{\mathrm{x}}) \vdash \varphi(\bar{\mathrm{x}})$.

در صورتی که ادعا درست باشد بنا به فشردگی تعداد متناهی فرمولِ $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ موجود است به طوری که $(\mathrm{T} \cup \psi_1, \ldots, \psi_\mathrm{n} \vdash \varphi)$.

به بیان دیگر $\mathrm{T} \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \cup \{\neg\varphi\}$ متناقض است پس $\mathrm{T} \vdash \{\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n\} \to \varphi$.
اثبات ادعای اول: فرض کنید $\mathrm{T} \cup \Gamma(\bar{x}) \cup \neg\varphi(x)$ سازگار باشد.یعنی $\mathcal{M} \models \mathrm{T} \cup \Gamma(\bar{x}) \cup \neg\varphi(x)$.
ادعای دوم: مدل $\langle \bar{a} \rangle \subseteq \mathcal{N} \models \mathrm{T}$ موجود است به طوری که $\mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$.
برای پیدا کردن مدل $\mathcal{N}$ باید نشان دهیم که $\mathrm{T}^* = \mathrm{T} \cup \mathrm{Diag}\langle \bar{a} \rangle \cup \{\varphi(\bar{a})\}$ در زبان $\mathcal{L}_{\langle \bar{b} \rangle}$ سازگار است.
فرض کنید T^* ناسازگار باشد.بنابراین فرمول های $\psi_1(\bar{a}), \ldots, \psi_n(\bar{a}) \in \mathrm{Diag}(\langle \bar{a} \rangle)$ موجودند به طوری که $\mathrm{T} \vdash_{\mathrm{L}_{\bar{a}}} \varphi(\bar{a}) \Rightarrow \bigvee \neg\psi_i(a)$. می‌توان نتیجه گرفت در زبان $\mathcal{L}$ داریم

$$\mathrm{T} \vdash_{\mathrm{L}} \varphi(\bar{x}) \Rightarrow \neg\psi_i(\bar{x})$$

یعنی $\forall_i \neg\psi_i(\bar{x}) \in \Gamma(\bar{x})$. چون $\mathcal{M}$ مدلی برای $\Gamma(\bar{x})$ است پس $\mathcal{M} \models \bigvee \neg\psi_i(\bar{a})$ از طرفی چون A زیر ساختار $\mathcal{M}$ است داریم $\mathcal{M} \models \wedge\psi_i(\bar{a})$ و به تناقض می‌رسیم. □

لم ۲-۳۳. اگر فرمول های به صورت $\exists y \psi(\bar{x}, y)$ که $\psi(\bar{x}, y)$ یک فرمول بدون سور است نسبت به تئوری T دارای معادل بدون سور باشند آن گاه T حذف سور دارد.

اثبات. با استقرا روی پیچیدگی فرمول ها ثابت می‌شود. □

توجه ۲-۳۴. هر فرمولِ بدون سورِ ψ به صورت (اتمی یا نقیض اتمی)$\bigwedge \bigvee$ است.

توجه ۲-۳۵. برای اینکه T حذف سور داشته باشد کافی است فرمول زیر معادل بدون سور داشته باشد:

$$\exists y \varphi(\bar{x}, \bar{y})$$

که $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ به صورت (اتمی یا نقیض اتمی)$\bigwedge \bigvee$ می‌باشد.

توجه ۲-۳۶. محک حذف سور:
اگر هر ایزومرفیسم $\langle \bar{a} \rangle \cong \langle \bar{b} \rangle$ در داخل یک سامانه رفت و برگشتی واقع شود تئوری T سور ها را حذف می کند.
به بیان دقیق‌تر برای هر مدل $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathrm{T}$ و $\bar{a} \in M$ و $\bar{b} \in N$ اگر هر گاه $\langle \bar{a} \rangle \cong \langle \bar{b} \rangle$ گسترش های مقدماتیِ $\mathcal{M} < \mathcal{M}_1$ و $\mathcal{N} < \mathcal{N}_1$ موجود باشند و میان آنها یک سامانه رفت و برگشتی شامل $\langle \bar{a} \rangle^{\mathcal{M}} \cong \langle \bar{b} \rangle^{\mathcal{N}}$ پیدا شود آنگاه T سور ها را حذف می کند. تئوری T سور ها را حذف می کند اگر و تنها اگر زیر ساختار کامل باشد *(یعنی برای هر مدل $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ و هر $A \subseteq \mathcal{M}$ (زیر ساختار) تئوری $\mathrm{Diag(A)} \cup \mathrm{T}$ در $\mathcal{L}_A$ یک تئوری کامل باشد)* کامل بودن یک تئوری:
$\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathrm{Diag(A)} \cup \mathrm{T} \Rightarrow \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$
محک ون دن دریز: تئوری T سورها را حذف می کند هر گاه برای هر مدل $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathrm{T}$ *($\mathcal{N}$ یک مدل $|\mathcal{M}|$ -اشباع است)*و هر $A \subseteq \mathcal{M}$ اگر $f : A \longrightarrow N$ یک نشاندن باشد آنگاه f را بتوان به یک نشاندن $f_1 : M \longrightarrow N$ توسیع داد.

۵.۱.۲ تئوری میدان‌های بسته‌ی جبری

در فصل قبلی مطالبی از میدان‌های بسته‌ی جبری را مرور کردیم. در این بخش تئوری میدان‌های بسته‌ی جبری را بیان می‌کنیم. بنا به نیاز در فصل‌های بعدی برخی ویژگی‌های این تئوری را مختصراً مورد بررسی قرار می‌دهیم.
ACF[1] تئوری میدان‌های بسته‌ی جبری به صورت زیر است

$$\mathrm{ACF} = \underset{\text{میدان‌ها}}{T} \cup \text{بسته‌ی جبری بودن}$$

شمای اصول برای بسته‌ی جبری بودن:

$$\varphi_n : \forall a_1, \ldots a_n \exists x \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

توجه ۲-۳۷. ACF سازگار است، یعنی مدل دارد. در واقع $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1) \models \mathrm{ACF}$؛ و ACF_p تئوری میدان‌های بسته‌ی جبری با مشخصه‌ی p را نشان می‌دهد. *($p \in \mathrm{Prime} \cup \{0\}$)*.

لم ۲-۳۸. فرض کنید κ یک کاردینال ناشمارا باشد، آن‌گاه هر دو مدل از ACF_0 با اندازه κ با هم ایزومرف هستند *(بنابراین برای هر کاردینال ناشمارای κ، تئوری ACF_0 κ- جازم است)*.

قضیه ۲-۳۹. ACF_0 یک تئوری کامل است.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathrm{ACF}_0$. نشان می دهیم $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.
حالت اول: فرض کنید $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ هر دو شمارا باشند. بنا به قضیه‌ی لونهایم اسکولم توسیع‌های مقدماتیِ $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$ و $\mathcal{N}' \succ \mathcal{N}$ وجود دارند که $|M'| = 2^{\aleph_0}$ و $|N'| = 2^{\aleph_0}$. پس $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}' \cong \mathcal{N}' \equiv \mathcal{N}$.
حالت دوم: فرض کنید $\mathcal{M}$ شمارا و $\mathcal{N}$ ناشمارا باشند بنا به قضیه‌ی لونهایم اسکولم توسیع مقدماتیِ $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$ وجود دارد به طوری که $|M'| = |N|$. پس $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}' \equiv \mathcal{N}$. □

تا کنون ثابت کردیم که ACF_0 یک تئوری سازگارِ کامل است و $(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1) \models \mathrm{ACF}_0$. بنابراین اگر φ یک جمله در زبان $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ باشد، آن‌گاه $\mathbb{C} \models \varphi$ اگر و تنها اگر در یک (همه) میدان بسته‌ی جبری درست باشد.

$$\mathrm{Th}(\mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1) \equiv \mathrm{ACF}_0$$

$$\mathbb{C} \models \mathrm{ACF}_0 \models \varphi \in \mathrm{Th}(\mathbb{C})$$

بنابراین ACF_0 یک اصل‌بندی کامل برای اعداد مختلط است.

توجه ۲-۴۰. با اثباتی کاملاً مشابه می‌توان نشان داد که ACF_p یک تئوری کامل است.

توجه ۲-۴۱. بنا بر قضیه‌ی لونهایم- اسکولم میدان‌های بسته‌ی جبری با هر اندازه‌ی دلخواه نامتناهی وجود دارد.

[1] algebrically closed field

تعریف ۲-۴۲. فرض کنید N یک میدان بسته‌ی جبری باشد. اگر $A \subseteq N$، آن‌گاه A^{alg}، بستار جبریِ A بنا به تعریف، کوچکترین میدان بسته‌ی جبریِ شامل A است.

قضیه ۲-۴۳. فرض کنید φ یک جمله در زبان حلقه‌ها باشد. آن‌گاه موارد زیر با هم معادلند.

۱. $\mathbb{C} \models \varphi$.

۲. φ در یک میدان بسته‌ی جبری با مشخصه‌ی صفر درست است.

۳. φ در تمام میدان‌های بسته‌ی جبری با مشخصه‌ی صفر درست است.

۴. φ از جایی به بعد در میدان‌های بسته‌ی جبری با مشخصه‌ی p درست است. یعنی

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad p > n \quad \mathrm{ACF}_p \models \varphi.$$

۵. φ از جایی به بعد در بستار جبری $\mathbb{F}_p$ درست است. یعنی

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p > n \quad \mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}} \models \varphi.$$

توجه ۲-۴۴. اگر F یک میدان متناهی باشد آن‌گاه مشخصه‌ی F متناهی است ($\exists n\ \forall x \in F\ \underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ بار}} = 0$).
هم‌چنین مشخصه‌ی یک میدان همواره یک عدد اول است. میدان متناهی p^n عضوی را با $\mathbb{F}_{p^n}$ نشان می‌دهیم.

۶.۱.۲ تئوری‌های مدل کامل

تعریف ۲-۴۵. تئوری T را مدل کامل می نامیم هرگاه برای هر $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathrm{T}$ اگر $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ باشد آنگاه $\mathcal{M} \leq \mathcal{N}$.

قضیه ۲-۴۶. اگر تئوری T مدل کامل باشد آنگاه هر فرمول $\varphi(\bar{x})$ نسبت به T دارای یک معادل عمومی است.(یعنی برای هر فرمول $\varphi(x)$ یک فرمول به صورت $\chi(\bar{x}) : \forall \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ موجودست به طوری که $\mathrm{T} \models \varphi(\bar{\mathrm{x}}) \Leftrightarrow \chi(\bar{\mathrm{x}})$).

نتیجه ۲-۴۷. اگر T مدل کامل باشد هر فرمول دارای معادلی وجودی است.

نتیجه ۲-۴۸. T مدل کامل است اگر و تنها اگر هر فرمول دارای معادل عمومی باشد اگر و تنها اگر هر فرمول دارای معادل وجودی باشد.

اثبات. اگر $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ و $\bar{a} \in M$ و $\varphi(\bar{x})$ دلخواه باشد.
هدف: $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$.

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} \models \exists \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y})$$

$$\Rightarrow \mathcal{N} \models \exists \bar{y}\psi(\bar{a}, \bar{y})$$

$$\Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$$

و عکس هم به همین صورت ثابت می‌شود. □

تعریف ۲-۴۹. فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathrm{T}$ و $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ می گوییم $\mathcal{M}$ در $\mathcal{N}$ به طور وجودی بسته است هرگاه

$$\mathcal{M} \models \exists \bar{y}\psi(\bar{m}, \bar{y}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \exists \bar{y}\psi(\bar{m}, \bar{y})$$

.

قضیه ۲-۵۰. T مدل کامل است $\Leftrightarrow$ اگر $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathrm{T}$ و $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ و $\mathcal{M}$ در $\mathcal{N}$ به طور وجودی بسته باشد $\Leftrightarrow$ هر مدل $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ به طور وجودی بسته باشد.

قضیه ۲-۵۱. اگر هر مدل $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ بسته وجودی باشد آنگاه T مدل کامل است.

اثبات. ثابت می کنیم که اگر هر مدل $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ بسته وجودی باشد آنگاه هر فرمول وجودی دارای یک معادل عمومی است.

فرض:هر مدل T بسته وجودی است و $\varphi(\bar{x})$ یک فرمول وجودی است.

هدف: نشان می‌دهیم $\varphi(\bar{x})$ معادل عمومی دارد.

ادعا: $\mathrm{T} \vdash \Gamma(\bar{\mathrm{x}}) \cup \{\varphi(\bar{\mathrm{x}})\}$ که $\Gamma(\bar{x})$ نتایج عمومی φ می‌باشد. اگر ادعا درست نباشد آنگاه $(\mathcal{M}, \bar{a}) \models \mathrm{T} \cup \Gamma(\mathrm{x}) \cup \{\neg\varphi(\mathrm{x})\}$.

نشان می‌دهیم $\mathrm{Diag}(\mathcal{M}) \cup \mathrm{T} \cup \{\varphi(\bar{\mathrm{a}})\}$ دارای مدل است.

اگر ادعا درست باشد آنگاه $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ و $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathrm{T}$ و $\mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$ و $\mathcal{M} \models \neg\varphi(\bar{a})$ و این در تناقض با بسته وجودی بودن $\mathcal{M}$ است.

نتیجه ۲-۵۲. T مدل کامل است $\Leftrightarrow$ هر مدل $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ به طور وجودی بسته باشد.

□

قضیه ۲-۵۳. اگر برای هر $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathrm{T}$ و $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ داشته باشیم $\mathcal{M}$ به طور وجودی در $\mathcal{N}$ بسته است در این صورت T یک تئوری مدل کامل است.

تعریف ۲-۵۴. فرض کنید T یک تئوری سازگار باشد.تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{S_n(T)} = \{\mathrm{P(x_1, \ldots, x_n)} | \text{سازگار باشد} \mathrm{P(x_1, \ldots, x_n)} \cup \mathrm{T}\}$$

یعنی اگر تعدادِ متناهی فرمولِ $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{P(x_1, \ldots, x_n)}$ آنگاه $\mathrm{T} \vdash \exists \bar{\mathrm{x}}\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_\mathrm{n}$.

نتیجه ۲-۵۵. اگر T یک تئوری کامل باشد آنگاه $\mathrm{S_n(T) = S_n^{\mathcal{M}}(\varnothing)}$.

بنابر تعریف فوق در زبان $\mathcal{L}_A$ داریم $\mathrm{S_n^{\mathcal{M}}(A) = S_n(Th(\mathcal{M}_A))}$ زیرا اگر $\mathrm{P \in S_n(Th(\mathcal{M}_A))}$ آنگاه $\mathrm{P \cup Th((\mathcal{M}_A))}$ سازگار است.

۷.۱.۲ تئوری‌های بسیار کمینه

تعریف ۲-۵۶. تئوری T را بسیار کمینه [۲] می‌گوییم هرگاه برای هر مدل $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$، هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر از جهان M متناهی یا متمم متناهی باشد.

گزاره ۲-۵۷. فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری و X یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی جبری از K باشد. آن‌گاه X یا $K \setminus X$ متناهی است. بنابراین ACF یک تئوری بسیار کمینه است.

اثبات. مرجع [۱۰]، نتیجه‌ی ۳.۲.۹. را ببینید. □

۸.۱.۲ تئوری‌های پایدار و مدل‌های اشباع

فرض کنید T یک تئوری کامل در یک زبان شمارا باشد و فرض کنید $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$. می‌گوییم $\mathcal{M}$ یک مدل κ-اشباع است هرگاه برای هر مجموعه پارامترِ $A \subseteq \mathcal{M}$ به طوری‌که $|A| < \kappa$ و هر تایپ $P(x) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ عنصری مانند $u \in M$ پیدا شود به طوری‌که $u \models P(x)$ یعنی برای هر $\varphi \in P(x)$ داشته باشیم $\mathcal{M} \models \varphi(u)$. مدل $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ را اشباع می‌نامیم هرگاه $|\mathcal{M}|$-اشباع باشد. مدل $\mathcal{M}$ را $\aleph_0$-اشباع می‌نامیم هرگاه هر تایپی روی یک مجموعه‌ی متناهی A در $\mathcal{M}$ برآورده شود.

لم ۲-۵۸. فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathrm{T}$ دو مدل اشباع و هم سایز باشند. اگر $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ آن‌گاه $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

تعریف ۲-۵۹. فرض کنید T یک تئوری کامل در یک زبان شمارا و κ یک کاردینال نامتناهی باشد. می‌گوییم T یک تئوری κپایدار است هرگاه برای هر مدل $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ و زیرمجموعه‌ی $A \subseteq M$ که $|A| = \kappa$ داشته باشیم $|S_n^{\mathcal{M}}(A)| = \kappa$. همچنین می‌گوییم $\mathcal{M}$ یک ساختار κپایدار است هرگاه $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ یک تئوری κپایدار باشد.

