**جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد**

# توسیع ساختار جمعی مرتب اعداد حقیقی توسط دو زیرگروه گسسته

## سخنران: معصومه رضایی

زمان: چهارشنبه ۹۸/۲/۲۵ ساعت ۱۰:۳۰

مکان: سالن خوارزمی دانشکده‌ی علوم ریاضی

هیئت داوران

۱ــ دکتر محسن خانی

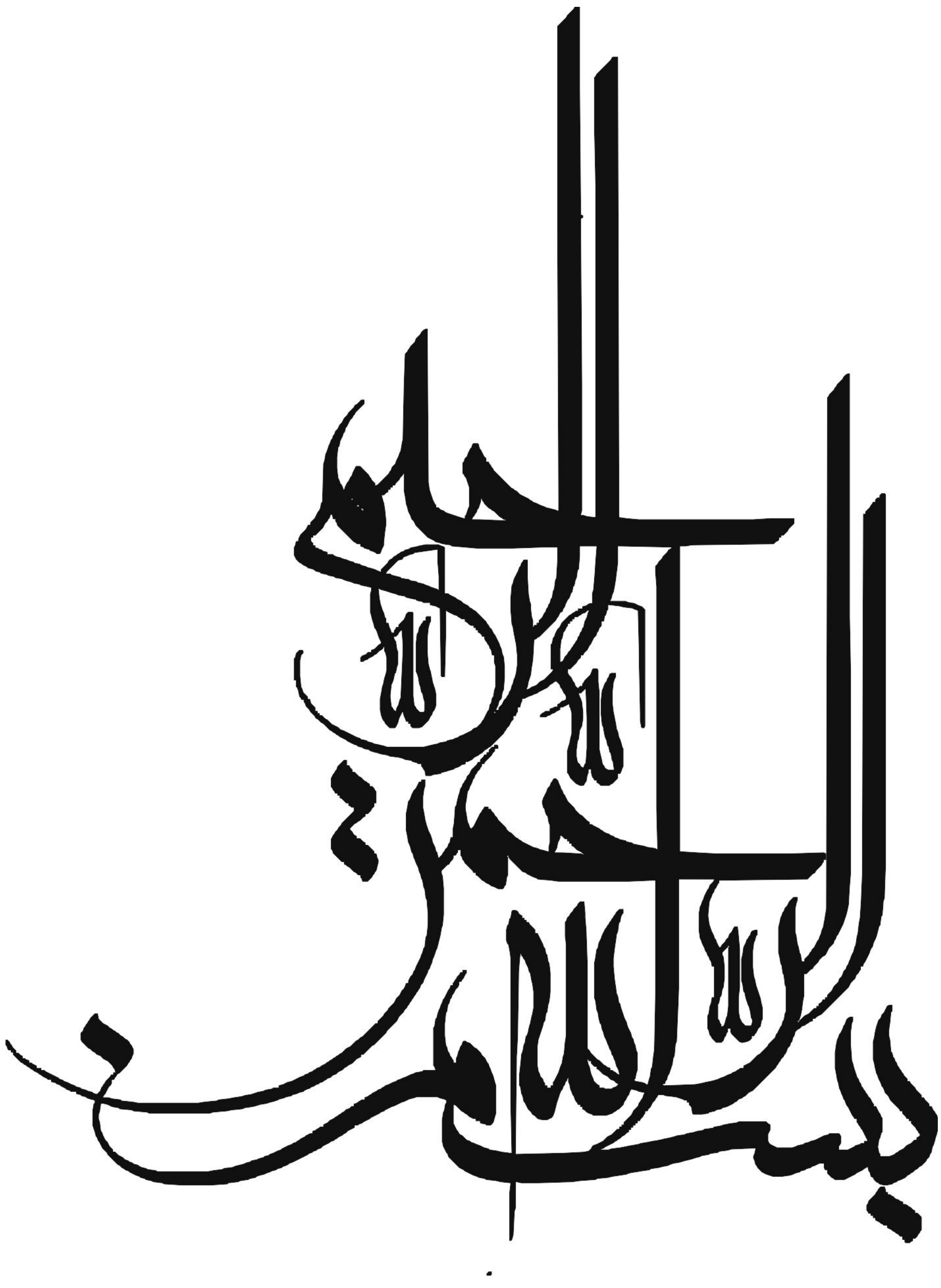
۲ــ دکتر مجتبی آقایی

۳ــ دکتر مسعود پورمهدیان (دانشگاه صنعتی امیر کبیر)

۴ــ دکتر محمدرضا کوشش (دانشگاه صنعتی اصفهان)

**چکیده:** هدف این پایان‌نامه اثبات تصمیم‌پذیری ساختار $\mathcal{R}_a := (\mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}a)$ بر اساس مقاله‌ای از فیلیپ هیرونیمی است که در این ساختار $a$ یک عدد مربعی(جواب یک معادله‌ی درجه دوم)، $\mathbb{Z}$ یک محمول برای اعداد صحیح و $\mathbb{Z}a$ یک محمول برای مجموعه‌ی $\{an| \ n \in \mathbb{Z}\}$ است. اثبات تصمیم‌پذیری با تعبیر درون ساختار تصمیم‌پذیر $\mathcal{B} := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), s_{\mathbb{N}}, \in)$ صورت گرفته‌است. این تعبیر با استفاده از نوشتن بسط اُسترُفسکی اعداد از روی بسط کسر مسلسل آن‌ها صورت می‌گیرد.

کلمات کلیدی: نظریه مدل، تصمیم‌پذیری، تعبیرپذیری، کسر مسلسل و بسط اُسترُفسکی . ::::


بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

# توسیع ساختار جمعی مرتب اعداد حقیقی توسط دو زیرگروه گسسته

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

**معصومه رضایی**

استاد راهنما

**دکتر محسن خانی**

۱۳۹۸

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی


پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض خانم معصومه رضایی

تحت عنوان

# توسیع ساختار جمعی مرتب اعداد حقیقی توسط دو زیرگروه گسسته

**در تاریخ ۲۵ اردیبهشت ۱۳۹۸ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت**

| | |
|---|---|
| ۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه | دکتر محسن خانی |
| ۲ــ استاد مشاور پایان‌نامه | دکتر مجتبی آقایی |
| ۳ــ استاد داور ۱ | دکتر مسعود پورمهدیان |
| ۴ــ استاد داور ۲ | دکتر محمدرضا کوشش |
| سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده | دکتر بیژن طائری |

# فهرست مطالب

**چکیده:** هدف این پایان‌نامه اثبات تصمیم‌پذیری ساختار $\mathcal{R}_a := (\mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}a)$ است.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ای از فیلیپ هیرونیمی [۱] است که در آن اثبات تصمیم‌پذیری ساختار $\mathcal{R}_a$ به‌طوری‌که $a$ یک عدد مربعی(جواب یک معادله‌ی درجه دوم)، $\mathbb{Z}$ یک محمول برای اعداد صحیح و $\mathbb{Z}a$ یک محمول برای مجموعه‌ی $\{an |\ n \in \mathbb{Z}\}$ است، با تعبیر درون ساختار تصمیم‌پذیر $\mathcal{B} := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), s_{\mathbb{N}}, \in)$ صورت گرفته‌است. این تعبیر با استفاده از نوشتن بسط اُسترُفسکی اعداد از روی بسط کسر مسلسل آن‌ها صورت می‌گیرد.

**رده‌بندی موضوع:** $۰۳F۵۲, ۰۳B۴۲$

**واژگان کلیدی:** نظریه مدل، کسرهای مسلسل، بسط اُسترُفسکی، تعبیرپذیری، تصمیم‌پذیری.

---

[۱] Hieronymi Philipp

# پیش‌گفتار

هدف کلی این پایان‌نامه بررسی تصمیم‌پذیری ساختار $\mathcal{R}_a := (\mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}a)$ است که بر اساس مقاله‌ی [۲۲] از فیلیپ هیرونیمی نوشته‌شده‌است. توجه کنید که ساختار $(\mathbb{R}, \mathbb{Z}, +, ., <)$ بنابه قضیه ناتمامیت گودل تصمیم‌پذیر نیست اما با محدود کردن ضرب می‌توانیم به تصمیم‌پذیری برسیم. بنابراین در ساختار $\mathcal{R}_a$ با فرض کردن این‌که $a$ مربعی باشد، تعریف می‌کنیم $\mathbb{Z}$ یک محمول برای اعداد صحیح است و $\mathbb{Z}a$ یک محمول برای مجموعه‌ی $\{an|\ n \in \mathbb{Z}\}$ است. برای آن‌که بتوانیم تصمیم‌پذیری ساختار $\mathcal{R}_a$ را ثابت کنیم آن‌را درون یک ساختار تصمیم‌پذیر تعبیر می‌کنیم. برای رسیدن به این هدف ساختار دو بخشی $\mathcal{B} := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), s_{\mathbb{N}}, \in)$ را در نظر می‌گیریم. این ساختار به دلیل وجود دو مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ دو بخشی خوانده می‌شود. در این ساختار $s_{\mathbb{N}}$ تابع تالی به‌صورت $s_{\mathbb{N}} \ :\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ و رابطه $\in$ ، تعلق روی مجموعه‌ی $\mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ تعریف می‌شوند. از آن‌جایی که ساختار $\mathcal{B}$ بنابه [۲۰] تصمیم‌پذیر است، با تعبیر ساختار $\mathcal{R}_a$ درون ساختار $\mathcal{B}$ این ساختار تصمیم‌پذیر می‌باشد.

برای تعبیر ساختار $\mathcal{R}_a$ با استفاده از تعریف ۳-۷ در فصل ۳ مجموعه‌ی $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ را می‌سازیم که در این پایان‌نامه قرار است نقش مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ را بازی کند. برای ساخت مجموعه‌ی $A$ از بسط‌های اُسترُفسکی و کسرهای مسلسل استفاده کرده‌ایم. از روی مجموعه‌ی $A$ مجموعه‌ی $A_{fin}$ را می‌سازیم که در این پایان‌نامه قرار است نقش مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ را بازی کند. هم چنین نشان می‌دهیم این دو مجموعه در ساختار $\mathcal{B}$ تعریف‌پذیر هستند. بعد از آن برای کامل کردن ادامه روند تعبیر $\mathcal{R}_a$ درون $\mathcal{B}$ نگاشت‌های $O,\ Z,\ S,\ R$ و $T$ را می‌سازیم هم چنین نشان می‌دهیم که این نگاشت‌ها یکریختی هستند.

در بین این نگاشت‌ها، با نگاشت $Z$ که به‌صورت $Z : A_{fin} \longrightarrow \mathbb{N}$ تعریف می‌شود مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ را درون ساختار $\mathcal{B}$ تعبیر می‌کنیم. هم‌چنین با نگاشت $O$ که به‌صورت $O : A \longrightarrow I$ تعریف

می‌کنیم بازه‌ی $I = [0, 1)$ را درون ساختار $\mathcal{B}$ تعبیر می‌کنیم. با استفاده از نگاشت $S : A \longrightarrow [0, 1)$ هر عدد را درون بازه‌ی $[0, 1)$ قرار می‌دهیم. نگاشت‌های $Z$ و $S$ به‌طور جداگانه مجموعه‌های $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ را درون ساختار $\mathcal{B}$ تعبیر می‌کنند. برای این‌که بتوانیم هم‌زمان این دو مجموعه را درون ساختار $\mathcal{B}$ تعبیر کنیم ابتدا اشتراک $\mathbb{N}$ با بازه‌ی $(aZ(X), a(Z(X) + 1))$ را به‌دست می‌آوریم و با این اشتراک مجموعه‌ی $B \subseteq A_{fin} \times \{0, 1, 2\}$ و مجموعه‌ی $C = A \times B$ را تولید می‌کنیم. سپس نگاشت $R : B \longrightarrow \mathbb{N}$ را تولید می‌کنیم تا با استفاده از آن بتوانیم نگاشت $T$ به‌صورت $T : B \times A \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ را تولید کنیم. با این نگاشت ساختار $(\mathbb{R}_{\geq 0}, <, +, \mathbb{N}, \mathbb{N}a)$ که شبیه ساختار $\mathcal{R}_a$ است، ساخته‌می‌شود. این ساختار جدید درون ساختار $\mathcal{B}$ تعبیرپذیر است، از آن‌جا که ساختار $\mathcal{B}$ بنابه [20] تصمیم‌پذیر است بنابراین ساختار تولید شده توسط نگاشت $T$ نیز تصمیم‌پذیر می‌باشد. بنابراین با ثابت فرض کردن $a$ ساختار $\mathcal{R}_a$ درون ساختار تصمیم‌پذیر $\mathcal{B}$ تعبیر می‌شود و ساختار $\mathcal{R}_a$ تا زمانی که $a$ ثابت و مربعی باشد تصمیم‌پذیر است. در ادامه روند رسیدن به این هدف دو تعریف زیر را برای مجموعه‌های $a$تشخیص‌پذیر و ماشین متناهی به‌صورت مختصر می‌آوریم.

مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{N}^n$ را $a$تشخیص‌پذیر می‌گوییم هرگاه در ساختار $(\mathbb{N}, +, V_a)$ تعریف‌پذیر باشد، که در آن $a \in \mathbb{N}$ و $V_a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ تابعی است که هر عدد طبیعی $n > 0$ را به بزرگترین توانی از $a$ می‌نگارد که $n$ را می‌شمارد. به عبارتی دیگر $V_a(n) = a^k$ اگر و تنها اگر $a^k \mid n$ و $a^{k+1} \nmid n$. برای مطالعه‌ی بیشتر درباره‌ی مجموعه‌های $a$تشخیص‌پذیر به [15] مراجعه کنید.

معادلاً مجموعه‌ی $X$ ، $a$تشخیص‌پذیر است هرگاه توسط یک ماشین متناهی (اتوماتون) تولید شود. ماشین متناهی به یک پنج‌تایی $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ گفته‌می‌شود که شامل: (1) $Q$ یک مجموعه متناهی از حالات، (2) $\Sigma$ یک مجموعه متناهی از نمادهای ورودی موسوم به الفبا، (3) $q_0$ حالت آغازین، (4) $F$ مجموعه‌ی حالات نهایی $F \subseteq Q$ و (5) $\delta$ تابع انتقال $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$. در کل این تعریف بیان می‌کند که هر حالت از ماشین با هر یک از نمادهای الفبا به چه حالت دیگری از ماشین منتقل خواهدشد. مثال $\delta(q_i, a) = q_j$ یعنی حالت $q_i$ با نماد الفبایی $a$ به حالت $q_j$ منتفل می‌شود. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد ماشین متناهی به [18] مراجعه کنید.

مراحل رسیدن ما به هدف پایان‌نامه در تمام فصل‌ها به شرح زیر است:

در فصل (1) تعدادی از تعاریف در منطق را که در طول پایان‌نامه به مفهوم آن‌ها نیاز بوده‌است

با توضیحی مختصر بیان کرده‌ایم. از جمله تعریف منطق مرتبه اول، ساختار، تئوری، تعریف‌پذیری، تعبیرپذیری، تصمیم‌پذیری. هم چنین در ادامه به بیان ساختارهایی از جمله پرسبرگر، $ACF$ و $RCF$ پرداخته‌ایم.

در فصل (۲) بسط کسرهای مسلسل اعداد، بسط اُسترُفسکی اعداد و الگوریتم نوشتن این بسط‌ها را آورده‌ایم. هم چنین نشان داده‌ایم که بسط کسر مسلسل هر عددی یکتاست، و با توجه به این‌که این بسط متناوب باشد یا نه چند قضیه و تعریف مربوط به آن را آورده‌ایم. بعد از این‌که توانستیم هر عدد را به‌صورت یک بسط اُسترُفسکی نمایش دهیم با استفاده از این نمایش به بیان جمع و ترتیب بین اعداد پرداخته‌ایم. هم چنین با این بسط اُسترُفسکی تعریف مختصری را از $a$تشخیص‌پذیر بودن یک مجموعه و همین طور ماشین متناهی آورده‌ایم.

در فصل (۳) به تعریف ساختار $\mathcal{B}$ پرداخته‌ایم و مراحل تعبیر ساختار $\mathcal{R}_a$ در این ساختار را در نموداری رسم کرده‌ایم که تمام مراحل انجام کار در این فصل را بازگو می‌کند. با ثابت فرض کردن بسط کسر مسلسل $a$ در طول فصل نگاشت‌های $R$ ,$S$ ,$Z$ ,$O$ و $T$ هم چنین مجموعه‌های $A'$ ,$C$ ,$B$ ,$A_{fin}$ ,$A$ ,$\mathbb{N}$ و $B'$ را می‌سازیم. ابتدا به تعریف زیر مجموعه‌های $A$ و $A_{fin}$ از مجموعه‌ی $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ پرداخته‌ایم. بعد از آن با نگاشت $Z$ اعداد طبیعی و با نگاشت $O$ بازه‌ی $I$ را درون ساختار $\mathcal{B}$ تعبیر کرده‌ایم، و نشان می‌دهیم که $A$ نقش مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ و $A_{fin}$ نقش مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ را بازی می‌کنند. بعد ثابت می‌کنیم که نگاشت $Z : (A_{fin}, \prec_Z, \oplus) \longrightarrow (\mathbb{N}, <, +)$ ترتیب و جمع تعریف شده روی مجموعه‌های $A_{fin}$ و $\mathbb{N}$ همین‌طور نگاشت $O : (A, \prec_O, \oplus) \longrightarrow (I, <, +_۱)$ ترتیب و جمع تعریف شده روی مجموعه‌های $A$ و بازه‌ی $I$ را حفظ می‌کنند.

با نگاشت $S$ هر عدد را درون بازه‌ی $[۰, ۱)$ قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم که این نگاشت جمع و ترتیب تعریف شده روی مجموعه $A$ و بازه‌ی $[۰, ۱)$ را حفظ می‌کند. بعد از این اشتراک مجمموعه $\mathbb{N}$ را با بازه‌ی $(aZ(X), (Z(X) + ۱)a)$ به‌دست می‌آوردیم و با آن مجموعه $B \subseteq A_{fin} \times \{۰, ۱, ۲\}$ را تعریف می‌کنیم. بعد برای آن‌که بتوانیم هر دو مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ را به‌طور هم زمان درون ساختار $\mathcal{B}$ تعبیر کنیم نگاشت $R$ را تولید می‌کنیم تا با استفاده از آن هم زمان عمل‌های نگاشت‌های $Z$ و $S$ را انجام دهیم.

در ادامه کار ثابت می‌کنیم نگاشت $R : (B, \prec_B, \oplus_B) \longrightarrow (\mathbb{N}, <, +)$ جمع و ترتیب

تعریف شده روی مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $B$ را حفظ می‌کند. در پایان کار مجموعه $C = B \times A$ را می‌سازیم و ثابت می‌کنیم نگاشت $T : (C, \prec_C, \oplus_C, B', A') \longrightarrow (\mathbb{R}_{\geq 0}, <, +, \mathbb{N}, \mathbb{N}_a)$ جمع و ترتیب تعریف شده روی مجموعه‌های $C$ و $\mathbb{R}_{\geq 0}$ را حفظ می‌کند. و در نهایت با نگاشت $T$ ساختار $(\mathbb{R}_{\geq 0}, C, \mathbb{N}, \mathbb{N}a)$ که شبیه ساختار $\mathcal{R}_a$ است، تولید می‌شود و از آن‌جایی که این ساختار در $\mathcal{B}$ تعبیرپذیر است و ساختار $\mathcal{B}$ نیز بنابه [۲۰] تصمیم‌پذیر، بنابراین ساختار جدید نیز تصمیم‌پذیر خواهد بود. ما با نگاشت $T$ ساختار $\mathcal{R}_a$ را درون ساختار $\mathcal{B}$ تعبیر می‌کنیم بنابراین ثابت می‌شود تا زمانی که $a$ یک عدد مربعی باشد ساختار $\mathcal{R}_a$ تصمیم‌پذیر می‌باشد.

در فصل (۴) چند مقاله مرتبط با پایان‌نامه را آورده‌ایم، شایان ذکر است که مجال برای تعریف همه مفاهیم موجود در این مقالات نبوده‌است. با این حال برخی از ساختارها و مفاهیم نگاشت‌های مورد نیاز به‌طور مختصر بیان شده‌است. از جمله ساختارهای $(\mathbb{R}, C)$، $(\mathbb{R}, +, \cdot, f)$، $(\mathbb{R}, <, +, \mathbb{N}, f)$، $(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}_{alg}, 2^{\mathbb{Z}})$. هم چنین نگاشت‌های $\lambda_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f : D^n \longrightarrow \mathbb{R}$، $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

# فصل ۱

# پیش‌نیازها

در این فصل تعاریفی را که برای فهمیدن بیشتر فصل‌های بعد مورد نیاز است با توضیحی مختصر می‌آوریم:

**منطق مرتبه اول** یا منطق محمولات با افزودن: (۱) متغییرهای $x_۱, x_۲, \ldots$، (۲) روابط $R(x_۱, \ldots, x_۲)$ و توابع $f(x_۱, \ldots, x_۲)$، (۳) سورهای عمومی و وجودی $\forall, \exists$ به منطق گزاره‌ها به‌دست می‌آید. در منطق مرتبه اول ابتدا یک زبان مناسب $L$ انتخاب می‌کنیم که الفبای لازم را در اختیار ما قرار می‌دهد سپس با استفاده از امکانات زبان $L$ و ادوات منطق جمله‌ی مورد نظر خود را به زبان منطق می‌نویسیم. زبان مرتبه‌ی اول اجتماع سه مجموعه‌ی مجزای $\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}$ است که در آن مجموعه‌ی $\mathcal{F}$ را مجموعه نمادهای تابعی که برای هر نماد تابعی $f \in \mathcal{F}$ یک عدد طبیعی $n_f \in \mathbb{N}$ به عنوان تعداد مواضع $f$ در نظر می‌گیریم ، $\mathcal{R}$ را مجموعه نمادهای رابطه‌ای که برای هر نماد رابطه‌ی $R \in \mathcal{R}$ یک عدد طبیعی $n_{\mathcal{R}}$ را به عنوان تعداد مواضع رابطه $R$ در نظر می‌گیریم و $\mathcal{C}$ را مجموعه ثوابت زبان می‌خوانیم.

فرض می‌کنیم $L = \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$ زبان مرتبه‌ی اول باشد منظور از یک $L$ساختار یا یک $L$تعبیر چندتایی است مانند $\mathfrak{M}$ که از گرد هم آمدن موارد زیر حاصل می‌شود: (۱) مجموعه‌ی ناتهی $M$ که

جهان یا دامنه ساختار گفته می‌شود، (۲) به‌ازای هر $f \in \mathcal{F}$ تابعی مانند $f^{\mathfrak{M}} : M^{n_f} \longrightarrow M$ که به آن تابع $f$ در ساختار $\mathfrak{M}$ گفته‌می‌شود، (۳) به‌ازای هر $R \in \mathcal{R}$ رابطه‌ای مانند $R^{\mathfrak{M}} \subseteq M^{n_R}$ که به آن تعبیر رابطه‌ی $R$ در ساختار $\mathfrak{M}$ گفته‌می‌شود و (۴) به‌ازای هر $c \in \mathcal{C}$ عنصری مانند $c^{\mathfrak{M}} \in M$ که به آن تعبیر عنصر ثابت $c$ در ساختار $\mathfrak{M}$ گفته‌می‌شود. **یک $L$ساختار** $\mathfrak{M}$ را به همراه توابع، روابط و ثوابت آن به‌صورت $\mathfrak{M} : (M, \{c^{\mathfrak{M}}, f^{\mathfrak{M}}, R^{\mathfrak{M}}\})$ که در آن $f, R, c \in L$ نشان می‌دهیم.

مجموعه‌ی $L$فرمول‌ها به‌صورت زیر حاصل می‌شود: (۱) هرگاه $x_۱$ و $x_۲$ ترم باشند آن‌گاه $x_۱ = x_۲$ یک $L$فرمول است. (۲) هرگاه $x_۱, \ldots, x_n$ چند ترم باشند و $R \in L$ یک نماد رابطه‌ای $n$ موضعی باشد آن‌گاه $R(x_۱, \ldots, x_n)$ یک $L$فرمول است. (۳) هرگاه $\varphi$ یک $L$فرمول باشد آن‌گاه $\neg\varphi$ نیز یک $L$فرمول است. (۴) هرگاه $\varphi$ و $\psi$ دو $L$فرمول باشند آن‌گاه $\varphi \wedge \psi$ نیز یک $L$فرمول است. (۵) هرگاه $\varphi$ یک $L$فرمول باشد آن‌گاه $\exists x\varphi$ نیز یک $L$ فرمول است. فرض می‌کنیم $\varphi$ یک $L$فرمول و $\mathfrak{M}$ یک $L$ساختار باشد، هرگاه $\mathfrak{M} \models \varphi$ آن‌گاه می‌گوییم ساختار $\mathfrak{M}$ مدلی برای $\varphi$ است.

به هر مجموعه از $L$جملات **تئوری** می‌گوییم، فرض می‌کنیم $T$ یک $L$تئوری باشد این تئوری را ارضاشدنی [۱] می‌خوانیم هرگاه مدلی برای آن موجود باشد یعنی ساختارِ $\mathfrak{M}$ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که برای هر $L$جمله‌ی $\varphi \in T$ داشته‌باشیم $\mathfrak{M} \models \varphi$ در این صورت می‌نویسیم $\mathfrak{M} \models T$.

فرض کنیم $T$ یک $L$تئوری و $\varphi$ یک $L$جمله باشند، می‌نویسیم $T \models \varphi$ هرگاه $\varphi$ در هر مدل از $T$ درست باشد و می‌نویسیم $T \vdash \varphi$ هرگاه اثباتی از $T$ برای $\varphi$ وجود داشته‌باشد.

