توپولوژی

تدریس: محسن خانی

تایپ: روژین صدر

۱۱ اسفند ۱۴۰۱

چکیده

این درسنامه مربوط به اولین تدریس توپولوژی توسط من، در نیمسال اول ۱۴۰۱/۱۴۰۲ است. زحمت تایپ آن را خانم «روژین صدر» کشیده است که از ایشان کمال تشکر را دارم. متاسفانه من فرصت اعمال هیچ گونه تغییر تا تصحیح در نوشتهٔ ایشان نداشته‌ام؛ با این حال کلاسهای این درس فیلم‌برداری شده‌اند و جزوه بر این اساس تایپ شده است. این فیلمها در پیوند زیر قابل مشاهده هستند:

https://www.aparat.com/v/O32aN?playlist=1799810 در فیلم‌برداری از کلاسهای درس، نرگس نیکنام، علی شفیعی و مهریار علوی زحمات فراوان کشیده‌اند و لازم است از آنها نیز کمال تشکر را داشته باشم.

فهرست مطالب

۱ فضای توپولوژیک

۱.۱ فضای توپولوژیک

تعریف ۱. فرض کنید X یک مجموعهٔ دلخواه باشد و $\mathscr{T}$ یک گردایه (به هرکدام از زیرمجموعه‌های X که در $\mathscr{T}$ هستند، مجموعهٔ باز گفته می‌شود) از زیرمجموعه‌های X باشد، به طوری که:

۱- X و $\emptyset$ متعلق به $\mathscr{T}$ باشند (X و $\emptyset$ باز هستند).

۲- هر اجتماعی از مجموعه‌های باز، باز باشد ($\mathscr{T}$ تحت اجتماع‌گیری‌های دلخواه بسته باشد). به بیان دیگر، فرض کنید $\{O_i\}_{i\in I}$ به گونه‌ای باشد که برای هر i در I، $O_i \in \mathscr{T}$، در این صورت $\bigcup_{i\in I} O_i$ متعلق به $\mathscr{T}$ خواهد بود.

۳- هر اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز یک مجموعه، باز باشد (اگر $O_۱, \dots, O_n \in \mathscr{T}$ آنگاه $O_۱ \cap O_۲ \cap \cdots \cap O_n \in \mathscr{T}$).

در این صورت می‌گوییم $\mathscr{T}$ یک توپولوژی [۱] روی X است و می‌گوییم $(X, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک است.

قضیه ۲. فرض کنید $(X, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد، همچنین فرض کنید $A \subseteq X$ یک زیرمجموعهٔ دلخواه باشد. در این صورت A باز است (به بیان دیگر $A \in \mathscr{T}$) اگر و تنها اگر برای هر x متعلق به A یک مجموعهٔ باز $O_x \in \mathscr{T}$ موجود باشد به طوری که $x \in O_x \subseteq A$.

اثبات. فرض کنید $A \in \mathscr{T}$ یک مجموعهٔ باز باشد و $x \in A$. کافی است قرار دهیم $O_x = A$. واضح است که $x \in O_x \subseteq A$.

برعکس، فرض می‌کنیم A یک مجموعه باشد و برای هر x متعلق به A، یک زیرمجموعهٔ باز O_x از A موجود باشد به طوری که $x \in O_x$. ثابت می‌کنیم A باز است. واضح است که $A = \bigcup_{x\in A} O_x$، بنابراین طبق ویژگی دوم توپولوژی، A یک مجموعهٔ باز است. □

مثال ۳. فرض کنید X یک مجموعهٔ دلخواه باشد. قرار دهید $\mathscr{T}_t = \{\emptyset, X\}$، واضح است که با استفاده از تعریف ۱، $\mathscr{T}_t$ یک توپولوژی است. چنین توپولوژیی را توپولوژی بدیهی [۲] می‌نامند.

[1] Topology

[2] Trivial topology

مثال ۴. اگر X یک مجموعهٔ دلخواه باشد، $\mathscr{T}_d = P(X)$ یک توپولوژی (گسسته) است.