به دلایل تاریخی $\aleph_0$پایدار را ωپایدار در نظر می‌گیریم. پس اگر T یک تئوری کامل در یک زبان شمارا و κ یک کاردینال نامتناهی باشد. می‌گوییم T یک تئوری ωپایدار است هرگاه برای هر مدل شمارای $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ مجموعه‌ی $S_1(M)$ مجموعه‌ی همه‌ی تایپ‌های با پارامتر در M شمارا باشد. برای مثال تئوری DLO [۳] یک تئوری $\aleph_0$پایدار نیست. زیرا $|S_1^{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$.

در حالت کلی شلاح [۴] در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد برای تئوری‌های κاشباع یکی از حالات زیر برقرار است.

[۲] strongly minimal
[۳] dense linear orders
[۴] Shelah

قضیه ۲-۶۰. فرض کنید T یک تئوری کامل در یک زبان شمارا باشد. در این صورت یکی از گزاره‌های زیر برقرارند.

الف) برای هیچ کاردینال κ تئوری T، κپایدار نیست.

ب) به ازای هر $\kappa \geq \aleph_0$ تئوری T، κپایدار است. *(به بیان دیگر این تئوری فوق پایدار [۵] است.)*

ج) تئوری T، κپایدار است اگرو تنها اگر $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$.

اثبات. برای اثبات این قضیه می‌توانید مرجع [۱۲] یا [۱] را ببینید. □

تعریف زیر در فصل بعد بسیار پرکاربرد است.

تعریف ۲-۶۱. فرض کنید L یک زبان دلخواه و $\mathcal{M} = (M, \ldots)$ یک Lساختار باشد و $A \subseteq M$. می‌گوییم $b \in M$ روی A جبری است هرگاه Lفرمول $\varphi(v, \bar{w})$ و $\bar{a} \in A$ موجود باشند به طوری که $\mathcal{M} \models \varphi(b, \bar{a})$ و مجموعه‌ی $\{y \in M : \quad \mathcal{M} \models \varphi(y, \bar{a})\}$ متناهی باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{acl}(A) = \{x : \text{جبری است } A \text{ روی } x\}$$

بنابراین منظور از $\mathrm{acl}(A) \subseteq M$، بستار جبری نظریه‌ی مدلی A در $\mathcal{M}$ است.

۲.۲ حذف سور میدان‌های بسته‌ی جبری

قضیه ۲-۶۲. تئوری ACF_0 سورها را حذف می‌کند.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models \mathrm{ACF}_0$، $a \in M$، $b \in N$ و $\mathcal{M}_1 = \langle a \rangle \cong \langle b \rangle = \mathcal{N}_1$ فرض کنید $c \in M \setminus M_0$. هدف پیدا کردن $d \in N \setminus N_0$ به طوری‌که $\langle \mathcal{M}_1, c \rangle \cong \langle \mathcal{N}_1, d \rangle$. توجه شود که بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم $\mathcal{M}_1$ و $\mathcal{N}_1$ میدان هستند. اگر c روی $\mathcal{M}_1$ جبری باشد. آن‌گاه c ریشه‌ی یک چندجمله‌ای با ضرایب در $\mathcal{M}_1$ است. فرض کنید $f(x) \in \mathcal{M}_1[x]$ چندجمله‌ای می‌نیمال c باشد. در این صورت $\langle \mathcal{M}_1, c \rangle \cong \dfrac{\mathcal{M}_1[x]}{\langle f(x) \rangle}$. از طرفی از آن‌جا که $\mathcal{N}$ بسته‌ی جبری است تصویرِ چندجمله‌ای f در $\mathcal{N}$ نیز دارای ریشه‌ای مانند d است. پس

$$(\mathcal{N}_1, d) \cong \frac{\mathcal{N}_1[x]}{\langle f(x) \rangle} \cong \frac{\mathcal{M}_1[x]}{\langle f(x) \rangle} \cong (\mathcal{M}_0, c).$$

حال فرض کنید c روی $\mathcal{M}_1$ متعالی باشد. در این‌صورت $\langle \mathcal{M}_1, c \rangle = \mathcal{M}_1(X)$. کافی است عنصر d به‌گونه‌ای پیدا شود که هر تعداد متناهی معادله‌ای که c که در آن صدق کند d هم در آن صدق کند. از آن‌جاکه تعداد ریشه‌های هر چندجمله‌ای در یک میدان بسته‌ی جبری متناهی است، d پیدا می‌شود. □

[۵] superstable

قضیه ۲-۶۳. تئوری T دارای حذف سور است هرگاه هر تایپ کاملی از بخش بدون سور خود نتیجه شود. یعنی برای هر مدل $\mathcal{M} \models \mathrm{T}$ و هر $\bar{a} \in M$ و $\bar{b} \in M$ داشته باشیم

$$\mathrm{qftp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{qftp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}) \Rightarrow \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b})$$

اثبات. فرض کنید $\varphi(x)$ و $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دلخواه باشند.باید نشان دهیم $\mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$.
از اینکه $\langle \bar{a} \rangle^{\mathcal{M}} \cong \langle \bar{a} \rangle^{\mathcal{N}}$ نتیجه می‌گیریم $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{a})$.
یعنی $\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a})$.

□

فصل ۳

میدان اعداد مختلط به همراه یک مجموعه‌ی کوچک ضربی

طبق آنچه در پیشگفتار گفته شد، اگر F یک میدان، E یک زیرمیدان از F و G یک زیرگروه دلخواه از $F^\times$ باشد و معادله‌ی $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1$ را داشته باشیم به طوری که $a_1, \ldots, a_n \in E$. می‌گوییم G دارای ویژگی مان روی E است، هرگاه هرمعادله به شکل بالا دارای تعداد متناهی جواب ناتباهیده در G باشد. همچنین درفصل اول گفتیم، فرض کنید K یک میدان بسته جبری و G یک زیرگروه از $K^\times$ باشد، اگر برای هر مجموعه‌ی جبری $V \subseteq K^n$، $V \cap G^n$ یک اجتماع متناهی از هم‌دسته‌های زیر گروه‌های G^n باشد، می‌گوییم G دارای ویژگی موردل-لنگ است. در این فصل نشان می‌دهیم ویژگی موردل-لنگ و ویژگی مان معادل هستند. بدین منظور ابتدا مجموعه‌های کوچک در یک ساختار را مورد مطالعه قرار داده سپس به بررسی گروه‌های ضربی کوچک در ساختار میدان‌های بسته‌ی جبری می‌پردازیم. در ادامه با بررسی دقیق‌تر ویژگی مان، در گزاره‌ی ۳-۳۹ قسمت ۱ به ۳ قضیه‌ی اصلی (۰-۱) را اثبات می‌کنیم. همچنین در گزاره‌ی ۳-۴۶ نشان می‌دهیم ویژگی مان، ویژگی موردل-لنگ را نتیجه می‌دهد و در پایان در گزاره‌ی ۳-۵۰ نشان می‌دهیم ویژگی موردل-لنگ، ویژگی مان را نتیجه می‌دهد.

۱.۳ مجموعه‌های کوچک در یک ساختار

تعریف ۳-۱. فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی دلخواه باشند. منظور از $f : X \to^n Y$ نگاشت $f : X \to P(Y)$ است به طوری که برای تمام $x \in X$ داریم $|f(x)| \leq n$. گراف یک نگاشت f به صورت بالا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\{(x,y) \in X \times Y : y \in f(x)\}$$

برای مجموعه‌های تعریف‌پذیر X و Y می‌گوییم نگاشت f در ساختار $\mathcal{M}$ تعریف‌پذیر است هرگاه گراف آن تعریف‌پذیر باشد.

برای مجموعه‌ی $S \subseteq X$ قرار می‌دهیم $f(S) = \bigcup_{x \in S} f(x)$. حال با توجه به نگاشت ذکرشده دربالا به تعریف مجموعه‌های کوچک [۱] و بزرگ می‌پردازیم.

تعریف ۳-۲. فرض کنید L یک زبان مرتبه‌ی اول و $\mathcal{M} = (M, \ldots,)$ یک Lساختار باشند و فرض کنید $G \subseteq M$. می‌گوییم G نسبت به $\mathcal{M}$ بزرگ است هرگاه اعداد طبیعی m, n و یک تابع تعریف پذیرِ $f : M^m \to^n M$ موجود باشند به طوری که $f(G^m) = M$. در غیر این صورت می‌گوییم G نسبت به $\mathcal{M}$ کوچک است.

به‌طور خاص اگر $|M|$ نامتناهی باشد و $|G| < |M|$ آن‌گاه G نسبت به $\mathcal{M}$ کوچک است زیرا در غیر این‌صورت طبق تعریف بزرگ بودن یک تابع تعریف‌پذیرِ $f : M^m \to^n M$ موجود است به طوری که $f(G^m) = M$. از طرفی $f(G^m) = \bigcup_{\bar{x} \in G^m} f(\bar{x})$. طبق تعریف فوق $f(\bar{x})$ به ازای هر $\bar{x} \in G^m$ متناهی است. بنابراین $|\bigcup_{\bar{x} \in G^m} f(\bar{x})| = |G|$ که با $|G| < |M|$ در تناقض است.

تعریف ۳-۳. فرض کنید L یک زبان مرتبه‌ی اول و $\mathcal{M} = (M, \ldots,)$ یک Lساختار باشند و $G \subseteq M$. مجموعه‌ی $S \subseteq M$ را کران‌مند توسط G [۲] گوییم هرگاه اعداد طبیعی m, n و یک تابع تعریف پذیرِ $f : M^m \to^n M$ موجود باشند به طوری که $S \subseteq f(G^m)$.

در کل این نوشتار برای یک Lساختار مشخص $\mathcal{M}$ منظور از کوچک بودن یک مجموعه، کوچک بودن نسبت به $\mathcal{M}$ است.

نکته ۳-۴. حال طبق تعاریف بالا اگر مجموعه‌ی G کوچک باشد آن‌گاه هر زیرمجموعه‌ی $S \subseteq M$ کران‌مند توسط G نیز کوچک است. زیرا اگر $S \subseteq M$ یک مجموعه‌ی کران‌مند توسط G باشد طبق تعریف اعداد طبیعی m, n و یک تابع تعریف پذیرِ $f : M^m \to^n M$ موجود است که $S \subseteq f(G^m)$. از طرفی G نیز کوچک است پس طبق تعریف $f(G^m) \neq M$ بنابراین به ازای هر مجموعه‌ی $S \subseteq f(G^m)$ داریم $f(S^m) \neq M$. توجه داریم که اجتماع دو مجموعه‌ی کران‌مند توسط G، مجموعه‌ای کران‌مند توسط G خواهد بود.

توجه ۳-۵. اگر $f : M^m \to^n M$ یک تابع تعریف‌پذیر و $S_1, \ldots, S_m \subseteq M$ مجموعه‌های کران‌مند توسط G باشند، آن‌گاه $f(S_1 \times \ldots \times S_m)$ مجموعه‌ای کران‌مند توسط G است. زیرا طبق تعریف به ازای هر i یک تابع تعریف‌پذیر $f_i : M^{m_i} \to^{n_i} M$ موجود است که $S_i \subseteq f_i(G^{m_i})$. برای مثال فرض کنید S_1و S_2 زیرمجموعه‌های کران‌مند توسط G باشند. بنابراین توابع تعریف‌پذیر $f_1 : M^{m_1} \to^{n_1} M$ و $f_2 : M^{m_2} \to^{n_2} M$ موجودند که $S_1 \subseteq f_1(G^{m_1})$و $S_2 \subseteq f_2(G^{m_2})$. همچنین با در نظر گرفتن نگاشت تعریف‌پذیر $f(S_1 \times S_2) : M^{m_1+m_2} \to^{n_1+n_2} M$ داریم $S_1 \times S_2 \subseteq f(G^{m_1+m_2})$.

[۱] small set

[۲] G-bound

حال به بررسی برخی از ویژگی‌های یک مجموعه‌ی کوچک می‌پردازیم.

لم ۳-۶. فرض کنید G نسبت به $\mathcal{M}$ کوچک باشد و $b \in M$. آن‌گاه $G \cup \{b\}$ نسبت به $\mathcal{M}$ کوچک است.

اثبات. فرض کنید $b \in M - G$ و برای عدد طبیعی m و $I \subseteq \{۱, \ldots, m\}$ قرار دهید

$$G(I) = \{(a_۱, \ldots, a_m) \in (G \cup \{b\})^m\}$$

به طوری که برای $i \in I$ داریم $a_i \in G$ و برای $j \notin I$ داریم $a_j = b$. پس یک نگاشت دوسویی تعریف‌پذیر بین $G(I)$ و $G^{|I|}$ وجود دارد. بنابراین

$$(G \cup \{b\})^m = \bigcup_{I \subseteq \{۱, \ldots, m\}} G(I).$$

از طرفی طبق فرض G یک مجموعه‌ی کوچک است. بنابراین یک نگاشت تعریف‌پذیر

$$f : M^m \to^n M$$

موجود است، به طوری که $f(G^m) \neq M$. در نتیجه

$$f((G \cup \{b\})^m) = \bigcup_I f(G(I))$$

یک مجموعه‌ی کران‌مند توسط G است، طبق آنچه گفته شد چون G کوچک است، هر مجموعه‌ی کران‌مند توسط G کوچک است. □

فرض کنید L یک زبان مرتبه‌ی اول و U یک نماد رابطه‌ای جدید باشد. $L(U)$ساختار $(\mathcal{M}, G)$ را در نظر بگیرید. دراین صورت در تئوری کامل $(\mathcal{M}, G)$، اصلی که کوچک بودن یک مجموعه را به صورت مرتبه‌ی اول بیان می‌کند، از مجموعه‌ی اصول این تئوری نتیجه می‌شود. به بیان دیگر مجموعه‌ای از $L(U)$ جملات در تئوری کامل $(\mathcal{M}, G)$ موجودند که کوچک بودن G نسبت به $\mathcal{M}$ را نتیجه می دهند. زیرا به ازای هر تابع تعریف پذیر $f : M^m \to^n M$ چنین جمله ای

$$\varphi_f : \exists y(\forall x(U(x) \to f(x) \neq y))$$

در تئوری کامل $(\mathcal{M}, G)$ وجود دارد. در نتیجه اگر $G_۱$ نسبت به $\mathcal{M}_۱$ کوچک باشد و $(\mathcal{M}_۱, G_۱) \equiv (\mathcal{M}_۲, G_۲)$ آن‌گاه $G_۲$ نیز نسبت به $\mathcal{M}_۲$ کوچک است.

لم ۳-۷. فرض کنید $(\mathcal{M}, G)$ یک $L(U)$ساختار κاشباع و G نسبت به $\mathcal{M}$ کوچک باشد. همچنین فرض کنید $|L| < \kappa$. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(الف) فرض کنید $(S_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های کران‌مند توسط G باشد. آن‌گاه $\bigcup_{i \in I} S_i$ کوچک است.

(ب) فرض کنید $S \subseteq M$ و $|S| < \kappa$ آن‌گاه $acl(G \cup S)$ نسبت به $\mathcal{M}$ کوچک است.

(ج) دنباله‌ی $(b_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ در M موجود است به طوری که هیچ کدام از b_γها روی $G \cup \{b_\alpha : \alpha < \gamma\}$ جبری نیستند.

اثبات. قسمت (الف) طبق فرض هر S_i یک مجموعه‌ی کران‌مند توسط G است. بنابراین طبق تعریف برای هر مجموعه‌ی S_i یک تابع تعریف پذیر $g_i : M^{m_i} \to^{n_i} M$ موجود است، که $S_i \subseteq g_i(G^{m_i})$. اکنون به برهان خلف فرض کنیم $\bigcup_{i\in I} S_i$ بزرگ باشد پس طبق تعریف؛ یک تابع تعریف پذیرِ $f : M^m \to^n M$ موجود است که $M = f((\bigcup_{i\in I} S_i)^m)$. حال ادعا می‌کنیم که برای مجموعه‌ی متناهی $J \subseteq I^m$ داریم

$$M = \bigcup_{i_1,\ldots,i_m\in J} f(S_{i_1} \times \ldots \times S_{i_m}).$$

که $(i_1, \ldots, i_m) \in I^m$ و $f(S_{i_1} \times \ldots \times S_{im})$ یک تابع تعریف‌پذیر در ساختار $(\mathcal{M}, G)$ است. زیرا در غیر این‌صورت برای فرمول

$$\varphi_i : \exists y(\forall x(U(x) \to f(x) \neq y))$$

تایپ $P(\bar{x}) = \{\varphi_1(x, \bar{a}), \ldots\}$ در نظر بگیریم. چون $\mathcal{M}$ یک مدل κاشباع است هر بخش متناهی از این تایپ در ساختار $\mathcal{M}$ برآورده می‌شود. طبق قضیه فشردگی کل تایپ در ساختار $\mathcal{M}$ برآورده می‌شود. یعنی برای هر $i \in I$ داریم $M \neq \bigcup_I f(s_i)$. که با فرض خلف در تناقض است. در نتیجه

$$M = \bigcup_{(i_1),\ldots,(i_m)\in J} f(S_{i(1)} \times \ldots \times S_{i(m)})$$

یک مجموعه‌ی کران‌مند توسط G است که با کوچک بودن G تناقض دارد.

