تصمیم‌پذیری بسطهایی از ساختار جمعی اعداد صحیح با یک دنبالهٔ بیتی

افشین زارعی

دانشگاه صنعتی اصفهان

۲۸ شهریورماه ۱۴۰۲

انگیزه

- ✘ $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, <, ۰, ۱\rangle$ تصمیم‌ناپذیر است (قضیهٔ ناتمامیت اول گودل).
- ✘ $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{Z}, <\rangle$ تصمیم‌ناپذیر است (تعریف‌پذیری همهٔ مجموعه‌ها در تمام سطوح سلسله مراتب مجموعه‌های تحلیلی، Miller, C., Tameness in Expansions of the Real Field).
- ✓ $\langle \mathbb{Z}, +, \{\overset{n}{\equiv}\}_{n\in\mathbb{N}}, <, ۰, ۱\rangle$ حذف‌سور می‌پذیرد و تصمیم‌پذیر است (حساب پرسبرگر).
- ✓ $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, <\rangle$ حذف‌سور دارد و تصمیم‌پذیر است (تارسکی_سایدنبرگ و کمینگی ترتیبی، Van den Dreis, L., Tame topology and O-minimal structure).

سوالات

هیرونیمی و میلر سوالات زیر را مطرح کرده‌اند:

۱. برای کدام $S \subset \mathbb{R}$، $\langle \mathbb{R}, +, (\alpha x)_{\alpha \in S}, \mathbb{Z}, < \rangle$، تصمیم‌پذیر است ؟ ؟

۲. به‌طور خاص، برای کدام $S \subset \mathbb{R}$، $\langle \mathbb{Z}, +, (\lfloor \alpha x \rfloor)_{\alpha \in S} \rangle$، تصمیم‌پذیر است ؟ ؟

۳. برای کدام $S \subset \mathbb{R}$، $\langle \mathbb{R}, +, (\alpha \mathbb{Z})_{\alpha \in S}, \mathbb{Z}, < \rangle$، تصمیم‌پذیر است ؟ ؟

قضیه (هیرونیمی ۲۰۱۹)

✓ برای $\alpha \notin \mathbb{Q}$، $S_\alpha = \langle \mathbb{R}, +, \alpha x, \mathbb{Z}, < \rangle$ تصمیم‌پذیر است اگر و تنها اگر α مربعی باشد.

✘ اگر α، β و ۱ روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی باشند، آنگاه $\langle \mathbb{R}, +, \alpha x, \beta x, \mathbb{Z}, < \rangle$ تصمیم‌ناپذیر است.

ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Annals of Pure and Applied Logic

www.elsevier.com/locate/apal

When is scalar multiplication decidable?

Philipp Hieronymi [1]

Department of Mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1409 West Green Street, Urbana, IL 61801, United States of America

ARTICLE INFO

Article history:
Received 8 June 2015
Received in revised form 21 March 2019
Accepted 3 May 2019
Available online 7 May 2019

ABSTRACT

Let K be a subfield of $\mathbb{R}$. The theory of $\mathbb{R}$ viewed as an ordered K-vector space and expanded by a predicate for $\mathbb{Z}$ is decidable if and only if K is a real quadratic field.

قضیه (هیرونیمی ۲۰۱۶)

✓ برای α مربعی $\mathcal{R}_\alpha = \langle \mathbb{R}, <, +, \mathbb{Z}, \alpha\mathbb{Z} \rangle$ **تصمیم‌پذیر** است، در نتیجه $\langle \mathbb{Z}, +, \lfloor \alpha x \rfloor, ۰, ۱ \rangle$ **تصمیم‌پذیر** است.

مرور اثبات. ۱. استفاده از بسط کسر مسلسل و نمایش اُسترفسکی برای نمایش اعداد
۲. نسبت دادن زیرمجموعه‌ای متناهی از اعداد طبیعی به هر عدد طبیعی
۳. نسبت دادن زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی برای هر عدد در حقیقی در بازهٔ $[۰, ۱)$.
۴. تعبیر کردن جمع و ترتیب در ساختار $\langle \mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \in, s \rangle$.