لم ۵. توپولوژی $\mathscr{T}$ گسسته است، اگر برای هر x متعلق به X، مجموعهٔ تک‌عضوی $\{x\}$ باز باشد.

مثال ۶. فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳\}$، در این صورت $\mathscr{T}_۱ = \{\emptyset, \{۱, ۲, ۳\}, \{۱, ۲\}, \{۲, ۳\}, \{۲\}\}$ و $\mathscr{T}_۲ = \{\emptyset, \{۱, ۲, ۳\}, \{۱\}, \{۲\}, \{۱, ۲\}\}$ توپولوژی هستند.

سوال ۷. فرض کنید X یک مجموعه باشد. نشان دهید

$$\mathscr{T}_F = \{O \subseteq X | \text{متناهی است.}\ X - O\} \cup \{\emptyset\}$$

توپولوژی است.[3]

پاسخ. واضح است که $\emptyset \in \mathscr{T}_F$. همچنین بنابه تعریف، X متعلق به $\mathscr{T}_F$ است. فرض کنید $\{O_i\}_{i \in I}$ به گونه‌ای باشد که تک‌تک O_iها باز باشند (یعنی $X - O_i$ برای هر i متعلق به I متناهی باشد). نشان می‌دهیم $X - \bigcup_{i \in I} O_i$ متناهی است.

$$X - \bigcup_{i \in I} O_i = \Big(\bigcup_{i \in I} O_i\Big)^c = \bigcap_{i \in I} O_i^c = \bigcap_{i \in I} (X - O_i).$$

پس $\bigcup_{i \in I} O_i$ باز است. اکنون فرض کنید $O_۱, \ldots, O_n$ باز باشند. نشان می‌دهیم $\bigcap_{i=۱}^n O_i$ باز است.

$$X - \bigcap_{i=۱}^{n} O_i = (O_۱ \cap \cdots \cap O_n)^c = O_۱^c \cup \cdots \cup O_n^c.$$

تمرین تحویلی ۱. فرض کنید X یک مجموعه دلخواه باشد. نشان دهید

$$\mathscr{T}_c = \{O \subseteq X | \text{شماراست.}\ X - O\} \cup \{\emptyset\}$$

یک توپولوژی روی X است.

۲.۱ پایهٔ یک فضای توپولوژیک

قضیه ۸. فرض کنید $\mathscr{T}_۱$ و $\mathscr{T}_۱$ دو توپولوژی روی مجموعهٔ X باشند. در این صورت $\mathscr{T}_۱$ با $\mathscr{T}_۲$ برابر است اگر و تنها اگر

[3] Frechet topology

۱- برای هر باز $\mathcal{O}_1$ متعلق به $\mathscr{T}_1$ و هر $x \in \mathcal{O}_1$، یک باز $\mathcal{O}_2 \in \mathscr{T}_2$ موجود باشد به طوری که $x \in \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$.

۲- برای هر باز $\mathcal{O}_2$ متعلق به $\mathscr{T}_2$ و هر $x \in \mathcal{O}_2$ یک باز $\mathcal{O}_1 \in \mathscr{T}_1$ موجود باشد به طوری که $x \in \mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$.

اثبات. ادعا می‌کنیم که از مورد (۱) نتیجه می‌شود که $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$ (یعنی هر باز $\mathcal{O}_1 \in \mathscr{T}_1$ متعلق به $\mathscr{T}_2$ نیز هست). فرض کنید (۱) برقرار باشد و فرض کنید $\mathcal{O}_1 \in \mathscr{T}_1$. نشان می‌دهیم $\mathcal{O}_1 \in \mathscr{T}_2$. می‌دانیم که برای هر x متعلق به $\mathcal{O}_1$، یک باز $\mathcal{O}_x \in \mathscr{T}_2$ موجود است به طوری که $x \in \mathcal{O}_x \subseteq \mathcal{O}_1$، بنابراین $\mathcal{O}_1 = \bigcup_{x\in\mathcal{O}_1} \mathcal{O}_x$. پس $\mathcal{O}_1 \in \mathscr{T}_2$ و ادعا ثابت می‌شود. به روش مشابه از (۲) نتیجه می‌شود که $\mathscr{T}_2 \subseteq \mathscr{T}_1$.