اثبات قسمت (ب). با توجه به قسمت الف $(G \cup S)$ یک مجموعه‌ی کوچک است و توجه داریم که

$$\mathrm{acl}(G \cup S) = \bigcup_{m,n,f} f(G^m)$$

که در آن اجتماع روی همه‌ی m و n و نگاشت $f : M^m \to^n M$ در $\mathcal{M}$ روی S تعریف‌پذیر است.

اثبات قسمت (ج). طبق لم ۳-۶ اگر عنصر $b_1 \in M$ را در نظر بگیریم آن‌گاه $G \cup \{b\}$ کوچک است. از طرفی طبق قسمت (ب) $\mathrm{acl}(G \cup \{b_1\})$ نیز کوچک است. پس عنصر $b_2 \in M - \mathrm{acl}(G \cup \{b_1\})$ پیدا می‌شود. یعنی عنصر b_2 روی b_1 جبری نیست. حال با اضافه کردن عنصر b_2 و بستار جبری گرفتن می‌توان عنصر متمایز غیر جبری دیگری یافت. پس با ادامه‌ی این روند دنباله مورد نظر را خواهیم داشت.

□

گزاره ۳-۸. فرض کنید L یک زبان دلخواه و T یک Lتئوری بسیار کمینه باشد که هیچ مدل متناهی ندارد و حذف سور می‌پذیرد همچنین $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ دو مدل برای تئوری T باشند و $\mathcal{G} = (G, \ldots)$ و $\mathcal{H} = (H, \ldots)$ به ترتیب زیر ساختارهایی برای $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ باشند. فرض کنید G نسبت به $\mathcal{M}$ و H نسبت به $\mathcal{N}$ کوچک باشد ، همچنین $\mathcal{G} \equiv \mathcal{H}$ و $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ آن‌گاه داریم $(\mathcal{M}, G) \equiv (\mathcal{N}, H)$

اثبات. ابتدا مشاهده زیر را در نظر بگیرید

فرض کنید $\mathcal{M}$و $\mathcal{N}$ دو L ساختار باشند، که $\mathcal{C} \prec \mathcal{M}$ و $\mathcal{D} \prec \mathcal{N}$. و همچنین ایزومرفیسم $i : \mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ موجود باشد. در این صورت

۱ ایزومرفیسم i قابل گسترش به ایزومرفیسمی میان $acl(\mathcal{C})$ و $acl(\mathcal{D})$ است.

۲ فرض کنید $x \in M \setminus acl(C)$ و $y \in N \setminus acl(D)$. در این صورت ایزومرفیسم i قابل گسترش به یک ایزومرفیسم بین $acl(\mathcal{C})(x)$ و $acl(\mathcal{D})(y)$ است به طوری که $i(x) = y$.

برای راحتی، زبان L را شمارا درنظر می‌گیریم. حال با در نظر گرفتن فرضیه‌ی پیوستار، فرض کنید دو Lساختار $(\mathcal{M}, G)$ و $(\mathcal{N}, H)$ اشباع و از سایز $\aleph_1$ باشند. بنابراین $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ زیر ساختارهای $\aleph_1$اشباع هستند. همچنین بنابر قضیه فشردگی هر دو متناهی اند یا از سایز $\aleph_1$ هستند. از طرفی طبق فرض $\mathcal{G} \equiv \mathcal{H}$. در نتیجه طبق آنچه در فصل‌های قبل گفتیم، $e : \mathcal{G} \cong \mathcal{H}$. اکنون پایه‌های X از $\mathcal{M}$ روی G و Y از $\mathcal{N}$ روی H را در نظر بگیرید با توجه به قسمت (۳) در لم قبل $|X| = |Y| = \aleph_1$ از طرفی با توجه به مشاهده‌ی بالا e را به یک ایزومرفیسم بین $\mathcal{G}(X)$ و $\mathcal{H}(Y)$ گسترش می‌دهیم سپس آن را می‌توان به ایزومرفیسمی میان $acl(\mathcal{G}(X))$ و $acl(\mathcal{H}(Y))$ گسترش داد. از طرفی $acl(\mathcal{G}(X)) = \mathcal{M}$ و $acl(\mathcal{H}(Y)) = \mathcal{N}$. پس $(\mathcal{M}, G) \equiv (\mathcal{N}, H)$. □

۲.۳ زوج‌های میدان‌ها در نظریه‌ی مدل

توجه داریم که برهان فوق علاوه بر معادل مقدماتی بودن، ایزومرف بودن $(\mathcal{M}, G)$ و $(\mathcal{N}, H)$ را نیز اثبات می‌کند. فرض کنید زبان L^* گسترش زبان L با افزودن نماد رابطه‌ای و نماد ثابت باشد. با در نظر گرفتن گزاره فوق، اگر $\mathcal{G}^*$ و $\mathcal{H}^*$ دو L^*گسترش از $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ باشند که $\mathcal{G}^* \equiv \mathcal{H}^*$، آن‌گاه $(\mathcal{M}, \mathcal{G}^*) \equiv (\mathcal{N}, \mathcal{H}^*)$.

قضیه‌ی بالا تعمیمی از قضیه‌ی کیسلر [۳] است که در ادامه آن را مورد بررسی قرار خواهیم داد. تارسکی در [۱۴] به مطالعه‌ی نظریه‌ی میدان‌ها واضافه کردن محمول P به این نظریه می‌پردازد. در اینجا فقط به مطالعه‌ی زوج (A, B) از میدان‌ها می‌پردازیم که B زیرمیدان A است. همچنین مجموعه‌ی عناصر میدان B متناظر با محمول P است. حال به مطالعه‌ی نتیجه‌های زیر درباره‌ی زوج‌های (A_1, B_1) و (A_2, B_2) می‌پردازیم. در هریک از موارد A_1 و A_2 میدان‌های بسته‌ی جبری بامشخصه‌ی یکسان هستند.

۰) میدان‌های بسته جبری با مشخصه‌ی صفر با هم معادل مقدماتی هستند(این نتیجه توسط تارسکی اثبات شده است.)

۱) فرض کنید $A_1 = B_1$ و $A_2 = B_2$. آن‌گاه $(A_1, B_1) \equiv (A_2, B_2)$.

درستی این گزاره از معادل مقدماتی بودن A_1 و A_2 به دست می‌آید.

[۳] Keisler

۲) فرض کنید B_1 و B_2 میدان‌های بسته‌ی جبری باشند و $A_1 \neq B_1$ و $A_2 \neq B_2$. آن‌گاه $(A_1, B_1) \equiv (A_2, B_2)$.

برای اثبات این گزاره مرجع [۱۳] را ببینید.

۳) فرض کنید B_1 و B_2 میدان‌های بسته‌ی حقیقی باشند و A_1 و A_2 توسیع‌های متناهی از آنها باشند. آن‌گاه $(A_1, B_1) \equiv (A_2, B_2)$. تارسکی در مرجع [؟]، قضیه‌ی (۵.۳) این گزاره را اثبات کرده است.

۴) اگر B_1 و B_2 میدان‌های بسته‌ی حقیقی باشند و A_1 و A_2 توسیع‌های نامتناهی جبری باشند. آن‌گاه $(A_1, B_1) \equiv (A_2, B_2)$. این گزاره یک نتیجه از قضیه‌ی (۴.۹) رابینسون در مرجع [۱۳] است.

۵) فرض کنید B_1 و B_2 میدان‌های اعداد گویا و معادل مقدماتی باشند. آن‌گاه $(A_1, B_1) \equiv (A_2, B_2)$.

دینا اسکات [۴] سوال جامع تری را مطرح کرد. فرض کنید میدان‌های B_1 و B_2 معادل مقدماتی باشند و A_1 و A_2 توسیع‌های جبری از B_1 و B_2 باشند. حال می‌خواهیم بدانیم در حالت کلی تحت چه شرایطی معادل بودن مقدماتی بین دو Lساختار $(A_1, B_1) \equiv (A_2, B_2)$ برقرار خواهد بود. برای این منظور قضیه‌ی زیر از کیسلر را داریم.

قضیه ۳-۹. فرض کنید میدان‌های B_1 و B_2 معادل مقدماتی باشند و B_1 یک میدان بسته‌ی جبری و بسته‌ی حقیقی نباشد. اگر A_1 و A_2 به ترتیب گسترش های بسته جبری از B_1 و B_2 باشند. آن‌گاه $(A_1, B_1) \equiv (A_2, B_2)$.

قضیه ۳-۱۰. فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری و $G \subseteq K$ بزرگ باشد. در این صورت تابع تعریف‌پذیر $F : K^l \to K$ وجود دارد به طوری که $F(G^l) = K$.

در ادامه نکته‌ای را بدون اثبات بیان می‌کنیم که معادلی برای بزرگ بودن است. فرض کنید F یک زیر میدان بسته‌ی جبری از K باشد. آن‌گاه F بزرگ است اگر و تنها اگر $F = K$ یا F یک میدان بسته‌ی حقیقی است و $[K : F] = 2$. نکته‌ی مطرح شده تعمیمی از قضیه‌ی آرتین [۵] است که در زیر بیان شده است.

قضیه ۳-۱۱. فرض کنید B یک میدان باشد به‌طوری که بسته‌ی حقیقی و بسته‌ی جبری نیست. همچنین فرض کنید A یک توسیع بسته‌ی جبری از میدان B باشد. آن‌گاه برای هر عدد طبیعی n، عضوی مانند $a \in A$ موجود است که در هر چند جمله‌ای بادرجه کمتر مساوی n جبری نیست.

برای مطالعه‌ی بیشتر مرجع [۵] را ببینید.

۳.۳ یک گروه ضربی کوچک در ساختار میدان‌های بسته‌ی جبری

در این فصل L را زبان حلقه‌ها و $L_m = \{1, \cdot\}$ را زبان نیم‌گروه‌های ضربی در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری و $\mathbb{F}$ یک میدان اول و G یک زیرمجموعه‌ی ضربی از K است. یعنی یک زیرمجموعه از K که

[۴] Dana Scott

[۵] Artin

شامل ۱ و تحت ضرب بسته است. برای مثال هر زیرحلقه از K یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی در K است. مجموعه‌ی G را به عنوان یک L_mساختار در نظر می‌گیریم. نمادهای رابطه‌ای زیر را به زبان L_m اضافه می‌کنیم.

$$L_m(\Sigma) = \{۱, .\} \cup \{\Sigma_k : k \in \mathbb{Z}^n, n = ۱, ۲, \ldots\}$$

به طوری که Σ_k یک نماد رابطه‌ای nموضعی است و $k = (k_۱, k_۲, \ldots) \in \mathbb{Z}^n$. اکنون نیم گروه ضربی G را به یک $L_m(\Sigma)$ساختار $G(\Sigma)$ بسط می‌دهیم و نمادهای رابطه‌ای Σ_k را به عنوان یک رابطه‌ی nموضعی روی G به صورت زیر تعبیر می‌کنیم

$$\Sigma_k^G = \{(g_۱, \ldots, g_n) \in G^n : k_۱ g_۱ + \ldots + k_n g_n = ۰\}.$$

نتیجه زیر حالت خاصی از گزاره‌ی (۳-۸) است.

نتیجه ۳-۱۲. فرض کنید K و L دو میدان بسته‌ی جبری باشند. اگر G نسبت به K کوچک باشد و H یک مجموعه‌ی ضربی کوچک در L باشد آن‌گاه

$$(K, G) \equiv (L, H) \Longleftrightarrow G(\Sigma) \equiv H(\Sigma).$$

به بیان دیگر اگر G نسبت به K کوچک باشد، آن‌گاه تئوری کامل (K, G)، توسط تئوری کامل $G(\Sigma)$ مشخص می‌شود.

اثبات. فرض کنید $G(\Sigma) \equiv H(\Sigma)$. برای نشان دادن هم ارزی مقدماتی بین (K, G) و (L, H) ، طبق گزاره‌ی (۳-۸) کافیست نشان دهیم میدان‌های بسته‌ی جبری L و K و زیر ساختارهای $\mathcal{H}$ و $\mathcal{G}$ از L و K هم ارز مقدماتی هستند. توجه داریم که با تعبیر نمادهای رابطه‌ای Σ_k می‌توان میدان‌های بسته‌ی جبری را به عنوان $L_m(\Sigma)$ساختار در نظر گرفت به طوری که تئوری میدان‌های بسته جبری در این زبان حذف سور می‌پذیرد. همچنین زیر ساختارهای میدان بسته‌ی جبری L همان $L_m(\Sigma)$ساختارهای $H(\Sigma)$ هستند و H یک زیرمجموعه‌ی کوچک ضربی در L است. طبق فرض $G(\Sigma) \equiv H(\Sigma)$. از طرفی مشخصه‌ی میدان‌های L و K توسط $\Sigma_k(۱)$ مشخص می‌شود که $k \in \mathbb{Z}$. بنابراین $K \equiv L$.

برای اثبات عکس فرض کنید $(K, G) \equiv (L, H)$. باید نشان دهیم برای هر $L_m(\Sigma)$جمله‌ی φ،

$$G(\Sigma) \models \varphi \Leftrightarrow H(\Sigma) \models \varphi.$$

فرض کنید $G(\Sigma) \models \varphi$. چون $G(\Sigma)$ یک زیر ساختار از میدان بسته‌ی جبری K است داریم $\mathrm{Th(K, G)} \models \varphi$. از طرفی $(K, G) \equiv (L, H)$ پس $\mathrm{Th(L, H)} \models \varphi$. همچنین $H(\Sigma)$ یک زیر ساختار از میدان (L, H) است پس $h_۱, \ldots, h_n \in H$ موجودند به طوری که $h_۱ k_۱ + \ldots + h_n k_n = ۰$ و داریم $H(\Sigma) \models \varphi$. □

در گزاره زیر G نسبت به K کوچک در نظر گرفته نشده است.

گزاره ۳-۱۳. فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری و G یک مجموعه‌ی ضربی در K باشد. در این‌صورت هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر از G^n در (K, G)، در ساختار $G(\Sigma)$ تعریف‌پذیر است.

اثبات. توسیع مقدماتی $|\kappa|^+$ اشباع (K', G') از ساختار (K, G) را در نظر بگیرید. در این‌صورت K و $\mathbb{F}(G')$ روی $\mathbb{F}(G)$ از لحاظ خطی جدا هستند، زیرا با توجه به توسیع مقدماتی $(K, G) \preceq (K', G')$ و چون $G \subseteq G'$، داریم $K \cap G' = G$. پس عناصر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \setminus \mathbb{F}(G')$ موجودند به طوری که روی $\mathbb{F}(G)$ مستقل هستند. پس در ساختار (K, G) برای هر $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{F}(G)$ اگر $r_1\alpha_1, \ldots, r_n\alpha_n = 0$ آن‌گاه $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. پس در ساختار (K', G') نیز این رابطه برقرار است. حال فرض کنید $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ و $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ عضوهایی از G^n باشند به طوری که

$$\mathrm{tp}_{G'(\Sigma)}(\alpha \mid G) = \mathrm{tp}_{G'(\Sigma)}(\beta \mid G).$$

کافی است نشان دهیم

$$tp_{(K',G')}(\alpha \mid K) = \mathrm{tp}_{(K',G')}(\beta \mid K).$$

طبق فرض اتومرفیسم $f : G'(\Sigma) \to G'(\Sigma)$ روی G، α را به β می‌برد. از آن‌جاکه f روابط Σ_k حفظ می‌کند و همچنین در زبان $G(\Sigma)$ اطلاعات میدانی حفظ می‌شوند، این اتومرفیسم قابل گسترش به یک اتومرفیسم میدانی $f' : \mathbb{F}(G') \to \mathbb{F}(G')$ روی $\mathbb{F}(G)$ است. حال با توجه به جدای خطی بودن K و $\mathbb{F}(G')$ روی $\mathbb{F}(G)$، و طبق آنچه در فصل اول گفتیم، عناصر میدان بسته‌ی جبری K از $\mathbb{F}(G')$ مستقل جبری اند. پس اتومرفیسم f' قابل گسترش به اتومرفیسم $f'' : K(G') \to K(G')$ روی K است. و در نهایت با توجه به بسته جبری بودن K عناصر در $K' \setminus K$ روی K مستقل جبری اند. پس این اتومرفیسم را می‌توان به یک اتومرفیسم میدانی $f''_1 : K' \to K'$ روی K گسترش داد. بنابراین داریم

$$\mathrm{tp}_{(\mathrm{K}',\mathrm{G}')}(\alpha \mid \mathrm{K}) = \mathrm{tp}_{(\mathrm{K}',\mathrm{G}')}(\beta \mid \mathrm{K}).$$

□

فرض کنید G

یک زیر حلقه از میدان بسته‌ی جبری K باشد، آن‌گاه طبق گزاره‌ی بالا هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر از G^n در (K, G)، در حلقه‌ی G قابل تعریف است.