Lemma 3.31. The map $T : (C, B', A') \to (\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{N}, \mathbb{N}a)$ is an isomorphism.

Isomorphism	Domain	Codomain
O	A	I
Z	A_{fin}	$\mathbb{N}$
S	A	$[0, 1)$
R	B	$\mathbb{N}$
T	C	$R_{\geq 0}$

قضیه (بوخی ۱۹۶۱)

$\langle \mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \in, s \rangle$ *تصمیم‌پذیر است.*

مکاتبه با هیرونیمی

Dear Afshin,

thanks for your email. Sorry for the late reply. The beginning of the semester is very busy.

1) **About a possible visits:** in principle the Department of Mathematics is willing to host foreign visiting graduate students, however, we have no money to support you during a potential stay here. So you would have to be able to support yourself and be able to prove that you can do so when applying for a visa. I would act as a faculty sponsor for your visit (again, that doesn't mean that I could pay for your visit, but just that I would be happy to work with you). So if you are serious about visiting here, let me know. Before I would be able to start the process on our end, I would like to know bit a more about the details of your proposed visit (such as funding and dates) and would like to discuss a bit more what we could work on if you decide to come.

2) **About research:** I have lots of open questions. Here are three questions I like around the decidability of expansions by traces of multiplication.

a) Let phi be the golden ratio. Consider the following function from f : N -> N such that f(n) = floor(phi*n). It follows from my paper "Expansions of the ordered additive group of real numbers by two discrete subgroups" that the the theory of (N,<,+,f) is decidable. However, I would really like to know whether there is a more direct proof. I also wonder whether there is a nice quantifier-elimination result for this structure. The function f codes the Beatty sequence of the golden ratio. So it would be interesting to know how much the structure knows about this sequence, and how much you need to know about the sequence to prove decidability of (N,<,+,f).

b) Let a,b in R be such that 1,a,b are Q-linearly independent. Then by my paper with Tychonievich, the structure (R,<,+,Z,aZ,bZ) defines multiplication on R and hence its theory is undecidable. What I still don't know is the following. Is there a set that is definable in both (R,<,+,Z,aZ) and in (R,<,+,Z,bZ), but not definable in (R,<,+,Z)? So I am asking for some analogue of Cobham's theorem in this setting. One could take a look at the paper Boigelot, Brusten, and Bruyere, On the sets of real numbers recognized by finite automata in multiple bases. Log. Methods Comput. Sci., 6(1):1:6, 17, 2010, and see whether their methods can be adjusted.

c) This one is harder than the first two, but any progress would be very interesting: let e be the Euler number. Is the theory of (R,<,+,N,eN) decidable? I have some ideas what one could try, but I am not sure they work.

Let me know if you (and Mohsen) are interested in working on one of these problems as I want to make sure that I don't ask one of my students to work on it, too. (On Problem 1 and 3, I could be interested in working with you.)

One thing I should mention though is that I have a student who has worked on expansions of (R, +, <, Q) by scalar multiplication by certain irrationals, and has shown that the resulting structure is still near model-complete (and its theory is decidable under suitable assumptions on the scalars you are adding).

Best regards,

Philipp

سوال؟

اثباتی نظریهٔ مدلی برای تصمیم‌پذیری ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, \underbrace{\lfloor \varphi x \rfloor}_{f}, 0, 1\rangle$.

۱. $\langle \mathbb{Z}, +, \underbrace{\lfloor \varphi x \rfloor}_{f}, ۰, ۱ \rangle \models \mathcal{T}_\varphi$
۲. $\mathcal{T}_\varphi$ بازگشتی است.
۳. $\phi(x, y) \longleftrightarrow$ “$[\varphi x] < [\varphi y]$”
۴. قضیهٔ کرونکر در $\mathcal{T}_\varphi$: $\forall a, b \left([\varphi a] < [\varphi b] \to \exists x \; [\varphi a] < [\varphi x] < [\varphi b]\right)$.
۵. همهٔ فرمول‌ها به $[\varphi x] \in (a, b)$ تبدیل می‌شوند.
۶. استفاده از قضیهٔ کرونکر برای حل معادلات.

