آیا فیلی وجود دارد؟

محسن خانی

۲۷ آبان ۱۳۹۹

چکیده

سخنرانیِ چند هفته‌ی پیشِ دکتر هاشمی دو بخش داشت که پیوند جذابی میان آنها برقرار شده بود: بخشی درباره‌ی حکایت فیل در تاریکی، و بخشی در هندسه‌ی جبری. بخش اول به حکایت مولوی اشاره داشت درباره‌ی افرادی که در اتاقی تاریک با لمس فیل نشانه‌هائی از او یافتند و بخش دوم درباره‌ی مسأله‌ی افکنش در هندسه‌ی جبری بود.

پس از سخنرانی ایشان، من نیز بر آن شدم تا درباره‌ی هر کدام از بخشهای بالا یک سخنرانی کنم. سخنرانی اولم در مورد ایده‌ی «شناخت ذات از روی صفات» است. در این سخنرانی به این سوال پاسخ خواهم داد که «آیا موجودی که هر کس وصفی از بخشی از صفات او دارد، وجود دارد؟» برای این هدف، و در بخش ریاضی سخنرانی شما را با فراضربهای ساختارها آشنا خواهم کرد.

سطح کلام، مقدماتی و مناسب برای عوام ریاضی، و رنگ‌وبوی بحث، جبری و منطقی خواهد بود.

سخنرانی دومم، تنها در صورت علاقه‌مندی شنوندگان به سخنرانی اول (!) و حاوی کاربردهائی از سخنرانی اول در هندسه‌ی جبری است.

اشاره به دو بخش در سخنرانی دکتر هاشمی: فـــیل و هندسه‌ی جبری!

پیل اندر خانهٔ تاریک بود
عرضه را آورده بودندش هُنود
از برای دیدنش مردم بسی
اندر آن ظلمت همی‌شد هر کسی
دیدنش با چشم چون ممکن نبود
اندر آن تاریکیش کف می‌بسود …

سخنرانی اول من: آیا فیلی هست؟ (ذات و صفات). شعر حافظ:

معشوق چون نقاب ز رخ در نمی‌کشد
هر کس حکایتی به تصور چرا کنند

۱ ساختارهای آشنای جبری

۱. گرافها: (V, R)

۲. گروه‌ها و نیم‌گروه‌ها $(G, *, e)$

۳. حلقه‌ها و میدانها $(K, +, \cdot, 0, 1)$

۴. گروه‌ها و میدانهای مرتب: $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$.

۵. مدولها و فضاهای برداری

۶. گروه‌های جبری، چندگوناهای آبلی، گروه‌های لی و غیره.

۲ صرف و نحو

منظور از یک زبان مرتبه‌ی اول، مجموعه‌ای متشکل از نمادهای تابعی، رابطه‌ای و ثوابت است: $L = \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{C}$.

مثال ۱.

- $L = \{f, g, R_1, R_2, c\}$.
- $L_{group} = \{f, c\}$
- $L_{group} = \{+, 0\}$
- $L_{Ring} = \{+, \cdot, 0, 1\}$
- $L_{graph} = \{R\}$
- $L_{ordered-groups} = \{+, 0, <\}$.

تعریف ۲ **(**L**کلمه‌ها).** با ترکیب نمادهای تابعی و ثوابت زبان و به کمک یک مجموعه از متغیرها ایجاد می‌شوند.

مثال ۳. در زبانِ $L = \{f, g, R_1, R_2, c_1, c_2\}$ این کلمه‌ها را می‌توان ساخت:

- $f(x, y)$، $g(f(x, y), f(c_1, c_2), z)$، $f(g(c_1, c_2, x), f(z, t))$ و غیره.

مثال ۴.

- کلمات در زبانِ $L_{group} = \{+, 0\}$
- کلمات در زبانِ $L_{Ring} = \{+, \cdot, 0, 1\}$

- کلمات در زبانِ $L_{graph} = \{R\}$.

تعریف ۵ (فرمولها). با استفاده از الفبای زبان و نمادهای منطقیِ $\neg, \wedge, \exists$ و به صورت استقرائی ساخته می‌شوند:

- $t_1(x_1, \ldots, x_n) = t_2(x_1, \ldots, x_n)$ یک فرمول است.
- $R(t_1, \ldots, t_n)$ یک جمله است.
- اگر ϕ, ψ فرمول باشند آنگاه $\neg\phi$ و $\phi \wedge \psi$ فرمول هستند.
- اگر ϕ فرمول باشد $\exists x\phi$ فرمول است.

مثال ۶.