توجه ۳-۱۴. اگر میدان بسته‌ی جبری K را با $\mathbb{R}$ جایگزین کنیم آن‌گاه گزاره فوق برای میدان‌های بسته حقیقی درست نیست. برای مثال در ساختار $(\bar{\mathbb{R}}, \mathbb{Z})$ هر زیرمجموعه از اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ قابل تعریف است اما در $\mathbb{Z}(\Sigma)$ زبان شمارا است پس حداکثر شمارا مجموعه‌ی قابل تعریف وجود دارد. همچنین $2^{\mathbb{Z}}3^{\mathbb{Z}}$ دارای ویژگی مان است و در $\mathbb{R}^{>0}$ چگال است. پس در ساختار $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{Z}}3^{\mathbb{Z}})$ ناشمارا زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر از $2^{\mathbb{Z}}3^{\mathbb{Z}}$ وجود دارد، اما زبان $2^{\mathbb{Z}}3^{\mathbb{Z}}(\Sigma)$ نیز شمارا است.

لم ۳-۱۵. فرض کنید G' یک زیرمجموعه‌ی ضربی از G باشد و $G'(\Sigma)$ در $G(\Sigma)$ به طور وجودی بسته باشد. در این صورت $G \cap \mathbb{F}(G') = G'$. همچنین $\mathbb{F}(G)$ یک توسیع منظم از $\mathbb{F}(G')$ است.

اثبات. فرض کنید $g \in G \cap \mathbb{F}(G')$. بنابراین برای $k_1, \ldots k_n, l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{Z}$ و $h_1, \ldots, h_n \in G'$ داریم

$$g = \frac{k_1 h_1 + \ldots + k_n h_n}{l_1 h_1 + \ldots + l_n h_n} \quad (n \geqslant 1)$$

به طوری که $l_1 h_1 + \ldots + l_n h_n \neq 0$. این عبارت برای g نتیجه می‌دهد

$$G(\Sigma) \models \Sigma_{k,-l}(h_1, \ldots, h_n, gh_1, \ldots, gh_n)$$

به طوری که $k, -l$ با چندتایی $(k_1, \ldots k_n, -l_1, \ldots, -l_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$ مشخص می‌شوند. چون $G(\Sigma)$ در $G'(\Sigma)$ به طور وجودی بسته است، عنصر $g' \in G'$ وجود دارد به طوری که

$$G'(\Sigma) \models \Sigma_{k,-l}(h_1, \ldots, h_n, g'h_1, \ldots, g'h_n).$$

بنابراین $g' = g$. در نتیجه

$$G \cap \mathbb{F}(G') = G'.$$

حال برای اثبات قسمت دیگر لم فرض کنید $a \in \mathbb{F}(G)$ یک عنصر جبری روی $\mathbb{F}(G')$ باشد. ادعا می کنیم $a \in \mathbb{F}(G')$. برای اثبات ادعا، طبق فرض $a \in \mathbb{F}(G)$ یک عنصر جبری روی $\mathbb{F}(G')$ است، پس a ریشه‌ی یک چند جمله‌ای باضرایب در $\mathbb{F}(G')$ است. برای a یک چند جمله‌ای مینیمال روی $\mathbb{F}(G')$ وجود دارد و با $f(X)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $f(X) = X^m + c_1 X^{m-1} + \ldots + c_m$ به طوری که $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{F}(G')$. همچنین

$$c_i = \frac{k_{i1} h_1 + \ldots + k_{in} h_n}{k_1 h_1 + \ldots + k_n h_n} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

به طوری که $(n \geqslant 1)$ و $k_1, \ldots k_n, k_i 1, \ldots, k_i n \in \mathbb{Z}$ و $h_1, \ldots, h_n \in G'$ و $k_1 h_1 + \ldots + k_n h_n \neq 0$. اکنون با انتخاب n به اندازه کافی بزرگ می‌توان فرض کرد

$$a = \frac{l'_1 h_1 + \ldots + l'_n h_n}{l_1 g_1 + \ldots + l_n g_n}.$$

به طوری که $l_1, \ldots, l_n, l'_1, \ldots, l'_n \in \mathbb{Z}$ و $g_1, \ldots, g_n \in G$ و $l_1 g_1 + \ldots + l_n g_n \neq 0$. حال با جایگزاری در تساوی $a^m + c_1 a^{m-1} + \ldots + c_m = 0$ عبارت زیر را داریم.

$$G(\Sigma) \models \theta(g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n)$$

از آنجایی که $\theta(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ یک $L_m(\Sigma)$فرمول اتمی است ، عناصر $g_1, \ldots, g_n \in G'$ موجودند به طوری که

$$G'(\Sigma) \models \neg\Sigma(g'_1, \ldots, g'_n) \wedge \theta(g'_1, \ldots, g'_n, h_1, \ldots, h_n)$$

پس عنصر

$$a' = \frac{l'_1 g'_1 + \ldots + l'_n g'_n}{l_1 g'_1 + \ldots + l_n g'_n}.$$

در $\mathbb{F}(G')$ موجود است به طوری که $a'^m + c_1 a'^{m-1} + \ldots + c_m = 0$. بنابراین $m = 1$، $a' = a$. در اثبات فوق مشخصه‌ی میدان K، در نظر گرفته شده است. حال فرض کنید K دارای مشخصه‌ی $p > 0$ است. میدانی که در تمام میدان‌های بامشخصه p، می‌نشیند $\mathbb{F}_p$ است. بنابراین $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$. طبق تعریف گسترش منظم، کافیست نشان دهیم زیر میدانهای $\mathbb{F}(G)^p$،$\mathbb{F}(G')$ از $\mathbb{F}(G)$ روی $\mathbb{F}(G')^p$ از لحاظ خطی جدا هستند. فرض کنید $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{F}(G)$ روی $\mathbb{F}(G)^p$ مستقل خطی باشند. پس $a_1^p c_1 + \ldots + a_n^p c_n = 0$ که $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}(G)$ ناصفر هستند و این برای به دست آوردن عناصر ناصفر $a'_1, \ldots, a'_n \in \mathbb{F}(G)'$ که $a'^p_1 c_1 + \ldots + a'^p_n c_n = 0$ کافی است. □

۴.۳ سامانه رفت و برگشتی

تعریف ۳-۱۶. فرض کنید G نسبت به K کوچک و κ یک کاردینال ناشمارا باشد. ساختار κاشباع (K, G) را در نظر بگیرید. منظور از $\mathrm{Sub}(K, G)$، گردایه‌ای از $L(U)$ ساختارهای (K', G') است به طوری که K' زیر میدان بسته جبری از K با سایز کمتر از κ و G' یک زیرمجموعه‌ی ضربی کوچک نسبت به K' است و $G' \subseteq G$ و $G'(\Sigma) \preceq G(\Sigma)$. همچنین K' و $\mathbb{F}(G)$ روی $\mathbb{F}(G)'$ آزاد هستند.

یک عنصر $(K', G') \in \mathrm{Sub}(K, G)$ را در نظر بگیرید طبق لم (۳-۱۵) ، میدان $\mathbb{F}(G)$ یک توسیع منظم از میدان $\mathbb{F}(G)'$ است. بنابراین طبق لم (۱-۲۰) K و $\mathbb{F}(G)$ روی $\mathbb{F}(G)'$ از لحاظ خطی جدا هستند. در نتیجه بنابر قسمت دیگر لم (۳-۱۵) داریم $(K', G') \subseteq (K, G)$. حال فرض کنید L یک میدان بسته‌ی جبری دیگر و H یک زیرمجموعه‌ی ضربی کوچک نسبت به L باشد، به طور مشابه $\mathrm{Sub}(L, H)$ برای ساختار κاشباع (L, H) قابل تعریف است. اکنون I را مجموعه‌ی تمام ایزومرفیسم‌های بین $L(U)$ ساختارهای (K', G') و (L', H') می نامیم به طوری که $(K', G') \in \mathrm{Sub}(K, G)$ و $(L', H') \in \mathrm{Sub}(L, H)$. (البته ممکن است $I = \varnothing$).

یکی از ویژگی های مهم مجموعه‌ی I که در اثبات قضایای این فصل موثر است در لم زیر بیان شده است.

لم ۳-۱۷. مجموعه‌ی I یک سامانه‌ی رفت و برگشتی است.

اثبات. فرض کنید $i : (K', G') \to (L', H')$ یک ایزومرفیسم در مجموعه‌ی I باشد. فرض کنید $\alpha \in K \setminus K'$. هدف پیدا کردن یک ایزومرفیسم i' در I است که $i \subseteq i'$ و $\alpha \in Dom(i')$. فرض کنیم K, L دارای میدان اول $\mathbb{F}$ باشند.
حالت های زیر را داریم

حالت اول: اگر $\alpha \in G$. یک زیر گروه ضربی $G'' \subseteq G$ با سایز کمتر از κ را در نظر بگیرید به طوری که $G' \cup \{\alpha\} \subseteq G''$ و $G''(\Sigma) \preceq G(\Sigma)$. در این صورت $K'(G'')$ و $\mathbb{F}(G)$ روی $\mathbb{F}(G'')$ از لحاظ خطی جدا هستند. قرار دهید $K'' = K'(G'')^{ac}$، بنابراین $(K'', G'') \in Sub(K, G)$. از آن‌جایی که $H(\Sigma)$ یک ساختار κاشباع است، ایزومرفیسم $i \restriction G'$ قابل گسترش به ایزومرفیسم $i_1 : G''(\Sigma) \to H''(\Sigma)$ که H'' یک زیر گروه ضربی از H است به طوری که $H' \subseteq H''$ و $H''(\Sigma) \preceq G(\Sigma)$. بنابراین ایزومرفیسم قابل گسترش به یک ایزومرفیسم میدانی $i'_1 : \mathbb{F}(G'') \to \mathbb{F}(H'')$ است، به علاوه چون K'' و $\mathbb{F}(G)$ روی $\mathbb{F}(G'')$ از لحاظ خطی جدا هستند، ایزومرفیسم قابل گسترش به یک ایزومرفیسم میدانی $i''_1 : K'' \to L'' := L'(H'')^{ac}$ است که $i''_1 \in I$.

حالت دوم: فرض کنید $\alpha \in K'(G)^{ac}$. در این صورت عناصر $g_1, \dots g_n \in G$ را در نظر بگیرید به طوری که $\alpha \in K'(g_1, \dots g_n)^{ac}$. با تکرار روند بالا در n مرحله، می‌توان عناصر $c_1, \dots c_n \in H$ را به گونه‌ای پیدا کرد که ایزومرفیسم i به ایزومرفیسم $j : (K'(g_1, \dots g_n), G'(g_1, \dots g_n)) \to (L'(c_1, \dots c_n), H'(c_1, \dots c_n))$ گسترش یابد و $j \in \Gamma$ و $\alpha \in Dom(j)$.

حالت سوم: فرض کنید $\alpha \notin K'(G)^{ac}$. بنابراین طبق قسمت دوم از لم ۳-۷ $L'(H)^{ac}$ کوچک است. پس $L'(H)^{ac} \neq L$. بنابراین می‌توان عنصر $\beta \in L \setminus L'(H)^{ac}$ را به گونه‌ای پیدا کرد که $(L'(\beta)^{ac}, H') \in \mathrm{Sub}(L, H)$. همچنین ایزومرفیسم i را به یک ایزومرفیسم میدانی $j : K'(\alpha)^{ac} \to L'(\beta)^{ac}$ گسترش داد به طوری که $j \in \Gamma$ و $j(\alpha) = \beta$. □

اکنون مباحث زیر را تحت عنوان نتایجی از سامانه‌ی رفت و برگشتی بالا بیان و اثبات می‌کنیم.

نتیجه ۳-۱۸. فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری و G کوچک باشد. اگر $G(\Sigma)$ یک $L_m(\Sigma)$ساختار ωپایدار باشد، آن‌گاه (K, G) یک $L(U)$ ساختار ωپایدار است.

اثبات. فرض کنید (K, G) یک ساختار $\aleph_1$اشباع و (K', G') یک زیرساختار مقدماتی و شمارا از (K, G) باشد. کافی‌است نشان دهیم مجموعه‌ی تمام تایپ‌های یک متغیره روی K' شمارا است. یعنی مجموعه‌ی $\{\mathrm{tp}(\frac{a}{K'}) : a \in (K, G)\}$ شمارا است. طبق اثبات سامانه‌ی رفت و برگشتی در لم (۳-۱۷) هر دو عنصر α و β که در $K - K'(G)^{ac}$ باشند، یک ایزومرفیسم موجود است به طوری که α را به β ببرد. یعنی تمام این عناصر هم‌تایپ هستند. برای عناصری که در $K'(G)^{ac}$ قرار دارند نیز تعداد تایپ‌ها شمارا است زیرا فرض کنید $\alpha \in K'(G)^{ac}$ بنابراین عناصر $g_1, \dots, g_n \in G$ موجودند به طوری که $\alpha \in K'(g_1, \dots, g_n)^{ac}$. با توجه به اثبات سامانه رفت و برگشتی تایپ α روی K' در ساختار (K, G) توسط تایپ $g_1, \dots, g_n$ در $G(\Sigma)$ روی $G'(\Sigma)$ با چندجمله‌ای $P(X_1, \dots, X_n, Y) \in K'[X_1, \dots, X_n, Y]$ معین می‌شود به طوری که $P(g_1, \dots, g_n, Y) \in K'(g_1, \dots, g_n,)[Y]$ یک چندجمله‌ای تحویل ناپذیر است و $P(g_1, \dots, g_n, \alpha) = 0$ بنابراین تایپ هر عنصر با یک چندجمله‌ای تحویل ناپذیر مشخص می‌شود. از آن‌جایی که تعداد چندجمله‌ای‌ها شمارا است، تعداد تایپ‌ها نیز شمارا می‌شود. در واقع عناصری که ریشه‌ی یک چندجمله‌ای هستند هم تایپ‌اند. □

نتیجه ۳-۱۹. فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری و G کوچک باشد. اگر $G(\Sigma)$ یک $L_m(\Sigma)$ساختار فوق پایدار باشد، آن‌گاه (K, G) یک $L(U)$ ساختار فوق پایدار است.

نتیجه ۳-۲۰. فرض کنید G نسبت به K کوچک و K' زیر میدان بسته‌ی جبری از K و G' یک زیرمجموعه‌ی ضربی از K' باشد به طوری که $G' \subseteq G$ و $G(\Sigma) \preceq G'(\Sigma)$ و K' و $\mathbb{F}(G)$ روی $\mathbb{F}(G)'$ آزاد باشد در این صورت $(K', G') \preceq (K, G)$

اثبات. برای کاردینال ناشمارای $\kappa > |K'|$، گسترش مقدماتی κاشباع (L, H) از (K', G') را در نظر بگیرید. اولا $(K', G') \in sub(L, H)$. همچنین (K, G) را می‌توان κاشباع فرض کرد. پس $(K', G') \in sub(K, G)$. از طرفی

نگاشت همانی روی K') به مجموعه‌ی I تعلق دارد، و چون (L,H)و (K,G) روی K' هم ارز مقدماتی هستند پس $(K',G') \preceq (K,G)$ □

۵.۳ حذف سور نسبی

فرض کنید $ACF(m)$ $L(U)$ تئوری‌ایی باشد که ساختارهای (K,G) مدل‌هایی برای این تئوری باشند به طوری که K یک میدان بسته‌ی جبری و G یک مجموعه‌ی ضربی کوچک نسبت به K است. نشان می‌دهیم تئوری $ACF(m)$ حذف سور می‌پذیرد. بدین منظور فرض کنید برای هر $k \in \mathbb{Z}^n$ که $n > 0$. یک اصل متناظر با نماد رابطه‌ای nموضعی Σ_k را به فرم زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall y(\Sigma_k(Y) \longleftrightarrow U(y) \wedge k_1 y_1 + \ldots + k_n y_n = 0).$$

با اضافه کردن این اصول به تئوری $ACF(m)$، آن را به یک $L(U,\Sigma)$تئوری $ACF(m,\Sigma)$ گسترش می‌دهیم به طوری که $y = (y_1,\ldots,y_n)$ یک چند تایی از متغیرها و $U(y)$ فرمول $U(y_1) \wedge \ldots \wedge U(y_n)$ است. بنابراین می‌توان هرمدل (K,G) از $ACF(m)$، به طور یکتا به مدلی از تئوری $ACF(m,\Sigma)$ گسترش داد. این گسترش را همچنان با (K,G) نمایش می‌دهیم اگرچه نمایش درست آن به صورت $(K,G(\Sigma))$ می‌باشد. توجه داریم که زبان $L(U,\Sigma)$ شامل زبان $L_m(\Sigma)$ است. با قرار دادن محدودیت U روی $L_m(\Sigma)$فرمول θ، می توان به صورت استقرایی زیر $L(U,\Sigma)$فرمول θ_U را تعریف کرد.