نتایج اصلی

قضیه ۱ (خانی_زارعی ۲۳). ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, \lfloor \varphi x \rfloor, \circ, ۱ \rangle$ حذف‌سور می‌پذیرد و تصمیم‌پذیر است.

Khani M. and Zarei A.
"The additive structure of integers with the lower Wythoff sequence", *Arch. Math. Logic.*

در حضور ترتیب، مسأله بسیار پیچیده‌تر می‌شود:

$$\exists x \quad \left(a < x < b \wedge [\varphi c] < [\varphi x] < [\varphi d]\right)$$

قضیه ۲ (خانی–ولی‌زاده–زارعی ۲۳). ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, <, \lfloor \varphi x \rfloor, ۰, ۱\rangle$ تصمیم‌پذیر است (در حال تکمیل).

هیرونیمی در مورد رفتار ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, \lfloor \alpha x \rfloor, ۰, ۱ \rangle$ برای اعداد جبری غیرمربعی و حتی غیرجبری، هیچ نتیجه‌ای ندارد.

قضیه ۳ (خانی-ولی‌زاده-زارعی ۲۳). ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, \lfloor \alpha x \rfloor, ۰, ۱ \rangle$، برای هر عدد غیرجبری و محاسبه‌پذیر α، مدل‌کامل و تصمیم‌پذیر است.

Khani, M., Valizadeh, A. N. and Zarei, A.
"Model-completeness and decidability of the additive structure of integers expanded with a function for a Beatty sequence", *preprint*.

پیش‌نیازهای نظریهٔ اعدادی

دنبالهٔ بیتی متناظر با $0 < \alpha \notin \mathbb{Q}'$:

$$\mathfrak{B}_\alpha = (\lfloor \alpha n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$$

قضیه

اگر $\alpha > 1$،

$$\mathfrak{B}_\alpha \cup \mathfrak{B}_\beta = \mathbb{N} \qquad \& \qquad \mathfrak{B}_\alpha \cap \mathfrak{B}_\beta = \varnothing$$

که $\beta = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$.

قضیه (کرونکر)

$([\alpha n])_{n\in\mathbb{N}}$ در $(0,1)$ چگال است.

اثبات با استفاده از اصل کمال و اصل لانهٔ کبوتری.

دنبالهٔ پایینی ویتهُف

با توجه به معادلهٔ $\varphi + ۱ = \frac{۱}{\varphi}$، دو دنبالهٔ بیتی متناظر با نسبت طلایی $\lfloor \varphi n \rfloor$ و $\lfloor \varphi n \rfloor + n$ هستند.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto \lfloor \varphi x \rfloor \end{aligned}$$

- $\forall x \; \exists y \; (x = f(y) \veebar x = f(y) + y)$
- $f(x+y) = f(x) + f(y) + i, \quad i \in \{۰, ۱\}$.
- $f(kx) = kf(x) + \ell, \qquad \ell \in \{۰, \cdots, k-۱\}$.
- $f(f(x)) = f(x) + x - ۱, \; f(f(x) + x) = ۲f(x) + x$

چه اعدادی در برد تابع f هستند

$$\Phi(x) := \exists y \; x = f(y)$$

$$c_n = \begin{cases} ۱ & n \in R_f \\ ۰ & n \notin R_f \end{cases}$$

روش تولید دنبالهٔ c_n:

۱ $\curvearrowleft$ ۱۰

۰ $\curvearrowleft$ ۱

۱۰

ویژگی‌های دنبالهٔ مشخصه

۱۰
۱۰۱
۱۰۱۱۰
۱۰۱۱۰۱۰۱
۱۰۱۱۰۱۰۱۱۰۱۱۰

مشاهده

۱. عناصر در انتهای سطرهای فرد و زوج به‌ترتیب ۰ و ۱.
۲. طول سطرها دنبالهٔ فیبوناتچی است $F_1 = 1, F_2 = 2$.
۳. تعداد یک‌ها در سطر kـاُم $= F_{k-1}$ و تعداد صفرها F_{k-2}.
۴. پس از هر فیبوناتچی، الگوی صفر و یک‌ها از ابتدا تکرار می‌شود.