برعکس، فرض کنیم $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$. به وضوح برای هر باز $\mathcal{O}_1 \in \mathscr{T}_1$، $\mathcal{O}_1$ متعلق به $\mathscr{T}_2$ است و با انتخاب $\mathcal{O}_1$ به جای $\mathcal{O}_2$ حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۹. فرض کنید $\mathscr{T}_1$ و $\mathscr{T}_2$ دو توپولوژی روی X باشند. در این صورت $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$ هرگاه برای هر باز $\mathcal{O}_1$ متعلق به $\mathscr{T}_1$ و هر $x \in \mathcal{O}_1$، یک باز $\mathcal{O}_2 \in \mathscr{T}_2$ موجود باشد به طوری که $x \in \mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$.

تعریف ۱۰. می‌گوییم توپولوژی $\mathscr{T}_2$ ظریف‌تر[4] از $\mathscr{T}_1$ است، هرگاه $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$.

توجه ۱۱. اگر $\mathscr{T}_2 \nsubseteq \mathscr{T}_1$ و $\mathscr{T}_1 \nsubseteq \mathscr{T}_2$، می‌گوییم $\mathscr{T}_1$ و $\mathscr{T}_2$ غیرقابل مقایسه هستند.

تعریف ۱۲. فرض کنید $\mathscr{T}$ یک توپولوژی روی X باشد و $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$. می‌گوییم $\mathscr{B}$ یک پایه[5] برای توپولوژی $\mathscr{T}$ است، هرگاه هر باز $\mathcal{O} \in \mathscr{T}$ اجتماعی از بازهای موجود در $\mathscr{B}$ باشد.

مشاهده ۱۳. فرض کنید $\mathscr{B}$ یک پایه برای توپولوژی $\mathscr{T}$ باشد. در این صورت موارد زیر برقرارند:

۱- برای هر x متعلق به X یک باز پایه‌ای $B \in \mathscr{B}$ موجود است به طوری که $x \in B$.

۲- برای هر باز B_1 و B_2 متعلق به $\mathscr{B}$ و هر $x \in B_1 \cap B_2$، یک باز پایه‌ای B_3 متعلق به $\mathscr{B}$ موجود است به طوری که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ (به بیان دیگر اشتراک دو باز پایه‌ای برابر با اجتماعی از بازهای پایه‌ای است).

[4]Finer
[5]Base

اثبات. ۲- فرض کنید $\mathscr{T}$ یک توپولوژی و $\mathscr{B}$ پایه‌ای برای آن باشد. همچنین فرض کنید B_1 و B_2 دو باز پایه‌ای متعلق به $\mathscr{B}$ باشند. به طور خاص β_1 و B_2 در $\mathscr{T}$ باز هستند. بنابراین $\beta_1 \cap B_2$ در $\mathscr{T}$ باز است، پس $B_1 \cap B_2$ اجتماعی از بازهای پایه‌ای است (برای $i \in I$، $B_1 \cap B_2 = \bigcup_{\mathcal{O}_i \in \mathscr{B}} \mathcal{O}_i$). فرض کنید x متعلق به $B_1 \cap B_2$ باشد، آنگاه $i \in I$ موجود است به طوری که $x \in \mathcal{O}_i$. پس $x \in \mathcal{O}_i \subseteq B_1 \cap B_2$. $\square$

تعریف ۱۴. فرض کنید X یک مجموعه باشد و $\mathscr{B} \subseteq P(X)$. می‌گوییم $\mathscr{B}$ **یک پایه برای یک توپولوژی** روی X است، هرگاه $\mathscr{B}$ دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱- برای هر x متعلق به X، یک باز پایه‌ای $B \in \mathscr{B}$ موجود باشد به طوری که $x \in B$.