- اگر θ یک فرمول اتمی باشد، آن‌گاه $\theta_U := \theta$،
- اگر $\theta = \theta' \wedge \theta''$، آن‌گاه $\theta_U := \wedge\theta''$،
- اگر $\theta = \theta' \vee \theta''$، آن‌گاه $\theta_U := \theta'_U \vee \theta''$،
- اگر $\theta = \exists x\theta'$، آن‌گاه $\theta_U := \exists x(U(x) \wedge \theta'_U$،
- اگر $\theta = \forall x\theta'$، آن‌گاه $\theta_U := \forall x(U(x) \to \theta'_U)$.

توجه ۳-۲۱. برای یک $L_m(\Sigma)$فرمول $\theta(y)$ با $(y = y_1,\ldots,y_n)$، یک مدل (K,G) از $ACF(m,\Sigma)$ و $g \in G^n$ موجود است به طوری که

$$G(\Sigma) \models \theta(g) \Leftrightarrow (K,G) \models \theta_U(g).$$

تعریف ۳-۲۲. فرض کنید $x = (x_1,\ldots,x_n)$ یک چندتایی از متغیرهای مجزا باشد. منظور از یک فرمول خاص در x، یک $L(U,\Sigma)$فرمول $\eta(x)$ است که به شکل زیر تعریف می شود

$$\exists y(U(y) \wedge \theta_U(y) \wedge \phi(x,y)).$$

به ازای بعضی $L_m(\Sigma)$فرمول $\theta(y)$ و Lفرمول $\phi(x,y)$، که $(y = y_1,\ldots,y_n)$.

قضیه ۳-۲۳. هر $L(U,\Sigma)$فرمول $\psi(x)$ در $ACF(m,\Sigma)$ با یک ترکیب بولی از فرمول‌های خاص در x معادل است.

اثبات. فرض کنید (K,G) و (L,H) دو مدل $\aleph_1$اشباع دلخواه از تئوری $ACF(m,\Sigma)$ باشند.

فرض کنید $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in K^m$ و $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_m)\in L^m$ به ترتیب در ساختارهای (K,G) و (L,H) در فرمول‌های خاصی در x صدق کنند. بنابراین بدون کم شدن از کلیت فرض کنید دو میدان K و L دارای مشخصه‌ی یکسان و میدان اول $\mathbb{F}$ هستند. کافی است نشان دهیم

$$\mathrm{tp}_{(K,G)}(\alpha)=\mathrm{tp}_{(L,H)}(\beta).$$

فرض کنید درجه‌ی تعالی $\mathbb{F}(G)(\alpha)$ روی $\mathbb{F}(G)$، برابر r باشد. فرض کنید عناصر $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ روی $\mathbb{F}(G)$ مستقل جبری باشند، ادعا می‌کنیم درجه تعالی $\mathbb{F}(H)(\beta)$ روی $\mathbb{F}(H)$ برابر r است و عناصر $\beta_1,\dots,\beta_r$ روی $\mathbb{F}(H)$ مستقل جبری هستند. برای اثبات ادعا به برهان خلف فرض کنید عناصر $\beta_1,\dots,\beta_r$ روی $\mathbb{F}(H)$ مستقل جبری نیستند، پس $\beta_r\in\mathbb{F}(H)(\beta_1,\dots,\beta_{r-1})^{ac}$. آن‌گاه یک Lفرمول $(\varphi(x_1,\dots,x_r,y)$ که $y=(y_1,\dots,y_n)$ و یک $h\in H^n$ و $N\in\mathbb{N}$ داریم به طوری که

$$L\models\varphi(\beta_1,\dots,\beta_r,h)\wedge\exists^{\leq N}x_r\varphi(\beta_1,\dots,\beta_{r-1},x_r,h);$$

بنابراین

$$(L,H)\models\exists y(U(y)\wedge\varphi(\beta_1,\dots,\beta_r,y)\wedge\exists^{\leq N}x_r\varphi(\beta_1,\dots,\beta_{r-1},x_r,y)).$$

پس در نتیجه طبق فرض داریم

$$(K,G)\models\exists y(U(y)\wedge\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_r,y)\wedge\exists^{\leq N}x_r\varphi(\alpha_1,\dots,\alpha_{r-1},x_r,y))$$

که با فرض مستقل جبری بودن $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ روی $\mathbb{F}(G)$ در تناقض است. در نتیجه ادعای مطرح شده برقرار است.

زیرمجموعه‌ی ضربی $G'\subseteq G$ را در نظر بگیرید به طوری که $G(\Sigma)\preceq G'(\Sigma)$ و درجه تعالی $\mathbb{F}(G)'(\alpha)$ روی $\mathbb{F}(G)'$ برابر r باشد. فرض کنید $g=(g_0,g_1,g_2,\dots)$ شمارشی از G' و $y=(y_0,y_1,y_2,\dots)$ یک لیست مجزا از متغیرها باشد. توجه کنید اگر $L_M(\Sigma)$فرمول‌های $\theta_1(y),\dots,\theta_k(y)$، و Lفرمول‌های $\varphi_1(x,y),\dots\varphi_k(x,y)$ موجود باشند به طوری که $G(\Sigma)\models\theta_j(g)$ و $K\models\varphi_j(\alpha,g)$ برای $j=1,\dots,k$، آن‌گاه

$$(K,G)\models\exists y(U(y)\wedge\theta_U(y)\wedge\varphi(\alpha,y))$$

که

$$\theta(y):=\bigwedge_j\theta_j(y)\quad\varphi(x,y):=\bigwedge_j\varphi_j(x,y);$$

بنابراین $(L,H)\models\exists y(U(y)\wedge\theta_U(y)\wedge\varphi(\beta,y))$. پس یک yتایپ جزئی در ساختار (L,H) روی β است و شامل فرمول‌های $U_{(y_i)}$ برای $i=1,2,\dots,$ وفرمول‌های $\theta U(y)$ است به طوری که $G(\Sigma)\models\theta(g)$ که $\theta(y)$

یک $L_m(\Sigma)$فرمول است. همچنین L فرمول‌های $\varphi(\beta, y)$; به طوری که $(K, G) \models \varphi(\alpha, g)$. فرض کنید $h = (h_0, h_1, \ldots)$ عنصری است که yتایپ را در (L, H) برآورده می‌کند. بنابراین یک نگاشت مقدماتی جزئی بین $H(\Sigma)$ و $G(\Sigma)$ وجود دارد که g_i را به h_i می‌برد. قرار دهید $H' := \{h_0, h_1, \ldots\}$. آن‌گاه H' یک زیرمجموعه‌ی ضربی از H است به طوری که $H'(\Sigma) \preceq H(\Sigma)$ و یک ایزومرفیسم میدانی $\iota : \mathbb{F}(G)'(\alpha) \to \mathbb{F}(H)'(\beta)$ داریم که هر g_i را به یک h_i وهر α_j را به یک β_j می‌برد. اکنون قرار دهید $K' = \mathbb{F}(G)'(\alpha)^{ac}$ و $L' = \mathbb{F}(H)'(\beta)^{ac}$ آن‌گاه $(K', G') \in Sub(K, G)$ و $(L', H') \in Sub(L, H)$. بنابراین ایزومرفیسم ι به یک ایزومرفیسم $\iota' : (K', G') \to (L', H')$ گسترش می‌یابد که α را به β می‌برد و این ایزومرفیسم متعلق به مجموعه‌ی I است. □

۶.۳ مجموعه‌های ضربی با یک ساختار اضافه

تمام موارد گفته شده در بخش قبلی در این بخش زمانی که مجموعه‌های ضربی به یک ساختار اضافی مجهز شده باشند برقرار است. برای بیان دقیق‌تر این موضوع فرض کنید زبان L_m را تنها با اضافه کردن نمادهای ثابت و نمادهای رابطه‌ای به زبان L_m^* گسترش دهیم. همچنین فرض کنید همه‌ی نمادهای $L_m^* \setminus L_m$ خارج از زبان $L(U, \Sigma)$ هستند.

فرض کنید نیم‌گروه ضربی G را با تعبیر روابط و ثوابت به یک L_m^*ساختار G^* گسترش دهیم. همچنین فرض کنید $L^*(U)$ زبانی متشکل از زبان $L(U)$ و نمادهای $L_m^* \setminus L_m$ است و (K, G^*) یک $L^*(U)$ساختار باشد. اکنون زبان $L_m^*(\Sigma)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$L_m^*(\Sigma) = L_m^* \cup \{\Sigma_k : k \in \mathbb{Z}^n, n = 1, 2, \ldots\}.$$

همانند آنچه در بخش قبل مورد بررسی قرار گرفت، نیم گروه ضربی G^* را با تعبیر روابط

$$\{(g_1, \ldots, g_n) \in G^{*n} : k_1 g_1 + \ldots + k_n g_n = 0\}$$

روی G^* را به یک $L_m^*(\Sigma)$ساختار $G(\Sigma)$ گسترش می‌دهیم.

با استدلال های مشابه در بخش قبلی در نتیجه‌ی (۳-۱۲) و گزاره‌ی (۳-۱۳) نتایج زیر را داریم.

نتیجه ۳-۲۴. فرض کنید K و L دو میدان بسته‌ی جبری باشند. اگر G^* نسبت به K کوچک باشد و H^* یک مجموعه‌ی ضربی کوچک در L باشد آن‌گاه

$$(K, G^*) \equiv (L, H^*) \Longleftrightarrow G^*(\Sigma) \equiv H^*(\Sigma).$$

به بیان دیگر اگر G^* نسبت به K کوچک باشد، آن‌گاه تئوری کامل (K, G^*)، توسط تئوری کامل $G^*(\Sigma)$ مشخص می‌شود.

گزاره ۳-۲۵. فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری و G^* یک مجموعه‌ی ضربی در K باشد. هر زیرمجموعه‌ی تعریف‌پذیر از G^n در $L^*(U)$ساختار (K, G^*)، در $G^*(\Sigma)$ تعریف‌پذیر است.

حال زبان

$$L^*(U,\Sigma) = L^*(U) \cup \{\Sigma_k : k \in \mathbb{Z}^n, n = ۱, ۲, \ldots\}$$

و تئوری $ACF^*(m,\Sigma)$ را در این زبان در نظر بگیرید. ساختارهای $(K, G^*(\Sigma))$ مدل‌هایی برای این تئوری هستند که G یک مجموعه‌ی ضربی کوچک نسبت به میدان بسته‌ی جبری K است. نیم گروه ضربی G را به یک L^*_mساختار G^* گسترش می‌دهیم. همچنین مانند بخش قبلی با قرار دادن محدودیت U روی $L^*_m(\Sigma)$فرمول θ، می‌توان $L^*(U,\Sigma)$فرمول θ_U را صورت استقرایی تعریف می‌شود.

فرض کنید $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ یک چندتایی از متغیرهای مجزا باشد. منظور از یک فرمول خاص در x، یک $L^*(U,\Sigma)$فرمول $\eta(x)$ است که به شکل زیر تعریف می شود.

$$\exists y(U(y) \wedge \theta_U(y) \wedge \phi(x,y)).$$

به طوری که $\theta(y)$ یک $L^*_m(\Sigma)$فرمول و $\phi(x,y)$ یک Lفرمول است و $y = (y_۱, \ldots, y_n)$.

در انتهای این بخش تعمیمی از قضیه‌ی (۳-۲۳) را بیان می‌کنیم.

قضیه ۳-۲۶. هر $L(U,\Sigma)$فرمول $\psi(x)$ در $ACF(m,\Sigma)$ با یک ترکیب بولی از فرمول‌های خاص در x معادل است.

۷.۳ یک تئوری حذف برای عمل‌های گروه

در این بخش برخی از حقایق اساسی درباره‌ی عمل گروه را اثبات می‌کنیم و با استفاده از این حقایق، در بخش آینده نشان می‌دهیم ویژگی موردل-لنگ [۶] از ویژگی مان [۷] نتیجه می‌شود.

در سرتاسر این فصل G را یک گروه ضربی با همانی ۱ و g را یک عضو دلخواه از G در نظر می‌گیریم (لزوماً G یک گروه جابه‌جایی نیست.)

تعریف ۳-۲۷. مجموعه‌ی ناتهی P به همراه عمل [۸]

$$G \times P \to P$$
$$(g,p) \mapsto gp$$

را یک Gمجموعه [۹] گوییم.

زبان $\mathcal{L}_G = \{g : g \in G\}$ را زبان Gمجموعه‌ها گوییم که در این زبان برای هر عنصر $g \in G$، یک نماد تابعی یک

[۶] Mordell-Lang property
[۷] Mann property
[۸] action
[۹] G-set

موضعی g موجود است . فرض کنید $\mathrm{T_G}$ تئوری Gمجموعه‌ها در زبان $\mathcal{L}_G$ به شکل زیر تعریف شود

$$\begin{cases} \exists x \quad x = x \\ \forall x \quad 1(x) = x \\ \forall x \quad g_1(g_2(x)) = g_1 g_2(x) \end{cases}$$

در این‌صورت مدل‌های این تئوری Gمجموعه‌های P هستند که در آن هر نماد تابعی g به صورت یک نگاشت دوسویی $g^P : p \to pg$ تعبیر می‌شود. فرض کنید F یک زیر گروه متناهیاً تولید شده از G باشد، برای هر $F \subseteq G$، یک نماد رابطه‌ای (صفر) موضعی S_F به زبان $\mathcal{L}_G$ اضافه می‌کنیم و آن را با $\mathcal{L}_G^* = \mathcal{L}_G \cup \{S_F : F \subseteq G\}$ نمایش می‌دهیم. همچنین برای هر زیرگروه F که در بالا تعریف کردیم یک اصل

$$S_F \leftrightarrow \exists y(f_1 y = \ldots = f_n y = y)$$

که $f_1, \ldots, f_n \in G$ مولدهای F هستند، به تئوری $\mathrm{T_G}$ اضافه می‌کنیم یعنی

$$\mathrm{T_G} \cup \{\mathrm{S_F} \leftrightarrow \exists \mathrm{y}(\mathrm{f_1 y} = \ldots = \mathrm{f_n y} = \mathrm{y}) : \mathrm{F} \subseteq \mathrm{G}\}$$

و آن را با $\mathrm{T_G^*}$ نمایش می‌دهیم.

در این بخش $x_1, \ldots, x_n, y$ متغیرهای مجزا در نظر گرفته شده‌اند و $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

لم ۳-۲۸. فرض کنید $\phi_1(x,y), \ldots, \phi_k(x,y)$ فرمول‌های اتمی در زبان $\mathcal{L}_G^*$ باشند. آن‌گاه فرمول‌های اتمی $\psi_1(x), \ldots, \psi_l(x)$ در این زبان موجودند به طوری که

$$\mathrm{T_G^*} \models \exists \mathrm{y}(\phi_1(\mathrm{x,y}) \wedge \ldots \wedge \phi_\mathrm{k}(\mathrm{x,y})) \longleftrightarrow \psi_1(\mathrm{x}) \wedge \ldots \wedge \psi_\mathrm{l}(\mathrm{x}).$$

اثبات. از آنجایی که هر فرمول اتمی $g_1 u_1 = g_2 u_2$ با متغیرهای u_1 و u_2 برابر است با $u_1 = g_1^{-1} g_2 u_2$ وچون G یک گروه است، $u_1 = g u_2$. بنابراین فرض کنید هر اتم $\phi_i(x,y)$ شامل یک متغیر y باشد. از طرفی هر $\phi_i(x,y)$ به فرم $y = gy$ یا $y = gx_j$ که $j \in \{1, \ldots, m\}$. اگر $\phi_1(x,y)$ به صورت $y = gx_j$ باشد آن‌گاه داریم

$$\exists y(\phi_1(x,y) \wedge \ldots \wedge \phi_k(x,y)) \longleftrightarrow \phi_2(x, gx_j) \wedge \ldots \wedge \phi_l(x, gx_j).$$

اگر $\phi_1(x,y) := y = g_i y$ برای $i = 1, \ldots, k$، آن‌گاه

$$\exists y(\phi_1(x,y) \wedge \ldots \wedge \phi_k(x,y)) \longleftrightarrow S_F$$

که $F \subseteq G$ یک زیر گروه تولید شده توسط $g_1, \ldots, g_k$ است. □

بنابراین هر فرمول وجودی مثبت $\varphi(x)$ در زبان L_G^* با یک فرمول بدون سور مثبت $\varphi'(x)$ در این زبان معادل است.