محاسبهٔ تابع f با استفاده از فیبوناتچی‌ها

لم

۱. برای هر عدد طبیعی n، $c_{F_{2n}} = 0$ و $c_{F_{2n+1}} = 1$.

۲.
$$f(F_i) = \begin{cases} F_{i_1+1} & \text{زوج باشد } i \\ F_{i_1+1} - 1 & \text{فرد باشد } i \end{cases}$$

لم

۱. اگر $n = F_{i_1} + \cdots + F_{i_\ell}$، آنگاه $c_n = 1$ اگر و تنها اگر i_ℓ عددی فرد باشد.

۲.
$$f(F_{i_1} + \cdots + F_{i_\ell}) = \begin{cases} F_{i_1+1} + \cdots + F_{i_\ell+1} & \text{زوج باشد } i_\ell \\ F_{i_1+1} + \cdots + F_{i_\ell+1} - 1 & \text{فرد باشد } i_\ell \end{cases}$$

لم

a در برد تابع f است اگر و تنها اگر $a = f(f(a) - a + 1)$ (اگر و تنها اگر $[\varphi] - 1 > [\varphi a]$).

حل معادلات همنهشتی با استفاده از فیبوناتچی‌ها

۱. $\forall m, k\ \exists x\ f(x) \overset{k}{\equiv} m$

۲. $\forall m, k, m', k'\ \exists x \begin{cases} x \overset{k}{\equiv} m \\ f(x) \overset{k'}{\equiv} m' \end{cases}$

لم (ورود قسمت‌های اعشاری)

۱. $f(n) \overset{k}{\equiv} m \longleftrightarrow \left[\frac{\varphi n}{k}\right] \in (\frac{m}{k}, \frac{m+۱}{k})$

۲. (قضیهٔ کرونکر) $[\varphi n] \in (\frac{m}{k}, \frac{m+۱}{k}) \longleftrightarrow f(kn) \overset{k}{\equiv} m$

تعریف‌پذیری ترتیب بین $[\varphi x]$

رابطهٔ ترتیب خطی

ترتیب بین قسمت‌های اعشاری در زبان $\mathcal{L} = \{+, f, ۰, ۱\}$ تعریف‌پذیر است.

$$[\varphi x] < [\varphi y] \longleftrightarrow \forall z \big(f(x+z) = f(x) + f(z) + ۱ \to f(y+z) = f(y) + f(z) + ۱\big)$$

مشاهده (ولی‌زاده): این ترتیب در زبان $\{+, -, f, ۰, ۱\}$ نیز تعریف‌پذیر است.

$$[\varphi x] < [\varphi y] \longleftrightarrow f(y-x) = f(y) - f(x)$$

قضیهٔ کرونکر

$$\forall x, y \ \big([\varphi x] < [\varphi y] \to \exists z \ [\varphi x] < [\varphi z] < [\varphi y]\big)$$

لم

یافتهٔ جدیدتر: قضیهٔ کرونکر از اصول ساده‌تر نظریه نتیجه می‌شود.

$$[\varphi x] < [\varphi y] \to [\varphi x] < [\varphi(x + f(y - x) + y - x)] < [\varphi y]$$

اثبات.

$$\forall x \;\; [\varphi(f(x) + x)] < [\varphi x]$$

$$\Longrightarrow \qquad [\varphi(f(y-x) + y - x)] < [\varphi(y - x)] = [\varphi y] - [\varphi x]$$

$$\xRightarrow{+[\varphi x]} \qquad [\varphi x] + [\varphi(f(y-x) + y - x)] < [\varphi y] < ۱$$

$$\Longrightarrow \quad [\varphi x] < [\varphi x] + [\varphi(f(y-x) + y - x)] = [\varphi(x + f(y-x) + y - x)] < [\varphi y]$$

$\square$

دنبالهٔ فیبوناتچی تعریف‌پذیر است

فرض کنید در زبان ترتیب معمولی نیز قرار داشته باشد.