۲- برای هر B_1 و B_2 متعلق به $\mathscr{B}$ و هر $x \in B_1 \cap B_2$، یک باز پایه‌ای $B_3 \in \mathscr{B}$ موجود باشد به طوری که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

مثال ۱۵. فرض کنید $X = \mathbb{R}^2$ و تعریف کنید

$$\mathscr{B}_{\text{دایره}} = \text{مجموعه همه دوایر در}\, \mathbb{R}^2.$$

$\mathscr{T}_{\text{دایره}}$ را توپولوژی تولیدشده توسط $\mathscr{B}_{\text{دایره}}$ در نظر بگیرید. در واقع مجموعه دلخواه U در $\mathbb{R}^2$ با این توپولوژی باز است اگر و تنها اگر برای هر x متعلق به U، یک $B \in \mathscr{B}_{\text{دایره}}$ موجود باشد به طوری که $x \in B \subseteq U$.

مثال ۱۶. فرض کنید $X = \mathbb{R}^2$ و تعریف کنید

$$\mathscr{B}_{\text{مربع}} = \text{مجموعه همه مربع‌ها در}\, \mathbb{R}^2.$$

توپولوژی تولیدشده توسط $\mathscr{B}_{\text{مربع}}$ را $\mathscr{T}_{\text{مربع}}$ بنامید. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ در توپولوژی $\mathscr{T}_{\text{مربع}}$ باز است، هرگاه برای هر x متعلق به U، یک مربع B_x شامل x وجود داشته باشد که زیرمجموعه U باشد.

توجه ۱۷. $\mathscr{T}_{\text{دایره}} = \mathscr{T}_{\text{مربع}}$.

یادآوری ۱۸. فرض کنید X یک مجموعه باشد و $\mathscr{B} \subseteq P(X)$ دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱- برای هر $x \in X$، یک مجموعه B متعلق به $\mathscr{B}$ موجود باشد به طوری که $x \in B$.

۲- برای هر $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ و هر $x \in B_1 \cap B_2$، یک باز پایه‌ای B_3 موجود باشد به طوری که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

در این صورت $\mathscr{B}$ را یک پایه برای یک توپولوژی روی X می‌نامیم و توپولوژی ایجادشده توسط این پایه را با $\mathscr{T}(\mathscr{B})$ نشان می‌دهیم.

در واقع مجموعه $\mathcal{O} \subseteq X$ در توپولوژی $\mathscr{T}(\mathscr{B})$ باز است اگر و تنها اگر برای هر $x \in \mathcal{O}$ یک باز پایه‌ای $B \subseteq \mathcal{O}$ موجود باشد به طوری که $x \in B \subseteq \mathcal{O}$.

قضیه ۱۹. $\mathscr{T}(\mathscr{B})$ یک توپولوژی روی مجموعهٔ X است.

اثبات. بنابه مورد اول ۱۸، $X \in \mathscr{T}(\mathscr{B})$. همچنین به انتفاء مقدم داریم $\emptyset \in \mathscr{T}(\mathscr{B})$. فرض کنید $\{U_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از بازها باشد. ادعا می‌کنیم $\bigcup_{i\in I} U_i$ باز است. فرض کنید $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$، در این صورت $i_\circ \in I$ موجود است به طوری که $x \in U_{i_\circ}$. از آنجاییکه $U_{i_\circ}$ باز است، یک باز پایه‌ای $\mathscr{B}$ متعلق به $U_{i_\circ}$ موجود است به طوری که $x \in \mathscr{B}$. بنابراین $x \in \mathscr{B} \subseteq U_{i_\circ} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. اکنون فرض کنید U_1 و U_2 دو مجموعه باز در $\mathscr{T}(\mathscr{B})$ باشند. ادعا می‌کنیم $U_1 \cap U_2$ باز است. فرض کنید x متعلق به $U_1 \cap U_2$ باشد. واضح است که $x \in U_1$ و $x \in U_2$. بنابراین $B_1 \in \mathscr{B}$ موجود است به طوری که $x \in B_1 \subseteq U_1$. به طور مشابه $B_2 \in \mathscr{B}$ موجود است به طوری که $x \in B_2 \subseteq U_2$، پس x متعلق به $B_1 \cap B_2$ است. طبق ویژگی دوم پایه بودن، $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ موجود است به طوری که $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ و حکم ثابت می‌شود. $\square$