می‌گوییم زبان $L$ بازگشتی است هرگاه الگوریتمی وجود داشته باشد و تعیین کند که آیا دنباله‌ای از نمادهای زِبان، $L$فرمول است. هم‌چنین $L$تئوری $T$ بازگشتی است هرگاه الگوریتمی وجود داشته‌باشد که وقتی $L$جمله $\varphi$ را به عنوان ورودی به آن می‌دهیم مشخص می‌کند که $\varphi \in T$ یا این‌که $\varphi \notin T$. هرگاه زبان $L$ و $L$تئوری $T$ هر دو بازگشتی باشند مجموعه‌ی $\{\varphi : T \vdash \varphi\}$ به‌طور

کارآمد شمارا [۲] است، یعنی الگوریتمی وجود دارد که وقتی $L$جمله $\varphi$ را به عنوان ورودی به آن می‌دهیم هرگاه $T \vdash \varphi$ متوقف می‌شود. می‌گوییم $L$تئوری $T$ **یک تئوری کامل** است هرگاه برای هر $L$جمله‌ی $\varphi$ داشته‌باشیم $T \vDash \varphi$ یا این‌که $T \nvDash \varphi$. هم چنین برای $L$ساختار $\mathfrak{M}$ تئوری کامل آن‌را با مجموعه‌ی $Th(\mathfrak{M}) = \{\varphi : |M \vDash \varphi\}$ نشان می‌دهیم در واقع این مجموعه شامل تمام جملات درست در این ساختار است.

[۱] satisfiable
[۲] recursively enumerable

تئوری $T$ ناسازگار [۳] است هرگاه $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$ در غیر این صورت $T$ سازگار است. می‌گوییم $L$تئوری $T$ **تصمیم‌پذیر** [۴] است هرگاه الگوریتمی وجود داشته‌باشد که وقتی $L$جمله $\varphi$ را به عنوان ورودی به آن می‌دهیم تعیین کند که $T \models \varphi$ یا $T \not\models \varphi$. هم چنین می‌گوییم ساختار $M$ تصمیم‌پذیر است هرگاه $Th(M) = \{\varphi | \quad M \vDash \varphi\}$ تصمیم‌پذیر باشد. توجه کنید بنابه **قضیه تمامیت گودل**، $T \vDash \varphi$ اگر و تنها اگر $T \vdash \varphi$.

با استفاده از قضیه‌یِ تمامیت لم زیر را برای تئوری $T$ بیان می‌کنیم:

فرض کنیم $T$ یک تئوریِ سازگارِ بازگشتیِ کامل در یک زبانِ بازگشتی باشد، آنگاه $T$ تصمیم‌پذیر است.

*اثبات.* از آن‌جایی که $T$ ارضاشدنی است مجموعه‌های $A = \{\varphi \ : \ T \vDash \varphi\}$ و $B = \{\varphi \ : \ T \nvDash \varphi\}$ مجزا هستند. با توجه به این‌که $T$ ارضاشدنی است بنابه قضیه‌ی تمامیت گودل تئوری $T$ سازگار است بنابراین $A \cup B$ مجموعه‌ای شامل همه‌ی $L$جملات است. با استفاده از قضیه تمامیت گودل داریم $A = \{\varphi \ : \ T \vdash \varphi\}$ و $B = \{\varphi \ : \ T \nvdash \varphi\}$. بنابراین با تعریف مجموعه‌ی به‌طورکارآمد شمارا هر دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ به‌طورکارآمد شمارا هستند. از آن‌جا که اگر مکمل یک مجموعه‌ی به‌طورکارآمد شمارا، به‌طورکارآمد شمارا باشد، آن مجموعه بازگشتی است، بنابراین $A \cup B$ بازگشتی می‌باشد. هم چنین از آن‌جا که تئوری $T$ و زبان $L$ بازگشتی فرض شدند بنابراین الگوریتمی وجود دارد که وقتی $L$جمله $\varphi$ را به عنوان ورودی می‌گیرد، تعیین می‌کند که $T \vDash \varphi$ یا خیر، یعنی تئوری $T$ تصمیم‌پذیر است. $\square$

فرض کنیم $\mathfrak{M}$ یک $L$ساختار با جهان $M$ باشد. یک زیر مجموعه‌ی $X$ از جهان **تعریف‌پذیر** است اگر و تنها اگر $L$فرمول $\varphi$ با متغیرهایی از جهان $M$ وجود داشته‌باشد که بتوان این زیر مجموعه را با استفاده از آن تعریف کرد. مثلاً فرض کنیم $\mathfrak{M} = (\mathbb{R}, \cdot, +, ۰, ۱)$ یک حلقه باشد مجموعه‌ی $Y$ که به‌صورت $Y = \{x \in \mathbb{R} \ : \ P(x) = ۰\}$ تعریف می‌شود را می‌توان با استفاده از $L$فرمول $\varphi(v, \omega_۰, \dots, \omega_n)$ جایی که $v, \omega_i \in M$ به‌صورت $\omega_n \cdot \underbrace{v \cdots v}_{n \text{تا}} + \cdots + \omega_۱ v + \omega_۰ = ۰$ در این ساختار تعریف کرد. فرض کنیم $X \subseteq M$ ، گوییم $X$ مجموعه‌ای $A$تعریف‌پذیر است هرگاه

[۳] inconsistent
[۴] decidable

$L$فرمول $\varphi(\overline{v}, \omega_۱, \ldots, \omega_l)$ جایی که $\overline{v}, \omega_i \in M$ وجود داشته‌باشد با $\overline{b} \in A^l$ به‌طوری‌که $L$فرمول $\varphi(\overline{v}, \overline{b})$ مجموعه‌ی $X$ را تعریف کند.

می‌گوییم $L_\circ$ساختار $\mathcal{N}$ در $L$ساختار $\mathcal{M}$ **تعبیرپذیر** است هرگاه یک مجموعه‌ی تعریف‌پذیر $X \subseteq \mathcal{M}^n$ و یک رابطه‌ی هم‌ارزی تعریف‌پذیر $E$ روی $X$ موجود باشد، به‌طوری‌که $X/E$ به‌صورت تعریف‌پذیر دارای ساختاری شود که با $\mathcal{N}$ یکریخت است.

ساختار $(\mathbb{Z}, +, \cdot, ۰, ۱, <)$ را در نظر بگیرید، تئوری این ساختار در زبان $L = \{+, \cdot, ۰, ۱, <\}$ به دلیل وجود دو عمل جمع و ضرب به‌صورت هم زمان، به دلیل قضیه‌ی ناتمامیت گودل حذف سور ندارد ولی می‌توان با جایگزین کردن ضرب با محمول‌های $n$ تایی $P_n$ که به‌صورت $P_n(x) = \exists y\ (x = \underbrace{y + \cdots + y}_{n \text{تا}})$ بیان می‌شود و حاکی از آن است که عنصر $x$ با $n$ تقسیم‌پذیر است به زبان $L$ آن‌را به $L^* = L \cup \{P_n\ : n = ۲, ۳, \cdots\}$ تبدیل کرد. حال $L^*$تئوری از $(\mathbb{Z}, +, \cdot, ۰, ۱, <)$ دارای حذف سور است. این $L^*$تئوری را **تئوری حساب پرسبرگر**[۵] $(Pr)$ می‌نامیم. که می‌توان مجموعه‌ی اصول زیر را برای آن نوشت که کامل است:

۱. اصول گروه‌های آبلی مرتب ؛

۲. $۰ < ۱$؛

۳. برای هر $x$ ، $(x \leq ۰ \vee x \geq ۱)$؛

۴. برای هر $x$، $(P_n(x) \longleftrightarrow x)$ و وجود دارد $y$ که $x = \underbrace{y + \cdots + y}_{n \text{تا}}$ برای $n = ۲, ۳, \cdots$؛

۵. برای هر $x$، $\bigvee_{i=۰}^{n-۱} (P_n(x + \underbrace{۱ + \cdots + ۱}_{i \text{تا}}) \ \wedge\ \bigwedge_{j \neq i} \neg P_n(x + \underbrace{۱ + \cdots + ۱}_{j \text{تا}}))$ .

اصل آخر بیان می‌کند که در مجموعه‌ی اعداد صحیح از هر $n$ تا یکی بر $n$ بخش‌پذیر است.

تئوری میدان‌های بسته‌ی جبری و تئوری میدان‌های بستار حقیقی که هر دو مورد به‌طور کامل در [۱۹] بیان شده‌اند، حذف سور می‌گیرند و کامل و تصمیم‌پذیر می‌باشند. ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ یک میدان بسته‌ی حقیقی است، پس دارای یک تئوریِ کامل و تصمیم‌پذیر است. هم چنین ساختار $(\mathbb{R}, +, <, \cdot, \mathbb{Z})$ را در نظر بگیرید این ساختار به دلیل وجود مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ به همراه عمل ضرب

[۵] presburger arithmetic

تصمیم‌پذیر نیست. حال **ساختار** $\mathcal{R}_a := (\mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}a)$ را در نظر بگیرید که هدف اصلی این پایان نامه تصمیم‌پذیری این ساختار با تعبیر آن درون ساختار $\mathcal{B}$ می‌باشد. در این ساختار $\mathbb{Z}(x)$ به معنای صحیح بودن $x$ و $a\mathbb{Z}(x)$ به معنای $x = na$ . در این ساختار ضرب را محدود و به‌صورت $\mathbb{Z}a$ تعریف کرده‌ایم و این ساختار تا زمانی که $a$ مربعی و ثابت باشد، تصمیم‌پذیر است.

برای این‌که بتوانیم تصمیم‌پذیری ساختار $\mathcal{R}_a$ که در بالا تعریف شد را ثابت کنیم آن‌را درون یک ساختار تصمیم‌پذیر تعبیر می‌کنیم. برای این کار ابتدا **ساختار دو بخشی** $\mathcal{B} := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), s_{\mathbb{N}}, \in)$ را در نظر بگیرید این ساختار به دلیل وجود دو مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ دو بخشی خوانده می‌شود. در این ساختار $s_{\mathbb{N}}$ تابع تالی به‌صورت $s_{\mathbb{N}} \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ و رابطه $\in$ تعلق روی مجموعه‌ی $\mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ تعریف می‌شوند. ما با استفاده از ساختار $\mathcal{B}$ و بسط اُسترُفسکی که در فصل ۳ بیان خواهیم‌کرد، مجموعه‌های اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ و اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را درون ساختار $\mathcal{B}$ تعبیر می‌کنیم. از آن‌جایی که ساختار $\mathcal{B}$ بنابه [۲۰] تصمیم‌پذیر است با تعبیر ساختار $\mathcal{R}_a$ درون این ساختار، تا زمانی که $a$ ثابت و مربعی باشد ساختار $\mathcal{R}_a$ نیز تصمیم‌پذیر خواهدبود.

# فصل ۲

# مقدمات نظریه‌ی اعدادی

در این فصل ابتدا کسر مسلسل [۱] چند عدد گویا و حقیقی را بیان می‌کنیم. هر عدد حقیقی را می‌توان بر مبنای یک عدد دلخواه بنویسیم یکی از این مبناها نسبت طلایی [۲] که همان جواب معادله‌ی $(\varphi^2 - \varphi - 1)$ می‌باشد، است. هم چنین با استفاده از کسر مسلسل نسبت طلایی بسط‌های اُسترُفسکی [۳] اعداد طبیعی و حقیقی را به‌دست می‌آوریم. در این فصل ما به طور مختصر تعاریف و قضایا را آورده‌ایم برای مطالعه‌ی بیشتر در زمینه کسرهای مسلسل به [۲۳] مراجعه کنید.

فرض کنید که $a$ یک عدد حقیقی دلخواه باشد.

**تعریف ۲-۱.** *کسر $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ از میان تمام کسرهایی که مخرج آن‌ها حداکثر $q$ است بهترین تقریب برای $a$ است، هرگاه برای هر کسر $\frac{p'}{q'}$ با $1 \leq q' \leq q$ و $\frac{p'}{q'} \neq \frac{p}{q}$ داشته باشیم:*

$$|qa - p| < |q'a - p'|.$$

هرگاه $a$ را یک عدد گویا در نظر بگیریم بهترین تقریب برای $a$ خود آن عدد است.

---

[۱] continued fraction
[۲] golden ratio
[۳] Ostrowski representation

**مثال ۲-۲.** $a$ *را کسر گویای* $\frac{۲}{۳}$ *در نظر بگیرید. با فرض این‌که* $\frac{۲}{۳} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *خواهیم دید که بهترین تقریب خود* $\frac{۲}{۳}$ *است. فرض کنید* $۰ < q' \leq ۵$

$$\frac{۱}{۵} \quad \frac{۲}{۵} \quad \frac{۳}{۵} \quad \frac{۲}{۳} \quad \frac{۴}{۵} \quad ۱$$

*با این حال بهترین تقریب* $\frac{۲}{۳}$ *با مخرج دقیقاً برابر با ۵ کسر* $\frac{۳}{۵}$ *است.*

$$\frac{۱}{۴} \quad \frac{۲}{۴} \quad \frac{۲}{۳} \quad \frac{۳}{۴} \quad ۱$$

*بهترین تقریب* $\frac{۲}{۳}$ *با مخرج دقیقاً ۴ کسر* $\frac{۳}{۴}$ *است.*

$$\frac{۱}{۲} \quad \frac{۲}{۳} \quad ۱$$

*و بهترین تقریب* $\frac{۲}{۳}$ *با مخرج ۲ کسر* $\frac{۱}{۲}$ *است.*

*اگر تمام مقادیر را طبق تعریف در* $|qa-p| < |q'a-p'|$ *قرار دهیم، خواهیم دید بهترین تقریب* $\frac{۲}{۳}$ *از بین کسرهای* $\frac{۳}{۵}, \frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۲}$ *کسر* $\frac{۳}{۵}$ *خواهد بود.*

در ادامه روشی برای یافتن بهترین تقریب برای یک عدد حقیقی دلخواه معرفی می‌کنیم.

**تعریف ۲-۳.** *منظور از یک بسط کسر مسلسل برای یک عدد حقیقی* $a$ *عبارتی به صورت زیر است:*

$$a = a_۰ + \cfrac{۱}{a_۱ + \cfrac{۱}{a_۲ + \cfrac{۱}{\ddots}}}$$

*که در آن* $a_۰$ *عددی صحیح و برای* $i > ۰$ *مابقی* $a_i$*ها اعداد طبیعی هستند. اگر عدد* $a$ *دارای یک کسر مسلسل به شکل بالا باشد، آنگاه می نویسیم:* $a = [a_۰; a_۱, \dots, a_k, \dots]$.

در مثال زیر بسط کسر مسلسل چند عدد حقیقی را آورده‌ایم، آن‌هایی که گویا هستند نحوه‌ی نوشتن بسط آن‌ها را نوشته‌ایم و برای غیر گویاها یک الگوریتم در پایان فصل بیان کرده‌ایم.

**مثال ۲-۴.** *بسط کسر مسلسل چند عدد حقیقی:*

۱.

$$\frac{۳}{۲} = ۱ + \frac{۱}{۲} \quad \Longrightarrow \frac{۳}{۲} = [۱; ۲].$$

۲.

$$\frac{۲}{۳} = ۰ + \frac{۱}{\frac{۳}{۲}} = ۰ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۲}} \quad \Longrightarrow \frac{۲}{۳} = [۰; ۱, ۲].$$

۳.

$$\frac{۷}{۱۹} = ۰ + \frac{۱}{\frac{۱۹}{۷}} = ۰ + \frac{۱}{۲ + \frac{۵}{۷}} = ۰ + \frac{۱}{۲ + \frac{۱}{\frac{۷}{۵}}} = ۰ + \frac{۱}{۲ + \frac{۱}{۱ + \frac{۲}{۵}}} = ۰ + \frac{۱}{۲ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{\frac{۵}{۲}}}}$$

$$= ۰ + \frac{۱}{۲ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۲ + \frac{۱}{۲}}}} \quad \Longrightarrow \frac{۷}{۱۹} = [۰; ۲, ۱, ۲, ۲].$$

۴. فرض کنیم $\varphi$ نسبت طلایی باشد. آن‌گاه:( بنابه مثال ۳-۱۰)

$$\varphi = ۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{\ddots}}} \quad \Longrightarrow \varphi = [۱; ۱, ۱, ۱, \ldots].$$

۵. فرض کنیم $e$ عدد نپر$(\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{k!})$ باشد. آن‌گاه:

$$e = ۲ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۲ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۴ + \frac{۱}{\ddots}}}}}} \quad \Longrightarrow e = [۲; ۱, ۲, ۱, ۱, ۴, \ldots, ۲k, ۱, ۱, \ldots].$$

۶. فرض کنیم $\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶\ldots$ باشد. آن‌گاه:

$$\pi = ۳ + \cfrac{۱}{۷ + \cfrac{۱}{۱۵ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۲۹۲ + \ddots}}}} \qquad \Longrightarrow \pi = [۳; ۷, ۱۵, ۱, ۲۹۲, \ldots].$$

۷.

$$\sqrt{۳} = ۱ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۲ + \ddots}}}} = [۱; \overline{۱, ۲}]$$

در پایان فصل روشی را برای به‌دست آوردن کسر مسلسل برای اعداد گنگ بیان خواهیم کرد.

**حقیقت ۲-۵.** فرض می‌کنیم $p_{-۱} := ۱$، $q_{-۱} := ۰$ و $p_۰ := a_۰$، $q_۰ := ۱$ برای $k \geq ۰$ به‌صورت بازگشتی $p_k, q_k$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} p_{k+۱} = a_{k+۱} p_k + p_{k-۱}; \\ \\ q_{k+۱} = a_{k+۱} q_k + q_{k-۱}. \end{cases}$$

برای $k$اُمین تفاضل از $a$ یعنی $\frac{\beta_k}{q_k} = \frac{q_k a - p_k}{q_k} = a - \frac{p_k}{q_k}$ تعریف می‌کنیم $\beta_k = q_k a - p_k$ که $\beta_k$ برای $k \geq -۱$، در رابطه بازگشتی

$$\beta_{k+۱} = a_{k+۱} \beta_k + \beta_{k-۱}$$

صدق می‌کند.

**تعریف ۲-۶.** فرض می‌کنیم $k \geq ۱$، کسر $\frac{p_k}{q_k} \in \mathbb{Q}$ را $k$اُمین همگرا از $a$ تعریف می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_۰; a_۱, \ldots, a_k].$$

*فرض $\zeta_k \in \mathbb{R}$، آن را $k$اُمین خارج قسمت کامل از $a$ تعریف می‌کنیم و به صورت*

$$\zeta_k = [a_k; a_{k+۱}, a_{k+۲}, \dots]$$
$$= a_k + \frac{۱}{\zeta_{k+۱}}$$

*می‌نویسیم و برای $k > ۰$ از آن‌جاکه $a_k$ها مثبت هستند $\zeta_k > ۱$.*

*بنابه حقیقت ۲-۵ و تعریف ۲-۶ مقدار $a$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:*

$$a = \frac{p_k\zeta_{k+۱} + p_{k-۱}}{q_k\zeta_{k+۱} + q_{k-۱}}.$$

*همین‌طور که در تعریف۶ـ ۲ می‌بینید $k$اُمین همگرا را از $a_۰$ تا $a_k$ در بسط کسر مسلسل $a$ و $k$اُمین خارج قسمت را از $a_k$ تا آخر بسط کسر مسلسل $a$ تعریف می‌کنیم.*

اگر $a$ برابر نسبت طلایی $\varphi = [۱; ۱, ۱, \dots]$ باشد مقادیر $p_k$، $q_k$، $\beta_k$ به‌صورت زیر هستند:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $k$ | ۰ | ۱ | ۲ | $\dots$ |
| $p_k$ | ۱ | ۲ | ۳ | $\dots$ |
| $q_k$ | ۱ | ۱ | ۲ | $\dots$ |
| $\beta_k$ | $a - ۱$ | $a - ۲$ | $۲a - ۳$ | $\dots$ |

توجه کنید که $q_k$ها دنباله‌ی فیبونانچی هستند یعنی:

$$۱ \quad ۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۵ \quad ۸ \quad ۱۳ \quad \dots.$$

متوجه می‌شویم که با افزایش $k$ مقادیر $p_k$ و$q_k$ها به صورت صعودی افزایش می‌یابند ولی $\beta_k$ها یکی در میان مثبت و منفی می‌شوند.

با استفاده از حقیقت ۲-۶ و تعریف ۲-۵ می‌توان حقیقت زیرا برای $\beta_k$ها بیان کرد.

**حقیقت ۲-۷.** *فرض می‌کنیم $k \in \mathbb{N}$ آنگاه*

$$\beta_{k+۱} = -\frac{\beta_k}{\zeta_{k+۲}}.$$

*اثبات.* بنابه تعریف ۲-۶ داریم:

$$\begin{aligned} a - \frac{p_k}{q_k} &= \frac{p_k\zeta_{k+1} + p_{k-1}}{q_k\zeta_{k+1} + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} \quad (p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1} = (-1)^k) \\ &= \frac{(-1)^k}{q_k^2(\zeta_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k})} \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از تعریف ۲-۶ داریم:

$$\beta_k = q_k a - p_k \Longrightarrow \frac{\beta_k}{q_k} = a - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k^2(\zeta_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k})}$$

از آن‌جا که $(\zeta_{k+1} = a_{k+1} + \frac{1}{\zeta_{k+2}})$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{(-1)^k}{q_k(a_{k+1} + \frac{1}{\zeta_{k+2}}) + q_{k-1}} = \frac{(-1)^k}{(a_{k+1}q_k + q_{k-1}) + \frac{q_k}{\zeta_{k+2}}} \\ &= \zeta_{k+2}\frac{(-1)^k}{q_{k+1}\zeta_{k+2} + q_k} = \zeta_{k+2}(-\beta_{k+1}) \Longrightarrow \\ \beta_{k+1} &= -\frac{\beta_k}{\zeta_{k+2}} \end{aligned}$$

چون $\zeta_k > 1$ مقدار $\beta_k$ به‌طور نمایی به صفر میل می‌کند. □

**حقیقت ۲-۸.** *هر عدد حقیقی یک بسط کسر مسلسل یکتا دارد.*

*اثبات.* با شروطی که روی $a_k$ها به‌صورت $a_0 \in \mathbb{Z}$ و هم چنین برای $k > 0$، $a_k \in \mathbb{N}$ برقرار است بنابراین برای هر عدد حقیقی یک بسط کسر مسلسل یکتا به‌دست می‌آید. □

می‌گوییم $a$ یک عدد گنگ مربعی [۴] است هرگاه جواب یک معادله‌ی درجه دوم به شکل $ba^2 + ca + d = 0$ باشد که ضرایب $b$،$c$ و $d$ همه صحیح هستند. در ادامه رابطه‌ی بین $a$ و بسط کسر مسلسل آن‌را بررسی می‌کنیم.

**لم ۲-۹.** *بسط کسر مسلسل $a$ متناوب است اگر و تنها اگر $a$ مربعی باشد.*

[۴] quadratic irrational

*اثبات.* حالت $(I)$: فرض می‌کنیم $a$ متناوب و به شکل $[\overline{a_0; a_1, \dots, a_{m-1}}]$ باشد. با استفاده از حقیقت ۲-۵ و تعریف ۲-۶ به‌دست می‌آوریم:

$$a = \frac{p_k \zeta_{k+1} + p_{k-1}}{q_k \zeta_{k+1} + q_{k-1}} \xrightarrow{k=0} \frac{p_0 \zeta_1 + p_{-1}}{q_0 \zeta_1 + q_{-1}} = \frac{a_0 \zeta_1 + 1}{\zeta_1} = a_0 + \frac{1}{\zeta_0} = \zeta_0$$

آن وقت $a = \zeta_0 = \zeta_m$ . حال در $a = \dfrac{p_{m-1}\zeta_m + p_{m-2}}{q_{m-1}\zeta_m + q_{m-1}}$ با تغییر متغیر $a = \zeta_m$ داریم:

$$a = \frac{p_{m-1} a + p_{m-2}}{q_{m-1} a + q_{m-1}} \Longrightarrow q_{m-1} a^2 + (q_{m-2} - p_{m-1}) a - p_{m-2} = 0$$

پس $a$ مربعی است. حال فرض می‌کنیم $a$ به شکل $[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, \overline{a_n, \dots, a_{n+m-1}}]$ باشد آن‌گاه $\zeta_n = \zeta_{m+n}$ است پس در

$a = \dfrac{p_{m-1}\zeta_m + p_{m-2}}{q_{m-1}\zeta_m + q_{m-1}}$ با دوبار تغییر اندیس $m$ به $n$ و به $m+n$ داریم:

$$a = \frac{p_{n-1}\zeta_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\zeta_n + q_{n-1}} \Longrightarrow \zeta_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2} a}{q_{n-1} a - p_{n-1}} \qquad (1)$$

$$a = \frac{p_{n+m-1}\zeta_{n+m} + p_{n+m-2}}{q_{n+m-1}\zeta_{n+m} + q_{n+m-1}} \Longrightarrow \zeta_n = \frac{p_{n+m-2} - q_{n+m-2} a}{q_{n+m-1} a - p_{n+m-1}} \quad (\zeta_n = \zeta_{m+n}) \qquad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{p_{n-2} - q_{n-2} a}{q_{n-1} a - p_{n-1}} = \frac{p_{n+m-2} - q_{n+m-2} a}{q_{n+m-1} a - p_{n+m-1}}$$

با یک محاسبه به‌دست می‌آوریم:

$$(q_{n-1} q_{n+m-2} - q_{n-2} q_{n+m-1}) a^2 + (p_{n-2} q_{n+m-1} q_{n-1} p_{n+m-1} - p_{n-1} q_{n+m-2} - p_{n+m-2} q_{n-1}) a$$
$$+ (p_{n-1} p_{n+m-2} - p_{n-2} p_{n+m-1}) = 0$$

که باز $a$ مربعی است. هرگاه چنین نباشد ضریب $a^2$ برابر صفر می‌باشد بنابراین $q_{n-1} q_{n+m-2} = q_{n-2} q_{n+m-1}$ است. حال با استفاده از تعریف ۲-۶ داریم $1 = (q_{n+m-1}, q_{n+m-2})$ و $1 = (q_{n-1}, q_{n-2})$. بنابراین باید $q_{n+m-1}$، مقدار $q_{n-1}$ را عاد کند و هم چنین $q_{n+m-1}$، مقدار $q_{n-1} q_{n+m-2}$ را عاد کنید که این غیر ممکن است زیرا $q_{n-1} < q_{n+m-2}$.

