سوالات جبرانی؛ سری اول

۱۲ آذر ۱۴۰۳

تاریخ تحویل ۲۴ آذر ماه

توجه شود که مهلت تحویل این سری از تمرینات با توجه به آن که تحویل آن کاملا اختیاری است، تمدید نمی‌گردد.

۱. نشان دهید دو تعریف زیر برای هم‌ارزی دنباله‌های کشی با یکدیگر معادلند.

(آ) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |a_n - b_n| < \varepsilon$

(ب) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > N \quad |a_m - b_n| < \varepsilon$

۲. فرض کنید (a_n) و (b_n) دو دنباله‌ی کشی باشند. نشان دهید دنباله‌ی $(a_n b_n)$ نیز کشی است.

۳. فرض کنید (a_n) یک دنباله‌ی کشی باشد، نشان دهید دنباله‌ی $(\frac{1}{a_n})$ نیز یک دنباله‌ی کشی است.

۴. فرض کنید (a_n) یک دنباله‌ی صعودی و از بالا کراندار در $\mathbb{R}$ باشد، در این صورت نشان دهید دنباله‌ی (a_n) یک دنباله‌ی همگراست.

۵. نشان دهید $E \cup E'$ بسته است.

۶. نشان دهید اگر مجموعه‌ی K یک مجموعه‌ی فشرده باشد ، آن‌گاه K بسته است.

۷. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشند و $K \subseteq X$ یک مجموعه‌ی فشرده باشد. در این‌صورت نشان دهید هر مجموعه‌ی بسته مانند $E \subseteq K$ نیز فشرده است.

۸. در فضای متریک $(\mathbb{R},d)$ که d همان متر قدر مطلق است، مقادیر زیر را محاسبه کنید.

(آ) $\mathbb{Q}^\circ$

(ب) $(\bar{\mathbb{Q}})^\circ$

۹. نشان دهید در هر فضای متریک دلخواه (X,d)، برای هر مجموعه‌ی $E \subseteq X$، $\partial E = \bar{E} - E^\circ$.

۱۰. نشان دهید در هر فضای متریک دلخواه (X,d)، برای هر مجموعه‌ی دلخواه $E \subseteq X$، مجموعه ∂E بسته است.