- چند فرمول در زبان $L_{ordered-groups} = \{+, 0, <\}$.
- چند فرمول در زبانِ $L_{Ring} = \{+, \cdot, 0, 1\}$.

۳ معنا

تعریف ۷ (Lساختار).

$$\mathfrak{M} = (M, (z^{\mathfrak{M}})_{z \in L})$$

اگر $z = f$ آنگاه:

$$f^{\mathfrak{M}} : M^{n_f} \to M$$

اگر $z = R$ آنگاه

$$R^{\mathfrak{M}} \subseteq M^{n_R}.$$

اگر $z = c$ آنگاه

$$c^{\mathfrak{M}} \in M.$$

مثال ۸.

- یک Lساختار برای زبانِ $L = \{f, g, R_1, R_2, c\}$ به صورت $\mathfrak{M} = (M, f^{\mathfrak{M}}, g^{\mathfrak{M}}, R_1^{\mathfrak{M}}, R_2^{\mathfrak{M}}, c^{\mathfrak{M}})$ است.
- در زبانِ $L_{group} = \{+, 0\}$
- در زبانِ $L_{Ring} = \{+, \cdot, 0, 1\}$.

تعریف ۹ (L ایزومرفیسم)**.** فرض کنید $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ دو Lساختار باشند و $h : M \to N$. می‌گوییم h یک Lایزومرفیسم است هرگاه نمادهای زبانی را حفظ کند:

$$f^{\mathfrak{M}}(a,b) \mapsto f^{\mathfrak{N}}(h(a),h(b))$$

$$c^{\mathfrak{M}} \mapsto c^{\mathfrak{N}}$$

$$R^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_n) \Leftrightarrow R^{\mathfrak{N}}(h(a_1),\dots,h(a_n)).$$

تعریف ۱۰. فرض کنید $\phi(x_1,\dots,x_n)$ یک فرمول باشد و $\mathcal{M}$ یک Lساختار باشد و $a_1,\dots,a_n \in M$. عبارتِ

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1,\dots,a_n)$$

قابل تعریف است.

مثال ۱۱.

$$\mathbb{C} \models \exists x \quad x^2+1=0 \quad \mathbb{R} \not\models \exists x \quad x^2+1=0.$$

قضیه ۱۲. اگر $h : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ ایزومرفیسم باشد آنگاه

$$\mathfrak{M} \models \phi(a_1,\dots,a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \phi(h(a_1),\dots,h(a_n)).$$

۴ فشردگی

تکرار ایده‌ی ذات و صفات.

مثال ۱۳. شکاف عدد π در اعداد گویا.

قضیه ۱۴ (فشردگی)**.** فرض کنید $\{\phi_1(x),\phi_2(x)\dots\}$ مجموعه‌ای از فرمولها در یک زبانِ L باشند به طوری که هر تعداد متناهی آنها در یک Lساختار برقرار باشد. در این صورت Lساختاری وجود دارد که در آن عنصری هست که همه‌ی این ویژگی‌ها را دارد.

مثال ۱۵.

- اعداد حقیقی ناارشمیدسی و بی نهایت عنصر همشکاف با π.
- اعداد طبیعی نااستاندارد.

۵ فرافیلترها و اثبات فشردگی

در ساختارهای جبری، راههائی برای ایجاد ساختارهای جدید از ساختارهای قبلی وجود دارد: اشتراک‌گیری، اجتماع‌گیری، جمع مستقیم داخلی، جمع مستقیم خارجی، حد برعکس، حد مستقیم و غیره. در اینجا یک روش بسیار کلی ارائه کرده‌ام.

تعریف ۱۶ (فیلتر). فرض کنید که I یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. مجموعه‌ی $D \subseteq P(I)$ را یک فیلتر روی I می‌نامیم هرگاه ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

۱. $I \in D$.

۲. $\forall X, Y \in D \quad X \cap Y \in D$.

۳. $\forall X \in D \quad \forall X \subseteq Z \subseteq I \quad Z \in D$.

مثال ۱۷.

- $D = \{I\}$
- $D = P(I)$
- فیلتر فِرِشه.