تعریف ۳-۲۹. یک Gمجموعه‌ی P را آزاد گوییم هرگاه برای هر $g \neq ۱$ و هر $p \in P$ داشته باشیم $gp \neq p$.

تئوری Gمجموعه‌های آزاد، یعنی $\mathrm{T_G} \cup \{\forall \mathrm{x} \quad \mathrm{g.x} \neq \mathrm{x} : \mathrm{g} \neq 1\}$ را با $\mathrm{T_{fG}}$ نمایش می‌دهیم.
نتیجه‌ی زیر نقش مهمی در اثبات قضیه‌ی ۳-۴۳ در بخش آینده دارد.

نتیجه ۳-۳۰. برای هر فرمول وجودی مثبت $\varphi(x)$ در زبان $\mathcal{L}_G$ یک فرمول بدون سور مثبت $\varphi'(x)$ در این زبان موجود است به طوری که

$$\mathrm{T_{fG}} \models \varphi(\mathrm{x}) \leftrightarrow \varphi'(\mathrm{x}).$$

اثبات. همانند اثبات در لم ۳-۲۸ با بررسی فرمول‌ها در زبان $\mathcal{L}_G$ یعنی تنها در حالتی که $\phi_۱(x,y)$ به صورت $y = gx_j$ باشد حکم برقرار است. □

فرض کنید فرمول $\varphi(x)$، به صورت عطف فرمول‌های اتمی باشد و در هر Gمجموعه‌ی P، یک زیرمجموعه‌ی خاصی از P^m را تعریف کند. اگر تناقض ($\perp$) بین اتم‌های فرمول $\varphi(x)$ موجود باشد آن‌گاه

$$\mathrm{T_G} \models \neg\varphi(\mathrm{x})$$

بنابراین فرمول $\varphi(x)$ در هر Gمجموعه‌ی P مجموعه‌ی تهی را تعریف می‌کند. فرض کنید تناقض بین اتم‌های فرمول $\varphi(x)$ موجود نباشد در نتیجه

$$\mathrm{T_G} \models \varphi(\mathrm{x}) \leftrightarrow \varphi'(\mathrm{x})$$

که $\varphi'(x)$، عطفی از فرمول‌های به صورت زیر است:

$$gx_i = g'x_j \quad ۱ \leq i,j \leq m \text{ برای}$$

فرض کنید $\mathcal{G}$ یک گراف با مجموعه‌ی رئوس $\{۱,\ldots,m\}$ باشد. می‌گوییم بین راس i و j یالی وجود دارد اگر و تنها اگر فرمول $\varphi'(x)$ شامل یک اتم به صورت $gx_i = g'x_j$ باشد. فرض کنید $I(۱),\ldots,I(m)$ مولفه‌های همبندی مجزا از مجموعه‌ی رئوس این گراف باشند، در این صورت $I(۱),\ldots,I(m)$ مجموعه‌ی $\{۱,\ldots,m\}$ را افراز می‌کنند و داریم

$$\mathrm{T_G} \models \phi(\mathrm{x}) \leftrightarrow \bigwedge_{\lambda=1}^{l} [\bigwedge_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}(\lambda)} \mathrm{x_i} = \mathrm{g_i x_{i(\lambda)}}] \tag{۳-۱}$$

که برای هر λ، $i(\lambda) \in I(\lambda)$. بنابراین در هر مولفه‌ی همبندی $I(\lambda)$، می‌توان هر متغیر x_i را بر حسب یک متغیر مشخص $x_i(\lambda)$ در همان مولفه‌ی همبندی نوشت.

مثال ۳-۳۱. فرض کنید $m \geq ۷$ و فرمول $\varphi'(x)$ شامل اتم‌های $x_۱ = gx_۲$ و $x_۲ = g'x_۷$ و $x_۷ = g''x_۱$ باشد. بنابراین مجموعه‌ی $\{۱,۲,۷\}$، یک مولفه‌ی همبندی ازافراز مجموعه‌ی رئوس $\{۱,\ldots,m\}$ است که در رابطه‌ی (۳-۱) صدق می کند. حال $x_۱$ را به عنوان عنصر متمایز در مولفه‌ی همبندی مذکور در نظر بگیرید. داریم

$$x_۱ = (gg'g'')x_۱ \wedge x_۲ = (g'g'')x_۱ \wedge x_۷ = g''x_۱$$

اگر $gg'g'' \neq ۱$ آن‌گاه تئوری Gمجموعه‌های آزاد، $\neg\phi(X)$ را اثبات می‌کند.

با توجه به رابطه‌ی (۳-۱) هر فرمول $\phi(X)$ در Gمجموعه‌ی آزاد P، حاصل‌ضرب دکارتی زیر را تعریف می‌کند

$$P(۱) \times \ldots \times P(l) \subseteq P^m$$

به طوری که

$$P(\lambda) := \{(p_i) \in P^{I(\lambda)} \mid p_i = g_i p_{i(\lambda)} \quad i \in I(\lambda) \text{ برای تمام } \}$$

با در نظر گرفتن

$$P^m = P^{\{۱,\ldots,m\}} = P^{I(۱)} \times \ldots \times P^{I(l)}.$$

- اگر برای یک λ داشته باشیم $g_i(\lambda) \neq ۱$ آن‌گاه فرمول $\phi(x)$ زیرمجموعه‌ی تهی از P^m را در Gمجموعه‌ی آزاد P، تعریف می‌کند .
- اگر برای تمام λها، داشته باشیم $g_i(\lambda) = ۱$ آن‌گاه فرمول $\phi(x)$ زیرمجموعه‌ی ناتهی از P^m را در Gمجموعه‌ی آزاد P، تعریف می‌کند.

اکنون Gمجموعه‌ی آزاد G با عمل (چپ) $(g,h) \to gh$، و برای تعریف‌پذیری با پارامتر در Gمجموعه‌ی G زبان را $\mathcal{L}'_G = \mathcal{L}^*_G \cup \{۱\}$ در نظر بگیرید. توجه دارید که منظور از $\{۱\}$، نماد تابعی تک موضعی ۱ در زبان Gمجموعه‌ها نیست.

نتیجه ۳-۳۲. فرض کنید مجموعه ناتهی $S \subseteq G^m$ توسط عطف فرمول‌های اتمی در زبان $\mathcal{L}'_G$ تعریف شده باشد، آن‌گاه عناصر $g_۱, \ldots, g_m$ و یک مجموعه‌ی $I(۰) \subseteq \{۱, \ldots, m\}$ یک تقسیم‌بندی $\{۱, \ldots, m\}$ $I(۰)$ در مجموعه‌های مجزای $I(۱), \ldots, I(L)$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$S = S(۰) \times S(۱) \times \ldots \times S(L) \subseteq G^{I(۰)} \times G^{I(۱)} \times \ldots G^{I(L)} = G^m$$

قرار می‌دهیم

$$S(۰) = \{(g_i)_{i \in I(۰)}\}$$

یک زیرمجموعه‌ی یک متغیره از $G^{I(۰)}$ است و

$$S(\lambda) = \{(g_i g)_{i \in I(\lambda)} : g \in G\}$$

برای $\lambda = ۱, \ldots, L$، یک زیرمجموعه از $G^{I(\lambda)}$ است.

اگر S یک مجموعه‌ی تک‌عضوی باشد، $I(۰) = \{۱, \ldots, m\}$. در حالی که اگر $S = G^m$ می‌توان $I(۰)$ را مجموعه‌ی تهی در نظر گرفت، و $L = m$ و $I(\lambda) = \{\lambda\}$.

مباحثی که تاکنون مطرح کرده ایم تمام آنچه در فصل آینده مورد نیاز است را مهیا می‌کند، اما برای کامل شدن، تئوری Gمجموعه‌های آزاد نامتناهی را نیز در نظر بگیرید.(اگر G نامتناهی باشد،آن‌گاه تمام Gمجموعه‌های آزاد از G نیز نامتناهی است.) برای هر فرمول‌اتمی $\phi_۱(x,y), \ldots, \phi_k(x,y)$ در زبان $\mathcal{L}_G$ فرمول‌های اتمی $\theta_۱(x), \ldots, \theta_l(x)$ در این زبان موجودند به طوری که

$$\mathrm{T_G} \models \forall \mathrm{y}(\phi_1(\mathrm{x,y}) \vee \ldots \vee \phi_\mathrm{k}(\mathrm{x,y})) \longleftrightarrow \theta_1(\mathrm{x}) \vee \ldots \vee \theta_\mathrm{l}(\mathrm{x}).$$

نتیجه ۳-۳۳. فرض کنید T یک تئوری در زبان Gمجموعه‌های آزاد نامتناهی باشد در این‌صورت برای هر فرمول مثبت $\phi(x)$ در زبان Gمجموعه‌ها، داریم

$$\mathrm{T} \models \phi(\mathrm{x}) \leftrightarrow \phi'(\mathrm{x})$$

که $\phi'(x)$ یک فرمول مثبت بدون سور در این زبان است.

توجه ۳-۳۴. فرض کنید T یک تئوری در زبان Gمجموعه‌های آزاد نامتناهی باشد و $|G| < \kappa$ یک کاردینال نامتناهی باشد، در این صورت هر دو مدل از T با اندازه κ با هم ایزومرف هستند. *(برای هر کاردینال نامتناهی κ، T یک تئوری κجازم است.)* بنابراین T یک تئوری کامل است و در نتیجه در زبان Gمجموعه‌ها حذف سور دارد.

۸.۳ ویژگی مان

تعریف ۳-۳۵. فرض کنید K یک میدان، E یک زیرمیدان از K و G یک زیرگروه دلخواه از $K^\times$ باشد. معادله‌ی خطی زیر را در نظر بگیرید

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a_0. \tag{۳-۲}$$

به طوری که $a_0, \ldots, a_n \in K$ فرض کنید یک چندتایی $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ یک جواب برای معادله *(۳-۲)* در G باشد، بنابراین

$$a_1g_1 + \ldots + a_ng_n = a_0.$$

جواب بالا را ناتباهیده گوییم [۱۰] هرگاه برای هر $\emptyset \neq I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ داشته باشیم

$$\sum_{i \in I} a_ig_i \neq 0.$$

در حالت همگن $(a_0 = 0)$، اگر $(g_1, \ldots, g_n)$ یک جواب از معادله‌ی (۳-۲) باشد در این صورت برای هر $g \in G$، $g(g_1, \ldots, g_n) = (gg_1, \ldots, gg_n)$ نیز یک جواب از معادله‌ی (۳-۲) در G است. بنابراین با توجه به عمل G روی G^n، مجموعه‌ی جواب‌ها و جواب‌های ناتباهیده در G اجتماعی از مدارهای [۱۱] $(gg_1, \ldots, gg_n)$ هستند.

در بخش پیشگفتار فقط حالت ناهمگن $a_0 = 1$ و $a_1, \ldots, a_n$ متعلق به میدان اول $\mathbb{F}$ از K را در نظر گرفته بودیم.

تعریف ۳-۳۶. فرض کنید K یک میدان، E یک زیرمیدان از K و G یک زیرگروه دلخواه از $K^\times$ باشد می‌گوییم G دارای ویژگی مان روی E است، هرگاه هرمعادله به شکل

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1 \quad (n \geq 2, a_1, \ldots, a_n \in E^\times) \tag{۳-۳}$$

دارای تعداد متناهی جواب ناتباهیده در G باشد.

[۱۰] non-degenerate

[۱۱] orbit

تعریف ۳-۳۷. فرض کنید K یک میدان، E یک زیرمیدان از K و G یک زیرگروه دلخواه از $K^\times$ باشد در این صورت هر عضو $(g_1,\ldots,g_n)\in G^n$ را یک جواب مان [۱۲] روی E نامیم هرگاه یک جواب ناتباهیده برای معادله $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=1$ باشد و $a_1,\ldots,a_n\in E^\times$.

در ادامه‌ی فصل نشان می‌دهیم که K روی E ویژگی مان دارد اگر و تنها اگر K روی میدان اول $\mathbb{F}$ ویژگی مان داشته باشد.

معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0 \quad (n\geq 1, a_1,\ldots,a_n\in E^\times).$$

فرض کنید $S\subseteq G^n$ مجموعه‌ی جواب‌ها و S_{nd} مجموعه جواب‌های ناتباهیده‌ی معادله‌ی فوق در G باشند. در این صورت داریم

$$S_{nd}=\bigcup_{(g_1,\ldots,g_{n-1})\in S'}(g_1,\ldots,g_{n-1},1)G\subseteq S$$

به طوری که S' مجموعه‌ی جواب‌های ناتباهیده‌ی معادله‌ی زیر

$$a_1y_1+\ldots+a_{n-1}y_{n-1}=-a_n.$$

در G باشد؛ اگر G دارای ویژگی مان روی E باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی S' متناهی خواهد بود. بنابراین مجموعه جواب‌های ناتباهیده (S_{nd}) در زبان Gمجموعه‌ها توسط $\mathcal{L}_G$فرمول‌های مثبت بدون سور زیر تعریف می‌شود

$$\bigvee_{(g_1,\ldots,g_{n-1})\in S'} x_1=g_1x_n\wedge\ldots\wedge x_{n-1}=g_{n-1}x_n.$$

مجموعه‌ی G را باعمل ضرب از چپ $(g,h)\to gh$ به عنوان Gمجموعه در نظر بگیرید. در ادامه با در نظر گرفتن مجموعه‌ی جواب‌های تباهیده معادله‌ی همگن بالا و با استفاده از مباحث مطرح شده به صورت استقرائی، نتایج زیر را داریم.

نتیجه ۳-۳۸. فرض کنید G دارای ویژگی مان روی E باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی همگن ذکر شده در بالا $(S\subseteq G^n)$ توسط یک $\mathcal{L}_G$فرمول بدون سور مثبت در G قابل تعریف است.

اثبات. فرض کنید یک معادله با n متغیر به صورت زیر داشته باشیم

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0 \quad (n\geq 1, a_1,\ldots,a_n\in E^\times).$$

بنابر آنچه گفته شد مجموعه‌ی جواب‌های ناتباهیده‌ی معادله‌ی فوق توسط یک $\mathcal{L}_G$فرمول بدون سور مثبت در G قابل تعریف است. حال با استقرا روی تعداد متغیرهای معادله‌ی فوق مجموعه‌ی جواب‌های تباهیده نیز توسط $\mathcal{L}_G$فرمول بدون سور مثبت در G قابل تعریف است.

[۱۲] Mann solution

فرض استقرا: مجموعه‌ی جواب‌های یک معادله با تعداد متغیر کمتر از n توسط یک $\mathcal{L}_G$فرمول بدون سور مثبت در G قابل تعریف است. از آنجایی که برای به دست آوردن جواب‌های تباهیده (با صفر شدن یکی از ضرایب) تعداد متغیرها از n کمتر می‌شود. پس بنابر فرض استقرا مجموعه‌ی جواب‌های تباهیده نیز تعریف‌پذیرند. □

نتیجه‌ی زیر اثبات قسمت ۳ به ۱ قضیه‌ی اصلی ۰-۱ است.

نتیجه ۳-۳۹. فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری و G دارای ویژگی مان روی K باشد. اگر مجموعه‌ی $X \subseteq K^n$ در $\mathcal{L}(U)$ ساختار (K, G) تعریف‌پذیر باشد، آن‌گاه $X \cap G^m$ در گروه G تعریف‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید مجموعه‌ی X در ساختار (K, G) تعریف‌پذیر باشد. پس طبق قضیه‌ی (۳-۱۳)، این مجموعه در ساختار $G(\Sigma)$ تعریف‌پذیر است. چون G روی K دارای ویژگی مان است و طبق آنچه گفته شد مجموعه‌ی جواب‌های یک معادله به صورت زیر

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0 \quad (n \geq 1, a_1, \ldots, a_n \in E^\times).$$

در گروه G تعریف‌پذیر است. از طرفی فرمول‌های $G(\Sigma)$ یک مجموعه مانند S (مجموعه‌ی جواب‌های معادله بالا) را تعریف می‌کند. نشان دادیم چنین مجموعه‌ایی در گروه G تعریف‌پذیر است. پس $X \cap G^m$ در گروه G تعریف‌پذیر است. □

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

به طوری که $a_{i,j}, b_i \in E$. منظور از یک جواب از این دستگاه معادلات در G به صورت یک چندتایی $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ است که در معادله‌های دستگاه فوق صدق کند. فرض کنید S مجموعه‌ی جواب‌های این دستگاه معادلات در G باشد.

نتیجه ۳-۴۰. فرض کنید G روی E ویژگی مان داشته باشد، در این صورت $S \subseteq G^n$ در G توسط $\mathcal{L}'_G$فرمول‌های بدون سورمثبت تعریف می‌شود. همچنین در حالتی‌که $b_1 = \ldots = b_m = 0$، می‌توان مجموعه‌ی S را با $\mathcal{L}_G$ فرمول‌های مشابه تعریف کرد.

