تمرین سری چهارم

۱۶ آبان ۱۴۰۳

تاریخ تحویل ۲۸ آبان ماه

۱. فرض کنید $E \subseteq X$ دلخواه باشد. نشان دهید E° باز است. (منظور از E° مجموعه‌ی نقاط درونی E است.)

۲. نشان دهید E° بزرگترین زیرمجموعه‌ی باز مجموعه‌ی E است. (راهنمایی: نشان دهید به ازای هر زیرمجموعه‌ی باز E مانند O، داریم O $E^{\circ} = \bigcup\limits_{O \subseteq E}$.)

۳. نشان دهید به ازای هرمجموعهٔ دلخواه E، مجموعه‌ی E' بسته است.

۴. نشان دهید که به ازای هر مجموعه‌ی دلخواه E داریم: $\bar{E} = E^{\circ} \cup \partial E$.

۵. نشان دهید برای هر مجموعه‌ی دلخواه E، ∂E یک مجموعه‌ی بسته است.

۶. آیا گزاره زیر برقرار است؟

$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

درون $\mathbb{Q}$ و درون $\bar{\mathbb{Q}}$ را محاسبه کنید.

۷. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$. در این صورت نشان دهید:

$X = E^{\circ} \cup \partial E \cup (E^{c})^{\circ}$.

۸. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد.

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ \\ 0 & x = y \end{cases}$$

(آ) نشان دهید d یک متر روی X است.

(ب) مجموعه‌های باز، بسته، فشرده و هم‌چنین گوی‌های باز را شناسایی کنید.