حالت $(II)$:

فرض می‌کنیم $a$ مربعی باشد پس به شکل $ba^2 + ca + d = 0$ است و با حل معادله‌ی درجه دوم با روش دلتا داریم $a = \dfrac{P_0 + \sqrt{D}}{Q_0}$ که در آن $Q_0 \neq 0$ ، همین طور $P_0$ عدد صحیح و $D > 0$ هم

چنین مربع کامل نیست. با تعریف ۲-۶ داریم:

$$a = \zeta_{۰} = a_{۰} + \frac{۱}{\zeta_{۱}}$$

و با حل معادله‌ی درجه دوم به‌دست می‌آوریم:

$$a = \frac{P_{۰} + \sqrt{D}}{Q_{۰}}$$

با استفاده از این دو مقدار $a$ داریم:

$$\begin{aligned}\zeta_{۱} &= \frac{۱}{\dfrac{P_{۰}+\sqrt{D}}{Q_{۰}} - a_{۰}} = \frac{Q_{۰}}{P_{۰}+\sqrt{D}-Q_{۰}a_{۰}} \times \frac{-P_{۰}+\sqrt{D}+Q_{۰}a_{۰}}{-P_{۰}+\sqrt{D}+Q_{۰}a_{۰}} \\ &= \frac{\sqrt{D}-P_{۰}+Q_{۰}a_{۰}}{D-(P_{۰}-a_{۰}Q_{۰})^{۲}} = \frac{\sqrt{D}+P_{۱}}{Q_{۱}}\end{aligned}$$

که از این رابطه مقادیر $P_k$ها و $Q_k$ها و $a_k$ها به‌صورت بازگشتی زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} P_{k+۱} = a_{k+۱}Q_k - P_k; \\ Q_{k+۱} = \dfrac{D - P_{k+۱}^{۲}}{Q_k}; \\ a_{k+۱} = [\zeta_{k+۱}]. \end{cases}$$

□

برای فهم بهتر این لم دو مثال زیر را می‌آوریم. در مثال اول فرض می‌کنیم $a$ مربعی و در مثال دوم متناوب است.

**مثال ۲-۱۰.** *۱. فرض کنید $\varphi$ نسبت طلایی است که در معادله‌ی $\varphi^{۲} - \varphi - ۱ = ۰$ صدق می‌کند، قرار می‌دهیم $(\varphi = a)$ بنابراین*

$$\begin{aligned} a &= \frac{۱+a}{a} = ۱ + \frac{۱}{a} \quad (a = \frac{۱+a}{a}) \\ a &= ۱ + \frac{۱}{\dfrac{۱+a}{a}} = ۱ + \frac{۱}{۱+\dfrac{۱}{a}} \\ &= ۱ + \frac{۱}{۱+\dfrac{۱}{\dfrac{۱+a}{a}}} = \cdots = ۱ + \frac{۱}{۱+\dfrac{۱}{۱+\dfrac{۱}{۱+\dfrac{۱}{\ddots}}}} \Longrightarrow a = [\overline{۱; ۱, ۱, \cdots}]. \end{aligned}$$

۲. *عدد $a=\sqrt{۳۴}$ را در نظر بگیرید، با استفادی از فرمول* $a=\dfrac{P_۰+\sqrt{D}}{Q_۰}$ *داریم* $\sqrt{۳۴}=\dfrac{۰+\sqrt{۳۴}}{۱}$ *و از فرمول‌های*

$$\begin{cases} P_{k+۱}=a_{k+۱}Q_k-P_k; \\ Q_{k+۱}=\dfrac{D-P_{k+۱}^{۲}}{Q_k}; \\ a_{k+۱}=[\zeta_{k+۱}]; \\ \zeta_{k+۱}=\dfrac{P_{k+۱}+\sqrt{D}}{Q_{k+۱}}; \end{cases}$$

*مقادیر زیرا بدست می‌آوریم:*

| $k$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_k$ | ۰ | ۵ | ۴ | ۴ | ۵ |
| $Q_k$ | ۱ | ۹ | ۲ | ۹ | ۱ |

*پس* $\sqrt{۳۴}=[۵;\overline{۱,۴,۱,۱۰}]$ . *می‌بینیم که بسط کسر مسلسل $a$ متناوب است و جواب معادله‌ی* $\frac{۱}{۲}a^{۲}-۱۷=۰$ *است.*

**حقیقت ۲-۱۱.** *بهترین تقریب‌های گویا از $a$ همان همگراهای $a$ هستند.*

*اثبات.* بنابه تعریف ۲-۶ می‌دانیم $\dfrac{p_k}{q_k}$ همگرایی از $a$ است. حال فرض می‌کنیم $\dfrac{p_n}{q_n}$ بهترین تقریب از $a$ باشد.

حالت(I) : فرض می‌کنیم $k\leq n$ و بهترین تقریب همگرا نباشد. با استفاده از رابطه‌ای که در اثبات حقیقت ۲-۷ آوردیم، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{p_k}{q_k}-\frac{p_{k-۱}}{q_{k-۱}}=\frac{(-۱)^{k-۱}}{q_kq_{k-۱}}.$$

هرگاه $k$ زوج باشد $\dfrac{p_۲}{q_۲}-\dfrac{p_۱}{q_۱}=\dfrac{-۱}{q_۲q_۱}<۰$ زیرا $q_k$ها مثبت هستند و هرگاه $k$ فرد باشد $\dfrac{p_۱}{q_۱}-\dfrac{p_۰}{q_۰}=\dfrac{۱}{q_۱}>۰$.

نتیجه هرگاه $k$ زوج باشد تقریب‌های کوچکتر از $a$ به $a$ و هرگاه $k$ فرد باشد تقریب‌های بزرگ‌تر از $a$ به $a$ میل می‌کنند.

(۱) فرض می‌کنیم $\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_0}{q_0}$:

$$|q_na-p_n| = q_n|a-\frac{p_n}{q_n} \geq |a-\frac{p_n}{q_n}| \xrightarrow{a_0=\frac{p_0}{q_0}>\frac{p_n}{q_n}} |q_na-p_n| > |a-a_0|$$

و این غیر ممکن است.

(۲) فرض می‌کنیم $\frac{p_n}{q_n} > \frac{p_1}{q_1}$:

$$\begin{aligned} |q_na-p_n| = q_n|a-\frac{p_n}{q_n}| \xrightarrow{a<\frac{p_1}{q_1}} q_n|a-\frac{p_n}{q_n}| &> q|\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_n}{q_n}| \\ &\geq q|\frac{p_1q_n-q_1p_n}{q_1q_n}| \geq \frac{q_n}{q_1q_n} = \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_1} \qquad (*) \end{aligned}$$

$$|q_ka-p_k| < \frac{1}{q_{k+1}} \xrightarrow{k=0} |a-\frac{p_0}{q_0}| < \frac{1}{q_1} \xrightarrow{\frac{p_0}{q_0}=a_0} |a-a_0| < \frac{1}{a_1} \qquad (**)$$

می‌بینیم که روابط (*) و (**) با هم در تناقض هستند.

(۳) فرض می‌کنیم $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_n}{q_n} < \frac{p_1}{q_1}$:

که این همگرا باید بین مرتبه‌ای از $k$ و $k+2$ باشد که بر طبق زوج یا فرد بودن $k$ متفاوت است.

هرگاه $k$ زوج باشد، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{q_kq_{k+1}} = |\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}-\frac{p_k}{q_k}| > |\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_k}{q_k}| \geq \frac{1}{q_nq_k} \Longrightarrow \frac{1}{q_kq_{k+1}} > \frac{1}{q_nq_k} \Longrightarrow q_n \geq q_{k+1}$$

$$\begin{aligned} |q_na-p_n| &= q_n|a-\frac{p_n}{q_n}| > q_n|\frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}-\frac{p_n}{q_n}| \geq q_n\frac{1}{q_nq_{k+2}} = \frac{1}{q_{k+2}} && (3) \\ |q_{k+1}a-p_{k+1}| &< \frac{1}{q_{k+2}} && (4) \end{aligned}$$

از روابط (۳) و (۴) نتیجه می‌شود:

$$|q_na-p_n| > \frac{1}{q_{k+2}} > |q_{k+1}a-p_{k+1}|$$

بنابراین $\frac{p_n}{q_n}$ بهترین تقریب نیست. برای وقتی $k$ فرد باشد نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم و می‌بینیم که باز $\frac{p_n}{q_n}$ بهترین تقریب نیست.

حالت (II): هرگاه $k < n$ باشد، به‌دست می‌آوریم:

$$|q_k a - p_k| > \frac{۱}{q_k + q_{k+۱}} \geq \frac{۱}{q_{n-۱} + q_n}$$

در حالی که $|q_n a - p_n| < \frac{۱}{q_{n+۱}}$ اما هرگاه $|q_k a - p_k| < |q_n a - p_n|$ آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned}
|q_n a - p_n| &< \frac{۱}{q_{n+۱}} \\
|q_k a - p_k| &> \frac{۱}{q_{n-۱} + q_n} \\
|q_k a - p_k| &< |q_n a - p_n| \Longrightarrow \frac{۱}{q_{n-۱} + q_n} < \frac{۱}{q_{n+۱}} \Longrightarrow q_{n+۱} < q_{n-۱} + q_n
\end{aligned}$$

که این غیر ممکن است، بنابراین $k = n$. □

در ادامه بسط‌های اُسترُفسکی اعداد طبیعی و حقیقی را به‌دست می‌آوریم و با استفاده از این بسط‌ها این اعداد را با هم مقایسه می‌کنیم.

**حقیقت ۲-۱۲.** *هرگاه $N \in \mathbb{N}$ ، یک عدد طبیعی باشد می‌توان $N$ را به‌طور یکتا به‌صورت*

$$N = \sum_{k=۰}^{n} b_{k+۱} q_k \qquad (*)$$

*نوشت که $b_k \in \mathbb{N}$ به‌طوری‌که $b_۱ < a_۱, b_k < a_k$ و هرگاه $b_k = a_k$ آن‌گاه $b_{k-۱} = ۰$ .*

*بسط(*) را بسط اُسترُفسکی عدد طبیعی $N$ بر پایه‌ی $q_k$ها می‌گوییم.*

**مثال ۲-۱۳.** *می‌دانیم که مقادیر $q_k$ها با فرض نسبت طلایی به‌صورت*

$$q_{-۱} = ۰ \quad , q_۰ = ۱ \quad , q_۱ = ۱ \quad , q_۲ = ۲ \quad , q_۳ = ۳ \quad , q_۴ = ۵ \quad , q_۵ = ۸ \quad , q_۶ = ۱۳ \quad , \cdots$$

*می‌باشند. حال فرض $N = ۳۱$ بنابراین بسط اُسترُفسکی بر پایه‌ی نسبت طلایی آن به‌صورت $b_۸ q_۷ + b_۶ q_۵ + b_۳ q_۲ = ۲ + ۸ + ۲۱ = ۱۰ + ۲۱ = ۳۱$ که مقادیر $b_k$ها به‌صورت $۱, ۰, ۱, ۰, ۰, ۱, ۰, ۰$ می‌شوند.*

بسط اُسترُفسکی تمام اعدادی که در مثال‌های این فصل آورده‌ایم بر مبنای نسبت طلایی هستند. حال با استفاده از نوشتن بسط‌های اُسترُفسکی اعداد طبیعی می‌توانیم آن‌ها را با هم مقایسه کنیم.

**حقیقت ۲-۱۴.** *دو عدد طبیعی* $N, M \in \mathbb{N}$ *، را با* $N \neq M$ *در نظر بگیرید. فرض کنید* $\sum_k b_{k+1} q_k$ *و* $\sum_k c_{k+1} q_k$ *دو نمایش اُسترُفسکی از* $N$ *و* $M$ *باشند، هم چنین* $n \in \mathbb{N}$ *عددی طبیعی و ماکسیمال باشد به‌طوری‌که* $b_n \neq c_n$ *آن‌گاه* $N < M$ *اگر و تنها اگر* $b_n < c_n$.

*اثبات.* چون ترتیب روی اعداد طبیعی قاموسی است به این نتیجه می‌رسیم. $\square$

برای امتحان اعداد ۳۱ و ۲۰ را در نظر بگیرید بسط اُسترُفسکی آن‌ها به‌صورت:

$$M = ۳۱ = ۲۱ + ۸ + ۲ = \sum_{k=۰}^{n} b_{k+۱} q_k = b_۱ q_۰ + b_۲ q_۱ + b_۳ q_۲ + \cdots$$

که مقادیر $b_k$ها به ترتیب به‌صورت ۱ ,۰ ,۱ ,۰ ,۰ ,۱ ,۰ ,۰ یعنی $b_۱ = ۰, b_۲ = ۰, b_۳ = ۱, b_۴ = ۰,$ $b_۵ = ۰, \ldots$ هستند و

$$N = ۲۰ = ۱۳ + ۵ + ۲ = \sum_{k=۰}^{n} c_{k+۱} q_k = c_۱ q_۰ + c_۲ q_۱ + c_۳ q_۲ + \cdots$$

که مقادیر $c_k$ها به ترتیب به‌صورت ۱ ,۰ ,۱ ,۰ ,۱ ,۰ ,۰ یعنی $c_۱ = ۰, c_۲ = ۰, c_۳ = ۱, c_۴ = ۰,$ $c_۵ = ۱, \ldots$ اولین جایی که $b_n \neq c_n$ است در $n = ۸$ است که $b_۸ = ۱$ و $c_۸ = ۰$ پس $b_۸ > c_۸$ آن‌گاه $M > N$.

**حقیقت ۲-۱۵.** *فرض کنیم* $n \in \mathbb{N}$ *زوج باشد آن‌گاه*

$$-\beta_n = a_{n+۲} \beta_{n+۱} + a_{n+۴} \beta_{n+۳} + a_{n+۶} \beta_{n+۵} + \cdots$$

*نمایش اُسترُفسکی از* $-\beta_n$ *است.*

*اثبات.*

$$\beta_{n+۲} = a_{n+۲} \beta_{n+۱} + \beta_n \qquad \Longrightarrow$$

$$-\beta_n = a_{n+۲} \beta_{n+۱} - \beta_{n+۲}$$

و می‌دانیم که $\beta_{n+۴} = a_{n+۴}\beta_{n+۳} + \beta_{n+۲}$ بنابراین داریم:

$$-\beta_n = a_{n+۲}\beta_{n+۱} + a_{n+۴}\beta_{n+۳} - \beta_{n+۴}$$

باز از آن‌جایی که $\beta_{n+۶} = a_{n+۶}\beta_{n+۵} + \beta_{n+۴}$ به‌دست می‌آوریم:

$$-\beta_n = a_{n+۲}\beta_{n+۱} + a_{n+۴}\beta_{n+۳} + a_{n+۶}\beta_{n+۵} + \cdots .$$

$\square$

**حقیقت ۲-۱۶.** *فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ فرد باشد، آن‌گاه نمایش اُسترُفسکی عدد $-\beta_n$ به‌صورت*

$$-\beta_n = \beta_{n-۱} + (a_{n+۱} - ۱)\beta_n + a_{n+۳}\beta_{n+۲} + a_{n+۵}\beta_{n+۴} + \cdots$$

*است.*

*اثبات.*

$$\beta_{n+۱} = a_{n+۱}\beta_n + \beta_{n-۱} \xrightarrow{-\beta_n} \quad \beta_{n+۱} - \beta_n = a_{n+۱}\beta_n + \beta_{n-۱} - \beta_n$$

$$-\beta_n = a_{n+۱}\beta_n + \beta_{n-۱} - \beta_n - \beta_{n+۱}$$

$$-\beta_n = \beta_{n-۱} + (a_{n+۱} - ۱)\beta_n - \beta_{n+۱}$$

و می‌دانیم که $(\beta_{n+۳} = a_{n+۳}\beta_{n+۲} + \beta_{n+۱})$ بنابراین داریم:

$$-\beta_n = \beta_{n-۱} + (a_{n+۱} - ۱)\beta_n + a_{n+۳}\beta_{n+۲} - \beta_{n+۳}$$

باز از آن‌جایی که $(\beta_{n+۵} = a_{n+۵}\beta_{n+۴} + \beta_{n+۳})$ به‌دست می‌آوریم:

$$-\beta_n = \beta_{n-۱} + (a_{n+۱} - ۱)\beta_n + a_{n+۳}\beta_{n+۲} + a_{n+۵}\beta_{n+۴} + \cdots .$$

$\square$

**حقیقت ۲-۱۷.** *فرض کنیم $c \in \mathbb{R}$ عددی حقیقی باشد به‌طوری‌که $-\frac{1}{\zeta_1} \leq c < 1 - \frac{1}{\zeta_1}$ آن‌گاه می‌توان $c$ را به‌طور یکتا به‌صورت*

$$c = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}\beta_k$$

*نوشت که در آن $b_k \in \mathbb{N}$، $0 \leq b_1 < a_1$ برای $k > 1$ داریم $0 \leq b_k < a_k$، هم چنین $b_k = 0$ هرگاه $b_{k+1} = a_{k+1}$ و برای تعداد نامتناهی $k$ فرد $b_k < a_k$ است.*

*هر بسط به‌صورت بالا را یک بسط اُستِرُفسکی عدد حقیقی $c$ بر پایه‌ی $a$ می‌گوییم.*

حال می‌خواهیم با استفاده از این بسط اعداد حقیقی را با هم مقایسه کنیم.

**حقیقت ۲-۱۸.** *فرض کنیم $\beta_0 > 0$، دو عدد حقیقی $x, y \in \mathbb{R}$ با رابطه‌ی $x \neq y$ در نظر بگیرید که دارای دو نمایش اُستِرُفسکی $\sum c_{k+1}\beta_k$، $\sum b_{k+1}\beta_k$ باشند. فرض $n \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی و مینیمال باشد به‌طوری‌که $b_{n+1} \neq c_{n+1}$ آن‌گاه $x \leq y$ اگر و تنها اگر*

1. *$b_{n+1} > c_{n+1}$ و $n$ فرد باشد، یا*

2. *$c_{n+1} > b_{n+1}$ و $n$ زوج باشد.*

*اثبات.* حالت $(I)$: فرض می‌کنیم $b_{n+1} > c_{n+1}$ آن‌گاه داریم:

$b_1 = c_1, b_2 = c_2, \cdots, b_n = c_n$ حال قرار می‌دهیم $d_{n+1} = b_{n+1} - c_{n+1}$

$$\begin{aligned} x - y &= d_{n+1}\beta_n + d_{n+2}\beta_{n+1} + d_{n+3}\beta_{n+2}\cdots \\ &= d_{n+1}\beta_n + d_{n+2}\beta_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} d_{k+1}\beta_k \end{aligned}$$

از آن‌جایی که $b_{n+1} > c_{n+1}$ بنابراین $d_{n+1} > 0$ و از فرضیات حقیقت ۲-۱۷ داریم $d_{n+2} < a_{n+2}$ هم چنین برای $k \geq 3$ داریم $-a_k \leq d_k \leq a_k$.

حال فرض کنیم $n$ فرد، ثابت می‌کنیم $x - y \leq 0$.

از آن‌جا که $\beta_0 > 0$ و از حقیقت ۲-۷ داریم $\beta_{k+1} = \frac{-\beta_k}{\zeta_{k+2}}$ هم چنین $\beta_k$ها یکی در میان مثبت و منفی هستند، و هم چنین $n$ فرد فرض شد بنابراین $\beta_n < 0$ و $\beta_{n+1} > 0$ است. از آن‌جا که

در بسط کسر مسلسل $a_0$ صحیح و مابقی $a_i$ ها مثبت، همین طور با فرض مسئله داریم $d_{n+1} \leq a_{n+2} - 1$. بنابراین با استفاده ازحقیقت ۲-۱۶ به‌دست می‌آوریم:

$$-\beta_n = \beta_{n-1} + (a_{n+1} - 1)\beta_n + a_{n+3}\beta_{n+2} + \cdots$$

$$x - y = d_{n+1}\beta_n + d_{n+2}\beta_{n+1} + d_{n+3}\beta_{n+2} + \cdots$$

و می‌دانیم که $(d_{n+1} \leq a_{n+2} - 1, d_{n+2} < a_{n+2})$ بنابراین داریم:

$$x - y \leq \beta_n + (a_{n+2} - 1)\beta_{n+1} + \sum_{k \geq n+3, k \text{زوج}} a_{k+1}\beta_k$$

از آن‌جا که روابط $1 < d_{n+1} < 0$ و $1 - d_{n+1} < d_{n+2} < a_{n+2}$ برقرار هستند بنابراین طرف راست برابر است با:

$$= \beta_n - \beta_{n+1} + a_{n+2}\beta_{n+1} + \sum_{k \geq n+3, k \text{زوج}} a_{k+1}\beta_k$$

$$= \beta_n - \beta_{n+1} \sum_{k \geq n+2, k \text{زوج}} a_{k+1}\beta_k$$

هم چنین می‌دانیم $(\sum_{k \geq n+2, k \text{زوج}} a_{k+1}\beta_k = -\beta_n)$ بنابراین به‌دست می‌آوریم:

$$= -\beta_{n+1} < 0 \Longrightarrow x < y.$$

حال فرض کنیم $n$ زوج و رابطه‌ی $c_{n+1} > b_{n+1} \Longrightarrow d_{n+1} < 0$ برقرار است، آنگاه ثابت می‌کنیم $x - y > 0$. از آن‌جا که $\beta_0 < 0$ بنابراین $\beta_n > 0$ آن گاه $\beta_{n+1} < 0$ و از آن‌جا که $d_{n+1} \leq a_{n+2} - 1$ بنابراین با استفاده از حقیقت ۲-۱۵ داریم:

$$-\beta_n = a_{n+2}\beta_{n+1} + a_{n+4}\beta_{n+3} + a_{n+6}\beta_{n+5} + \cdots$$

$$x - y = d_{n+1}\beta_n + d_{n+2}\beta_{n+1} + d_{n+3}\beta_{n+2} \cdots$$

و می‌دانیم که $(d_{n+1} \leq a_{n+2} - 1, d_{n+2} < a_{n+2})$ بنابراین داریم:

$$x - y \geq \beta_n + (a_{n+2} - 1)\beta_{n+1} + \sum_{k \geq n+3, k \text{فرد}} a_{k+1}\beta_k$$

از آن‌جا که روابط $0 < d_{n+1}$ و $d_{n+1} < d_{n+2} < a_{n+2} - 1$ برقرار هستند بنابراین طرف راست برابر است با:

$$= \beta_n - \beta_{n+1} + a_{n+2}\beta_{n+1} + \sum_{k \geq n+3, k \text{فرد}} a_{k+1}\beta_k$$

$$= \beta_n - \beta_{n+1} \sum_{k \geq n+2, k \text{فرد}} a_{k+1}\beta_k$$

هم چنین می‌دانیم $(\sum_{k \geq n+2, k \text{فرد}} a_{k+1}\beta_k = -\beta_n)$ بنابراین به‌دست می‌آوریم:

$$= -\beta_{n+1} > 0 \Longrightarrow x > y.$$

هر دو حالت را برای وقتی $\beta_0 < 0$ نیز داریم. □

حال می‌خواهیم نمایش اُسترُفسکی مجموع دو عدد طبیعی که هر کدام نمایش اُسترُفسکی مجزا دارند را به دست آوریم. فرض می‌کنیم $a$ مربعی و بسط کسر مسلسل آن متناوب باشد. عدد طبیعی $c$ را به‌صورت $c := \max_{k \in \mathbb{N}} a_k$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $\sum_a = \{0, \ldots, c\}$. علامت $\sum_a^*$ را مجموعه‌ای از کلمات با طول متناهی روی $\sum_a$ قرار می‌دهیم.

عدد طبیعی $N \in \mathbb{N}$ را در نظر بگیرید به‌طوری‌که $\sum_{k=0}^{n} b_{k+1}q_k$ نمایش اُسترُفسکی $N$ باشد، آن‌گاه $\rho_a(N)$ را $\sum_a$کلمه‌های $b_{n+1}b_n \cdots b_1$ تعریف می‌کنیم.

فرض می‌کنیم $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\sum_a^*)^n$. برای هر $\alpha_i$ ضرایب $b_k$ها در بسط اُسترُفسکی را به‌دست می‌آوریم و ماکسیمم طول از این $b_k$های به‌دست آمده را برابر $m$ قرارمی‌دهیم، آن‌گاه هر $\alpha_i$ که طول آن کمتر از $m$ است را با اضافه کردن هر تعداد لازم $0$ به آن $\alpha_i$ طول آن را برابر $m$ می‌کنیم و آن را $\alpha_i'$ می‌نامیم. مجموعه‌ی همه $\alpha_i'$ را با $0^*\rho_a(\alpha_i)$ نشان می‌دهیم. هم‌آمیخت [۵] $\alpha$ را کلمه‌ی $\alpha_1 * \cdots * \alpha_n \in (\sum_a^n)^*$ تعریف می‌کنیم که $i$اُمین حرف آن شامل $i$اُمین حرف هر یک از $\alpha_1', \ldots, \alpha_n'$ ها می‌باشد.

در ادامه مراحل به‌دست آوردن $\alpha'$، $\rho_\alpha(X)$ و $\sum_a^*$ را با مثال بیان می‌کنیم.

مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{N}^n$ را $a$شناخت‌پذیر می‌گوییم هرگاه هم‌آمیخت از آن با استفاده از یک ماشین متناهی [۶] به‌دست بیاید.