در ادامه به عکس نتیجه‌ی (۳-۳۸) نیاز داریم، لذا لم زیر را بیان می‌کنیم .

لم ۳-۴۱. فرض کنید $a_1, \ldots, a_n \in K^\times$ و معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1$$

اگر مجموعه جواب‌های این معادله توسط $\mathcal{L}'_G$ فرمول‌های بدون سورمثبت تعریف شود، آن‌گاه معادله‌ی فوق فقط تعداد متناهی جواب ناتباهیده در G دارد.

اثبات. فرض کنید $S \subseteq G^n$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی فوق باشد که توسط عطف فرمول‌های اتمی در زبان $\mathcal{L}'_G$ تعریف شده و بیشتر از یک عضو داشته باشد (بنابراین G نیز بیشتر از یک عنصر دارد). پس کافی است نشان دهیم همه‌ی جواب‌های موجود در S تباهیده هستند. زیرا نشان دادیم مجموعه جواب‌های معادله فوق را می‌توان به صورت فصل متناهی از معادله‌های اتمی نوشت. پس اگر فرمول‌های اتمی که بیش از یک جواب دارند جواب‌های تباهیده‌ی معادله‌ی فوق باشند، در نهایت متناهی تا مجموعه جواب یک عضوی داریم. پس تعداد جواب‌های ناتباهیده متناهی خواهد شد. اکنون چون $S \subseteq G^n$ به صورت فصلی از فرمول‌های اتمی تعریف شده است طبق نتیجه‌ی (۳-۳۲) عناصر $g_1, \ldots, g_m \in G$ و یک زیرمجموعه‌ی $I(0)$ از $\{1, \ldots, m\}$، همچنین یک افراز از $\{1, \ldots, m\} \setminus I(0)$ در مجموعه‌های مجزای $I(1), \ldots, I(L)$ موجود است به طوری که

$$S = S(0) \times S(1) \times \ldots \times S(L) \subseteq G^{I(0)} \times G^{I(1)} \times \ldots G^{I(L)} = G^m$$

که در آن

$$S(0) = \{(g_i)_{i \in I(0)}\}$$

یک زیرمجموعه‌ی یک متغیره از $G^{I(0)}$ است و

$$S(\lambda) = \{(g_i g)_{i \in I(\lambda)} : g \in G\}$$

برای $\lambda = 1, \ldots, L$، یک زیرمجموعه از $G^{I(\lambda)}$ است. از طرفی فرض کردیم S بیشتر از یک عضو دارد، پس $I(0)$ یک زیرمجموعه‌ی سره از $\{1, \ldots, m\}$ است و $l \geq 1$. (زیرا در غیر این‌صورت اگر S یک مجموعه‌ی تک‌عضوی باشد، $I(0) = \{1, \ldots, m\}$) اکنون فرض کنید $(s_1, \ldots, s_n) \in S$، آن‌گاه داریم

$$\sum_{i=1}^{n} a_i s_i = \sum_{i \notin I(1)} a_i s_i + \sum_{i \in I(1)} a_i s_i g = \sum_{i \notin I(1)} a_i s_i + (\sum_{i \in I(1)} a_i s_i) g$$

در اینجا قرار می دهیم $a = \sum_{i \in I(1)} a_i s_i$ بنابراین برای تمام $g \in G$ داریم $a = ag$، پس $a = 0$. در نتیجه مجموعه‌ی جواب $(s_1, \ldots, s_n)$ در S تباهیده است. □

حال با توجه به مطالب مطرح شده می‌توان لم زیر را اثبات کرد.

لم ۳-۴۲. فرض کنید $G \subseteq E^\times$ دارای ویژگی مان روی E باشد، در این صورت G دارای ویژگی مان روی میدان K است.

اثبات. فرض کنید $a_1, \ldots, a_n \in K^\times$ به طوری که $n \geq 1$. بنابر آنچه در فصل‌های قبل گفته شد، می‌توان K را به عنوان یک فضای برداری روی E در نظر گرفت. فرض کنید $b_0, \ldots, b_m$ یک پایه برای زیر فضای خطی

$E + a_1E + \ldots + a_nE$ از K باشند. فرض کنید $b_0 = 1$. پس هر عضو به صورت $a_j = \sum_{i=0}^{m} a_{ij}b_i$ است که $a_{ij} \in E$. در این صورت مجموعه جواب معادله‌ی $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1$ در G دقیقا همان جواب‌های دستگاه معادلات زیر در G است.

$$\begin{aligned} a_{01}x_1 + \ldots + a_{0n}x_n &= 1, \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

بنابراین طبق نتیجه‌ی (۳-۴۰) مجموعه جواب‌های معادله‌ی

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1$$

توسط فرمول‌های بدون سور مثبت در زبان $\mathcal{L}'(G)$ تعریف می‌شوند. از طرفی طبق لم (۳-۴۱) معادله‌ی $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1$ تعداد متناهی جواب ناتباهیده روی G دارد. □

اکنون نکته‌ایی را که در ابتدای این فصل به آن اشاره کردیم را در گزاره‌ی زیر اثبات می‌کنیم.

گزاره ۳-۴۳. فرض کنید G ویژگی مان داشته باشد، در این صورت G روی K دارای ویژگی مان است.

اثبات. بنابر لم قبل کافی است نشان دهیم گروه ضربی G روی $E := \mathbb{F}(G)$ دارای ویژگی مان است. بدین منظور فرض کنید $a_0, a_1, \ldots, a_n \in E^\times$ با در نظر گرفتن معادله‌ی خطی $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a_0$ اگر نشان دهیم S که مجموعه‌ی جواب‌های این معادله در G است، توسط فرمول‌های بدون سور مثبت در زبان $\mathcal{L}'_G$ تعریف می‌شود آن‌گاه طبق لم (۳-۴۱) معادله‌ی فوق تعداد متناهی جواب ناتباهیده دارد. حال با ضرب $a_0, a_1, \ldots, a_n$ در یک عنصر ناصفر به اندازه‌ی کافی بزرگ می‌توان فرض کرد که ضرایب در زیرحلقه‌ی $\mathbb{F}[G] \subseteq E$ قرار دارند. فرض کنید $g_1, \ldots, g_n \in G$ به طوری که $a_j = \sum_{i=1}^{m} f_{ij}g_i$، و $f_{ij} \in \mathbb{F}$ برای $i = 1, \ldots, m$ و $j = 0, \ldots, n$. در این صورت برای تمام $(x_1, \ldots, x_n) \in G^n$،

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) \in S &\iff \sum_i f_{i0}g_i = \sum_i f_{i0}g_ix_1 + \ldots + \sum_i f_{in}g_ix_n \\ &\iff \exists y[(\bigwedge_i y_i = g_i) \wedge (\bigwedge_i y_{i1} = g_ix_1) \wedge \ldots \wedge (\bigwedge_i y_{in} = g_ix_n) \\ &\qquad \wedge \sum_i f_{i0}y_i = \sum_i f_{i1}y_{i1} + \ldots + \sum_i f_{in}y_{in}] \end{aligned}$$

که $y = (y_1, \ldots, y_m, y_{11}, \ldots, y_{m1}, \ldots, y_{mn})$ چندتایی از متغیرهای مجزا است . از طرفی طبق نتیجه‌ی (۳-۳۸) زیرمجموعه‌ای از G^{mn+m} که توسط معادله‌ی زیر تعریف می‌شود

$$\sum_i f_{i0}y_i = \sum_i f_{i1}y_{i1} + \ldots + \sum_i f_{in}y_{in}$$

را می‌توان توسط $\mathcal{L}_G$فرمول‌های مثبت بدون سور در G تعریف کرد. پس در نتیجه طبق لم (۳-۳۰) هرفرمول مثبت وجودی در زبان Gمجموعه‌ها با یک فرمول مثبت بدون سور در زبان $\mathcal{L}'_G$ معادل است. پس مجموعه جواب‌های معادله‌ی فوق توسط فرمول‌های بدون سور مثبت در زبان $\mathcal{L}'_G$ قابل تعریف است. □

نتیجه‌ی زیر نشان می‌دهد که تعریف ویژگی مان به هیچ نوع کران‌داری یکنواخت نیاز ندارد .

نتیجه ۳-۴۴. فرض کنید G دارای ویژگی مان باشد. آن‌گاه برای هر n یک عدد طبیعی $A(n)$ موجود است به طوری که برای هر $a_1, \ldots, a_n$ ناصفر در هر گسترش میدانی از K، معادله‌ی $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1$ دارای حداکثر $A(n)$ تا جواب ناتباهیده است.

اثبات. چون G دارای ویژگی مان است، طبق گزاره‌ی قبل G روی K دارای ویژگی مان است، حال $L(U)$ساختار (K', G') را در نظر بگیرید به طوری که K' یک توسیع میدانی از K و G' یک زیر گروه ضربی از میدان K' باشد. چون اصول مان برای G در ساختار (K', G') صدق می‌کنند. پس G' روی میدان اول K' دارای ویژگی مان است. اکنون ساختارهای $(K', G', (a)_{a\in K})$ را در نظر بگیرید که (K', G') همان ساختار تعریف شده‌ی قبل است. ساختارهای $(K', G', (a)_{a\in K})$ مدل‌هایی برای مجموعه‌اصول موجود که در زبان $L(U) \cup c$ هستند. معادله‌ی $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1$ که ضرایب در میدان K هستند را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم این معادله در ساختار $(K', G', (a_1, \ldots, a_n))$ دارای حداکثر A_n جواب ناتباهیده در G است. یعنی کران‌داری یکنواخت از قضیه‌ی فشردگی نتیجه می‌شود.

اثبات ادعا: (برهان خلف) فرض کنید برای معادله‌ی فوق چنین A_n وجود نداشته باشد. تئوری زیر در نظر بگیرید. این تئوری متناهیاً ارضا پذیر است. طبق قضیه‌ی فشردگی ارضا پذیر است. یعنی مدلی موجود است به طوری که درآن معادله‌ی مفروض بی‌نهایت جوای ناتباهیده دارد که با برقراری ویژگی مان روی G' در تناقض است. □

نشان می‌دهیم که میدان بسته‌ی جبری K روی زیرمیدان E ویژگی مان دارد اگر و تنها اگر روی میدان اول $\mathbb{F}$ ویژگی مان داشته باشد.

با توجه مباحث مورد نیاز در بخش‌های قبلی در این بخش گزاره‌ی اصلی مورد نظر این پایان‌نامه اثبات می‌شود. ابتدا در گزاره‌ی ۳-۴۶ نشان می‌دهیم ویژگی مان، ویژگی موردل-لنگ را نتیجه می‌دهد سپس در گزاره‌ی ۳-۵۰ نشان می‌دهیم ویژگی موردل-لنگ نیز ویژگی مان را نتیجه می‌دهد.

۹.۳ ویژگی مان ،ویژگی موردل-لنگ را نتیجه می‌دهد

فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری است. برای هر nتایی $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}^n$، تابع مشخصه‌ی $\chi_k : (K^\times)^n \to K^\times$ باضابطه‌ی زیر

$$\chi_k(x_1, \ldots, x_n) := x^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

که یک همومرفیسم گروهی ضربی است را در نظر بگیرید.

تعریف ۳-۴۵. برای هر $d \in \mathbb{N}$، منظور از $D(n,d)$ گردایه‌ایی متناهی از زیر گروه‌های $(K^\times)^n$ است که با هسته‌های مشخصه‌های χ_k اشتراک دارد و $|k| = |k_1| + \ldots + |k_n| \leq d$.

گزاره‌ی بعدی اثبات قسمت ۲ به ۱ قضیه‌ی اصلی مورد نظر این پایان‌نامه ۰-۱ است.

گزاره ۳-۴۶. فرض کنید $f_1, \ldots, f_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$ چندجمله‌ایی های با حداکثر درجه‌ی d باشند و

$$V = \{x \in K^n : f_1(x) = \ldots, = f_m(x) = 0\}.$$

همچنین فرض کنید G دارای ویژگی مان باشد. آن‌گاه $V \cap G^n$ اجتماع متناهی از همدسته‌های زیرگروه‌های $D \cap G^n$ از G^n است به طوری که $D \in \mathcal{D}(n,d)$.

اثبات. اشتراک تعداد متناهی از همدسته‌های چنین زیرگروه‌هایی تهی است یا هم‌دسته‌ی زیر گروه‌های $D \cap G^n$. از این رو می‌توان فرض کرد $m = 1$. قرار دهید $f = f_1$، پس $f = \sum_{i \in I} a_i X^i$ که تمام $a_i \in K$ و I مجموعه‌ی اندیس‌های چندتایی $i = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ باشد که $|i| = i_1 + \ldots + i_n < d$. از طرفی G دارای ویژگی مان است. پس طبق نتیجهِ (۳-۳۸) مجموعه‌ی جواب‌های یک معادله در G توسط فرمول‌های بدون سور مثبت تعریف می‌شوند. پس مجموعه‌ی زیر

$$\{y \in G^{|I|} : \sum_{i \in I} a_i y_i = 0\}$$

اجتماع متناهی از اشتراک زیرمجموعه‌های $G^{|I|}$ است که به صورت $\{y \in G^{|I|} : gy_i = y_j\}$، نمایش داده می‌شود به طوری که $g \in G$ و $i, j \in I$. توجه داریم که تابع مشخصه‌ی تعریف شده یک همومورفیسم گروهی است. کافیست نشان دهیم مجموعه‌ی $\{x \in G^n : g\chi_i(x) = \chi_j(x)\}$ یک هم‌دسته‌ی زیر گروه $D \cap G^n$ از G است. در ابتدا فرض کردیم $f = \sum_{i \in I} a_i X^i$. از طرفی طبق فرض $f(x) = 0$. پس $\sum_{i \in I} a_i x^i = 0$. در نتیجه $\{x \in G^n : g\chi_i(x) = \chi_j(x)\}$ یک هم مجموعه‌یزیر گروه $D \cap G^n$ است به طوری که D هسته‌ی مشخصه‌ی $\chi_{i-j}(x)$ است و $i, j \in I$. □

۱۰.۳ ویژگی موردل لنگ، ویژگی مان را نتیجه می‌دهد

در پیشگفتار ویژگی موردل-لنگ را بیان و در ابتدای این فصل تعریف آن را مرور کردیم. فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری و $(K^\times)^n$ یک چنبره‌ی جبری [۱۳] روی K باشد. در این بخش برای گروه ضربی G نشان می‌دهیم ویژگی موردل-لنگ، ویژگی مان را نتیجه می‌دهد. بدین منظور ابتدا مطالبی که در اثبات این گزاره موثر هستند را تحت عنوان لم بیان می‌کنیم.

[۱۳] algebraic torus

لم ۳-۴۷. فرض کنید $a_1, \ldots, a_n \in K^\times$ و معادله‌ی $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1$ را در نظر بگیرید. اگر H یک زیر گروه نامتناهی از $(K^\times)^n$ وهمچنین یک زیرمجموعه از مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی ذکر شده باشد. آن‌گاه تمام $(h_1, \ldots, h_n) \in H$ ، جواب‌های تباهیده‌ی این معادله خواهند بود.