قضیه

دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی در ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, -, f, <, ۰, ۱\rangle$ تعریف‌پذیر است.

اثبات.

۱. اگر F بزرگترین فیبوناتچی با اندیس زوج کمتر از n باشد، آنگاه:

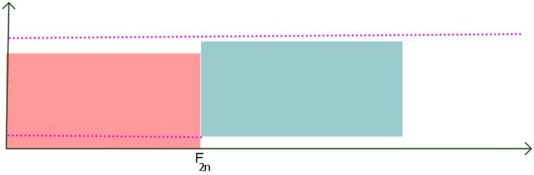
$$[\varphi F] = \min\{[\varphi x] \mid x < n\}$$

۲. اگر G بزرگترین فیبوناتچی با اندیس فرد کمتر از n باشد، آنگاه:

$$[\varphi G] = \max\{[\varphi x] \mid x < n\}$$

□

الگوهای اعشاری:



$\Phi(x; a, b)$: در بازهٔ عددی (a, b)، $[\varphi x]$ حداقل است.

الگوریتم یافتن $c \in (a, b)$ که $[\varphi c] = \min\{[\varphi x] | \ x \in (a, b)\}$، برای هر دو عدد طبیعی دادهٔ شدهٔ $a < b$:

۱. اگر یک فیبوناتچی زوج در بازهٔ (a, b) قرار داشت، آنگاه بزرگترین فیبوناتچی زوج بین این دو عدد، همان عدد c است.

۲. اگر هیچ فیبوناتچی زوجی در این بازه قرار نداشت، آنگاه فیبوناتچی زوج F_{2n} چنان موجود است که $F_{2n} < a < b < F_{2n+2}$. در این صورت بازه کوچکتر $(a - F_{2n}, b - F_{2n})$ را در نظر می‌گیریم و دوباره همین کار را تکرار می‌کنیم.

مشاهده

ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, f, < \rangle$ حذف‌سور ندارد.

اثبات.

۱. فیبوناتچی‌های زوج بدون‌سور تعریف نمی‌شوند. زیرا فرمول‌های بدون‌سور در این زبان، ترکیبی بولی از فرمول‌هایی به‌صورت $rx + sf(x) \leq y$ و $(r_۲ + s_۲\varphi)[\varphi y] < (r + s\varphi)[\varphi x]$ است، که هیچ‌کدام از این فرمول‌ها نمی‌تواند فیبوناتچی‌های زوج را تعریف کند.

۲. اگر $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, f, <) \models \mathcal{M}_۱ \supseteq \mathcal{M}$، آنگاه $\mathrm{Fib}(M_۱) \neq \mathrm{Fib}(M)$. □

اصول موضوعهٔ نظریهٔ T_φ

$(T۱)$ نظریهٔ $\mathbb{Z}$ـگروه‌ها

$(T۲)$ تابع f و $f+id$ تشکیل یک دنبالهٔ بیتی کامل می‌دهند.

$(T۳)$ تعریف بازگشتی تابع f:

$$(f(۰)=۰) \ \wedge \ (f(۱)=۱) \ \wedge \ (f(-۱)=-۲) \ \wedge$$
$$\forall x \Big(f(f(x)) = f(x)+x-۱ \ \wedge \ f(f(x)+x) = ۲f(x)+x \Big)$$

$(T۴)$ رابطهٔ ترتیب بین قسمت‌های اعشاری، یک رابطهٔ ترتیب خطی است.