[۵] convolution
[۶] finite automaton

هدف ما تعریف کلی از $a$تشخیص‌پذیر بودن یک مجموعه و ماشین متناهی نیست ولی یک تعریف جزئی از آن‌ها را در این‌جا می‌آوریم. مجموعه‌ی $X \subseteq \mathbb{N}^n$ را $a$تشخیص‌پذیر می‌گوییم اگر و تنها اگر در ساختار $(\mathbb{N}, +, V_a)$ تعریف‌پذیر باشد، که در آن $a \in \mathbb{N}$ و $V_a : \mathbb{N} \setminus \{۰\} \longrightarrow \mathbb{N}$ تابعی است که هر عدد طبیعی $n > ۰$ را به بزرگترین توانی از $a$ می‌نگارد که $n$ را می‌شمارد. به عبارتی دیگر $V_a(n) = a^k$ اگر و تنها اگر $a^k \mid n$ و $a^{k+۱} \nmid n$. برای مطالعه‌ی بیشتر درباره‌ی مجموعه‌های $a$تشخیص‌پذیر به [۱۵] مراجعه کنید.

می‌گوییم $X$ مجموعه‌ای $a$تشخیص‌پذیر است اگر و تنها اگر توسط یک ماشین متناهی (اتوماتون) تولید شود. ماشین متناهی به یک پنج‌تایی $M = (Q, \Sigma, \delta, q_۰, F)$ گفته‌می‌شود که شامل: (۱) $Q$ یک مجموعه متناهی از حالات، (۲) $\Sigma$ یک مجموعه متناهی از نمادهای ورودی موسوم به الفبا، (۳) $q_۰$ حالت آغازین، (۴) $F$ مجموعه‌ی حالات نهایی $F \subseteq Q$ و (۵) $\delta$ تابع انتقال $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$. در کل این تعریف بیان می‌کند که هر حالت از ماشین با هر یک از نمادهای الفبا به چه حالت دیگری از ماشین منتقل خواهدشد. مثال $\delta(q_i, a) = q_j$ یعنی حالت $q_i$ با نماد الفبایی $a$ به حالت $q_j$ منتفل می‌شود. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد ماشین متناهی به [۱۸] مراجعه کنید.

**مثال ۲-۱۹.** *فرض $a = [۱; \overline{۱}]$ همان نسبت طلایی باشد بنابراین $c = ۱$ و $\sum_a = \{۰, ۱\}$ هم چنین مجموعه‌ی $\sum_a^*$ را به‌صورت زیر می‌سازیم:*

$$\sum_a^* = \{(۰, ۱), (۰, ۱, ۰), (۰, ۰, ۱), \ldots\}.$$

*فرض می‌کنیم $\alpha = (۷, ۱۳, ۲۰)$ بنابراین بعد از محاسبه‌ی ضرایب $b_k$های $\alpha$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:*

$$\alpha = ((۰, ۰, ۱, ۰, ۱), (۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۱), (۰, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱)) \in (\sum_a^*)^n$$

*می‌بینید که ضرایب $b_k$ها در هر یک از بسط‌های استرافسکی این اعداد به‌صورت $\alpha_۱ = ۷ = (۰, ۰, ۱, ۰, ۱)$، $\alpha_۲ = ۱۳ = (۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۱)$ و $\alpha_۳ = ۲۰ = (۰, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۱)$ می‌باشند بنابراین بیشترین طول این اعداد $m = ۷$ می‌شود. حال با اضافه کردن ۰ به هر بسط طول آن‌ها را برابر ۷ می‌کنیم در نتیجه $\alpha'_i$ هر کدام به‌صورت زیر می‌باشد*

$\alpha'_1 = (۰, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۰)$ ، $\alpha'_2 = (۱, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰)$ ، $\alpha'_3 = (۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۰)$

*بنابراین $۰^*\rho_a$ برابر است با:*

$$۰^*\rho_a(۷, ۱۳, ۲۰) = ((۰, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۰), (۱, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰), (۱, ۰, ۱, ۰, ۱, ۰, ۰))$$

*حال هم‌آمیخت $\alpha$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:*

$$((۰, ۱, ۱), (۰, ۰, ۰), (۱, ۰, ۱), (۰, ۰, ۰), (۱, ۰, ۱), (۰, ۰, ۰), (۰, ۰, ۰))$$

*که با استفاده از یک ماشین متناهی $a$شناخت‌پذیر است.*

**حقیقت ۲-۲۰.** *فرض می‌کنیم $a$ مربعی باشد آن‌گاه $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \quad : \quad x + y = z\}$ ، $a$شناخت‌پذیر است.*

*اثبات.* از آن‌جایی که $x$ و $y$ و $z$ و $x + y$ همگی $a$شناخت‌پذیر هستند و با استفاده از یک ماشین متناهی به‌دست می‌آیند پس این مجموعه نیز $a$شناخت‌پذیر است. $\square$

با الگوریتم زیر می‌توانیم بسط کسر مسلسل عدد اعشاری $x$ را به‌دست می‌آوریم:

۱. $x_0 = x$

۲. $k = 0$

۳. $a_k = \lfloor x_k \rfloor$

۴. اگر $x_k$ یک عدد صحیح است خاتمه

۵. در غیر این صورت $x_{k+1} = \dfrac{1}{x_k - a_k}$

۶. به مرحله‌ی ۲ باز گرد و قرار بده $k = k + 1$.

در فصل بعدی ساختار $\mathcal{R}_a \ := \ (\mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}a)$ را درون ساختار $\mathcal{B} \ := \ (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), s_{\mathbb{N}}, \in)$ تعبیر می‌کنیم. برای این کار مجموعه‌هایی را از روی ساختار $\mathcal{B}$ و با استفاده از بسط‌های اُسترُفسکی

که در این فصل گفته‌شد، می‌سازیم. بعد از آن با نگاشت‌هایی که تولید می‌کنیم یک جمع و ترتیب روی این مجموعه‌ها تعریف می‌کنیم. با استفاده از این نگاشت‌ها در پایان ساختار $\mathcal{R}_a$ تولید می‌شود.

هدف کلی فصل بعدی : اثبات تصمیم‌پذیری ساختار $\mathcal{R}_a$ که در آن $a$ یک عدد مربعی با تعبیر درون ساختار تصمیم‌پذیر $\mathcal{B}$ است.

# فصل ۳

# تعبیر $\mathcal{R}_a$ در $\mathcal{B}$

در سرتاسر این فصل عدد مربعی $a$ را ثابت و عضو بازه‌ی (۱/۵, ۲) در نظر می‌گیریم.

ساختار $\mathcal{R}_a = (\mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}a)$ را در زبان $L = \{<, +, p(x), q(x)\}$ در نظر بگیرید. در این زبان $p(x)$ یک محمول برای مجموعه‌ی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ و $q(x)$ یک محمول برای $\mathbb{Z}_a$ است (وجود دارد $u \in \mathbb{Z}$ که $x = au$). ساختار $\mathcal{R}_{qa} = (\mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}qa)$ که در آن $0 \neq q \in \mathbb{Q}$ را در زبان $L = \{<, +, p(x), r(x)\}$ در نظر بگیرید. در این زبان $p(x)$ یک محمول برای مجموعه‌ی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ و $r(x)$ یک محمول برای $\mathbb{Z}_{qa}$ است به‌طوری‌که (وجود دارد $t \in \mathbb{Z}$ که $x = aqt$). این دو ساختار در یگدیگر قابل تعبیرند، با استفاده از $q = \dfrac{n}{m}$ برای $m, n \in \mathbb{R}$ و با استفاده از جمله‌ی زیر:

$$t \in \mathbb{Z}_{qa} \iff \exists u \in \mathbb{Z}_a \quad mu = nt.$$

فرض می‌کنیم $[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ بسط کسر مسلسل $a$ باشد. از آنجا که $1/5 < a < 2$ فرض شد و بنابه الگوریتمی که در فصل ۳ آوردیم $a_0 = a_1 = 1$ است. هم چنین در فصل ۳ ثابت کردیم که بسط کسر مسلسل $a$ متناوب است اگر وتنها اگر $a$ مربعی باشد. فرض می‌کنیم $a$ به شکل زیر باشد:

$$[a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \overline{a_{\xi+1}, \ldots, a_{\xi+\nu}}].$$

از آنجا که $a$ مربعی است کسر مسلسل آن متناوب است؛ همان طور که در کسر مسلسل مشاهده می‌کنید دوره تناوب از $\xi + 1$ تا $\xi + \nu$ است، طول این دوره تناوب را با $\nu$ نشان می‌دهیم. ماکسیمم مقدار $a_i$ که در این کسر ظاهر می‌شود را برابر با $\mu$ تعریف می‌کنیم. از آنجا که $a_0 = 1$ پس مقدار $\beta_0$ که از رابطه $q_k a - p_k$ به‌دست می‌آید برابر است با $q_0 a - p_0 = a - 1$ بنابراین $\beta_0$ مثبت است؛ به‌علاوه از فصل ۳ داریم $a = a_0 + \frac{1}{\zeta_1} = 1 + \frac{1}{\zeta_1}$. بنابراین بازه‌ی $[-\frac{1}{\zeta_1}, 1 - \frac{1}{\zeta_1})$ که در حقیقت ۲-۱۷به آن اشاره شده‌است معادل با بازه‌ی $[1 - a, 2 - a)$ می‌شود و از آنجا که طول این بازه برابر یک است آن را با $I$ نشان می‌دهیم. هرگاه $\sum_k b_{k+1}\beta_k$ نمایش اُسترُفسکی یک عدد حقیقی در بازه‌ی $I$ و $\sum_k b_{k+1}q_k$ نمایش اُسترُفسکی یک عدد طبیعی باشند آنگاه بنابه حقیقت‌های ۲-۱۶ و ۲-۱۵ داریم $b_1 = 0$ که ضریب $\beta_0$ در بسط اُسترُفسکی است، بنابراین $\beta_0$ نمی تواند به تنهایی نمایش اُسترُفسکی هیچ عددی باشد. همین طور با توجه به $q_k$ها:

$$q_0 = 1, q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3, \ldots$$

و از آن‌جا که $b_1 = 0$ و ضریب $q_0$ است بنابراین مشاهده می‌کنید که در بسط اُسترُفسکی یک عدد طبیعی $q_1$ ظاهر می‌شود نه $q_0$.

ساختار دوبخشی $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), s_{\mathbb{N}}, \in)$ را با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم. در این ساختار، دو بخش $\mathbb{N}$ و $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ قرار دارند. در آن $s_{\mathbb{N}}$ را تابع تالی روی $\mathbb{N}$ و $\in$ را رابطه تعلق روی $\mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ تعریف می‌کنیم: می‌نویسیم $\in (t, X)$ اگر وتنها اگر $t \in X$.

هدف این فصل اثبات قضیه‌ی زیر است:

**قضیه ۳-۱.** *ساختار* $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), s_{\mathbb{N}}, \in)$ *در ساختار* $\mathcal{R}_a = (\mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}a)$ *قابل تعبیر است.*

برای اثبات این قضیه ما در ساختار $\mathcal{B}$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی و حقیقی را تولید و جمع و ترتیب روی این مجموعه‌ها را تعریف می‌کنیم. برای این کار ابتدا دو مجموعه $A$ و $A_{fin}$ را از روی مجموعه‌ی $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ می‌سازیم که قرار است به ترتیب نقش مشابه به $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$ را بازی کنند. مجموعه‌ی $A$ زیر مجموعه‌ای از $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ است که ساختن آنرا در تعریف ۳-۷ آورده‌ایم، همین طور $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ مجموعه توانی از اعداد طبیعی است که متشکل از مجموعه‌های متناهی و نامتناهی از اعداد طبیعی شامل چندتایی‌هایی به شکل $(X_1, \ldots, X_\mu)$ است، هم چنین مجموعه‌ی $A_{fin}$ زیر

مجموعه‌ای از $A$ است، بعد جمع و ترتیب روی این دو مجموعه را تعریف می‌کنیم و همین طور ثابت می‌کنیم دو عمل جمع و ترتیب در $\mathcal{B}$ قابل تعریف هستند. بعد نگاشت $Z$ را به‌صورت $Z : (A_{fin}, \prec_Z, \oplus) \longrightarrow (\mathbb{N}, <, +)$ معرفی می‌کنیم، که با آن مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ را درون $\mathcal{B}$ تعبیر می‌کنیم.

بعد از آن نگاشت $O$ را به‌صورت $O : (A, \prec_O, \oplus) \longrightarrow (I, <, +_۱)$ معرفی می‌کنیم، که با آن مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ را درون $\mathcal{B}$ تعبیر می‌کنیم. در ادامه‌ی کار بازه‌ی $I$ را تبدیل به بازه‌ی $[۰, ۱)$ می‌کنیم، وقتی نگاشت $S$ را معرفی کردیم جمع و ترتیب روی آن‌را بیان می‌کنیم. با معرفی نگاشت $S$ بازه‌ی $[۰, ۱)$ تولید می‌شود که با استفاده از آن می‌توانیم مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ را تولید کنیم.

در گام بعدی می‌خواهیم $\mathbb{N}$ را از روی $O(A)$ و $Z_a(A_{fin})$ بسازیم برای این کار ابتدا اشتراک $\mathbb{N}$ با بازه‌ی $(aZ(X), a(Z(X) + ۱))$ را به‌دست می‌آوریم و با این اشتراک مجموعه $B$ را می‌سازیم. وقتی مجموعه‌ی $B$ را ساختیم جمع و ترتیب روی این مجموعه را بیان می‌کنیم. بعد با معرفی نگاشت $R$ مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ را تولید می‌کنیم و نشان می‌دهیم نگاشت $R$ مجموعه‌ی $B$ به همراه جمع و ترتیب روی آن‌را به مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و جمع و ترتیب می‌برد هم چنین ایزومرفیسم است.

در آخرین مرحله نگاشت $T$ را تولید می‌کنیم که هم زمان عمل نگاشت‌های $R$ و $S$ را برای ما انجام می‌دهد در حقیقت با نگاشت $T$ است که ساختار $\mathcal{R}_a$ تولید می‌شود. برای این کار مجموعه $C = A \times B$ را می‌سازیم و عمل جمع و ترتیب روی آن‌را معرفی می‌کنیم و دو زیر مجموعه از $C$ را تولید می‌کنیم که یکی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و دیگری مجموعه‌ی $\mathbb{N}a$ را تولید می‌کنند. و در پایان نشان می‌دهیم که نگاشت $T : (C, \prec_C, \oplus_C, B', A') \longrightarrow (\mathbb{R}_{\geq ۰}, <, +, \mathbb{N}, \mathbb{N}a)$ که تولید کرده‌ایم ایزومرفیسم است.

از آن‌جایی که اثبات بسیار پیچیده است روند رسیدن به این هدف را به‌صورت کلی در نمودار صفحه‌ی بعد بیان کرده‌ایم که هر قسمت از آن‌را در بخش‌های جداگانه بیان و بررسی خواهیم کرد.

توجه که در این روند مجموعه‌های $A$، $A_{fin}$، $B \subseteq A_{fin} \times \{۰, ۱, ۲\}$، $C = A \times B$، $A' \subseteq C$ و $B' \subseteq C$ و نگاشت‌های $Z : A_{fin} \longrightarrow \mathbb{N}$، $O : (A, \prec_O, \oplus) \longrightarrow (I, <, +_۱)$، $S : (A, \prec_۱, \oplus_۱) \longrightarrow ([۰, ۱), <, + \ mod \ ۱)$، $s_B : B \longrightarrow B$، $p_B : B \setminus \{(۰, ۰)\} \longrightarrow B$، $R : (B, \prec_B, \oplus_B) \longrightarrow (\mathbb{N}, <, +)$ و $T : (C, \prec_C, \oplus_C, B', A') \longrightarrow (\mathbb{R}_{>۰}, <, +, \mathbb{N}, \mathbb{N}a)$، ساخته می‌شوند که هر یک را در ادامه به تفضیل معرفی کرده‌ایم.

**(۱)**

$a = [a_0; a_1, \ldots, a_\xi, \overline{a_{\xi+1} \ldots, a_{\xi+\nu}}]$

$\mu = \max\ a_i$

**(۲)**

$(X_1, \ldots, X_\mu) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ و $A_{fin} \subseteq A$

تولید مجموعه‌ی $A$ را در تعریف۷ـ۳آورده‌ایم.

**(۳)**

$b_{k+1} : A_{fin} \longrightarrow \mathbb{N}$

$(X_1, \ldots, X_\mu) \longmapsto \begin{cases} i, & ; k \in X_i \text{ هرگاه} \\ 0 & . \text{ در غیر این صورت} \end{cases}$

**(۴)**

$Z : A_{fin} \xrightarrow{bij} \mathbb{N}$

$Z(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_{k+1}(X) q_k$

**(۵)**

$\oplus : A_{fin} \times A_{fin} \longrightarrow A_{fin}$

$X \oplus Y := Z^{-1}(Z(X) + Z(Y))$

$X \prec_Z Y \longleftrightarrow Z(X) < Z(Y)$

$O(X \oplus Y) = O(X) + O(Y) \quad mod\ 1$

**(۶)**

$O : A \xrightarrow{bij} I$

$O(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_{k+1}(X) \beta_k$

$X \prec_O Y \longleftrightarrow O(X) < O(Y)$

ترتیب$\prec_O$ را در تعریف ۳-۲۳ آورده‌ایم.

**(۷)**

$\oplus : A \times A \longrightarrow A$

$(X, Y) \longmapsto O^{-1}(O(X) +_1 O(Y))$

$+_1 : I \times I \longrightarrow I$

$\forall (c_1, c_2) \in I$ وجود دارد$d \in I$ به‌طوری‌که $d = c_1 + c_2 \quad mod\ 1$

**(۸)**

$O : (A, \prec_O, \oplus) \xrightarrow{iso} (I, <, +_1)$

**(۹)**

هرگاه $X, Y \in A \Rightarrow X \prec_1 Y$

$\begin{cases} Y \prec_O 1 \preceq_O X & \text{یا}, \\ X, Y \prec_O 1,\ X \prec_O Y & \text{یا}, \\ X, Y \succ_O 1,\ X \prec_O Y \end{cases}$

$\oplus_1 : A \times A \longrightarrow A$

$(X, Y) \longmapsto (X \oplus Y) \ominus 1$

$S : A \longrightarrow [0, 1)$

$X \longmapsto \begin{cases} O(X) - O(1) & , 1 \preceq_O X \text{هرگاه} \\ O(X) - O(1) + 1, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

**(۱۰)**

$S : (A, \prec_1, \oplus_1) \xrightarrow{iso} ([0, 1), <, +\ mod\ 1)$

$+\ mod\ 1 : [0, 1)^2 \longrightarrow [0, 1)$

$\forall (x, y) \in [0, 1)$ وجود دارد$z \in [0, 1)$ به‌طوری‌که

$x + y = z\ mod\ 1$

(۱۱)

$B \subseteq A_{fin} \times \{0, 1, 2\}$ , $(X, i) \in B$ به‌طوری‌که

۱. $X = 0$ و $i = 0$،

۲. $X \prec_O 1$ و $i = \{1, 2\}$،

۳. $1 \preceq_O X \preceq_O 0$ و $i = 1$،

۴. $0 \prec_O X$ و $i = \{0, 1\}$

$X, Y \in A$ , $r(X, Y) \in \{0, 1, 2\}$ به‌طوری‌که

$$\begin{cases} 0 & \text{هرگاه } X \prec_O e \ominus Y \text{ و } Y \preceq_O 0, \\ 2 & \text{هرگاه } e \ominus Y \preceq_O X \text{ و } Y \succ_O 0, \\ 1 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$e := \ominus 1$

(۱۲)

$s_B : B \longrightarrow B$

$Z \in B \longmapsto \prec_B$ –تالی مابعد

$p_B : B \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow B$

$Z \in B \longmapsto \prec_B$ –تالی ماقبل

$\oplus_B : B \times B \longrightarrow B$

$(X, i) \oplus_B (Y, j) := s^{i+j+r(X,Y)-2}((X \oplus Y), 1)$

$$(X, i) \prec_B (Y, j) \text{ هرگاه } \begin{cases} X = Y \ and \ i < j, \text{یا} \\ X \prec_Z Y. \end{cases}$$

(۱۳)

$R : (B, \prec_B, \oplus_B) \xrightarrow{iso} (\mathbb{N}, <, +)$

$(X, i) \longmapsto aZ(X) - O(X) + i$

$R(s_B(X, i)) = R(X, i) + 1$

(۱۴)

$T : B \times A \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$(Z, X) \longmapsto R(Z) + S(X)$

(۱۵)

$C := B \times A$

$A' \subseteq C$ به‌طوری‌که $A' := \{(p_B^2(X, 1), (X \oplus 1)) \ : \ X \in A_{fin}, X \prec_O 0\} \cup \{(p_B(X, 1), (X \oplus 1)) \ : \ X \in A_{fin}, X \succeq_O 0\}$

$B' \subseteq C$ به‌طوری‌که $B' := \{(Z, 1) \ : \ Z \in B\}$

(۱۶)

$(Z_1, X_1), (Z_2, X_2) \in C$

$(Z_1, X_1) \oplus_C (Z_2, X_2)) =$

$$\begin{cases} (s_B(Z_1 \oplus_B Z_2), X_1 \oplus_1 X_2) & \text{هرگاه } \ominus_1 X_1 \preceq_1 X_2; \\ (Z_1 \oplus_B Z_2, X_1 \oplus_1 X_2), & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$(Z_1, X_1) \prec_C (Z_2, X_2)$ هرگاه $Z_1 \prec_B Z_2$ یا

$(Z_1 = Z_2)$ و $X_1 \prec_1 X_2$

$T : (C, \prec_C, \oplus_C, B', A') \xrightarrow{iso} (\mathbb{R}_{\geq 0}, <, +, \mathbb{N}, \mathbb{N}a)$

## ۱.۳ قسمت (۱) نمودار

در این قسمت بسط کسر مسلسل عدد متناوب $a$ را آوردیم که با استفاده از آن می‌توانیم مقادیر $\xi$، $\nu$ و $\mu$ را به‌دست‌آوریم. این مقادیر در بخش‌های بعدی مورد نیاز هستند.

## ۲.۳ قسمت (۲) نمودار

در این قسمت مجموعه‌ی $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ شامل چندتایی $(X_۱, \ldots, X_\mu)$ و مجموعه‌ی $A_{fin} \subseteq A$ بیان شده‌اند و ساختن آن‌ها را در بخش ۴.۳ آورده‌ایم. مجموعه‌ی $A$ قرار است نقش مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و هم چنین $A_{fin}$ قرار است نقش مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ را بازی می‌کنند.

## ۳.۳ قسمت (۳) نمودار

در این قسمت می‌خواهیم مجموعه‌های $A$ و $A_{fin}$ که زیر مجموعه‌های $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ هستند را بسازیم برای این کار احتیاج به تعریف مجموعه‌های فرد، زوج و ترتیب و متناهی بودن در $\mathcal{B}$ داریم پس:

ابتدا نشان می‌دهیم مجموعه‌های اعداد زوج، فرد، ترتیب، متناهی بودن در $\mathcal{B}$ قابل تعریف هستند.

**لم ۳-۲.** *مجموعه‌ی اعداد زوج در $\mathcal{B}$ قابل تعریف است.*

*اثبات.* مجموعه‌ی اعداد زوج عضو یکتای $X$ در $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ است که با فرمول زیر ساخته می‌شود:

$$۰ \in X \wedge \forall x \in \mathbb{N} \quad (x \in X \leftrightarrow s_{\mathbb{N}}(x) \notin X).$$

□

**لم ۳-۳.** *مجموعه‌ی اعداد فرد در $\mathcal{B}$ قابل تعریف است.*

*اثبات.* مجموعه‌ی اعداد فرد عضو یکتای $X$ در $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ است که با فرمول زیر ساخته می‌شود:

$$۰ \notin X \wedge \forall x \in \mathbb{N}(x \notin X \leftrightarrow s_{\mathbb{N}}(x) \in X).$$

$\square$

**لم ۳-۴.** *فرض می‌کنیم $m, n \in \mathbb{N}$. آن‌گاه مجموعه‌ی*

$$\{s \in \mathbb{N} \quad : \quad s \equiv^n m\}$$

*در $\mathcal{B}$ قابل تعریف است.*

*اثبات.* این مجموعه با استفاده از تابع تالی و فرمول زیر ساخته می‌شود:

$$X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ \wedge m \in X \ \wedge \quad \exists t \in X \quad s(s(\underbrace{(\cdots(}_{n} s(t) \underbrace{)\ldots)}_{n})) \in X.$$

$\square$

**لم ۳-۵.** *ترتیب در اعداد طبیعی $\mathcal{B}$ قابل تعریف است.*

*اثبات.* فرض می‌کنیم $m, n \in N$ ترتیب $m < n$ روی $\mathcal{B}$ با فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$\exists X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ \wedge m \in X \wedge \ n \notin X \quad \forall t \in \mathbb{N} \ (t \notin X \to s_{\mathbb{N}}(t) \notin X).$$

$\square$

بنابراین هرگاه زیر مجموعه‌ی $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ با یک ماشین متناهی تشخیص‌پذیر باشد درون ساختار $\mathcal{B}$ قابل تعریف است.