تعریف ۱۸. فیلتر D را یک فرافیلتر می‌نامیم هرگاه

$$\forall X \subseteq I \quad (X \in D \vee (I - X) \in D)$$

تعریف ۱۹. فرض کنید $(M_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای از Lساختارها باشد و F یک فرافیلتر روی I. فراضرب این ساختارها نسبت به این فرافیلتر ساختار زیر است:

$$\mathbb{M} = \prod_F M_i = \{(a_i)_{i \in I} | a_i \in M_i\}$$

در که در آن

$$(a_i) = (b_i) \Leftrightarrow \{i \in I | a_i = b_i\} \in F.$$

قضیه ۲۰ (واش). برای هر فرمولِ $\phi(x)$ داریم

$$\mathbb{M} \models \phi((a_i)_{i \in I}) \Leftrightarrow \{i | \mathfrak{M}_i \models \phi(a_i)\} \in F.$$

قضیه ۲۱. قضیه‌ی فشردگی با استفاده از فرافیلترها اثبات می‌شود.

۶ میدانهای سودومتناهی

قضیه ۲۲. فرض کنید $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ کلاسی از L ساختار باشد. در این صورت

$$\mathfrak{M} \models \bigcap Th(\mathfrak{M}_i) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \equiv \prod_F M_i$$

برای یک فرافیلترِ F.

تعریف ۲۳. منظور از یک میدان سودومتناهی، یک میدان نامتناهی است که در آن همه‌ی جمله‌هائی که در همه میدانهای متناهی برقرارند برقرارند. (پس هر میدان سودومتناهی هم‌ارز مقدماتی با یک فراضرب از میدانهای متناهی است).

قضیه ۲۴. میدان K سودومتناهی است اگروتنهااگر تکمیل و سودوبسته‌ی جبری باشد. (سودوبسته‌ی جبری بودن هر چندگونای تحویل‌ناپذیر تعریف شده روی K دارای نقطه‌ی K گویا باشد و گروه گالوای مطلق آن $\hat{\mathbb{Z}}$ باشد.

جمله‌ی آخر یعنی K از هر درجه‌ی n تنها یک توسیع یکتا داشته باشد. با $\hat{\mathbb{Z}}$ حد معکوس $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ها را نشان داده‌ایم. منظور از یک میدان تکمیل میدانی است که هر چند جمله‌ای تحویل‌ناپذیر روی آن جدائی‌پذیر باشد.

۷ نتایج آسان

قضیه ۲۵. فرض کنید ϕ یک جمله در زبان حلقه‌ها باشد، در این صورت موارد زیر با هم معادلند:

۱. ϕ در میدان اعداد مختلط درست است.

۲. ϕ در $(\mathbb{F}_p)^{alg}$ برای p های به اندازه‌ی کافی بزرگ درست است.

نتیجه ۲۶. هر نگاشت یک به یکِ چندجمله‌ی از $\mathbb{C}^n$ به $\mathbb{C}^n$ پوشاست.

نتیجه ۲۷. برای جمله‌ی ϕ در مورد گرافها موارد زیر با هم معادلند:

۱. $\lim_{N\to\infty} p_N(\phi) = 1$،

۲. ϕ در گراف تصادفی برقرار است.

۸ برخی نتایج سخت

نتیجه ۲۸ (گرین‌لیف، اکس‌کوچن). فرض کنید $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{Z}[X]$. در این صورت، برای همه‌ی اعداد اول، مگر تعدادی متناهی، هر پاسخ از معادله‌ی $f_1(X) = \ldots = f_n(X) = 0$ در $\mathbb{F}_p$ را می‌توان به عنوان تصویر پاسخی در $\mathbb{Z}_{(p)}$ دید.

نتیجه ۲۹ (حدس مُردل لنگ در مشخصه‌ی صفر). فرض کنید K یک میدان بسته‌ی جبری با مشخصه‌ی صفر، A یک چندگونای آبلی، و Γ یک زیرگروه از A از مرتبه‌ی متناهی، و X یک زیرچندگونا از A باشند. در این صورت $X \cap \Gamma$ اجتماعی متناهی از هممجموعه‌های زیرگروه‌های A است.

هراشوفسکی نسخه‌ای از این قضیه را برای میدانهای توابع در مشخصه‌ی p اثبات کرده است.

قضیه ۳۰ (چاتزیداکس، مکین‌تایر، ون‌دن‌دریز). فرض کنید $\phi(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ فرمولی در زبان حلقه‌ها باشد. در این صورت عدد مثبت C و تعداد متناهی جفتِ (d_i, μ_i) موجودند که در آن $d_i \in \{0, \ldots, n\}$ و μ_i یک عدد گویای مثبت است به طوری که برای هر میدان متناهی $\mathbb{F}_q$ و هر $\bar{a} \in \mathbb{F}_q^m$ اگر $\phi(\mathbb{F}_q^n, \bar{a})$ ناتهی باشد آنگاه

$$||\phi(\mathbb{F}_q^n, \bar{a})| - \mu_i q d^i| < C q^{d_i - \frac{1}{2}}.$$