قضیه

از اصول بالا قضیهٔ کرونکر نتیجه می‌شود.

مشاهده

اصول موضوعه بازگشتی هستند.

قضیه

$\langle \mathbb{Z}, +, f, \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, ۰, ۱ \rangle \models T_\varphi$.

حذف‌سور

فرض کنید $\mathcal{M}_۱, \mathcal{M}_۲ \models \mathcal{T}_\varphi$ و $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_۱ \cap \mathcal{M}_۲$. نشان می‌دهیم که هر دستگاهی از معادلات با پارامتر در M، اگر در $\mathcal{M}_۱$ جواب داشته باشد، در $\mathcal{M}_۲$ نیز دارد.

لم (وجود مدل اول جبری)

ساختار $\mathcal{M}'$ چنان موجود است که $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}_۱ \cap \mathcal{M}_۲$ و همچنین $\mathcal{M}' \models \mathcal{T}_\varphi$.

اثبات

قرار دهید $M' = \left\{\frac{x}{n} | x \in M, \mathcal{M}_۱, \mathcal{M}_۲ \models p_n(x)\right\}$.

ادعا ۱: $\mathcal{M}'$ یک $\mathcal{L}$ـساختار است.

اثبات.

$$t \in M' \Rightarrow t = \frac{a}{n}, a \in M, \mathcal{M}_۱ \models p_n(a)$$

قرار دهید $a = nt$، در این صورت $f(a) = f(nt) = nf(t) + \ell$. چون $p_n(f(nt) - \ell)$ و $f(nt) - \ell \in M$ پس $f(t) = \dfrac{f(nt) - \ell}{n} \in M'$. □

ادامهٔ اثبات

اثبات.

اصل $(T۲)$: فرض کنید $-۱ \neq a \in M'$ و برای یک $b \in M_۱$، $\mathcal{M}_۱ \models a = f(b) \vee a = f(b) + b$.

حالت اول: فرض کنید $\mathcal{M}_۱ \models a = f(b)$. بنابه اصل $(T۳)$، $\mathcal{M}_۱ \models f(a) = a + b - ۱$، پس $b \in M'$.

حالت دوم: $\mathcal{M}_۱ \models a = f(b) + b$، آنگاه به‌طور مشابه $\mathcal{M}_۱ \models f(a) = f(f(b) + b) = ۲f(b) + b = f(b) + a$. لذا $b \in M'$.

بقیهٔ اصول نیز عمومی هستند. $\square$

معادلات جبری

لم

اگر در دستگاه معادلات، معادله‌ای به‌صورت $rx + sf(x) = a$ ظاهر شد، این معادله در زیرساختار مشترک دارای جواب است.

لم

$\mathcal{M}'$ تحت وارون هر ترکیب خطی از x و $f(x)$ بسته است.

اثبات.

فرض کنید $a \in M'$ و $\mathcal{M}_۱ \models f(b) = rb + a$، برای یک $b \in M_۱$. با اعمال تابع f بر طرفین و استفاده از اصل $(T۳)$ و $(T۲)$:

$$f(b) + b - ۱ = rf(b) + f(a) + \ell$$

حال با جایگذاری $rb + a$ به‌جای $f(b)$، به معادله‌ای خطی بر حسب a در زبان $\mathbb{Z}$ـگروه‌ها می‌رسیم، پس $b \in M'$. □

تبدیل معادلات بر حسب قسمت‌های اعشاری

لم

$\mathcal{L}$ـفرمول بدون‌سور $\Phi(x,y)$ موجود است به‌طوری که برای هر دو عدد طبیعی $n_۱$ و $n_۲$، $\langle \mathbb{Z}, +, f, R, ۰, ۱\rangle \models \Phi(n_۱, n_۲)$ هرگاه معادلهٔ زیر جواب داشته باشد.

$$\begin{cases} f(r_۱x + s_۱f(x) + n_۱) = r_۱f(x) + s_۱f^۲(x) + f(n_۱) + j_۱ \\ f(r_۲x + s_۲f(x) + n_۲) = r_۲f(x) + s_۲f^۲(x) + f(n_۲) + j_۲ \end{cases}$$