**لم ۳-۶.** *هرگاه $W \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ در $\mathcal{B}$ قابل تعریف باشد، زیر مجموعه‌ی $W_{fin}$ از $W$ که شامل همه‌ی مجموعه‌های متناهی $W$ است، نیز در $\mathcal{B}$ قابل تعریف است.*

*اثبات.* توجه می‌کنیم که $W_{fin}$ برابر است با $W_{fin} = \{u \mid u \in W \wedge \text{متناهی است } u\}$ هم چنین متناهی بودن با فرمول زیر قابل تعریف است:

$$\text{متناهی است } u \longleftrightarrow \exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad x < y$$

$\square$

ما اکنون می‌خواهیم مجموعه‌ی اعداد طبیعی، $\mathbb{N}$ ، و بازه‌ی $I$ را که هر دو با استفاده از بسط‌های اُسترُفسکی گفته‌شده در فصل۳ ساخته می‌شوند در $\mathcal{B}$ تعریف کنیم. برای این کار ابتدا مجموعه‌ی $A$ زیر مجموعه‌ای از $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ و مجموعه‌ی $A_{fin}$ زیر مجموعه‌ای از $A$ را می‌سازیم. با استفاده از نگاشت‌هایی که در ادامه خواهیم ساخت مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ را از روی $A_{fin}$ و بازه‌ی $I$ را از روی مجموعه‌ی $A$ می‌سازیم.

برای تعریف زیر بسط کسر مسلسل $a$ را به صورت $[a_۰, a_۱, \dots, a_\xi, \overline{a_{\xi+۱}, \dots, a_{\xi+\nu}}]$ در نظر بگیرید.

**تعریف ۳-۷.** *مجموعه‌ی $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})^\mu$ شامل چندتایی‌های $(X_۱, \dots, X_\mu) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^\mu$ را به صورت زیر می‌سازیم:*

۱. $۰ \notin X_i$ *برای* $i \geq a_۱ - ۱$

*عنصر ۰ در مجموعه‌ی $X_{a_۱-۱}$ به بعد مطمئناً وجود ندارد و امکان دارد در مجموعه‌های قبلی وجود داشته‌باشد یا نه.*

۲. *هرگاه* $n \in X_i$ *آن‌گاه* $n \notin X_j$ *برای* $j \neq i$

*مجموعه‌های $X_i$ و $X_j$ عضو مشترک ندارند.*

۳. *برای هر $n$ درون مجموعه‌ی $\{۱, \dots, \xi\}$ و برای هر $i > a_{n+۱}$ عنصر $n$ درون مجموعه‌ی $X_i$ نیست و آن‌را به‌صورت زیر می‌نویسیم:*

$$(\forall n \in \{۱, \dots, \xi\} \quad \forall\, i > a_{n+۱}) \quad \rightarrow\ n\ \notin X_i$$

*به طور کلی هرگاه $n$ عضو مجموعه‌ی $\{۱, \dots, \xi\}$ باشد به طور حتم عنصر $n$ درون مجموعه‌ی $X_i$ به بعد وجود ندارد و در مجموعه‌های قبلی امکان دارد وجود داشته‌باشد یا نه.*

۴. *هرگاه $n \geq \xi$، $n + ۱ \equiv^\nu \xi + l$ و $i > a_{\xi+l}$ برای $l \in \{۱, \dots, \nu\}$ عنصر $n$ درون مجموعه‌ی $X_i$ نیست و آن‌را به‌صورت زیر می‌نویسیم:*

$$(\forall n\ \geqslant \xi\ \ (n + ۱\ =\ \xi + l \quad mod\, \nu,\ l\ \in \{۱, \dots, \nu\}\ \Rightarrow\ \forall i > a_{\xi+l}) \Longrightarrow n \notin X_i)$$

*به طور کلی هرگاه $n$ بزرگتر از $\xi$ باشد و اختلاف تقسیم $n+1$ و $\xi$ بر $\nu$ برابر $l$ شد، $n$ به طور حتم درون مجموعه‌ی $X_i$ به بعد وجود ندارد و در مجموعه‌های قبلی امکان دارد وجود داشته‌باشد یا نه.*

۵. *برای هر عدد طبیعی $m$ یک عدد $n$ زوج و بزرگتر از آن وجود دارد که هرگاه $n+1 \equiv^\nu \xi+l$ و $l \in \{1,\dots,\nu\}$ آن‌گاه $n$ درون مجموعه‌ی $X_{a_{\xi+l}}$ وجود ندارد و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:*

$$(\forall m \,\epsilon \mathbb{N} \quad (\exists n_{\text{زوج}} \geq m \quad \exists\, l \,\epsilon \{1,\dots,\nu\}) \Longrightarrow n \notin X_{a_{\xi+l}} \wedge n+1 \;=\; \xi+l \quad mod\, \nu)$$

*هر عدد طبیعی که در نظر بگیریم یک عنصر $n$ زوج بزرگتر از آن وجود دارد که درون مجموعه‌ی $X_{a_{\xi+l}}$ وجود ندارد به‌طوری‌که اختلاف تقسیم $n+1$ و $\xi$ بر $\nu$ برابر $l$ باشد.*

برای بهتر فهمیدن ساختن مجموعه‌ی $A$ دو مثال می‌آوریم.

**مثال ۳-۸.** *فرض کنید $a$ عدد مربعی نسبت طلایی با بسط $a = [1; \overline{1}]$ باشد. بنابراین $\mu = 1$، $\xi = 0$، $\nu = 1$ و $l = \{1\}$. هنگامی که تعریف بالا را اجرا می‌کنیم یک مجموعه‌ی $X$ داریم که شامل همه‌ی اعداد طبیعی می‌باشد یعنی $X = \{1, 2, 3, \dots\}$.*

**مثال ۳-۹.** *فرض کنید $a = \sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$ باشد بنابراین $\mu = 2$، $\xi = 0$، $\nu = 2$ و $l = \{1, 2\}$. بنابراین مجموعه‌ی $X$ شامل یک دوتایی به‌صورت $X = (X_1, X_2)$ می‌باشد، هنگامی که تعریف ساختن مجموعه‌ی $A$ را اجرا می‌کنیم به‌صورت $X_1 = \{1, 3, 5, \dots\}$ و $X_2 = \{2, 4, 6, \dots\}$ می‌باشند.*

همان طور که در تعریف ۳-۷ مشاهده می‌کنید از عمل‌های جمع، ترتیب و هم نهشتی که همه درون ساختار $\mathcal{B}$ قابل تعریفند استفاده شده‌است، بنابراین با استناد به لم‌های ۳-۲ تا ۳-۶ مجموعه‌ی $A$ ساخته شده در تعریف بالا در $\mathcal{B}$ قابل تعریف است. تعریف می‌کنیم $A_{fin}$ زیر مجموعه‌ای از $A$ و شامل همه چندتایی‌های $(X_1, \dots, X_\mu)$ است، و درون این چندتایی هر $X_i$ یک مجموعه متناهی است وقتی $i$ بین ۱ تا $\mu$ باشد. مجموعه‌ی $A_{fin}$ در $\mathcal{B}$ قابل تعریف است و با

استفاده از لم ۳-۶ می‌توان متناهی بودن $A_{fin}$ را در $\mathcal{B}$ نیز تعریف کرد، به‌علاوه هر $X_i$ با یک ماشین متناهی شناخت‌پذیر است.

در تعریف بعدی نگاشتی را تعریف می‌کنیم که هر عضو $A_{fin}$ را به عنصری در $\mathbb{N}$ می‌برد.

**تعریف ۳-۱۰.** *فرض می‌کنیم* $b_{k+۱} \; : \; A_{fin} \longrightarrow \mathbb{N}$ *نگاشتی است که* $(X_۱, \ldots, X_\mu)$ *را می‌برد به*

$$\begin{cases} i, & k \in X_i; \text{هرگاه} \\ ۰, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

**مثال ۳-۱۱.** *مجموعه‌ی متناظر عدد ۲۶ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:*

$$۲۶ = ۲۱ + ۵ = q_۷ + q_۴ = ۰q_۱ + ۰q_۲ + ۰q_۳ + ۱q_۴ + ۰q_۵ + ۰q_۶ + ۱q_۷$$

$$\Longrightarrow b_{k+۱} \begin{cases} b_۵ = ۱ \longrightarrow k = ۴ \\ b_۸ = ۱ \longrightarrow k = ۷ \end{cases} \quad X(۲۶) = \{۷, ۴\}.$$

**مثال ۳-۱۲.** *مقادیر $q_k$ها از بسط $\sqrt{۳}$ به صورت زیر به‌دست می‌آیند:*

$$۱ \quad ۳ \quad ۴ \quad ۱۱ \quad ۱۵ \quad ۴۱ \quad \ldots$$

*مجموعه‌ی متناظر عدد ۳۳ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:*

$$۳۳ = ۲ \times ۱۵ + ۳ = ۲q_۵ + q_۲ = ۰q_۱ + ۱q_۲ + ۰q_۳ + ۰q_۴ + ۲q_۵$$

$$\Longrightarrow b_{k+۱} \begin{cases} b_۳ = ۱ \longrightarrow k = ۲ \\ b_۶ = ۲ \longrightarrow k = ۵ \end{cases} \quad X(۳۳) = (\{۵\}, \{۲\}).$$

## ۴.۳ قسمت (۴) نمودار

همان طور که گفتیم $A_{fin}$ نقش $\mathbb{N}$ را بازی می‌کند، در این قسمت ما نگاشت $Z$ را بین $A_{fin}$ و $\mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم.

برای $X \in A_{fin}$ ، عدد طبیعی $Z(X)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_{k+۱}(X) q_k.$$

در این بسط $b_{k+۱}$ها ضرایب اُسترُفسکی عدد $X$ بر پایه‌ی $q_k$ها که از حقیقت ۲-۵ در فصل ۳ به‌دست می‌آیند.

تمامی مثال‌هایی که در ادامه فصل می‌آوریم بر پایه‌ی بسط کسر مسلسل نسبت طلایی هستند.

**مثال ۳-۱۳.** *عدد متناظر با مجموعه‌ی $\{۷, ۳\}$ برابراست با*

$$Z(\{۷, ۳\}) = q_۷ + q_۳ = ۲۴.$$

با تعریف ۳-۱۰ هر مجموعه‌ی $X$ به یک عدد طبیعی برده می‌شود و با تعریف $Z(X)$ هر عدد طبیعی یک بسط اُسترُفسکی دارد. از آن‌جا که هر بسط اُسترُفسکی یکتاست نگاشت $Z : A_{fin} \longrightarrow \mathbb{N}$ دوسوئی است، بنابراین معکوس دارد و آن‌را با $Z^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

## ۵.۳ قسمت (۵) نمودار

در این قسمت جمع و ترتیب را روی مجموعه‌ی $A_{fin}$ تعریف کنیم، و نشان می‌دهیم این دو عمل در $\mathcal{B}$ قابل تعریف هستند.

**تعریف ۳-۱۴.** *روی $A_{fin}$ عمل $\oplus$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\oplus \quad : A_{fin} \times A_{fin} \longrightarrow A_{fin}$$

$$\oplus \quad (X, Y) \longmapsto X \oplus Y := Z^{-۱}(Z(X) + Z(Y)).$$

**مثال ۳-۱۵.** *تعریف جمع در مجموعه‌ی $A_{fin}$ به صورت زیر است:*

$$\{۷, ۳\} \oplus \{۷, ۴\} = \{۳, ۴, ۷, ۷\} = \{۳, ۴, ۵, ۸\} = \{۳, ۶, ۸\}$$

*در این مثال از دو نکته‌ی جالب دنباله‌ی فیبونانچی استفاده کرده‌ایم که می‌گوید* $F_n + F_{n+۱} = F_{n+۲}$ ، $F_n + F_n = F_{n-۲} + F_{n+۱}$

$$Z^{-۱}(Z(\{۷, ۳\}) + Z(\{۷, ۴\})) = Z^{-۱}(۲۴ + ۲۶) = Z^{-۱}(۵۰) = \{۳, ۶, ۸\}.$$

**لم ۳-۱۶.** *تابع* $\oplus$ *در* $\mathcal{B}$ *قابل تعریف است.*

*اثبات.* ما در فصل ۳ در حقیقت ۲-۲۰ نشان دادیم که عمل جمع با یک ماشین متناهی شناخت‌پذیر است بنابراین در $\mathcal{B}$ قابل تعریف است. □

روی $A_{fin}$ ترتیب قاموسی را در نظر می‌گیریم:

**تعریف ۳-۱۷.** *فرض می‌کنیم* $X, Y \in A_{fin}$ *و* $X \neq Y$ . *فرض کنیم* $k \in \mathbb{N}$ *بزرگترین عدد طبیعی باشد به‌طوری‌که* $b_{k+1}(X) \neq b_{k+1}(Y)$ . *می‌گوییم* $X \prec_Z Y$ *هرگاه* $b_{k+1}(X) < b_{k+1}(Y)$ .

**مثال ۳-۱۸.** *ترتیب روی این مجموعه‌ها قاموسی است، بنابراین ترتیب* $\{۷, ۳\} \prec_Z \{۷, ۴\}$ *برقرار است و ملاحظه می‌کنید که* $۲۴ = Z(\{۷, ۳\}) < Z(\{۷, ۴\}) = ۲۶$ *است.*

**لم ۳-۱۹.** *فرض می‌کنیم* $X, Y \in A_{fin}$ . *آنگاه* $X \prec_Z Y$ *اگر و تنها اگر* $Z(X) < Z(Y)$ .

*اثبات.* با استفاده از تعریف ۳-۱۷ داریم

$$X \prec_Z Y \Longleftrightarrow b_{k+1}(X) < b_{k+1}(Y) \qquad (۱)$$

هم چنین با تعریف $Z(X)$ در بخش ۴.۳ رابطه‌ی زیرا داریم:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} b_{k+1}(X) < \sum_{k\in\mathbb{N}} b_{k+1}(Y) \Longleftrightarrow Z(X) < Z(Y). \qquad (۲)$$

بنابراین از رابطه‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آوریم:

$$X \prec_Z Y \longleftrightarrow Z(X) < Z(Y).$$

□

ما در بخش ۴.۳ نگاشت $Z \ : \ A_{fin} \longrightarrow \mathbb{N}$ را معرفی کردیم حال بنابه تعاریف ۳-۱۰ و ۳-۱۴ و لم ۳-۱۹نگاشت کامل شده‌ی $Z$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود یکریخت است:

$$Z : (A_{fin}, \prec_Z, \oplus) \longrightarrow (\mathbb{N}, <, +).$$

تا این‌جا ما $(\mathbb{N}, +, <)$ را تعبیر کردیم. در ادامه ما با استفاده از یک نگاشت مجموعه‌ی $A$ را به بازه‌ی $I$ می‌بریم. برای این کار ابتدا جمع و ترتیب روی $A$ را تعریف می‌کنیم، تا بتوانیم $(\mathbb{R}, +, <)$ را تعبیر کنیم.

## ۶.۳ قسمت (۶) نمودار

همان طور که گفتیم $A$ نقش $\mathbb{R}$ را بازی می‌کند، در این قسمت می‌خواهیم نگاشت $O$ را بین $A$ و بازه‌ی $I$ تعریف کنیم.

**تعریف ۳-۲۰.** *فرض می‌کنیم $X \in A$ عدد حقیقی $O(X)$ را در بازه‌ی $I$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$O(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_{k+1}(X)\beta_k.$$

*در این بسط $b_{k+1}$ها ضرایب اُسترُفسکی عدد $X$ بر پایه‌ی عدد مربعی $a$ و $\beta_k$ها ضرایبی هستند که از حقیقت ۲-۵ در فصل ۳ به‌دست می‌آیند.*

*از آن‌جایی که بسط اُسترُفسکی هر عدد یکتاست نگاشت $O \ : \ A \longrightarrow I$ دوسوئی است بنابراین $O$ معکوس دارد و آن‌را با $O^{-1}$ نشان می‌دهیم.*

حال برای این که بتوانیم جمع را روی مجموعه‌ی $A$ تعریف کنیم، هم چنین اثبات لم ۳-۲۲، ابتدا لم زیر را می‌آوریم.

**لم ۳-۲۱.** *فرض می‌کنیم $X \in A_{fin}$ باشد، آنگاه $aZ(X) - O(X) \in \mathbb{N}$.*

*اثبات.*

$$aZ(X) - O(X) = \sum_{k=0}^{n} b_{k+1}(X)aq_k - \sum_{k=0}^{n} b_{k+1}(X)\beta_k$$

از آن‌جایی که $\beta_k = q_k a - p_k$ برای $k_{\geq 1}$ بنابراین:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} b_{k+1}(X)aq_k - \sum_{k=1}^{n} b_{k+1}(X)(q_k a - p_k) \\
&= b_1(X)q_0 a + \sum_{k=1}^{n} b_{k=1}(X)q_k a - \sum_{k=1}^{n} b_{k+1}(X)q_k a + \sum_{k=1}^{n} b_{k+1}(X)p_k \qquad (q_0 = 1) \\
&= b_1(X)a + \sum_{k=1}^{n} b_{k+1}(X)p_k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

□

در ادامه وقتی می‌نویسیم $C = D \ mod \ ۱$ در عبارات یعنی قسمت اعشاری اعداد $C$ و $D$ برابر است.

**لم ۳-۲۲.** *فرض می‌کنیم $X, Y \in A_{fin}$ ، آنگاه:*

$$O(X \oplus Y) = O(X) + O(Y) \quad mod \ ۱. \qquad (*)$$

*اثبات.* همان طور که در رابطه (*) مشاهده می‌کنید، $mod \ ۱$ گرفته شده پس قسمت اعشاری دو طرف تساوی با هم برابر هستند، بنابراین اگر قسمت غیر اعشاری دو طرف تساوی را از هم کم کنیم یک عدد طبیعی خواهد شد. با استفاده از لم ۳-۲۱می‌دانیم که $aZ(X) - O(X) \in \mathbb{N}$ بنابراین $N_۱, N_۲, N_۳, N^* \in \mathbb{N}$ وجود دارند، به‌طوری‌که

$$O(X) = aZ(X) - N_۱ \quad \text{و} \quad O(Y) = aZ(Y) - N_۲$$

و در رابطه‌ی $aZ(X) - O(X)$ مجموعه $X$ را به $X \oplus Y$ می‌بریم و به‌دست می‌آوریم:

$$O(X \oplus Y) = aZ(X \oplus Y) - N_۳$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} O(X) + O(Y) - O(X \oplus Y) &= aZ(X) - N_۱ + aZ(Y) - N_۲ - aZ(X \oplus Y) + N_۳ \\ &= a(Z(X) + Z(Y) - Z(X \oplus Y)) - N^* \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

□

از آنجا که در تعریف مقدار $O(X)$، $\beta_k$ها ظاهر می‌شوند و $\beta_k$ها یکی در میان مثبت و منفی هستند با توجه به زوج یا فرد بودن $k$ ترتیب روی $A$ به صورت زیر بیان می‌شود.

**تعریف ۳-۲۳.** *فرض می‌کنیم $X, Y \in A$ و $X \neq Y$ . فرض می‌کنیم $k \in \mathbb{N}$ کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد به‌طوری‌که $b_{k+۱}(X) \neq b_{k+۱}(Y)$ تعریف می‌کنیم $X \prec_O Y$ هرگاه یکی از موارد زیر رخ دهد:*

۱. *$b_{k+۱}(X) > b_{k+۱}(Y)$ و $k$ فرد باشد؛*

۲. $b_{k+1}(Y) > b_{k+1}(X)$ و $k$ زوج باشد.

**لم ۳-۲۴.** *فرض می‌کنیم $X, Y \in A$ آنگاه:*

$$X \prec_O Y \longleftrightarrow O(X) < O(Y).$$

*اثبات.* ابتدا فرض می‌کنیم $\beta_0 > 0$ ، دو حالت را بررسی می‌کنیم: حالت: $(I)$ هرگاه $k$ فرد باشد، آن‌گاه $\beta_k < 0$ و

$$\begin{aligned} X \prec_O Y &\Longleftrightarrow b_{k+1}(X) > b_{k+1}(Y) \Longleftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} b_{k+1}(X) > \sum_{k\in\mathbb{N}} b_{k+1}(Y) \\ &\Longleftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} b_{k+1}(X)\beta_k < \sum_{k\in\mathbb{N}} b_{k+1}(Y)\beta_k \Longleftrightarrow O(X) < O(Y). \end{aligned}$$

حالت: (II) هرگاه $k$ زوج باشد، آن‌گاه $\beta_k > 0$ و

$$\begin{aligned} X \prec_O Y &\Longleftrightarrow b_{k+1}(X) < b_{k+1}(Y) \Longleftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} b_{k+1}(X) < \sum_{k\in\mathbb{N}} b_{k+1}(Y) \\ &\Longleftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{N}} b_{k+1}(X)\beta_k < \sum_{k\in\mathbb{N}} b_{k+1}(Y)\beta_k \Longleftrightarrow O(X) < O(Y) \end{aligned}$$

همین حالات را برای $\beta_0 < 0$ هم داریم. □

برای ساخت بازه‌ی $I$ از روی مجموعه‌ی $A$ ابتدا اثبات می‌کنیم که $A_{fin}$ با نگاشت $O$ درون $A$ چگال است.

**نتیجه ۳-۲۵.** *فرض می‌کنیم $X, Y \in A$ و $X \prec_O Y$. آنگاه $Z \in A_{fin}$ وجود دارد به‌طوری‌که $X \prec_O Z \prec_O Y$.*

*اثبات.* در لم ۳-۲۴ هرگاه $X \prec_O Y$ آن‌گاه $O(X) < O(Y)$. فرض می‌کنیم $Z_0 \in A$ به‌طوری‌که $O(X) < O(Z_0) < O(Y)$ و $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که از دو سر بازه‌ی $X \prec_O Z_0 \prec_O Y$ کمترین مقدار باشد یعنی $\varepsilon < min\{O(Z_0) - O(X), O(Y) - O(Z_0)\}$. از آن۲جا که $O(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_{k+1}(X)\beta_k$ و به‌علاوه $b_k < a_k$ است عدد طبیعی $n$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که برای $k > n$ هنگامی که بسط‌های زوج با هم و بسط‌های فرد با هم جمع

می‌شوند داشته باشیم:

$$max\{ \sum_{k>n,k\ even} a_{k+1}\beta_k, \quad -\sum_{k\geq n,k\ odd} a_{k+1}\beta_k\} < \varepsilon.$$

با تعریف ۳-۷ ، $Z_0$ را چندتایی $(Z_{0,1},\dots,Z_{0,\mu}) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ تعریف می‌کنیم و اشتراک هر یک از $Z_{0,i}$ها با بازه $[0,n]$ را برابر $Z$ قرار می‌دهیم، بنابراین به‌دست می‌آوریم:

$$Z := (Z_{0,1}\cap[0,n],\dots,Z_{0,\mu}\cap[0,n]) \Longrightarrow$$

$$O(Z) = \sum_{k=0}^{n} b_{k+1}(Z)\beta_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(Z_0)\beta_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_{k+1}(Z_0)\beta_k = O(Z_0) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_{k+1}(Z_0)\beta_k$$

از آنجا که $|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_{k+1}(Z_0)\beta_k| < \varepsilon$ بنابراین $O(Z) \cong O(Z_0)$ و به‌دست می‌آوریم $O(X) < O(Z) < O(Y)$ حال با لم۲۴ـ۳ داریم $X \prec_O Y \prec_O Z$. □

## ۷.۳ قسمت (۷) نمودار

ما در بخش ۶.۳ نگاشت $O\ :\ A \longrightarrow I$ را تعریف کردیم، حال برای این‌که بتوانیم نگاشت $O$ را به‌صورت کامل $O\ :\ (A,\prec_O,\oplus) \longrightarrow (I,<,+_1)$ تعریف کنیم ابتدا عمل $\oplus$ را روی مجموعه‌ی $A$ و عمل $+_1$ را روی بازه‌ی $I$ معرفی می‌کنیم.

تا کنون مجموعه $\mathbb{N}$ را از روی $A_{fin}$ ساختیم، به‌علاوه عمل جمع روی $A_{fin}$ را هم تعریف کردیم. حال می‌خواهیم بازه‌ی $I$ را از روی $A$ ساخته و عمل جمع روی آن‌را تعریف کنیم.

**تعریف ۳ـ۲۶.** *عمل $+_1$ را روی $I$ به‌صورت*

$$+_1 : I \times I \longrightarrow I$$

*تعریف می‌کنیم، که $(c_1,c_2) \in I^2$ را به عنصریکتای $d \in I$ می‌نگارد به‌طوری‌که $d = c_1 + c_2\ mod\ 1$. عمل $\oplus$ را روی $A$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\oplus \quad : A \times A \longrightarrow A$$

$$(X,Y) \quad \longmapsto (X \oplus Y) = O^{-1}(O(X) +_1 O(Y)).$$

**لم ۳-۲۷.** *فرض می‌کنیم $X, Y \in A$ آنگاه:*

$$O(X \oplus Y) = O(X) + O(Y) \quad mod\ 1.$$

*اثبات.* با استفاده از تعریف ۳-۲۰ نگاشت $O$ دوسویی است و معکوس دارد بنابراین:

$$X \oplus Y = O^{-1}(O(X) +_1 O(Y)) \Longrightarrow O(X \oplus Y) = O(X) +_1 O(Y)$$

و از تعریف ۳-۲۶ به‌دست می‌آوریم:

$$O(X) +_1 O(Y) = O(X) + O(Y) \quad mod\ 1.$$

□

**لم ۳-۲۸.** *نگاشت $\oplus : A \times A \longrightarrow A$ در $\mathcal{B}$ قابل تعریف است.*

*اثبات.* دو ساختار $\mathcal{M}_1 := (A, \prec_O, \oplus |_{A_{fin}}, A_{fin})$ و $\mathcal{M}_2 := (I, <, +_1 |_{O(A_{fin})}, O(A_{fin}))$ را در نظر بگیرید ابتدا نشان می‌دهیم نگاشت $O : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ ایزومرفیسم است. با استفاده از لم ۳-۲۲ و تعریف ۳-۲۶ جمع روی $A_{fin}$ همان جمع روی $I$ است و با توجه به لم ۳-۲۴و نتیجه‌ی ۳-۲۵ $A_{fin}$ در $A$ چگال است. بنابراین این نگاشت جمع و ترتیب را حفظ می‌کند و همچنین با استفاده از تعریف مقدار و نگاشت $O$ در بخش ۶.۳ این نگاشت ایزومرفیسم است.

