

تمرین نوبت اول، مهلت تحویل: چهارشنبه ۲۰ مهر

تمرین ۱. فرض کنید X یک مجموعه دلخواه باشد. نشان دهید

$$\mathcal{T}_c = \{O \subseteq X \mid X - O \text{ شماراست}\} \cup \{\emptyset\}$$

یک توپولوژی روی X است.

تمرین ۲. فرض کنید $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ یک خانواده از توپولوژیها روی مجموعه X باشد. نشان دهید $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$

یک توپولوژی روی X است.

تمرین ۳. فرض کنید \mathcal{B} یک پایه برای یک توپولوژی روی X باشد. نشان دهید که

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \bigcap_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}} \mathcal{T}$$

(یعنی $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ کوچکترین توپولوژی شامل \mathcal{B} است.)

تمرین ۴. توپولوژی استاندارد اعداد حقیقی را با توپولوژی فرشه روی \mathbb{R} مقایسه کنید.

تمرین ۵. الف. نشان دهید

$$\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$$

ب. برای اثبات عبارت

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

استدلال زیر را در نظر بگیرید: اگر $x \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ آنگاه هر همسایگی x مانند U ، مجموعه $\bigcup_{i \in I} A_i$ را قطع می‌کند. پس U باید یکی از A_i ها را قطع کند و در نتیجه x باید به بستار یکی از A_i ها متعلق باشد. بنابراین $x \in \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$. برقرار نیست. توجیه کنید که چرا این استدلال غلط است و با مثالی نشان دهید عبارت فوق برقرار نیست.