اثبات

بازنویسی برحسب قسمت‌های اعشاری:

$$\begin{cases} j_۱ - [\varphi n_۱] < r_۱[\varphi x] + s_۱[\varphi f(x)] < j_۱ - [\varphi n_۱] + ۱ \\ j_۲ - [\varphi n_۲] < r_۲[\varphi x] + s_۲[\varphi f(x)] < j_۲ - [\varphi n_۲] + ۱ \end{cases}$$

جایگذاری $[\varphi f(x)] = (۱ - \varphi)[\varphi x] + ۱$ و سپس ساده‌سازی:

$$\begin{cases} (\alpha_۱ - s_۱\varphi)[\varphi x] \in (\beta_۱ - [\varphi n_۱], \beta_۱ - [\varphi n_۱] + ۱) \\ (\alpha_۲ - s_۲\varphi)[\varphi x] \in (\beta_۲ - [\varphi n_۲], \beta_۲ - [\varphi n_۲] + ۱) \end{cases}$$

ادامهٔ اثبات

اثبات.

$$\begin{cases} [\varphi x] \in \left(\dfrac{\beta_1 - [\varphi n_1]}{\alpha_1 - s_1\varphi}, \dfrac{\beta_1 - [\varphi n_1] + 1}{\alpha_1 - s_1\varphi}\right) \\ [\varphi x] \in \left(\dfrac{\beta_2 - [\varphi n_2]}{\alpha_2 - s_2\varphi}, \dfrac{\beta_2 - [\varphi n_2] + 1}{\alpha_2 - s_2\varphi}\right) \end{cases}$$

اعداد $\dfrac{1}{\alpha_i - s_i\varphi}$، φ و ۱ روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی نیستند، بنابراین p_i و q_i موجودند که:

$$\begin{cases} [\varphi x] \in \left((p_1 + q_1\varphi)(\beta_1 - [\varphi n_1]), (p_1 + q_1\varphi)(\beta_1 - [\varphi n_1] + 1)\right) \\ [\varphi x] \in \left((p_2 + q_2\varphi)(\beta_2 - [\varphi n_2]), (p_2 + q_2\varphi)(\beta_2 - [\varphi n_2] + 1)\right) \end{cases}$$

بنابراین جواب داشتن دستگاه معادل با اشتراک داشتن این بازه‌ها است و فرمول Φ بیانگر شرط اشتراک داشتن این بازه‌ها است. $\square$

دستگاه معادلات پیچیده‌تر

نتیجه

جواب داشتن دستگاه معادلات زیر، معادل با بررسی اشتراک داشتن بازه‌هایی برای قسمت‌هایی اعشاری است.

$$\begin{cases} f(r_۱x+s_۱f(x)+n_۱)=r_۱f(x)+s_۱f^۲(x)+f(n_۱)+j_۱ \\ \quad\vdots \\ f(r_{k-۲}x+s_{k-۲}f(x)+n_{k-۲})=r_{k-۲}f(x)+s_{k-۲}f^۲(x)+f(n_{k-۲})+j_{k-۲} \\ f(x)\overset{r_{k-۱}}{\equiv}j_{k-۱} \\ x\overset{r_k}{\equiv}j_k \end{cases}$$

اثبات

- بازنویسی $k-۲$ معادلهٔ اول مشابه لم قبل برحسب قسمت اعشاری
- بازنویسی دو معادلهٔ آخر برحسب قسمت اعشاری
- جایگذاری $۱+(۱-\varphi)[\varphi x]$ به جای $[\varphi f(x)]$.