حال فرض می‌کنیم $\mathcal{T}$ یک توپولوژی روی بازه‌ی $I$ باشد که مجموعه‌های باز اصلی آن بازه‌های $(c_1, c_2)$ هرگاه ($c_1, c_2 \in I$ و $c_1 < c_2$) ، و مجموعه‌ی $(c_1, 2 - a) \cup [1 - a, c_2)$ هرگاه ($c_1, c_2 \in I$ و $c_1 > c_2$). از آن‌جایی که بازه‌ی $I$ در $\mathcal{M}_2$ قابل تعریف است پس بستار توپولوژی آن نیز در $\mathcal{M}_2$ قابل تعریف است بنابراین بستار توپولوژی $\mathcal{T}$ نیز در $\mathcal{M}_2$ قابل تعریف می‌باشد. با توجه به لم ۳-۲۴و نتیجه‌ی ۳-۲۵به‌دست می‌آوریم $O(A_{fin})$ با توپولوژی $\mathcal{T}$ در بازه‌ی $I$ چگال است.

حال بنابه تعریف ۳-۱۴ عمل $+_1$ که در بازه‌ی $I$ قابل تعریف است در بستار توپولوژی $\mathcal{T}$ نیز قابل تعریف بوده و از آن‌جایی که این بستار در $\mathcal{M}_2$ نیز قابل تعریف است $+_1 |_{O(A_{fin})}$ همان $+_1$ است بنابراین عمل $+_1$ در $\mathcal{M}_2$ قابل تعریف است. هم چنین می‌دانیم که نگاشت $O$ ایزومرفیسم است و عمل $\oplus$ در $\mathcal{M}_1$ قابل تعریف است بنابراین عمل $\oplus$ در $\mathcal{B}$ نیز قابل تعریف می‌باشد. □

## ۸.۳ قسمت(۸) نمودار

در بخش‌های ۶.۳ و ۷.۳ نگاشت $O \ : \ A \longrightarrow I$ و عمل جمع را روی مجموعه $A$ و بازه‌ی $I$ معرفی کردیم، در این قسمت می‌خواهیم نگاشت $O$ را کامل‌تر کنیم.

با توجه به مطالب گفته‌شده در بخش‌های ۶.۳ و ۷.۳ نگاشت یکریخت $O$ را به‌صورت کامل زیر تعریف می‌کنیم:

$$O \ : \ (A, \prec_O, \oplus) \longrightarrow (I, <, +_{۱}).$$

مجموعه‌ی $A$ همراه با عمل جمع $\oplus$ تعریف شده در لم ۳-۲۷ یک گروه را تشکیل می‌دهد. زیرا خواص گروه از جمله بسته بودن، شرکت پذیری را دارد، عنصر خنثی این گروه $(\varnothing, \ldots, \varnothing) = \mathbf{۰}$ است. به‌علاوه یک در این گروه به صورت $(\varnothing, \ldots, \varnothing, \{۱\}) = \mathbf{۱}$ تعریف می‌شود، بنابراین به‌دست می‌آوریم:

$$O(\mathbf{۱}) = \sum_{k=۰}^{n} b_{k+۱}(\mathbf{۱})\beta_k.$$

که با نوشتن بسط اُسترُفسکی عدد **۱** داریم:

$$O(\mathbf{۱}) = b_۱\beta_۰ + b_۲\beta_۱ + b_۳\beta_۲ + \cdots$$

از آن‌جا که برای نوشتن بسط اُسترُفسکی عدد $a$ را نسبت طلایی ثابت در نظر گرفتیم $(۰ = b_۱ < a_۱ = ۱, b_۲ = ۱, b_۳ = b_۴ = \cdots = b_k = ۰, \beta_۱ = a - ۲)$ بنابراین به‌دست می‌آوریم:

$$O(\mathbf{۱}) = a - ۲.$$

برای $X \in A$ معکوس $X$ با عمل $\oplus$ با $\ominus X$ نشان داده‌می‌شود، یعنی $X \oplus (\ominus X) = \mathbf{۰}$. بنابراین برای $X, Y \in A$ عمل $X \ominus Y$ را به‌صورت $X \oplus (\ominus Y)$ می‌نویسیم.

حال می‌خواهیم در نگاشت $O$ بازه‌ی $I$ را به بازه‌ی $[۰, ۱)$ تغییر دهیم. زیرا هر عددی که در بازه‌ی $I$ در نظر بگیریم را می‌توانیم با انجام محاسبه‌ای که در ادامه خواهیم آورد در بازه‌ی $[۰, ۱)$ قراردهیم.

## ۹.۳ قسمت(۹) نمودار

در قسمت قبلی ما نگاشت $O$ بین $(A, \prec_O, \oplus)$ و $(I, <, +_1)$ را معرفی کردیم، در ادامه‌ی کار می‌خواهیم نگاشت یکریخت $S$ که اصلاح شده نگاشت $O$ است را تعریف می‌کنیم. برای این کار ابتدا در این قسمت عمل جمع $\oplus_1$ و رابطه‌ی ترتیب $\prec_1$ را روی مجموعه‌ی $A$ معرفی می‌کنیم، همین طور تبدیل کردن مجموعه‌ی $I$ را به بازه‌ی $[0, 1)$ بیان می‌کنیم. در ادامه نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی $A$ به همراه عمل $\oplus_1$ یک گروه را تشکیل می‌دهد.

**تعریف ۳-۲۹.** *فرض می‌کنیم $X, Y \in A$ تعریف می‌کنیم $X \prec_1 Y$ هرگاه:*

$$\begin{cases} Y \prec_O 1 \preceq_O X & \text{یا;} \\ X, Y \prec_O 1, \quad X \prec_O Y; & \text{یا} \\ X, Y \succ_O 1, \quad X \prec_O Y. \end{cases}$$

*عمل $\oplus_1$ روی $A$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\begin{aligned} \oplus_1 \quad &: A \times A \longrightarrow A \\ (X, Y) \quad &\longmapsto (X \oplus Y) \ominus 1. \end{aligned}$$

*برای تبدیل بازه‌ی $I$ به بازه‌ی $[0, 1)$ این‌گونه عمل می‌کنیم:*
*$S : A \longrightarrow [0, 1)$ نگاشتی است از $X \in A$ به*

$$\begin{cases} O(X) - O(1), & 1 \preceq_O X \quad \text{هرگاه;} \\ O(X) - O(1) + 1, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

*یعنی هرگاه $O(1) < O(X)$ مقدار $O(1) = 2 - a$ را از $O(X)$ کم می‌کنیم تا درون بازه‌ی $[0, 1)$ قرار بگیرد و هرگاه $O(X) < O(1)$ مقدار $O(1) + 1$ را از $O(X)$ کم می‌کنیم تا باز درون بازه‌ی $[0, 1)$ قرار بگیرد.*

بنابراین $(A, \oplus_1)$ یک گروه است زیرا خواص گروه را از جمله بسته بودن، شرکت پذیری دارد. عنصر خنثی در آن برابر $\mathbf{1} = (\{1\}, \emptyset, \ldots, \emptyset)$ و برای هر $X \in A$ معکوس آن‌را با عنصر یکتای $\ominus_1(X) \in A$ نشان می‌دهیم به‌طوری‌که $(\ominus_1(X)) \oplus_1 (X) = \mathbf{1}$.

## ۱۰.۳ قسمت(۱۰) نمودار

در قسمت قبلی عمل‌های جمع $\oplus_1$ و ترتیب $\prec_1$ را روی $A$ تعریف کردیم، حال در این قسمت نگاشت $S : A \longrightarrow [0, 1)$ را کامل‌تر کرده و عمل $+ \ mod\ 1$ را معرفی می‌کنیم.

**تغییردادن** $O$: قبلاً نگاشت $O$ را به‌صورت $O : (A, \prec_O, \oplus) \longrightarrow (I, <, +_1)$ تعریف کردیم. حال برد آن‌را از $(I, <, +_1)$ به‌صورت $([0, 1), <, + \ mod\ 1)$ اصلاح می‌کنیم که در آن

$$+ \ mod\ 1 : [0, 1)^2 \longrightarrow [0, 1)$$

نگاشتی است هر زوج $(x, y) \in [0, 1)^2$ را به عنصر یکتای $z \in [0, 1)$ می‌برد به‌طوری‌که $x + y = z \ mod\ 1$.

حال تعمیم یافته‌ی نگاشت $O$ را $S$ می‌نامیم زیرا می‌خواهیم با این نگاشت‌هایی که کامل‌تر می‌کنیم مجموعه‌ی اعدادطبیعی و حقیقی را هم زمان درون $\mathcal{B}$ تعبیر کنیم.

**لم ۳-۳۰.** *نگاشت* $S : (A, \prec_1, \oplus_1) \longrightarrow ([0, 1), <, + \quad mod\ 1)$ *ایزومرفیسم است.*

*اثبات.* قبلاً به‌دست آوردیم $O(\mathbf{1}) = a - 2$ حال بازه‌ی $I = [1 - a, 2 - a)$ را به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$1/5 < a < 2 \Longrightarrow 3 < 2a < 4 \Longrightarrow -4 < -2a < -3 \Longrightarrow 0 < 4 - 2a < 1.$$

از تعریف ۳-۲۹ داریم:

$$S(\{X \in A \ : \ \mathbf{1} \preceq_O X\}) = [0, 4 - 2a) \quad \text{و} \quad S(\{X \in A \ : \ X \prec_O \mathbf{1}\}) = [4 - 2a, 1).$$

یعنی هر $X \in A$ درون بازه‌ی $I$ به‌دست آمده در بالا قرار می‌گیرد. حال ثابت کنیم که ترتیب روی $A$ همان ترتیب روی بازه $[0, 1)$ است، یعنی

$$S(X) < S(Y) \longleftrightarrow X \prec_1 Y.$$

با استفاده از تعریف ۳-۲۹ دو حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت $(I)$: فرض کنیم $X \succeq_O \mathbf{1}$ و $Y \succeq_O \mathbf{1}$

$$S(X) < S(Y) \iff O(X) - O(\mathbf{1}) < O(Y) - O(\mathbf{1}) \iff O(X) < O(Y)$$
$$\iff X \prec_O Y \quad (۲)$$

بنابراین با رابطه‌ی (۲) همچنین دو فرض $Y \succeq_O \mathbf{1}$ و $X \succeq_O \mathbf{1}$ و تعریف ۳-۲۹ به‌دست می‌آوریم:

$$X \prec_۱ Y$$

حالت (II): فرض کنیم $Y \prec_O \mathbf{1}$ و $X \prec_O \mathbf{1}$

$$S(X) < S(Y) \iff O(X) - O(\mathbf{1}) + ۱ < O(Y) - O(\mathbf{1}) + ۱ \quad \iff \quad O(X) < O(Y)$$
$$\iff \quad X \prec_O Y \qquad (۲)$$

بنابراین با رابطه‌ی (۲) همچنین دو فرض $Y \prec_O \mathbf{1}$ و $X \prec_O \mathbf{1}$ و تعریف ۳-۲۹ به‌دست می‌آوریم:

$$X \prec_۱ Y$$

پس $S$ ترتیب را حفظ می‌کند و چون نگاشت $O$ دوسویی است نگاشت $S$ نیز دوسویی‌ست. مقدار $S(X)$ را عنصر یکتای $c \in [۰, ۱)$ تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که $c = O(X) - a \quad mod\ ۱$. زیرا هرگاه $X \succeq_O \mathbf{1}$ باشد، $O(X) - O(\mathbf{1})$ به‌دست می‌آید و هرگاه $X \prec_O \mathbf{1}$ باشد، $O(X) - O(\mathbf{1}) + ۱$ به‌دست می‌آید حال اگر از هر دو $mod\ ۱$ بگیریم مقدار $c$ به‌دست می‌آید.

حال ثابت می‌کنیم جمع روی $A$ همان جمع روی بازه‌ی $[۰, ۱)$ است. پس فرض می‌کنیم $X, Y \in A$ می‌نویسیم:

$$S(X) + S(Y) = O(X) - a + O(Y) - a \quad mod\ ۱ \qquad (O(\mathbf{1}) = a - ۲)$$

$$= O(X) + O(Y) - O(\mathbf{1}) - O(\mathbf{1}) + ۴ \quad mod\ ۱$$

$$= O(X) + O(Y) - O(\mathbf{1}) - O(\mathbf{1}) \quad mod\ ۱$$

از آن‌جایی که داریم ($O(X \oplus Y) = O(X) + O(Y) \quad mod\ ۱$):

$$= O(X \oplus Y) - O(۱) - O(۱) \quad mod\ ۱$$

و همچنین با استفاده از رابطه‌ی ($O((X \oplus Y) \ominus ۱) = O(X \oplus Y) - O(1) \quad mod\ ۱$):

$$= O((X \oplus Y) \ominus ۱) - O(۱) \quad mod\ ۱$$

و با تعریف **۳-۲۹** به‌دست می‌آوریم:

$$= O(X \oplus_۱ Y) - O(۱) \quad mod\ ۱$$

و از آن‌جایی که ($O(۱) = a - ۲$) و با استفاده‌ی دوباره از تعریف **۳-۲۹** می‌رسیم به:

$$S(X) + S(Y) = S(X \oplus_۱ Y) \quad mod\ ۱.$$

□

**لم ۳-۳۱.** *فرض می‌کنیم* $X, Y \in A$ *آنگاه* $Y \preceq_۱ \ominus_۱(X)$ *اگر و تنها اگر* $S(X) + S(Y) \geq ۱$.

*اثبات.* با استفاده از لم ۳-۳۰ داریم:

$$S(X) = O(X) - a \quad mod\ ۱ \Longrightarrow ۱ - S(X) = ۱ - O(X) + a \quad mod\ ۱$$

از آن‌جا که $mod\ ۱$ گرفتیم وجود ۱ در طرف راست تأثیری ندارد بنابراین:

$$۱ - S(X) = -O(X) + a \quad mod\ ۱$$

$$= -S(X) = S(\ominus_۱(X)).$$

بنابراین با لم ۳-۳۰ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} S(X) + S(Y) \geq ۱ \quad &\Longleftrightarrow \quad S(Y) \geq ۱ - S(X) \\ &\Longleftrightarrow \quad S(Y) \geq S(\ominus_۱(X)) \\ &\Longleftrightarrow \quad Y \succeq_۱ \ominus_۱ X. \end{aligned}$$

□

با استفاده از لم‌های ۳-۳۰و ۳-۳۱ نتیجه‌ی زیرا برای $S(X \oplus Y)$ می‌گیریم:

**نتیجه ۳-۳۲.** *فرض می‌کنیم $X, Y \in A$ ، آنگاه:*

$$S(X \oplus_1 Y) = \begin{cases} S(X) + S(Y), & \ominus_1 X \preceq_1 Y; \quad \text{هرگاه} \\ S(X) + S(Y) - 1, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

## ۱۱.۳ قسمت(۱۱) نمودار

در قسمت قبلی گفتیم می‌خواهیم مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ را به طور هم زمان درون $\mathcal{B}$ تعبیر کنید و برای رسیدن به این هدف ابتدا نگاشت $S$ را معرفی کردیم، حال برای ادامه‌ی این کار نگاشت $R$ را معرفی کنیم. برای این کار در این قسمت ابتدا $\mathbb{N}$ را از روی $O(A)$ و $Z_a(A_{fin})$ بازیابی می‌کنیم و بعد مجموعه‌ی $B$ را معرفی می‌کنیم.

**بازیابی $\mathbb{N}$.** در قسمت‌های قبلی ما ترتیب و جمع را روی مجموعه‌های $A$ و $A_{fin}$ تعریف کردیم به‌طوری‌که نگاشت‌های $O : A \longrightarrow I$ و $S : A \longrightarrow [0, 1)$ یکریخت شدند. هم چنین نگاشت $aZ : A_{fin} \longrightarrow \mathbb{Z}_a$ را در نظر بگیرید که یکریخت است. حال می‌خواهیم مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ را از روی $O(A)$ و $Z_a(A_{fin})$ بازیابی کنیم.

برای این کار لم زیر را بیان می‌کنیم، و بر حسب این‌که مقدار $O(X)$ بیشتر یا کمتر از $O(1)$ باشد اشتراک مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ با بازه‌ی $(aZ(X), a(Z(X) + 1))$ را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

**لم ۳-۳۳.** *فرض می‌کنیم $X \in A_{fin}$ باشد آنگاه $\mathbb{N} \cap (aZ(X), a(Z(X) + 1))$ برابر:*

$$\begin{cases} \{aZ(X) - O(X) + 1, aZ(X) - O(X) + 2\} & X \prec_O 1;, \quad \text{هرگاه} \\ \{aZ(X) - O(X) + 1\}, & 1 \preceq_O X \preceq_O 0; \quad \text{هرگاه} \\ \{aZ(X) - O(X), aZ(X) - O(X) + 1\}, & \text{در غیر این صورت} \quad . \end{cases}$$

*اثبات.* فرض می‌کنیم $X \in A_{fin}$ و از آنجا که $1/5 \leq a < 2$ پس حداکثر دو عدد طبیعی بین $aZ(X)$ و $a(Z(X) + 1)$ وجود دارد. بر طبق لم ۳-۲۱ مقدار $aZ(X) - O(X) \in \mathbb{N}$ ، بنابراین

$aZ(X)-O(X)+۱$ و $aZ(X)-O(X)+۲$ نیز درون $\mathbb{N}$ قرار دارند. طبق تعریف ۳-۲۰ مقدار $O(X)\in I=[۱-a,۲-a)$ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} ۱-a &\leq O(X)<۲-a \\ ۱/۵ &< a<۲ \xrightarrow{\times ۲} ۳<۲a<۴ \xrightarrow{-a} ۲-a<a<۴-a \\ &\xrightarrow{(۱,۱)} ۱-a\leq O(X)<۲-a \xrightarrow{+۱} ۲-a\leq O(X)+۱<۳-a<a \end{aligned}$$

پس $O(X)+۱<a$ بنابراین ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

$$aZ(X)<aZ(X)+O(X)+۱<a(Z(X)+۱)$$

حال حالت‌های لم را بررسی می‌کنیم. حالت $(I)$: فرض کنیم $X\prec_O ۱$ به‌دست می‌آوریم:

$$X\prec_O ۱\Longrightarrow O(X)<O(۱)=a-۲\xrightarrow{(۱,۱)} ۱-a\leq O(X)<a-۲\xrightarrow{۱/۵\leq a<۲} O(X)<۰$$

پس با این شرط $O(X)$ عددی منفی است بنابراین داریم:

$$aZ(X)+O(X)<aZ(X)<aZ(X)+O(X)+۲<a(Z(X)+۱)$$

حالت $(II)$: فرض کنیم $0\preceq_O X\preceq_O ۱$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &O(۱)=a-۲ \quad \text{و} \quad O(۰)=۰ \\ &\Longrightarrow a-۲=O(۱)\leq O(X)\leq O(۰)=۰ \\ &\Longrightarrow a-۲<O(X)<۰\Longrightarrow O(X)<۰ \end{aligned}$$

با این شرط $O(X)$ عددی منفی است بنابراین داریم:

$$aZ(X)+O(X)\leq aZ(X) \quad \text{و} \quad a(Z(X)+۱)\leq aZ(X)+O(X)+۲$$

حالت $(III)$: فرض کنیم $X\preceq_O ۰$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &۰=O(۰)\leq O(X)<۲-a \\ &\Longrightarrow ۰<O(X)<۲-a\xrightarrow{۱/۵<a<۲} O(X)<۰ \end{aligned}$$

در این حالت $O(X)$ عددی مثبت است بنابراین داریم:

$$aZ(X) < aZ(X) + O(X) < aZ(X) + ۱ < a(Z(X) + ۱).$$

□

در ادامه مجموعه‌ی $B$ را بسازیم و با استفاده از آن نگاشت $R$ را معرفی می‌کنیم.

**تعریف ۳-۳۴.** *مجموعه‌ی $B \subseteq A_{fin} \times \{۰, ۱, ۲\}$ را مجموعه‌ی از همه‌ی زوج‌های $(X, i)$ تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که یکی از خواص زیر را داشته باشد:*

۱. $X = ۰$ و $i = ۰$،

۲. $\mathbf{۱} \prec_O X$ و $i \in \{۱, ۲\}$،

۳. $\mathbf{۰} \preceq_O X \preceq_O \mathbf{۱}$ و $i = ۱$،

۴. $X \prec_O \mathbf{۰}$ و $i \in \{۰, ۱\}$،

*با این تعریف نگاشت $R$ را به صورت $R : B \longrightarrow \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که $(X, i)$ را به $aZ(X) - O(X) + i$ می‌برد.*

**مثال ۳-۳۵.** *دو مجموعه‌ی $X = \{۷, ۴\}$ و $Y = \{۷, ۳\}$ را در نظر بگیرید می‌خواهیم زوج مرتب مربوط به این دو مجموعه را درون مجموعه‌ی $B$ بیابیم.*

$$O(X) = O(\{۷, ۴\}) = \beta_۷ + \beta_۴ \quad \text{و} \quad O(\mathbf{۱}) = \beta_۱ \Longrightarrow b_۲(\mathbf{۱}) = ۱ > b_۲(X) = ۰$$

*بنابراین $k = ۱$ و فرد است که با تعریف ترتیب روی $A$ داریم $O(X) < O(\mathbf{۱})$ حال با تعریف مجموعه‌ی $B$ به‌دست می‌آوریم $i = ۱$ بنابراین $(\{۷, ۴\}, ۱) \in B$.*

$$O(Y) = O(\{۷, ۳\}) = \beta_۷ + \beta_۳ \quad \text{و} \quad O(\mathbf{۱}) = \beta_۱ \Longrightarrow b_۲(\mathbf{۱}) = ۱ > b_۲(Y) = ۰$$

*بنابراین $k = ۱$ و فرد است که با تعریف ترتیب روی $A$ داریم $O(Y) < O(\mathbf{۱})$ حال با تعریف مجموعه‌ی $B$ به‌دست می‌آوریم $(\{۷, ۳\}, ۱) \in B$.*

**لم ۳-۳۶.** *نگاشت* $R\ :\ B\longrightarrow\mathbb{N}$ *دو سوئی است.*

*اثبات.* باتوجه به لم ۳-۳۳ بدست می‌آوردیم $\mathbb{N}a\cap\mathbb{N}=\{0\}$ و در بخش ۴.۳ثابت کردیم که نگاشت $Z:A_{fin}\longrightarrow\mathbb{N}$ دو سوئی است. از آنجا که $B\subseteq A_{fin}\times\{0,1,2\}$ است، فقط باید ثابت کنیم که $R:\{0,1,2\}\longrightarrow\mathbb{N}$ پوشاست. می‌دانیم نگاشت $R:B\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{N}$ دوسوئی است و از آنجا که $R((0,0))=aZ(0)-O(0)+0=0$ پس نگاشت تعریف شده‌ی $R$ در بالا دوسوئی می‌باشد. □

**تعریف ۳-۳۷.** *هرگاه* $X,Y\in A$ *تعریف می‌کنیم* $r(X,Y)\in\{0,1,2\}$ *به‌صورت زیر باشد:*

$$\begin{cases} 0, & X\prec_O \mathbf{e}\ominus Y \quad \text{و} \quad Y\preceq_O 0;\text{هرگاه} \\ 2, & \mathbf{e}\ominus Y\preceq_O X \quad \text{و} \quad Y\succ_O 0;\text{هرگاه} \\ 1, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

ما $\mathbf{e}$ را به‌صورت $\mathbf{e}:=\ominus 1$ تعریف می‌کنیم و از آنجا که $O(1)=a-2$ به‌دست می‌آوریم:

$$O(\mathbf{e})=O(\ominus 1)=-1-O(1)=-1-a+2=1-a$$

در واقع با یادآوری بازه‌ی $I=[1-a,2-a)$ ،نقطه‌ی $\mathbf{e}$ نقطه‌ی ابتدایی این بازه است.

**لم ۳-۳۸.** *فرض کنیم* $X\in A$ *. آن‌گاه:*

$$O(\mathbf{e}\ominus X)\begin{cases} O(\mathbf{e})-O(X), & X\preceq_O 0\ \text{هرگاه}; \\ O(\mathbf{e})-O(X)+1, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

*اثبات.* حالت $(I)$: فرض می‌کنیم $X\preceq_O 0$، از آنجا که $O(X)\in I=[1-a,2-a)$ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} 1-a<O(X)\le O(0)=0 \quad &\xrightarrow{\times -} \quad 0\le -O(X)<a-1 \xrightarrow{+O(\mathbf{e})} \\ O(\mathbf{e})\le O(\mathbf{e})-O(X)<a-1+O(\mathbf{e}) \quad &\xrightarrow{O(\mathbf{e})=1-a} \quad 1-a<O(\mathbf{e})-O(X)<0 \\ &\longrightarrow \quad O(\mathbf{e})-O(X)\in I \\ &\longrightarrow \quad O(\mathbf{e}\ominus X)=O(\mathbf{e})-O(X). \end{aligned}$$

حالت $(II)$: فرض می‌کنیم $X \succ_O \circ$، از آنجا که $O(X) \in I = [1-a, 2-a)$ بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
0 < O(X) < 2-a \quad &\xrightarrow{\times -} \quad a-2 < -O(X) < 0 \xrightarrow{+1} a-1 < 1-O(X) < 1 \\
&\xrightarrow{1/5<a<2} \quad 0 < a-1 < 1-O(X) < 1 \\
&\xrightarrow{+O(\mathbf{e}} \quad O(\mathbf{e}) < O(\mathbf{e}) - O(X) + 1 < 1 + O(\mathbf{e}) \\
&\xrightarrow{O(\mathbf{e})=1-a} \quad 1-a < O(\mathbf{e}) - O(X) + 1 < 2-a \\
&\longrightarrow \quad O(\mathbf{e}) - O(X) + 1 \in I \\
&\longrightarrow \quad O(\mathbf{e} \ominus X) = O(\mathbf{e}) - O(X) + 1.
\end{aligned}
$$

□

## ۱۲.۳ قسمت (۱۲) نمودار

در قسمت قبلی مجموعه‌ی $B$ متشکل از زوج مرتب‌های $(X, i)$ را ساختیم، در این بخش جمع روی مجموعه‌ی $B$ را تعریف کنیم و برای این کار ابتدا تالی مابعد [۱] و تالی ماقبل [۲] عناصر مجموعه‌ی $B$ را تعریف می‌کنیم، و در ادامه به تعریف ترتیب روی مجموعه‌ی $B$ می‌پردازیم.

