

تمرین سری پنجم

۲۵ آذر ۱۴۰۳

مهلت تحویل: دوشنبه سوم آذر ماه

از بین تمرین‌های ۲ و ۳ تنها یکی را پاسخ دهید.

از بین تمرین‌های ۵ و ۶ تنها یکی را پاسخ دهید.

۱. (آ) مجموعه‌ی فشرده را تعریف کنید.

(ب) مجموعه‌ی غیر فشرده را تعریف کنید.

۲. اثبات کنید مجموعه‌ی کانتور بسته است.

۳. اثبات کنید مجموعه‌ی کانتور فشرده است.

۴. فرض کنید (X, d_x) و (Z, d_z) دو فضای متریک باشند و نیز $Y \subseteq X$. هم‌چنین فرض کنید

$f : X \rightarrow Y$ یک تابع باشد. نشان دهید که جمله اول جمله دوم را نتیجه می‌دهد ولی جمله دوم

جمله اول را نتیجه نمی‌دهد.

(آ) تابع $f : X \rightarrow Z$ در تمام نقاط Y پیوسته است.

(ب) تابع $f : Y \rightarrow Z$ پیوسته است.

۵. تابع دایره واحد $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ را با ضابطه‌ی $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ در نظر بگیرید و نشان

دهید f پیوسته است ولی f^{-1} پیوسته نیست.

۶. فرض کنید $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $Y \subseteq \mathbb{R}$ یک مجموعه‌ی بسته باشد. نشان دهید که f را

می‌توان به یک تابع پیوسته $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ گسترش داد.