$$\begin{cases} (r_۱+s_۱-s_۱\varphi)[\varphi x]\in(j_۱-[\varphi n_۱]-s_۱, j_۱-[\varphi n_۱]-s_۱+۱) \\ \quad\vdots \\ (r_{k-۴}+s_{k-۴}-s_{k-۴}\varphi)[\varphi x]\in(j_{k-۴}-[\varphi n_{k-۴}]-s_{k-۴}, j_{k-۴}-[\varphi n_{k-۴}]-s_{k-۴}+۱) \\ [\varphi x]\in([\varphi n_{k-۲}],[\varphi n_{k-۳}]) \\ (۱-\varphi)[\varphi x]\in([\varphi n_k],[\varphi n_{k-۱}]). \end{cases}$$

بنابراین شرط جواب داشتن دستگاه، با توجه به قضیهٔ کرونکر، ناتهی بودن اشتراک بازه‌ها است، که این شرط به‌صورت مرتبهٔ اول بیان‌پذیر است.

قضیه

نظریهٔ T_φ حذف‌سور دارد.

تصمیم‌پذیری

نتیجه

نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ کامل است و $\mathcal{T}_\varphi \equiv \langle \mathbb{Z}, +, -, f, \{p_n\}, ۰, ۱\rangle$.

✓ نظریهٔ $\mathcal{T}_\varphi$ و در نتیجه ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, -, f, \{p_n\}, ۰, ۱\rangle$ تصمیم‌پذیر است.

بسط ساختار جمعی اعداد صحیح با یک دنبالهٔ بیتی

سوال؟

برای اعداد غیرمربعی α، آیا ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, \lfloor \alpha x \rfloor, ۰, ۱\rangle$ تصمیم‌پذیر است؟

قضیه

برای هر عدد غیرجبری و محاسبه‌پذیر α، نظریهٔ مدل‌کامل $\mathcal{T}_\alpha$ موجود است که

$$\langle \mathbb{Z}, +, \lfloor \alpha x \rfloor, ۰, ۱\rangle \models \mathcal{T}_\alpha$$

نتیجه

✓ برای هر α غیرجبری و محاسبه‌پذیر، ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, \lfloor \alpha x \rfloor, ۰, ۱\rangle$، تصمیم‌پذیر است.

قضیه (قضیهٔ چندبعدی کرونکر)

اگر $\alpha_۱, \ldots, \alpha_k$ و ۱ روی $\mathbb{Q}$ مستقل خطی باشند، آنگاه $\{([\alpha_۱ n], [\alpha_۲ n], \ldots, [\alpha_k n]) |\ n \in \mathbb{N}\}$ در بازهٔ $(۰, ۱)^k$ چگال است.

خلاصه اثبات

۱. بازنویسی معادلات برحسب قسمت‌های اعشاری و دسته‌بندی به جبری و غیرجبری
۲. بررسی شرایط حل‌پذیری معادلات غیرجبری با استفاده از قضیهٔ چندبعدی کرونکر
۳. افزودن معادلات تک‌متغیره جبری به دستگاه و بررسی شرط حل‌پذیری این معادلات
۴. افزودن یک معادلهٔ دومتغیره جبری و بررسی شرط حل‌پذیری این معادله
۵. افزودن دو معادلهٔ دومتغیره جبری و تعداد بیشتر معادلات
۶. افزودن معادلات جبری چندمتغیره

پژوهش‌های آتی

سوال

۱. بررسی تصمیم‌پذیری ساختار $\langle \mathbb{Z}, +, \lfloor \alpha x \rfloor, <, ۰, ۱ \rangle$.

۲. بررسی ساختار $\langle \mathbb{R}, \mathbb{Z}, +, \lfloor \alpha x \rfloor, <, ۰, ۱ \rangle$.

منابع

Hieronymi, P.
"Expansions of the ordered additive group of real numbers by two discrete subgroups.", *J. Symb. Log.*.

Büchi, J. R.
"On a decision method in restricted second order arithmetic.", *Logic, Methodology and Philosophy of Science*.

Miller, C.
Tameness in Expansions of the Real Field, *Logic Colloquium*.

Van den Dries, L
Tame topology and o-minimal structures, Cambridge university press.

با سپاس از توجه شما