تعریف می‌کنیم نگاشت $s_B : B \longrightarrow B$ هر عنصر $Z \in B$ را به تالی مابعدش در $B$ می‌برد، و نگاشت

$p_B : B \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow B$ هر عنصر $Z \in B$ را به تالی ماقبلش در $B$ می‌برد. با این تعریف چند علامت گذاری به شرح زیر روی $B$ قرارمی‌دهیم:

عنصر $s_B^0$ را برای عضو همانی روی $B$ و وقتی $i \in \mathbf{N}$ مقدار $s_B^{-i}$ را برای $i$ اُمین تکرار از تالی ماقبل و $s_B^i$ را برای $i$ اُمین تکرار از تالی مابعد می‌نویسیم.

**تعریف ۳-۳۹.** *فرض می‌کنیم $(X,i), (Y,j) \in B$. می‌نویسیم $(X,i) \prec_B (Y,j)$ هرگاه یکی از رابطه‌های زیر برقرار باشد:*

۱. $X = Y$ و $i < j$ یا

[۱] successor
[۲] predecessor

۲. $X \prec_Z Y$.

**مثال ۳-۴۰.** *دو زوج مرتب* $(\{۷,۴\},۱)\ ,\ (\{۷,۳\},۱) \in B$ *را در نظر بگیرید، بنابراین ترتیب را روی این دو زوج مرتب به صورت زیر به‌دست می‌آوریم:*

$$Z(\{۷,۴\}) = q_۷ + q_۴ \quad \text{و} \quad Z(\{۷,۳\}) = q_۷ + q_۳ \Longrightarrow Z(\{۷,۴\}) > Z(\{۷,۳\})$$

*بنابراین با تعریف ترتیب* $\prec_Z$ *روی* $A_{fin}$ *داریم:*

$$\{۷,۳\} \prec_Z \{۷,۴\} \Longrightarrow \{۷,۳\} \prec_B \{۷,۴\}.$$

چون ترتیب $\prec_Z$ در $A_{fin}$ یک ترتیب قاموسی است بنابراین ترتیب $\prec_B$ در $B$ نیز قاموسی است. پس $\prec_B$ در $B$ خوش ترتیب است و از آن نتیجه می‌گیریم که توابع تالی مابعد و تالی ماقبل در $B$ خوش تعریف هستند.

**تعریف ۳-۴۱.** *فرض می‌کنیم* $(X,i),(Y,j) \in B$. *عمل* $\oplus_B$ *را روی* $B$ *به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\begin{aligned} \oplus_B \qquad &: \ B \times B \longrightarrow B \\ (X,i) \oplus_B (Y,j) \quad &\longmapsto s^{i+j+r(X,Y)-۲}((X \oplus Y),۱). \end{aligned}$$

**مثال ۳-۴۲.** *دو زوج مرتب* $(\{۷,۴\},۱)\ ,\ (\{۷,۳\},۱) \in B$ *را در نظر بگیرید، جمع* $\oplus_B$ *را روی* $B$ *به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:*

$$(\{۷,۳\}) = \beta_۷ + \beta_۳ \leq O(۰) \qquad (۱)$$

*بنابراین با استفاده از لم ۳-۳۸ داریم*

$$O(\mathbf{e} \ominus \{۷,۳\}) = O(\mathbf{e}) - O(\{۷,۳\}) = -\beta_۱ - \beta_۷ - \beta_۳$$

*اکنون با استفاده از تعریف ۳-۳۷ به‌دست می‌آوریم*

$$O(\{۷,۴\}) = \beta_۷ + \beta_۴ < O(\mathbf{e} \ominus \{۷,۳\}) = -\beta_۱ - \beta_۷ - \beta_۳ \qquad (۲)$$

*از روابط ( ۱)و (۲) و هم چنین تعریف ۳-۳۷ داریم*

$$r(\{۷,۴\},\{۷,۳\})=۰$$

*بنابراین با تعریف ۳-۴۱ به‌دست می‌آوریم:*

$$\begin{aligned}(\{۷,۴\},۱)\oplus_B(\{۷,۳\},۱) &= s^{۱+۱+۰-۲}((\{۷,۴\}\oplus\{۷,۳\}),۱)=s((\{۷,۴\}\oplus\{۷,۳\}),۱)\\ &= s(\{۳,۶,۸\},۱)\end{aligned}$$

*با تعریف مجموعه‌ی $B$ به‌دست می‌آوریم که $(\{۸,۶,۳\},۱)\in B$ هم چنین با تعریف نگاشت $R$ و تالی مابعد به‌دست می‌آوریم:*

$$s(\{۸,۶,۳\},۱)=R(\{۸,۶,۳\},۱)+۱=aZ(\{۸,۶,۳\})-O(\{۸,۶,۳\})+۱+۱=۸۳$$

*حال مجموعه‌ی متناظر با عدد ۸۳ برابر با*

$$۸۳=۵۵+۲۱+۵+۲=q_۹+q_۷+q_۴+q_۲\Longrightarrow X(۸۳)=\{۹,۷,۴,۲\}$$

*هم چنین زوج مرتب مربوط به آن در مجموعه‌ی $B$ برابر $(\{۹,۷,۴,۲\},۱)$ است به‌طور کلی به‌دست آوردیم:*

$$(\{۷,۴\},۱)\oplus_B(\{۷,۳\},۱)=(\{۹,۷,۴,۲\},۱).$$

## ۱۳.۳ قسمت (۱۳)نمودار

در قسمت قبلی جمع و ترتیب روی مجموعه‌ی $B$ را تعریف کردیم، هم چنین در لم ۳-۳۶ نگاشت $R$ را معرفی کردیم که با آن مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ را به طور هم زمان در $\mathcal{B}$ تعبیر کنیم. در این قسمت این نگاشت را به‌صورت $R:(B,\prec_B,\oplus_B)\longrightarrow(\mathbb{N},<+)$ که نگاشتی ایزومرفیسم است کامل‌تر می‌کنیم. برای این کار باید نشان دهیم ترتیب و جمع روی $B$ همان ترتیب و جمع روی مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ است.

**لم ۳-۴۳.** *فرض کنیم $Z_۱,Z_۲\in B$ آن‌گاه $Z_۱\prec_B Z_۲$ اگر و تنها اگر $R(Z_۱)<R(Z_۲)$.*

*اثبات.* فرض می‌کنیم $Z_1 = (X, i)$ و $Z_2 = (Y, j)$ و $Z_1 \prec_B Z_2$ پس دو حالت رخ می‌دهد:

حالت $(I)$:

$$\begin{aligned}
(X,i) \prec_B (Y,j) \quad & \xrightarrow{i<j, X=Y} \\
R(X,i) = aZ(X) - O(X) + i \quad & < \quad aZ(Y) - O(Y) + j = R(Y,j) \\
& \xrightarrow{Z(X)=Z(Y), O(X)=O(Y)} \quad R(X) < R(Y).
\end{aligned}$$

حالت $(\mathrm{II})$:

$$\begin{aligned}
(X,i) \prec_B (Y,j) \quad & \xrightarrow{X \prec_Z Y} \quad R(X,i) = aZ(X) - O(X) + i < aZ(Y) - O(Y) + j = R(Y,j) \\
& \xrightarrow{Z(X)<Z(Y)} \quad R(X) < R(Y).
\end{aligned}$$

$\square$

از آنجا که تابع $R$ دوسوئی است برای عنصر $Z \in B$ تعریف می‌کنیم:

$$R(s_B(Z)) = R(Z) + 1. \qquad (*)$$

برای این‌که نشان دهیم جمع $\oplus_B$ تحت نگاشت $R$ همان جمع روی اعداد طبیعی است ابتدا دو لم زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

**لم ۳-۴۴.** *فرض کنیم $X, Y \in A$. آن‌گاه:*

$$O(X) + O(Y) = O(X \oplus Y) + r(X,Y) - 1.$$

*اثبات.* ابتدا مقادیر $r(X,Y)$ را محاسبه می‌کنیم و برای این کار شرایط تعریف ۳-۳۷ را بررسی می‌کنیم.

حالت $(I)$: فرض می‌کنیم $X \prec_O \mathbf{e} \ominus Y$ و $0 \preceq_O Y$ بنابراین با تعریف ۳-۳۷ ، داریم $r(X,Y) = 0$ و با استفاده از تعریف ۳-۳۷ و لم ۳-۳۸ به‌دست می‌آوریم:

$$O(X) < O(\mathbf{e} \ominus Y) = O(\mathbf{e}) - O(Y)$$

و چون مقدار $O(Y) < O(\circ) = \circ \Longrightarrow Y \preceq_O \circ$ بنابراین $O(X) + O(Y) \leq O(X \oplus Y)$ پس وقتی دو طرف رابطه‌ی بالا را به اضافه $O(Y)$ کنیم داریم:

$$O(X) + O(Y) < O(\mathbf{e}) - O(Y) + O(Y) = O(\mathbf{e}) \leq O(X \oplus Y)$$

و از آن‌جا که $O(\mathbf{e}) = ۱ - a$ داریم:

$$O(X) + O(Y) < ۱ - a \xrightarrow{+۱} O(X) + O(Y) + ۱ < ۱ - a + ۱ = ۲ - a$$

با توجه به بازه‌ی $I = [۱ - a, ۲ - a)$، بنابراین $O(X) + O(Y) + ۱ \in I$ و به‌دست آوردیم که $r(X, Y) = \circ$ بنابراین در $O(X) + O(Y) = O(X \oplus Y) + r(X, Y) - ۱$ داریم:

$$O(X) + O(Y) = O(X \oplus Y) - ۱.$$

حالت $(II)$: فرض می‌کنیم $Y \prec_O \circ$ و $X \succeq_O \mathbf{e} \ominus Y$ بنابراین با تعریف ۳-۳۷ ، داریم $r(X, Y) = ۱$ و با استفاده از تعریف ۳-۳۷ و لم ۳-۳۸ به‌دست می‌آوریم:

$$O(X) > O(\mathbf{e} \ominus Y) = O(\mathbf{e}) - O(Y)$$

و چون مقدار $O(Y) < O(\circ) = \circ \Longrightarrow Y \preceq_O \circ$ بنابراین $O(X) \geq O(X) + O(Y)$ پس وقتی دو طرف رابطه‌ی بالا را به اضافه $O(Y)$ کنیم داریم:

$$O(X) \geq O(X) + O(Y) > O(\mathbf{e}) - O(Y) + O(Y) = O(\mathbf{e})$$

و از آن‌جا که $O(\mathbf{e}) = ۱ - a$ بنابراین:

$$O(X) + O(Y) > ۱ - a$$

با توجه به بازه‌ی $I = [۱ - a, ۲ - a)$، بنابراین $O(X) + O(Y) \in I$ و به‌دست آوردیم که $r(X, Y) = ۱$ بنابراین در $O(X) + O(Y) = O(X \oplus Y) + r(X, Y) - ۱$ داریم:

$$O(X) + O(Y) = O(X \oplus Y) + ۱ - ۱ \Longrightarrow O(X) + O(Y) = O(X \oplus Y).$$

حالت $(III)$: فرض می‌کنیم $Y \succ_O \circ$ و $\mathbf{e} \ominus Y \preceq_O X$ بنابراین با تعریف ۳-۳۷ ، داریم $r(X,Y) = ۲$ و با استفاده از تعریف ۳-۳۷ و لم ۳-۳۸ به‌دست می‌آوریم:

$$O(X) > O(\mathbf{e} \ominus Y) = O(\mathbf{e}) - O(Y) + ۱$$

از آن‌جایی که $O(\mathbf{e}) = ۱ - a$ و $Y \succ_O \circ \Longrightarrow O(Y) > O(\circ) = \circ$ بنابراین $O(X) + O(Y) > O(X \oplus Y)$ حال با اضافه کردن $O(Y)$ به دو طرف داریم:

$$O(X) + O(Y) > O(\mathbf{e}) - O(Y) + O(Y) + ۱ = ۱ - a + ۱ = ۲ - a > O(X \oplus Y)$$

و به‌دست آوردیم که $r(X,Y) = ۲$ بنابراین در $O(X) + O(Y) = O(X \oplus Y) + r(X,Y) - ۱$ داریم:

$$O(X) + O(Y) = O(X \oplus Y) + ۲ - ۱ \Longrightarrow O(X) + O(Y) = O(X \oplus Y) + ۱.$$

حالت $(IIII)$: فرض می‌کنیم $Y \succ_O \circ$ و $X \prec_O \mathbf{e} \ominus Y$ بنابراین با تعریف ۳-۳۷ ، داریم $r(X,Y) = ۱$ و با استفاده از تعریف ۳-۳۷ و لم ۳-۳۸ به‌دست می‌آوریم:

$$O(X) < O(\mathbf{e} \ominus Y) = O(\mathbf{e}) - O(Y) + ۱$$

از آن‌جایی که $O(\mathbf{e}) = ۱ - a$ و $Y \succ_O \circ \Longrightarrow O(Y) > O(\circ) = \circ$ بنابراین $O(X) < O(X) + O(Y)$ حال با اضافه کردن $O(Y)$ به دو طرف داریم:

$$O(X) < O(X) + O(Y) < O(\mathbf{e}) - O(Y) + O(Y) + ۱ = ۱ - a + ۱ = ۲ - a$$

با توجه به بازه‌ی $I = [۱ - a, ۲ - a)$ ،بنابراین $O(X) + O(Y) \in I$ و به‌دست آوردیم که $r(X,Y) = ۱$ بنابراین در $O(X) + O(Y) = O(X \oplus Y) + r(X,Y) - ۱$ داریم:

$$O(X) + O(Y) = O(X \oplus Y) + ۱ - ۱ \Longrightarrow O(X) + O(Y) = O(X \oplus Y).$$

□

**لم ۳-۴۵.** *فرض کنیم $Z_۱, Z_۲ \in B$ . آن‌گاه:*

$$R(Z_۱ \oplus_B Z_۲) = R(Z_۱) + R(Z_۲)$$

*اثبات.* فرض می‌کنیم $Z_۱ = (X, i) \in B$ و $Z_۲ = (Y, j) \in B$ هم چنین بنابه تعریف ۳-۴۱ داریم $((X, i) \oplus_B (Y, j) = s^{i+j+r(X,Y)-۲}((X \oplus Y), ۱))$ بنابراین:

$$R((X, i) \oplus_B (Y, j)) = R(s^{i+j+r(X,Y)-۲}((X \oplus Y), ۱))$$

با استفاده از فرمول (*) که داشتیم $(R(s_B(Z) = R(Z) + ۱)$ طرف راست برابر است با:

$$= R((X \oplus Y), ۱) + i + j + r(X, Y) - ۲$$

از آنجا که $(R(X, i) = aZ(X) - O(X) + i)$ داریم:

$$= aZ(X \oplus Y) - O(X \oplus Y) + ۱ + i + j + r(X, Y) - ۲$$

با تعریف ۳-۱۷ و لم ۳-۴۴ می‌دانیم $(Z(X \oplus Y) = Z(X) + Z(Y))$ و $(O(X \oplus Y) = O(X) + O(Y) - r(X, Y) + ۱)$ بنابراین:

$$\begin{aligned} &= aZ(X) + aZ(Y) + O(X) + O(Y) - r(X, Y) + ۱ + ۱ + i + j + r(X, Y) - ۲ \\ &= aZ(X) + O(X) + i + aZ(Y) + O(Y) + j \\ &= R(X, i) + R(Y, j). \end{aligned}$$

□

با تعاریف و لم‌هایی که در این قسمت آوردیم نتیجه زیرا به‌دست می‌آوریم:

**نتیجه ۳-۴۶.** *نگاشت $R$ که به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم ایزومرفیسم است:*

$$R \;:\; (B, \prec_B, \oplus_B) \longrightarrow (\mathbb{N}, <, +).$$

## ۱۴.۳ قسمت (۱۴) نمودار

در قسمت‌های قبلی برای تعبیر هم زمان مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ درون ساختار $\mathcal{B}$ ابتدا دو نگاشت یکریخت $R \;:\; B \longrightarrow \mathbb{N}$ و $S \;:\; A \longrightarrow [۰, ۱)$ را معرفی کردیم، و در این قسمت برای رسیدن به این هدف نگاشت یکریخت $T$ را معرفی می‌کنیم.

نگاشت $T$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} T \ : \quad B \times A &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq \circ} \\ (Z, X) &\longmapsto R(Z) + S(X) \end{aligned}$$

بنابه لم‌های ۳-۳۰ و ۳-۳۶ ما ثابت کردیم که نگاشت‌های $R$ و $S$ دو سوئی هستند بنابراین نگاشت $T$ تعریف شده در بالا نیز دوسوئی است.

## ۱۵.۳ قسمت (۱۵) نمودار

در قسمت قبلی اشاره کردیم که می‌خواهیم با استفاده از نگاشت $T$ مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ را به طور هم زمان درون $\mathcal{B}$ تعبیر کنیم، با توجه به تعریف نگاشت $T$ ملاحضه می‌کنید که مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ تعبیر شده‌است و برای تعبیر مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ ما در این قسمت مجموعه‌ی $C = B \times A$ را می‌سازیم و دو زیر مجموعه از آن را به‌صورت $A'$ و $B'$ تعریف می‌کنیم. هم چنین نشان می‌دهیم نگاشت $T$ مجموعه‌ی $A'$ را به مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و مجموعه‌ی $B'$ را به مجموعه‌ی $\mathbb{N}a$ می‌برد.

**تعریف ۳-۴۷.** *فرض می‌کنیم $C := B \times A$. مجموعه‌ی $A' \subseteq C$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\{(p_B^{\text{۲}}(X, \text{۱}), X \oplus \text{۱}) \ : \ X \in A_{fin}, X \prec_O \circ\} \cup \{(p_B(X, \text{۱}), X \oplus \text{۱}) \ : X \in A_{fin}, X \succeq_O \circ\}$$

*و مجموعه‌ی $B' \subseteq C$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\{(Z, \text{۱}) \ : \ Z \in B\}.$$

در جدول زیر تمام نگاشت‌های یکریختی را که تا کنون معرفی کردیم به همرا دامنه و بردشان آورده‌ایم.

| ایزومرفیسم | دامنه | برد |
|---|---|---|
| $O$ | $A$ | $I$ |
| $Z$ | $A_{fin}$ | $\mathbb{N}$ |
| $S$ | $A$ | $[۰, ۱)$ |
| $R$ | $B$ | $\mathbb{N}$ |
| $T$ | $C$ | $R_{\geq ۰}$ |

**لم ۳-۴۸.** *نگاشت* $(\mathbb{R}_{\geq ۰}, \mathbb{N}, \mathbb{N}a) \longrightarrow (C, B', A') : T$ *ایزومرفیسم است.*

*اثبات.* باید نشان دهیم $T(B') = \mathbb{N}$ و $T(A') = \mathbb{N}a$.

بنابه تعریف ۳-۴۷ می‌دانیم $B' = \{(Z, ۱) : Z \in B\}$. فرض می‌کنیم $(Z, ۱) \in B'$ بنابراین:

$$T(Z, ۱) = R(Z) + S(۱)$$

با تعریف نگاشت $S$ در بخش ۹.۳ :وقتی ۱ $\preceq_O$ ۱ آنگاه $S(۱) = O(۱) - O(۱) = ۰$. بنابراین:

$$R(Z) + ۰ = R(Z)$$

و از تعریف ۳-۳۴ برای هر $Z = (X, i)$ داریم:

$$R(Z) = aZ(X) - O(X) + i \in \mathbb{N}$$

و از آنجا که نگاشت $R : B \longrightarrow \mathbb{N}$ دوسوئی است پس $T(B') = \mathbb{N}$.

حال نشان می‌دهیم $T(A') = \mathbb{N}a$ . برای این کار فرض می‌کنیم $X \in A_{fin}$ ، با استفاده از لم۱۹ــ۳ داریم $O(X \oplus Y) = O(X) + O(Y) \quad mod\ ۱$ بنابراین:

$$O(X \oplus ۱) = O(X) + O(۱) \quad mod\ ۱.$$

با تعریف ۳-۴۷ دو حالت رخ می‌دهد:

حالت $(I)$: فرض می‌کنیم $X \succeq_O ۰$ و از آنجا که $O(X) \in I$ به‌دست می‌آوریم:

$$X \succeq_O ۰ \Longrightarrow ۰ \leq O(X) < ۱$$

بنابراین با تعریف ۳-۲۹ برای حالتی که $X \preceq_O$ ۱ داریم:

$$
\begin{aligned}
(۱) \qquad S(X \oplus ۱) &= O(X \oplus ۱) - O(۱) \\
&= O(X) + O(۱) - O(۱) \quad mod\ ۱ \\
&= O(X) \in I
\end{aligned}
$$

بنابراین با تعریف نگاشت $T$ به‌دست می‌آوریم:

$$T(p_B(X, ۱), X \oplus ۱) = R(p_B(X, ۱)) + S(X \oplus ۱)$$

در آن $R(p_B(X, ۱))$ یعنی تالی ماقبل $(X, ۱)$ که با تعریف ۳-۳۴ برابر است با:

$$(۲) \qquad aZ(X) - O(X) + ۱ - ۱ = aZ(X) - O(X)$$

بنابراین از (۱) و (۲) به‌دست می‌آوریم:

$$aZ(X) - O(X) + O(X) = aZ(X) \in \mathbb{N}a.$$

حالت $(II)$: فرض می‌کنیم $X \prec_O$ ۰ ، داریم:

$$X \prec_O ۰ \longrightarrow O(X) < O(۰) = ۰ \xrightarrow{+۱} ۰ < O(X) + ۱ < ۱$$

با استفاده از تعریف ۳-۲۹ و هم چنین $X \succ_O$ ۱ به‌دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
(۱) \qquad S(X \oplus ۱) &= O(X \oplus ۱) - O(۱) + ۱ \\
&= O(X) + O(۱) - O(۱) + ۱ \quad mod\ ۱ \\
&= O(X) + ۱
\end{aligned}
$$

بنابراین با تعریف نگاشت $T$ به‌دست می‌آوریم:

$$T(p_B^۲(X, ۱), X \oplus ۱) = R(p_B^۲(X, ۱)) + S(X \oplus ۱)$$

و $R(p_B(X, ۱))$ یعنی دو تا تالی ماقبل $(X, ۱)$ که با استفاده از تعریف ۳-۳۴ برابر است با:

$$(۲) \qquad aZ(X) - O(X) + ۱ - ۲ = aZ(X) - O(X) - ۱$$

بنابراین از (۱) و (۲) به‌دست می‌آوریم:

$$aZ(X) - O(X) - 1 + O(X) + 1 = aZ(X) \in \mathbb{N}a.$$

از آنجا که نگاشت $Z \ : \ A_{fin} \longrightarrow \mathbb{N}$ دوسوئی است بنابراین $T(A') = \mathbb{N}a$. □

## ۱۶.۳ قسمت (۱۶) نمودار

در قسمت قبلی ما مجموعه‌ی $C = B \times A$ و هم چنین دو زیر مجموعه‌ی $A'$ و $B'$ از آن‌را ساختیم، هم چنین نشان دادیم که $T(B') = \mathbb{N}$ و $T(A') = \mathbb{N}a$ هستند. در این قسمت عمل جمع و ترتیب روی مجموعه $C$ را تعریف می کنیم و نشان می‌دهیم نگاشت ایزومرفیسم $T$ به طور هم زمان مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ را درون $\mathcal{B}$ تعبیر می‌کند.