مثال ۲۰. دقت کنید که یک پایه برای یک توپولوژی، منجر به ایجاد توپولوژی می‌شود ولی خودش توپولوژی نیست. مثلاً مجموعهٔ همهٔ مربع‌ها $= \mathscr{B}$ در $\mathbb{R}^2$ یک پایه است ولی توپولوژی نیست، زیرا اجتماع دو مربع، مربع نیست.

توجه ۲۱. فرض کنید $\mathscr{B}_1$ یک پایه برای یک توپولوژی روی X باشد. همچنین $\mathscr{B}_2$ یک پایه برای یک توپولوژی روی X باشد. در این صورت $\mathscr{T}(\mathscr{B}_1) = \mathscr{T}(\mathscr{B}_2)$ هرگاه برای هر $B_1 \in \mathscr{B}_1$ و $x \in B_1$، یک باز پایه‌ای $B_2 \in \mathscr{B}_2$ موجود باشد به طوری که $x \in B_2 \subseteq B_1$. برعکس، برای هر $x \in B_2 \in \mathscr{B}_2$، یک باز پایه‌ای $B_1 \in \mathscr{B}_1$ موجود باشد به طوری که $x \in B_1 \subseteq B_2$.

مثال ۲۲. $\mathscr{T}(\mathscr{B}_{\text{دایره}}) = \mathscr{T}(\mathscr{B}_{\text{مربع}})$. زیرا در هر مربع، حول هر نقطه، یک دایره وجود دارد که شامل آن نقطه است و زیرمجموعهٔ مربع است و برعکس، در هر دایره حول هر نقطه یک مربع شامل آن نقطه وجود دارد که زیرمجموعهٔ دایره است.

تمرین تحویلی ۲. ۱- فرض کنید $\{\mathscr{T}_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از توپولوژی‌ها روی مجموعهٔ X باشد. در این صورت $\bigcap_{i\in I}\mathscr{T}_i$ یک توپولوژی روی X است.

۲- فرض کنید $\mathscr{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی X باشد. نشان دهید که

$$\mathscr{T}(\mathscr{B})=\bigcap_{\mathscr{B}\subseteq\mathscr{T}}\mathscr{T}.$$

(یعنی $\mathscr{T}(\mathscr{B})$ کوچکترین توپولوژی شامل $\mathscr{B}$ است).

سوال ۲۳. فرض کنید $X=\mathbb{R}$ و تعریف کنید

$$\mathscr{B}_s=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R},a<b\}=\{x\mid a<x<b\}$$

$$\mathscr{B}_l=\{[a,b)\mid a,b\in\mathbb{R},a<b\}.$$

آیا $\mathscr{T}_s\subseteq\mathscr{T}_l$؟

پاسخ. بله، فرض کنید $(a,b)\in\mathscr{T}_s$ و $x\in(a,b)$. در این صورت $[x,b)$ متعلق به $\mathscr{T}_l$ است و $x\in[x,b)\subseteq(a,b)$. بنابراین $\mathscr{T}_l$ توپولوژی ظریف‌تری نسبت به $\mathscr{T}_s$ است و بازهای بیشتری دارد.

سوال ۲۴. با همان فرض‌های سوال قبل، آیا $\mathscr{T}_l\subseteq\mathscr{T}_s$؟

پاسخ. فرض کنید $[a,b)\in\mathscr{B}_l$ و $x=a\in[a,b)$. واضح است که هر بازه حول x با نقاط خارج از $[a,b)$ اشتراک دارد.

سوال ۲۵. آیا $\{[a,b]\mid a,b\in\mathbb{R},a<b\}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی تشکیل می‌دهد؟

توجه ۲۶. فرض کنید X یک مجموعه باشد. $\mathscr{B}=\{\{x\}\mid x\in X\}$ پایه‌ای برای توپولوژی گسسته است.