اثبات. طبق فرض H یک زیرگروه نامتناهی است. بنابراین بستار H نیز یک زیرگروه نامتناهی است. پس می‌توان H را یک زیرگروه بسته از $(K^\times)^n$ در نظر گرفت. فرض کنید H° مولفه‌ی همبندی عضو خنثی در H باشد. از آنجایی که H° زیرگروه بسته‌ی نرمال و اندیس متناهی از H است برای $(b_1, \ldots, b_n) \in H$ همدسته‌ی $(b_1, \ldots, b_n)H^\circ \subseteq H$ از H° را در نظر بگیرید. کافی است نشان دهیم همدسته‌ی مفروض شامل جواب‌های تباهیده‌ی معادله‌ی فوق است. فرض کنید بعد H° برابر d باشد. آن‌گاه $d > 0$ و یک نشاندن $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n) : (K^\times)^d \to (K^\times)^n$ را بین گروه‌های جبری روی K داریم که $Im(\phi) = H^\circ$. یعنی

$$H^\circ = \{\phi(y) : y \in (K^\times)^d\}.$$

برای $i = 1, \ldots, n$ چندتایی $e(i) = (e_{i1}, \ldots, eid) \in \mathbb{Z}^d$ را در نظر بگیرید به طور که برای تمام $y = (y_1, \ldots, y_d) \in (K^\times)^d$ داشته باشیم $\phi_i(y) = y^{e(i)} := y_1^{ei1} \ldots y_d^{eid}$. بنابراین

$$(b_1, \ldots, b_n)H^\circ = \{b_1\phi_1(y), \ldots, b_n\phi_n(y) : y \in (K^\times)^d\}.$$

پس برای تمام $y \in (K^\times)^d$ و $e \neq (0, \ldots, 0)$ داریم

$$a_1b_1y^{e(1)} + \ldots + a_nb_ny^{e(n)} = 1.$$

فرض کنید

$$E = \{e(i) : i = 1, \ldots, n\}.$$

چون $(b_1, \ldots, b_n)H^\circ$ زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی جواب‌های معادله فوق هستند با جایگذاری در معادله داریم

$$\sum_{e \in E} a_ib_iy^e = 1$$

یعنی

$$\{\forall y \in (K^\times)^d : f(y) = 1\}.$$

حال توجه داریم که E شامل عضو $e \neq (0, \ldots, 0)$ است زیرا در غیر این‌صورت چون ϕ یک به یک است داریم $Im(\phi) = 1$ و $H^\circ = 1$ پس H یک زیر گروه متناهی است که با فرض گزاره در تناقض است. پس e_iها همگی صفر نیستند بنابراین

$$\sum_{e(i)=e} a_i(b_iy^{e(n)}) = y^e \cdot \sum_{e(i)=e} a_ib_i = y^ec_e = 0$$

که در آن $y \in (K^\times)^d$. از آنجایی که اعضای $(b_1, \ldots, b_n)H^\circ$ دقیقا اعضای $(b_1y^{e(1)}, \ldots, b_ny^{e(n)})$ هستند، نتیجه می‌گیریم تمام این اعضا جواب‌های تباهیده محسوب می‌شوند. □

لم ۳-۴۸. فرض کنید H یک گروه جبری جا به جایی روی K و A یک زیر گروه چگال از H باشد. همچنین فرض کنید $B_1, \ldots, B_n$ زیر گروه‌های اندیس نامتناهی از A باشند و C_iها اجتماع متناهی از همدسته‌های B_i در A_i باشند. در این صورت $A - (C_1 \cup \ldots \cup C_n)$ در H چگال است.

اثبات. فرض کنید H همبند است. حالت اول: فرض کنید هیچ کدام از B_iها در H چگال نباشد و $U \subseteq H$ یک مجموعه‌ی باز ناتهی باشد. بنابراین $dimU = dimH$ و بعد بستار هر هم مجموعه‌ی B_i در H کمتر از بعد H است. پس $U - cl(C_1 \cup \ldots \cup C_n)$ یک مجموعه‌ی باز ناتهی در H است که با A اشتراک دارد. از این رو U با $A - (C_1 \cup \ldots \cup C_n)$ اشتراک دارد.

حالت دوم: با استقرا روی n به بررسی این حالت می‌پردازیم. چون A یک زیر گروه چگال از H است در حالت $n = 0$ حکم بدیهی است. فرض کنید $n > 0$ و برای تمام اندیس‌های مجزای i و j می توان فرض کرد $B_i \cap B_j$ در B_i اندیس نامتناهی است. زیرا اگر $B_i \cap B_j$ها در B_i اندیس متناهی باشند، هر هم‌مجموعه‌ی B_i اجتماع متناهی از هم‌مجموعه‌های $B_i \cap B_j$ است. پس C_i در یک اجتماع متناهی از هم‌مجموعه‌های B_j است. از این رو می‌توان با حذف B_i و افزایش C_j مناسب، n را کاهش داد. چون در ابتدای اثبات H همبند در نظر گرفته شده بود می توان فرض کرد $cl(B_1) = H$. اکنون هم مجموعه‌ی aB_1 در A در نظر بگیرید که از هم‌جموعه‌ی C_1 مجزا است. بنابراین داریم

$$aB_1 - (C_1 \cup \ldots \cup C_n) \subseteq A - (C_1 \cup \ldots \cup C_n)$$

، از طرفی

$$\begin{aligned} aB_1 - (C_1 \cup \ldots \cup C_n) &= aB_1 - (C_2 \cup \ldots \cup C_n) \\ &= a[B_1 - (C'_2 \cup \ldots \cup C'_n)] \end{aligned}$$

که C'_j اجتماع متناهی از هم‌مجموعه‌های $B_1 \cap B_j$ در B_1 است. با توجه به فرض استقرا $B_1 - (C'_2 \cup \ldots \cup C'_n)$ در H چگال است. پس $a[B_1 - (C'_2 \cup \ldots \cup C'_n)]$ در H چگال است. در نتیجه $A - (C_1 \cup \ldots \cup C_n)$ در H چگال است. از ابتدای اثبات H را یک گروه جبری همبند در نظر گرفتیم. حال این فرض را کنار می‌گذاریم و مولفه‌ی همبندی عضو خنثی (H°) که یک زیر گروه بسته‌ی اندیس متناهی است را در نظر می‌گیریم. هم مجموعه‌ی C از H° را در نظر بگیرید. کافی است نشان دهیم $C \cap [A - (C_1 \cup \ldots \cup C_n)]$ در C چگال است. بدین منظور فرض کنید $c \in C \cap A$. پس $C \cap A = cA^\circ$ که $A^\circ := H^\circ \cap A$ پس

$$\begin{aligned} C \cap [A - (C_1 \cup \ldots \cup C_n)] &= (C \cap A) - [(C \cap C_1) \cup \ldots \cup (C \cap C_n)] \\ &= cA^\circ - [(C \cap C_1) \cup \ldots \cup (C \cap C_n)] \\ &= c[A^\circ - (C^\circ_1) \cup \ldots \cup (C^\circ_n)] \end{aligned}$$

که $C^\circ_i := c^{-1}(C \cap C_i) = H^\circ \cap (c^{-1}C_i)$ توجه داریم که C°_i اجتماع متناهی از هم مجموعه‌های $B^\circ_i = H^\circ \cap B_i$ در H° است. بنابراین $A^\circ - (C^\circ_1 \cup \ldots \cup C^\circ_n)$ در H° چگال است. در نتیجه $C \cap [A - (C_1 \cup \ldots \cup C_n)]$ در C چگال است. $\square$

نکته ۳-۴۹. اگر H یک گروه جابجایی باشد آن‌گاه هر ترکیب بولی از هم‌دسته‌های زیرگروه‌های H، اجتماع متناهی از مجموعه‌های به شکل $h.(A-(B_1\cup\ldots\cup B_n))$ است به طوری که $h\in H$ و A یک زیرگروه از H و هر B_i یک زیرگروه اندیس نامتناهی از A است.

گزاره‌ی زیر قسمت ۲ به ۱ قضیه‌ی مورد نظر در این نوشتار را نشان میدهد.

گزاره ۳-۵۰. فرض کنید $\mathbb{F}$ میدان اول K باشد. اگر برای تمام $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}^\times$ مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=1$ در G یک ترکیب بولی از زیر گروه‌های G^n باشد. آن‌گاه G ویژگی مان دارد.

اثبات. یک ترکیب بولی از زیرگروه‌های G^n که به صورت یک اجتماع متناهی از مجموعه‌های به شکل زیر هستند را در نظر بگیرید.

$$g.(A-(B_1\cup\ldots\cup B_n)$$

به طوری که $g\in G^n$ و A یک زیرگروه از G^n است و هر B_i یک زیرگرروه اندیس نامتناهی از A باشد. با توجه به لم ۳-۴۸ بستار این مجموعه در $(K^\times)^n$ برابر است با $g.\mathrm{cl(A)}$، بنابراین طبق لم ۳-۴۷ تعداد جواب‌ها برای معادلعه‌ی فوق متناهی‌است یا تمام جواب‌ها ناتباهیده هستند. بنابراین G دارای ویژگی مان است. □

منابع

[1] Baldwin, J. T., "Fundamentals of stability theory", Cambridge University Press, vol. 12, 2017.

[2] Denef, J. and Van den Dries, L., "P-adic and real subanalytic sets", Annals of Mathematics, 128(1):79–138, 1988.

[3] Evertse, J. H., "On sums of s-units and linear recurrences", Compositio Mathematica, 53(2):225–244, 1984.

[4] Galbraith, S. D., "Elliptic curve paillier schemes", Journal of Cryptology, 15(2):129–138, 2002.

[5] Keisler, H. J., "Complete theories of algebraically closed fields with distinguished subfields", Michigan Mathematical Journal, 11(1):71–81, 1964.

[6] Lang, S., *Algebra addison-wesley*, Reading, Massachusetts, 145, 1965.

[7] Laurent, M., "Equations diophantiennes exponentielles", Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, pp. 1–8, 1983.

[8] Mann, H. B., "On linear relations between roots of unity", Mathematika, 12(2):107–117, 1965.

[9] Marcja, A. and Toffalori, C., *A Guide to Classical and Modern Model Theory*, pp, 221–290, Springer, 2003.

[10] Marker, D., *Model theory: an introduction*, Springer Science & Business Media, vol, 217, 2006.

[11] Miller, C., "Expansions of the real field with power functions", Annals of Pure and Applied Logic, 68(1):79–94, 1994.

[12] Pillay, A., *Geometric stability theory*, no. 32. Oxford University Press, 1996.

[13] Robinson, A., Solution of a problem of tarski, Fundamenta Mathematicae, 47(2):179–204, 1959.

[14] Tarski, A., "a decision method for elementary algebra and geometry", in Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition, pp. 24–84. Springer, 1998.

[15] Van Den Dries, L., "The field of reals with a predicate for the powers of two", Manuscripta mathematica, 54(1):187–195, 1985.

[16] Van Den Dries, L. and Günaydin, A., "The fields of real and complex numbers with a small multiplicative group", Proceedings of the London Mathematical Society, 93(1):43–81, 2006.

[17] Van Der Poorten, A.J. and Schlickewei, H.P., "Additive relations in fields", Journal of the Australian Mathematical Society, 51(1):154–170, 1991.

[18] Wilkie, A .J., "Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted pfaffian functions and the exponential function", Journal of the American Mathematical Society, 9(4):1051–1094, 1996.

[19] Zilber, s., "A note on the model theory of the complex field with roots of unity", Unpublished paper, www. maths. ox. ac. ukzilber, 1990.

• •

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

ا

افراز ..... partition
اندیس نامتناهی ..... infinite index
ایزومرفیسم جزیی ..... partial isomorphism

ب

بسط ..... expansion
بدیهی ..... trivial
بستار جبری ..... algebraic closure
پ پایداری ..... stability

ت

تئوری مقدماتی ..... elementary theory
تئوری بسیار کمینه ..... strongly minimal theory
تئوری کامل ..... complete theory
تئوری مدل کامل ..... modell complete theory
توسیع میدان ..... field extension
توسیع منظم ..... regular extension
توسیع جبری ..... algebraic extension
توسیع جداپذیر ..... separable extension
ترکیب بولی ..... boolean combination

ث

ج

جواب تباهیده ..... degenrated solution
جدای خطی ..... linearly disjoint
جازم ..... categorical
چ چندگونا ..... variety

چندگونای جبری ..... algebraic variety
چندگونای آبلی ..... abelian variety

ح حذف سور ..... quantifier elimination

خ خودریختی ..... automorphism

خم بیضوی ..... elliptic curve

د درون‌ریختی ..... endomorphism

س

سامانه‌ی رفت و برگشتی ..... back and forth system

ع

عمل گروه ..... group action

ق

قضیه‌ی فشردگی ..... compactness theorem

ک

کران‌مند توسط G ..... G-bound

گ

گروه جبری ..... algebraic group
گروه تاب‌دار ..... torsion group
گروه بدون تاب ..... torsion free group

م

مرتبه متناهی ..... finite rank
مجموعه‌ی کوچک ..... small set
مجموعه‌ی آزاد ..... free set
مجموعه‌ی تعریف پذیر ..... definable set
مجموعه‌ی بسته‌ی زاریسکی ..... Zariski closed set
میدان اول ..... prime field
میدان متناهی ..... finite field
میدان جدایی پذیر ..... separable field

و

ویژگی مان ..... Mann property
ویژگی موردل-لنگ ..... Mordell-lang property

ه

همریختی ..... homomorphism
هم‌مجموعه ..... coset

ی

یکریخت ..... isomorphic

فهرست نمادها

	مفهوم	اولین صفحه‌ی مراجعه
$orb(x)$	رده هم ارزی شامل xنسبت به عمل گروه	۲
K^{alg}	بستارجبری میدان K	۳
$K(S)$	میدان تولید شده توسط K و S	۳
$M \equiv N$	ساختار M و N معادل مقدماتی هستند	۹
$M \prec N$	Nیک توسیع مقدماتی از Mاست	۱۳
$tp^M(\bar{a})$	مجموعه‌ی ویژگی‌های $\bar{a}$رویM	۱۲
$S_n^M(A)$	مجموعه‌ی تایپ‌های nمتغیره درMروی A	۱۲
$qftp(a)$	مجموعه‌ی ویژگی‌های بدون سورaروی M	۱۵
ACF_p	میدان‌های بسته‌ی جبری با مشخصه‌یp	۱۸

The fields of real and complex numbers with a small multiplicative group

ROYA DAVOUDI
royadavodi@math.iut.ac.ir
october 30 , 2021
Master of Science Thesis (in Farsi)
Department of Mathematical Sciences
Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-8311, Iran

Supervisor: Dr. Mohsen Khani , `mohsen.khani@iut.ac.ir`
2000 MSC: 03C10, 03C35,03C60
Keywords: Mann property, Mordell-Lang property, Algebracally Closed Field, Quantifier Elimination.

Abstract:
This M.Sc. thesis is based on the following paper

- Van Den Dries, Lou and Günaydin, Ayhan. The fields of real and complex numbers with a small multiplicative group. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 93(1):43–81, 2006.

Let $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ be the language of rings and $L_m := \{1, \cdot\}$ the language of multiplicative monoids. In this dissertation, we study the expansion of the complex field by a small multiplicative group that has the Mann property. The results concern mainly the model theory of $L(U)$-structures (K, G) where K is an algebraically closed field and U is a unary relation symbol whose interpretation in the structure (K, G) is the subset G of K and G has the Mann property. For this purpose, first we define a small multiplicative set and study some of its properties in the structure (K, G). We consider G as an L_m-structure in the obvious way. The addition of K also leaves a trace on G, and to deal with that we extend L_m to the language $L_m(\Sigma) = \{1, \cdot\} \cup \{\Sigma_k : k \in \mathbb{Z}^n, n = 1, 2, \ldots\}$ of multiplicative monoids with additive relations. Here Σ_k is an n-ary relation symbol for $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. We expand the monoid G to an $L_m(\Sigma)$-structure $G(\Sigma)$ by interpreting Σ_k on G as the n-ary relation

$$\{(g_1, \ldots, g_n) \in G^n : k_1 g_1 + \ldots + k_n g_n = 0\}.$$

One of the key results about the $L_m(\Sigma)$-structure $G(\Sigma)$ states that If G is small in K, then $\mathrm{Th(K, G)}$ is completely determined by $\mathrm{Th(G(\Sigma))}$. In other words, if G is small in K and H is a small multiplicative set in an algebraically closed field L, then

$$(K, G) \equiv (L, H) \Leftrightarrow G(\Sigma) \equiv H(\Sigma).$$

We also show that, every subset of G^n definable in (K, G) is definable in the structure $G(\Sigma)$.
In addition, we show that the isomorphisms between some (K, G) and (L, H) substructures are in back-and-forth system, and using this back-and-forth system we show that if G is small in K and the $L_m(\Sigma)$-structure $G(\Sigma)$ is ω-stable, then the $L(U)$-structure (K, G) is ω-stable.
Another result states the following:
Let G be small in K, and K' is an algebraically closed subfield of K with a multiplicative subset G' that is small in K'. Suppose that $G' \subseteq G$ with $G'(\sigma) \preceq G(\Sigma)$, and K' and $F(G)$ are free over $F(G')$ in K. Then $(K', G') \preceq (K, G)$.
By using above results, we show that for algebraically closed K, the following are equivalent:

(1) G has the Mann property;

(2) for every algebraic set $V \subseteq K^n$ its trace $V \cap G^n$ is a finite union of cosets of subgroups of G^n ;(Mordell-lang property)

(3) for every $X \subseteq K^n$ that is definable in (K, G) its trace $X \cap G^n$ is definable in the group G.

In fact show that for G the Mann property and the Mordell–Lang property are equivalent.

Isfahan University of Technology
Department of Mathematical Sciences

The fields of real and complex numbers with a small multiplicative group

A Thesis
Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Master of Science

By
Roya Davoudi

Evaluated and approved by the thesis committee, on 30/10/2021

1- Dr. Mohsen Khani, Assistant Professor (Supervisor)

2- Dr. Massoud Pourmahdian, Associate Professor (Examiner)

3- Dr. Mostafa Einollahzadeh Samadi, Assistant Professor (Examiner) on behalf

Dr. Bijan Taeri, Professor (Department graduate coordinator)

Isfahan University of Technology
Department of Mathematical Sciences

Thesis Submitted for the Award of Master of Science in Mathematics

The fields of real and complex numbers with a small multiplicative group

Roya Davoudi

Supervisor: Dr. Mohsen Khani

October 2021