**تعریف ۳-۴۹.** *فرض می‌کنیم $(Z_1, X_1), (Z_2, X_2) \in C$. عمل $\oplus$ را روی مجموعه‌ی $C$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$(Z_1, X_1) \oplus_C (Z_2, X_2) := \begin{cases} (s_B(Z_1 \oplus_B Z_2), X_1 \oplus_1 X_2), & \ominus_1 X_1 \preceq_1 X_2 \quad \text{هرگاه}; \\ (Z_1 \oplus_B Z_2, X_1 \oplus_1 X_2). & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

*در مجموعه $C$ می گوییم $(Z_2, X_2) \prec_C (Z_1, X_1)$ هرگاه $Z_1 \prec_B Z_2$ یا ($Z_1 = Z_2$ و $X_1 \prec_1 X_2$).*

**لم ۳-۵۰.** *نگاشت $T$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود دوسوئی است:*

$$T \ : \ (C, \prec_C, \oplus_C, B', A') \longrightarrow (\mathbb{R}_{\geq 0}, <, +, \mathbb{N}, \mathbb{N}a).$$

*اثبات.* فرض می‌کنیم $(Z_1, X_1), (Z_2, X_2) \in C = B \times A$. در قسمت‌های ۱۳.۳و ۱۰.۳ ثابت کردیم که نگاشت‌های $R \ : \ B \longrightarrow \mathbb{N}$ و $S \ : \ A \longrightarrow [0, 1)$ ایزومرفیسم هستند بنابراین $R(B) = \mathbb{N}$ و $S(A) = [0, 1)$. با توجه به تعریف نگاشت $T$ در بخش ۱۴.۳ داریم $T(Z, X) = R(Z) + S(X)$ بنابراین ترتیب با نگاشت $T$ را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$T(Z_1, X_1) < T(Z_2, X_2) \longleftrightarrow R(Z_1) + S(X_1) < R(Z_2) + S(X_2).$$

و از آنجایی که $R(B)$ یک مقدار طبیعی است و $S(A)$ یک مقدار اعشاری بین ۰ تا ۱ پس دو حالت رخ می‌دهد:

۱. $(R(Z_۱) < R(Z_۲))$ یا

۲. $S(Z_۱) < S(Z_۲)$ و $R(Z_۱) = R(Z_۲)$

حالت (۱): با استفاده از بخش ۱۳.۳ داریم:

$$R(Z_۱) < R(Z_۲) \Longleftrightarrow Z_۱ \prec_B Z_۲ \Longrightarrow (Z_۱, X_۱) \prec_C (Z_۲, X_۲). \qquad (۱)$$

حالت (۲): هرگاه $R(Z_۱) = R(Z_۲) \Longrightarrow Z_۱ = Z_۲$ پس کافی است $S(X_۱) < S(X_۲)$ را بررسی کنیم. با تعریف ۳-۲۹ دو حالت داریم: هرگاه $X_۱, X_۲ \preceq_O \mathbf{۱}$ بنابراین:

$$S(X_۱) < S(X_۲) \longrightarrow O(X_۱) - O(\mathbf{۱}) < O(X_۲) - O(\mathbf{۱}) \longrightarrow O(X_۱) < O(X_۲) \longrightarrow X_۱ \prec_O X_۲.$$

در غیر این صورت داریم:

$$S(X_۱) < S(X_۲) \longrightarrow O(X_۱) - O(\mathbf{۱}) + ۱ < O(X_۲) - O(\mathbf{۱}) + ۱ \longrightarrow O(X_۱) < O(X_۲) \longrightarrow X_۱ \prec_O X_۲.$$

همان طور که مشاهده می‌کنید در هر دو حالت $X_۱ \prec_O X_۲$ است پس با تعریف ۳-۲۹ به‌دست می‌آوریم:

$$X_۱ \prec_۱ X_۲ \longrightarrow (Z_۱, X_۱) \prec_C (Z_۲, X_۲). \qquad (۲)$$

حال نشان می‌دهیم عمل $\oplus$ روی $T$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T((Z_۱, X_۱) \oplus_C (Z_۲, X_۲)) = T(Z_۱, X_۱) + T(Z_۲, X_۲).$$

با استفاده از تعریف ۳-۴۹دو حالت رخ می‌دهد. ابتدا فرض می‌کنیم $X_۲ \preceq_۱ X_۱ \ominus_۱$ بنابراین:

$$T((Z_۱, X_۱) \oplus_C (Z_۲, X_۲)) = T(s_B(Z_۱ \oplus_B Z_۲), X_۱ \oplus_۱ X_۲)$$

و می‌دانیم $T(Z, X) = R(Z) + S(X)$ پس طرف راست برابر است با:

$$= R(s_B(Z_۱ \oplus_B Z_۲)) + S(X_۱ \oplus_۱ X_۲)$$

از آنجا که $s_B$ تالی مابعد است و با توجه به تعریف $\oplus_۱$ در نتیجه‌ی ۳-۳۲ به‌دست می‌آوریم:

$$= R(Z_۱ \oplus_B Z_۲) + ۱ + S(X_۱) + S(X_۲) - ۱$$

با تعریف عمل $\oplus_B$ روی نگاشت $R$ در لم ۳-۴۵ داریم:

$$= R_(Z_۱) + R(Z_۲) + S(X_۱) + S(X_۲)$$

$$= T(Z_۱, X_۱) + T(Z_۲, X_۲).$$

حال فرض می‌کنیم $X_۲ \succ_۱ \ominus_۱ X_۱$ بنابراین:

$$T((Z_۱, X_۱) \oplus_C (Z_۲, X_۲)) = T(Z_۱ \oplus_B Z_۲, X_۱ \oplus_۱ X_۲)$$

با تعریف $T(Z, X) = R(Z) + S(X)$ و همین طور تعریف عمل $\oplus_۱$ در نتیجه‌ی ۳-۳۲ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &= R(Z_۱ \oplus_B Z_۲) + S(X_۱ \oplus_۱ X_۲) && (۳)\\ &= R_(Z_۱) + R(Z_۲) + S(X_۱) + S(X_۲) && (۴)\\ &= T(Z_۱, X_۱) + T(Z_۲, X_۲). && (۵) \end{aligned}$$

$\square$

# فصل ۴

# مقالات برای مطالعه‌ی بیشتر

در این فصل مقاله‌های مرتبط با این موضوع را به‌صورت فهرست‌وار ذکر کرده‌ایم. طبیعی است که مجالی برای تعریف همه‌ی مفاهیم مورد نیاز این فهرست در این فصل نبوده‌است.

در [۴] ثابت شده‌است که ساختار $(\mathbb{R}, +, <, \mathbb{Z}, \lambda_a)$ که در آن $\lambda_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع است که $x$ را به $ax$ می‌برد، تصمیم پذیر است اگر و تنها اگر $a$ مربعی باشد. $a$ را مربعی می‌گوییم هرگاه جواب معادله‌ی درجه دو به شکل $ba^۲ + ca + d = ۰$ باشد که ضرایب $b, c, d$ صحیح هستند.

در [۲] ثابت شده‌است که ساختار $(\mathbb{R}, +, \cdot, f)$ که در آن $f : D^n \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع است به‌طوری که $f(D^n)$ هیچ‌جاچگال و $D \subseteq \mathbb{R}$ یک مجموعه‌ی گسسته‌ی بسته است، مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ را تعریف می‌کند.

در [۳] ثابت شده‌است که مجموعه‌های باز قابل تعریف در ساختار $(\overline{\mathbb{R}}, C)$ که در آن $C$ گروهی از نقاط گویای $(x, y) \in \mathbb{Q}^۲$ از یک خم بیضوی به معادله‌ی $y^۲ = x^۳ + ax + b$ است و $a, b \in \mathbb{Q}$، شبه‌جبری [۱] هستند.

در [۶] ثابت شده‌است هرگاه $\alpha$ عدد گنگ غیر مربعی [۲] باشد و $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی که $x$ را به

[۱] semialgebraic
[۲] non-quadratic

$\alpha x$ ببرد، آن‌گاه ساختار $(\mathbb{R}, <, +, \mathbb{N}, f)$ ضرب را روی $\mathbb{R}$ تعریف می‌کند.

در [۱] ثابت شده‌است ساختار $(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}_{alg}, ۲^{\mathbb{Z}})$ که در آن $\overline{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, +, \cdot, ۰, ۱, <)$ و $\mathbb{R}_{alg}$ اعداد جبری، همین طور $۲^{\mathbb{Z}}$ یک گروه ضربی گسسته است، اعداد صحیح را تعریف نمی‌کند.

در [۷] ثابت شده‌است هرگاه $\Gamma$ زیر گروه گسسته از $GL_n(C)$ باشد، آن‌گاه ساختار $(\mathbb{R}, +, <, \cdot, \Gamma)$ مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ را تعریف می‌کند یا ساختار $(\mathbb{R}, +, <, \cdot, \Gamma)$ با ساختار $(\mathbb{R}, +, <, \cdot, \lambda^{\mathbb{Z}})$ که $\lambda \in \mathbb{R}$ قابل تعریف است.

در [۱۷] ثابت شده‌است که یک مجموعه کانتور $K \subseteq \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که هر مجموعه‌ی قابل تعریف در $(\mathbb{R}, +, <, \cdot, K)$ بورِل باشد. منظور از یک مجموعه‌ی کانتور مجموعه‌ای است که فشرده، بدون نقطه درونی، بسته و هیچ‌جاچگال باشد.

در [۱۵] ثابت شده‌است هرگاه $a$ مربعی و $V_a$ تابعی باشد که هر عدد طبیعی $x$ را به کوچک‌ترین مخرج همگراها که در نمایش اُستروُفسکی [۳] بر پایه‌ی $a$ ظاهر می‌شود، ببرد آن‌گاه $X \subseteq \mathbb{N}$ در ساختار $(\mathbb{N}, +, V_a)$ قابل تعریف است اگر و تنها اگر $X$، یک مجموعه‌ی $a$تشخیص‌پذیر [۴] باشد. هم چنین ثابت شده‌است ساختار $(\mathbb{N}, +, V_a)$ تصمیم‌پذیر است.

در [۵] یک اصل بندی کامل از تئوری $(\mathbb{R}, +, ., ۲^{\mathbb{Z}})$ ارائه شده‌است و ثابت شده که این ساختار $\mathbb{Z}$ را تولید نمی‌کند.

در [۸] ثابت شده‌است که $Th(\mathbb{Z}, +, ۱, ۰, pr)$ تصمیم‌پذیر، ناپایدار [۵] و فوق‌ساده [۶] است. $pr$ یک محمول است برای این‌که عددی اول است یا نه.

در [۹] رابطه‌ی پایداری [۷] و پراکندگی [۸] مجموعه‌ی $A \subseteq \mathbb{N}$ با ساختار $(\mathbb{Z}, +, ۰, A)$ بیان شده‌است.

در [۱۰] ثابت شده‌است که هر گسترش از $(\mathbb{R}, <)$ مانند هر گسترش $o$مینیمال از $(\mathbb{R}, <)$ دارای ویژگی مقادیر میانی است، یعنی برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ تابع ثابت $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ قابل تعریف است که هر مقدار از $\mathbb{R}$ را به مقداری بین $f(a)$ و $f(b)$ می‌برد.

در [۱۱] ثابت شده‌است هرگاه $K$ یک زیر میدان از اعداد حقیقی و $f : D^n \longrightarrow K$ یک تابع هیچ‌جا چگال، که در آن $D \subseteq K$ و گسسته باشد آن‌گاه ساختار $(K, f)$ مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ را تعریف

[۳] Ostrowski representaion
[۴] recognizable
[۵] unstable
[۶] supersimple
[۷] stability
[۸] sparsity

می‌کند.

در [۱۲] تصمیم‌پذیری ساختار $(\mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, x \to ax)$ وقتی $a$ مربعی‌ست و تصمیم‌ناپذیری آن وقتی $a$ غیر مربعی گنگ [۹] است بررسی شده‌است.

در [۱۳] تئوری ساختار $(\mathbb{R}, ۲^{\mathbb{Z}})$ که در آن $۲^{\mathbb{Z}}$ گروه ضربی $\{۲^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = ۲^{\mathbb{Z}}$ است اصل بندی شده و نشان داده‌شده این تئوری کامل و تصمیم‌پذیر است که این اصول، اصول $Th(\mathbb{R}, ۲^{\mathbb{Z}})$ هستند.

در [۱۴] ثابت شده‌است که اگر $\mathcal{M}$ گسترشی [۱۰] از $(\mathbb{Z}, +, ۰)$ و کاهشی [۱۱] از $(\mathbb{Z}, +, <, ۰)$ باشد آن وقت $\mathcal{M}$ قابل تعبیر در $(\mathbb{Z}, +, ۰)$ یا $(\mathbb{Z}, +, <, ۰)$ می‌باشد. می‌گوییم $\mathcal{M}$ کاهشی از $(\mathbb{Z}, +, <, ۰)$ است هرگاه برای همه‌ی $n > ۰$ ، هر زیر مجموعه از $\mathbb{Z}^n$ که در $\mathcal{M}$ تعریف‌پذیر است در $(\mathbb{Z}, +, <, ۰)$ نیز تعریف‌پذیر است.

در [۲۱] تصمیم‌پذیری تئوری اعداد طبیعی، حقیقی و صحیح $\mathbb{N}$، $\mathbb{R}$و $\mathbb{Z}$ در زبان‌های $\{<\}$، $\{<, +\}$ و $\{<, \cdot, +\}$ بررسی شده‌است.

---

[۹] non-quadratic irrational
[۱۰] expansion
[۱۱] reduct

# منابع


[1] khani M., “The field of reals with a predicate for the real algebraic numbers and a predicate for the integer powers of two”, Archive for Mathematical Logic 7-8 (2015) 885–898.

[2] Hieronymi P., “Defining the set of integers in expansions of the real field by a closed discrete set”, Proceedings of the American Mathematical Society (6) 138 (2010) 2163–2168.

[3] Günaydin A. and Hieronymi P., “The real field with the rational points of an elliptic curve”, Fundamenta Mathematicae 211 (2011) 15-40.

[4] Hieronymi P., “When is scalar multiplication decidable?”, Annals of Pure and Applied Logic, Elsevier (2019).

[5] Günaydin A. and Van Den Dries L., “The fields of real and complex numbers with a small multiplicative group”, Proceedings of the London Mathematical Society, Cambridge University Press (2006) 43–81.

[6] Hieronymi P. and Tychonievich M., “Interpreting the projective hierarchy in expansions of the real line”, Linear Algebra and its Applications,Cambridge University Press 142 (2014) 3259–3267.

[7] Hieronymi P. and Walsberg E. and Xu S., “Expansions of the real field by discrete subgroups of”, Fundamenta Mathematicae 215 (2011) 167-175.

[8] Kaplan I. and Shelah S., "Decidability and classification of the theory of integers with primes", The Journal of Symbolic Logic, Cambridge University Press 82 (2017) 1041–1050.

[9] Conant G., "Stability and sparsity in sets of natural numbers", Israel Journal of Mathematics, Springer 230 (2019) 471–508.

[10] Miller Ch., "Expansions of dense linear orders with the intermediate value property", The Journal of Symbolic Logic, Cambridge University Press 66 (2001) 1783–1790.

[11] Hieronymi P., "Expansions of subfields of the real field by a discrete set", Fundamenta Mathematicae 215 (2011) 167–175.

[12] Hieronymi P. and Nguyen D. and Pak I., "Presburger Arithmetic with algebraic scalar multiplications", New York (2017) 37–48.

[13] Van Den Dries L., "The field of reals with a predicate for the powers of two", Manuscripta mathematica, Springer 54 (1) (1985) 187–195.

[14] Conant G., "There are no intermediate structures between the group of integers and Presburger arithmetic", The Journal of Symbolic Logic, Cambridge University Press 83 (1) (2018) 187–207.

[15] Hieronymi P. and Terry Jr.A., "Ostrowski Numeration Systems, Addition, and Finite Automata", Notre Dame Journal of Formal Logic, University of Notre Dame 59 (2) (2018) 215–232.

[16] Hieronymi P., "Expansions of the ordered additive group of real numbers by two discrete subgroups", The Journal of Symbolic Logic, Cambridge University Press 81 (3) (2016) 1007–1027.

[17] Hieronymi P.Ch.K., "A tame cantor set", Journal of the European Mathematical Society, European Mathematical Society Publishing House 20 (9) (2018) 2063–2104.

[18] Khoussainov B. and Nerode A., "*Automata Theory and its applications*", Birkhäuser, ©2001 Boston (21) 2012.

[19] Marker D., "*Model Theory: an introduction*", Birkhäuser ©2001, Boston (217) 2006.

[20] Büchi J.R., "On a Decision Method in Restricted Second Order Arithmetic", Stanford University Press, Springer (1990) 425–435.

[21] Assadi Z. and Salehi S., "On decidability and axiomatizability of some ordered structures", Soft Computing, Springer (2018) 1–12.

[22] Hieronymi P., "Expansions of the ordered additive group of real numbers by two discrete subgroups", The Journal of Symbolic Logic, Cambridge University Press 81 (3) (2016) 1007–1027.

[23] Rockett A.M. and Szüsz P., "*Continued Fractions*", Singapore, New Jersey, World Scientific 1992.

# واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

## ب

بسط کسر مسلسل ........ continuous fraction expansion

بازگشتی ........ recursive

سازگاری ........ topological closure

## پ

پراکندگی ........ sparsity

## ت

تشخیص پذیری ........ recognizable

تالی ما بعد ........ successor

تالی ما قبل ........ predecessor

تصمیم پذیر ........ decidable

تعبیر پذیر ........ interpretable

## ح

حساب پرسبرگر ........ presburger arithmetic

## س

سازگاری ........ satisfiable
ساختار دو بخشی ........ two-sorted structure

### ش

شبه جبری ........ semialgebraic

### غ

غیر مربعی ........ non-quadratic

### ف

فوق ساده ........ supersimple
فیبونانچی ........ fibonacci

### ق

قضیه تمامیت گودل ........ Goldes completeness teorem
قضیه تارسکی ........ Tarski theorem

### ک

کامل ........ complete
کمینه ترتیبی ........ O-minimal
کاهشی ........ reduct

### گ

گسترشی ........ expansion

**م**

میدان های بستار حقیقی ........ Real Closed Field
میدان های بستار جبری ........ Algebraic Closed Field
ماشین متناهی ........ finite autimaton

**ن**

نمایش استرفسکی ........ Ostrowski representaion
نا پایدار ........ unstable
نسبت طلایی ........ golden ratio

**ه**

هیچ جا چگال ........ nowhere dense
هم آمیخت ........ convolutuon

# فهرست نمادها

| نماد | مفهوم | اولین صفحه‌ی مراجعه |
|---|---|---|
| $\mathcal{F}$ | مجموعه نماد تابعی | ۱ |
| $\mathcal{R}$ | مجموعه نماد رابطه‌ای | ۱ |
| $\mathcal{C}$ | مجموعه ثوابت | ۱ |
| $\mathfrak{M}$ | $L$ساختار | ۱ |
| $f^{\mathfrak{M}}$ | تابع $f$ در $L$ساختار | ۱ |
| $R^{\mathfrak{M}}$ | تعبیر رابطه $R$ در $L$ساختار | ۱ |
| $c^{\mathfrak{M}}$ | تعبیر ثابت $c$ در $L$ساختار | ۱ |
| $\mathfrak{M} \models \varphi$ | ساختار $\mathfrak{M}$ مدلی برای $\varphi$ | ۲ |
| $T \models \varphi$ | $\varphi$ در هر مدل $T$ درست است | ۲ |
| $Th(\mathfrak{M})$ | تمام جملات درست در $\mathfrak{M}$ | ۲ |
| $Pr$ | حساب پرسبرگر | ۴ |
| $\in$ | تعلق | ۴ |
| $s_{\mathbb{N}}$ | تابع تالی | ۴ |
| $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ | مجموعه توانی اعداد طبیعی | ۴ |
| $\mathbb{R}_{alg}$ | تئوری از گسترش $O$مینیمال | ۶۵ |
| $۲^{\mathbb{Z}}$ | گروه ضربی گسسته | ۶۵ |
| $e$ | عدد نپر | ۸ |

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{p_k}{q_k}$ | $k$اُمین همگرا | ۹ |
| $\beta_k$ | $k$اُمین تفاضل | ۹ |
| $\zeta_k$ | $k$اُمین خارج قسمت | ۹ |
| $b_k$ | ضرایب بسط استرفسکی | ۱۷ |
| $\Sigma_a$ | مجموعه صفر تا بزرگترین عدد در بسط استرفسکی | ۲۱ |
| $\rho_a(N)$ | $\Sigma_a$ حرف‌های $b_۱, \cdots, b_{n+۱}$ | ۲۱ |
| $\Sigma_a^*$ | مجموعه کلمات با طول متناهی روی $\Sigma_a$ | ۲۱ |
| $p(x), q(x)$ | محمول برای اعداد صحیح | ۲۵ |
| $\xi + ۱$ | شروع دوره تناوب در کسر مسلسل | ۲۵ |
| $\nu$ | طول دوره تناوب در کسر مسلسل | ۲۵ |
| $\mu$ | بزرگ‌ترین $a_i$ در کسر مسلسل | ۲۶ |
| $I$ | بازه‌ای به طول ۱ | ۲۶ |
| $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ | مجموعه توانی $\mathbb{N}$ | ۲۶ |
| $A$ | زیر مجموعه‌ای از$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ | ۲۶ |
| $A_{fin}$ | زیر مجموعه‌ای متناهی از$A$ | ۲۶ |
| $\oplus$ | جمع روی $A, A_{fin}$ | ۳۵ |
| $\prec_Z$ | ترتیب روی $A_{fin}$ | ۳۵ |
| $\prec_O$ | ترتیب روی $A$ | ۳۸ |
| $+_۱$ | جمع روی بازه‌ی$I$ | ۴۰ |
| $\prec_۱$ | ترتیب روی $A$ | ۴۳ |
| $\oplus_۱$ | جمع روی $A$ | ۴۳ |
| $s_B$ | تالی مابعد | ۵۱ |
| $p_B$ | تالی ماقبل | ۵۱ |
| $\oplus_B$ | جمع روی $B$ | ۵۱ |
| $\prec_B$ | ترتیب روی $B$ | ۵۱ |

**Expansions of the Ordered Additve Group of Real Numbers by two Discrete Subgroups**

Masumeh Rezaei
masumeh.rezaei@math.iut.ac.ir
May 29, 2019
Master of Science Thesis (in Farsi)
Departement of Mathematical Sciences
Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-8311, Iran

---

**Supervisor**: Dr. Mohsen Khani, `mohsen.khani@cc.iut.ac.ir`
**Advisor**: Dr. Mojtaba Aghaei, `aghaei@cc.iut.ac.ir`
**2000 MSC**: 03F52, 03B42
**Keywords**: Model theory, continuous fractions, Ostrowski expansion, interpretation, decidablility

---

**Abstract:**
This M.Sc. thesis is based on the following paper
Hieronymi, Philipp, *Expansions of the ordered additive group of real numbers by two discrete subgroups,* The Journal of Symbolic Logic 81.3 (2016): 1007-1027.

One of the important concepts in logic and model theory is decidablility. The purpose of this thesis is to prove the decidability of the structure $\mathcal{R}_a := (\mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}a)$, where $a$ is quadratic, $\mathbb{Z}$ is a predicate for the integers, $\mathbb{Z}a$ a predicate for the set $\{an | \, n \in \mathbb{Z}\}$.
In order to be able to prove that $\mathcal{R}_a$ is decidable we interpret it within a decidable structure. $\mathcal{B} := (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), s_{\mathbb{N}}, \in)$ which is known (by a result of Büchi) to be decidable.
The structure $\mathcal{B}$ is called two-sorted, due to two sets $\mathbb{N}$ and $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. In the structure $\mathcal{B}$ the function $s_{\mathbb{N}}$ is the successor function in the form $s_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ such that every member $x$ in $\mathbb{N}$ successor is sent to $x + 1$, and the relation $\in$ is a relation on $\mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ such that $\in (t, X)$ iff $t \in X$.
Interpreting means that we define the corresponding with sets, relationships and operations within the structure $\mathcal{R}_a$ definable sets inside the structures $\mathcal{B}$.
To interpret the structure $\mathcal{R}_a$ within the structure $\mathcal{B}$ we first create a set $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, a set of sets $\mathbb{N}$ and a set $A_{fin} \subseteq A$, which are to play the same role the same $\mathbb{R}$ and $\mathbb{N}$.
We then define the sum and order of these two sets, then we introduce the map $Z \; : \; (A_{fin}, \prec_Z, \oplus) \longrightarrow (\mathbb{N}, <, +)$ by which we define the set $\mathbb{N}$ within the structure $\mathcal{B}$.
In the next step we introduce the map $O$ in the form $O \; : \; (A, \prec_O, \oplus) \longrightarrow (I, <, +_1)$ by which we define the set $\mathbb{R}$ within the structure $\mathcal{B}$. In this way we impute a set to any number and define sum and order on the sets. Then we introduce the map $S$ in the form $S \; : \; (A, \prec_1, \oplus_1) \longrightarrow ([0, 1), <, + \, mod \, 1)$ by which we change the interval $I$ to $[0, 1)$ so that we can interpret all the real numbers within the structure $\mathcal{B}$.
Notice that with the map $Z$ we interpreted the set $\mathbb{N}$ and with the map $S$ we interpreted the set $\mathbb{R}$ within the structure $\mathcal{B}$. To be able to synchronous interpret these two sets within the structure $\mathcal{B}$ we first define the set $B \subseteq A_{fin} \times \{0, 1, 2\}$ including regular pairs. The set $\{0, 1, 2\}$ means that there are several natural numbers inside the interval $(aZ(X), a(Z(X) + 1))$. Then by definition sum and order on $B$ we introduce map $R \; : \; (B, \prec_B, \oplus_B) \longrightarrow (\mathbb{N}, <, +)$.
In the final step to synchronous interpret two sets $\mathbb{N}$ and $\mathbb{R}$, we put the set $C = A \times B$ then define sum and order on $C$, as well we define $A' \subseteq C$ and $B' \subseteq C$ which play respectively the role of $\mathbb{N}a$ and $\mathbb{N}$. And at the end we introduce the map$T \; : \; (C, \prec_C, \oplus_B, B', A') \longrightarrow (\mathbb{R} \geq 0, <, +, \mathbb{N}, \mathbb{N}a)$.
We get the map $T$ that $T(B') = \mathbb{N}$ and $T(A') = \mathbb{N}a$. So by map $T$ interpret structure

$(\mathbb{R} \geq 0, <, +, \mathbb{N}, \mathbb{N}a)$ which is similar to structure $\mathcal{R}_a$ within the structure $\mathcal{B}$. With this process we interpret the structure $\mathcal{R}_a$ within the structure $\mathcal{B}$.

Isfahan University of Technology
Department of Mathematical Sciences

# Expansions of the Ordered Additve Group of Real Numbers by two Discrete Subgroups

A Thesis
Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Master of Science

By
Masumeh Rezaei

Evaluated and approved by the thesis committee, on 15/5/2019

1- Dr. Mohsen Khani, Assistant Professor (Supervisor)

2- Dr. Mojtaba Aghaei, Assistant Professor (Advisor)

3- Dr. Massoud Pourmahdian, Associate Professor (Examiner)

4- Dr. Mohammad Reza Koushesh, Associate Professor (Examiner)

Dr. Bijan Taeri, Professor (Department graduate coordinator)

Isfahan University of Technology
Department of Mathematical Sciences

Thesis Submitted for the Award of Master of Science in Mathematics

# Expansions of the Ordered Additve Group of Real Numbers by two Discrete Subgroups

Masumeh Rezaei

Supervisor: Dr. Mohsen Khani

Advisor: Dr. Mojtaba Aghaei

May 2019