تمرین ۱. فرض کنید $X=\mathbb{R}$ و قرار دهید

$$\mathscr{B}=\{(a,b)|a<b\}\ \cup\ \{(a,b)-\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}|a<b\}.$$

بررسی کنید که $\mathscr{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی است.

سوال ۲۷. توپولوژی $\mathscr{T}(\mathscr{B})$ را با $\mathscr{T}_s$ مقایسه کنید.

پاسخ. باز پایه‌ای $(-1,1)-\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ را در توپولوژی $\mathscr{T}(\mathscr{B})$ و عنصر $x=0$ در این باز پایه‌ای را در نظر بگیرید. هر بازه‌ای حول صفر در توپولوژی استاندارد شامل تعدادی $\frac{1}{n}$ است، بنابراین زیرمجموعهٔ این باز پایه‌ای نیست و $\mathscr{T}(\mathscr{B})\nsubseteq\mathscr{T}_s$.

۳.۱ مجموعه‌های بسته و بستار یک مجموعه

توجه ۲۸. گفته شد که روی $\mathbb{R}$، گردایهٔ زیر یک پایه برای یک توپولوژی است. قرار دهید

$$\mathscr{B}_s = \{(a,b) \mid a < b, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathscr{T}_s$ توپولوژی تولیدشده توسط پایه $\mathscr{B}_s$ است و آن را توپولوژی استاندارد می‌نامیم. پایه زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathscr{B}_k = \mathscr{B}_s \cup \{(a,b) - \{\frac{۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

واضح است که $\mathscr{T}_s \subseteq \mathscr{T}_k$، یعنی $\mathscr{T}_k$ ظریف‌تر از $\mathscr{T}_s$ است. اکنون مجموعهٔ

$$A = \{(-۱, ۱) - \{\frac{۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}\}$$

را در نظر بگیرید. A یک باز در $\mathscr{T}_k$ است. A در صورتی در $\mathscr{T}_s$ باز است که برای هر $x \in A$ یک بازه $(a,b) \subseteq A$ موجود باشد به طوری که $x \in (a,b)$. نقطهٔ $۰ \in A$ را در نظر بگیرید. هر بازه حول صفر شامل برخی $\frac{۱}{n}$هاست، پس $\mathscr{T}_k \nsubseteq \mathscr{T}_s$.

مثال ۲۹. مجموعهٔ

$$A = \{(\frac{۱}{۱۰۰۰}, \frac{۱}{۵۰۰}) - \{\frac{۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}\}$$

را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم این مجموعه با توپولوژی استاندارد باز است. واضح است که

$$A = (\frac{۱}{۱۰۰۰}, \frac{۱}{۹۹۹}) \cup (\frac{۱}{۹۹۹}, \frac{۱}{۹۹۸}) \cup \cdots \cup (\frac{۱}{۵۰۱}, \frac{۱}{۵۰۰}).$$

از طرفی هر یک از این بازه‌ها در $\mathscr{T}_s$ باز هستند و اجتماع آن‌ها نیز باز است.

تعریف ۳۰. فرض کنید $(X, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. مجموعهٔ $A \subseteq X$ را بسته[6] می‌نامیم، هرگاه $X - A$ باز باشد (A^c باز باشد).

(به عبارت دیگر $A \subseteq X$ بسته است، هرگاه برای هر $x \in X - A$، یک باز پایه‌ای $U \in \mathscr{T}$ موجود باشد به طوری که $U \cap A = \emptyset$ ($U \subseteq A^c$)).

[6] Closed

توجه ۳۱. اینگونه نیست که اگر A باز نباشد، بسته است. ممکن است مجموعه‌ای در یک توپولوژی:

- نه باز و نه بسته باشد.
- هم باز و هم بسته باشد.
- باز باشد و بسته نباشد.
- بسته باشد و باز نباشد.

