تمرین سری دوم

۲۳ مهر ۱۴۰۳

تاریخ تحویل ۳۰ مهرماه

۱. نشان دهید تابع f در نقطه x_0 پیوسته است هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

برای هر دنباله همگرای $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ به x_0، دنباله $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ به $f(x_0)$ همگرا باشد.

۲. به مراحل اثبات قضیه مقدار میانی در جزوه آنالیز یک مراجعه کنید. نشان دهید اگر دنباله (a_n) یاد شده به عددی مثل l همگرا باشد آنگاه دنباله (b_n) هم به l همگراست.

۳. فرض کنید (a_n) یک دنباله همگرا به عدد l است. نشان دهید هر زیر دنباله‌ی همگرای (a_{n_k}) هم به l همگراست.

۴. فرض کنید که f یک تابع پیوسته باشد و $f(a) < z < f(b)$. نشان دهید عددی بین a و b مانند c وجود دارد که $f(c) = z$.

۵. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. نشان دهید X و $\emptyset$ مجموعه‌های باز هستند.

۶. فرض کنید A یک مجموعه‌ی متناهی باشد. نشان دهید A یک مجموعه‌ی بسته است.

۷. فرض کنید $A \subset \mathbb{R}$ یک مجموعه‌ی متناهی باشد. نشان دهید A یک مجموعه‌ی باز نیست.

۸. فرض کنید U_1 و U_2 باز باشند، نشان دهید $U_1 \cap U_2$ نیز باز است. (به طور مشابه اشتراک هر تعداد مجموعه‌ی باز، باز است.)

۹. نشان دهید $(A \cup B)' = A' \cup B'$.