

تمرین نوبت سوم، مهلت تحویل: دوشنبه ۲۱ آذر

تمرین ۱. نشان دهید توپولوژی \mathcal{T}_X هاسدورف است اگر و تنها اگر مجموعه $A = \{(x, x) | x \in X\}$ در $X \times X$ (با توپولوژی حاصلضربی) بسته باشد.

تمرین ۲. ثابت کنید مجموعه $A \subseteq X$ فشرده است اگر و تنها اگر اتفاق زیر رخ دهد:
هرگاه $\{C_i\}_{i \in I}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های بسته باشد که هر تعداد متناهی از C_i ها در A اشتراک دارند آنگاه وجود دارد $x \in A$ که $x \in \bigcap_{i \in I} C_i$.

تمرین ۳. فرض کنید A فشرده باشد و $C_1 \subseteq C_2 \subseteq C_3 \subseteq \dots$ دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های بسته باشد به طوری که هر C_i با A اشتراک دارد. در این صورت نشان دهید عنصر $x \in A$ موجود است که $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i$.

تمرین ۴. فرض کنید \mathcal{T}_1 و \mathcal{T}_2 دو توپولوژی روی X باشند و X با هر دوی این توپولوژیها هاسدورف و فشرده باشد. نشان دهید یا $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ یا \mathcal{T}_1 و \mathcal{T}_2 قابل مقایسه نیستند.

تمرین ۵. روی \mathbb{R} توپولوژی فرشه را در نظر بگیرید. نشان دهید:

الف. مجموعه‌های بسته دقیقاً مجموعه‌های متناهی هستند.

ب. همه مجموعه‌ها فشرده‌اند.