مثال ۳۲. در هر فضای توپولوژیک $(X, \mathscr{T})$، مجموعه‌های X و $\emptyset$ هم باز و هم بسته هستند.

مثال ۳۳. در $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_s)$، بازه $[۱, ۲)$ را در نظر بگیرید. این بازه، باز نیست زیرا حول ۱ هیچ همسایگیی وجود ندارد که زیرِ بازهٔ $[۱, ۲)$ قرار گیرد. همچنین این بازه، بسته نیست زیرا در $X - [۱, ۲)$ حول ۲ هیچ همسایگیی موجود نیست که زیرِ این بازه قرار گیرد.

مثال ۳۴. در $\mathbb{R}$، مجموعهٔ $[۱, ۲]$ بسته است، زیرا $\mathbb{R} - [۱, ۲] = (-\infty, ۱) \cup (۲, \infty)$ باز است.

مثال ۳۵. $\{۲\}$ در $\mathbb{R}$ بسته است.

مثال ۳۶. $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. واضح است که $\mathbb{R} - \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n, n+۱)$، پس $\mathbb{Z}$ بسته است.

مثال ۳۷. $[۲, ۳] \cup \{۱\}$ بسته است.

مثال ۳۸. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ بسته نیست، زیرا اگر x متعلق به $\mathbb{Q}$ نباشد، نمی‌توان یک بازهٔ (a, b) حول x پیدا کرد که با $\mathbb{Q}$ اشتراک نداشته باشد.

سوال ۳۹. چرا $\mathbb{Q}$ باز نیست؟

لم ۴۰. X و $\emptyset$ بسته هستند.

لم ۴۱. هر اشتراک دلخواه از مجموعه‌های بسته، یک مجموعهٔ بسته است.

اثبات. فرض می‌کنیم $\{C_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های بسته باشد. ادعا می‌کنیم $\bigcap_{i\in I} C_i$، بسته است. برای اثبات ادعا، باید نشان دهیم که $(\bigcap_{i\in I} C_i)^c$ باز است و این واضح است، زیرا $(\bigcap_{i\in I} C_i)^c = \bigcup_{i\in I} C_i^c$ اجتماعی از مجموعه‌های باز است. □

لم ۴۲. هر اجتماع متناهی از مجموعه‌های بسته، بسته است. یعنی اگر $C_1, C_2, \dots, C_n$ بسته باشند، آنگاه $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$ بسته است.

اثبات. فرض کنید $C_1, C_2, \dots, C_n$ بسته باشند. ادعا می‌کنیم $A = X - (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n)$ باز است. واضح است که

$$A = (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n)^c = C_1^c \cap C_2^c \cap \dots \cap C_n^c.$$

با توجه به اینکه A اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز است، حکم ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۴۳. (خلاصه: یک فضای توپولوژیک را می‌شود با استفاده از بسته‌هایش تعریف کرد.)
فرض کنید $\beta \subseteq X$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد که ویژگی‌های زیر را دارد:

۱- $X, \emptyset \in \beta$.

۲- β تحت اشتراک‌گیری دلخواه، بسته است.

۳- β تحت اجتماع‌گیری متناهی، بسته است.

در این صورت یک توپولوژی $\mathscr{T}$ روی X وجود دارد به طوری که β گردایهٔ مجموعه‌های بستهٔ آن است.

اثبات. قرار دهید $\mathscr{T} = \{X - C \mid C \in \beta\}$. سپس ویژگی‌های توپولوژی را برای $\mathscr{T}$ بررسی کنید. $\square$

توجه ۴۴. گفتیم که هر اشتراک دلخواهی از مجموعه‌های بسته، یک مجموعهٔ بسته است. مجموعهٔ دلخواه A را در نظر بگیرید. اشتراک همهٔ مجموعه‌های بستهٔ شامل A، یک مجموعهٔ بستهٔ شامل A است. در واقع اشتراک همهٔ مجموعه‌های بستهٔ شامل A، کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل A است.

تعریف ۴۵. فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ دلخواه از X باشد. کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل A را بستار[7] A می‌نامیم و آن را با $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم.

توجه ۴۶. برای هر مجموعهٔ A، بستار A موجود است و

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subseteq C \subseteq X \text{ بسته است و } C} C$$

[7] Closure

لم ۴۷. مجموعهٔ A بسته است، اگر و تنها اگر $\overline{A}=A$.

مشاهده ۴۸. x متعلق به $\overline{A}$ نیست، هرگاه یک مجموعهٔ بستهٔ شامل A (مثلا به نام B) وجود داشته باشد که $x\notin B$، یعنی x متعلق به B^c باشد.

خلاصه ۴۹. اگر x متعلق به $\overline{A}$ نباشد، آنگاه یک مجموعهٔ باز U شامل x موجود است بطوریکه $U\cap A=\emptyset$. برعکس، فرض کنید یک مجموعهٔ باز U موجود باشد به طوری که $x\in U$ و $U\cap A=\emptyset$. $X-U$ یک بسته است شامل A و x متعلق به $X-U$ نیست.

قضیه ۵۰. x متعلق به $\overline{A}$ است، اگر و تنها اگر هر باز (پایه‌ای) شامل x، A را قطع کند (با A اشتراک ناتهی داشته باشد).

$$\overline{A}=\{x\in X \mid \text{هر همسایگی } x \text{ شامل نقطه‌ای از } A \text{ باشد}\}.$$

مثال ۵۱. $\overline{[۱,۲)}=[۱,۲]$.

مثال ۵۲. $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید، $\overline{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}$.

همچنین $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

۴.۱ مثال‌هایی از بستار و تعریف فضای هاسدورف

تعریف ۵۳. فرض کنید $(X,\mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A\subseteq X$. در این صورت بستار A کوچک‌ترین بستهٔ شامل A است:

$$\overline{A}=\bigcap_{A\subseteq B\subseteq X,\ \text{بسته}\ B} B$$

یادآوری ۵۴. فرض کنید B بسته باشد، آنگاه $x\notin B$ اگر و تنها اگر یک همسایگی U از x موجود باشد به طوری که $U\cap B=\emptyset$.

نتیجه ۵۵. x متعلق به $\overline{A}$ نیست اگر و تنها اگر $x\notin\bigcap_{A\subseteq B\subseteq X,\ \text{بسته}\ B} B$ اگر و تنها اگر برای یک بستهٔ B شامل A، $x\notin B$ اگر و تنها اگر (یک بستهٔ B شامل A موجود باشد که) یک همسایگی U شامل x موجود باشد به طوری که $U\cap B=\emptyset$ اگر و تنها اگر یک همسایگی U شامل x موجود باشد به طوری که $U\cap A=\emptyset$.

خلاصه ۵۶. x متعلق به $\overline{A}$ است اگر و تنها اگر هر همسایگی باز U شامل x، A را قطع کند.

مثال ۵۷. در توپولوژی ترتیبی $\mathbb{R}$، مجموعهٔ $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $\overline{A} = A \cup \{0\}$.

تمرین تحویلی ۳. روی $\mathbb{R}$ توپولوژی فرشه را در نظر بگیرید. توپولوژی فرشه را با توپولوژی استاندارد مقایسه کنید.

تمرین ۲. روی $\mathbb{R}$ توپولوژی فرشه و مجموعهٔ A در مثال قبل را در نظر بگیرید. $\overline{A}$ را در توپولوژی فرشه بیابید.

مثال ۵۸. فضای توپولوژیک $(\mathbb{R}^2, \mathscr{T}_{\text{دایره}})$ و نقطهٔ $\{(1, 2)\}$ را در نظر بگیرید. بستار آن تحت این توپولوژی با خودش برابر است و این یعنی این مجموعه بسته است.

یادآوری ۵۹. هر اجتماع دلخواه از مجموعه‌های باز، یک مجموعهٔ باز است.

تعریف ۶۰. فرض کنید $(X, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت بزرگ‌ترین مجموعهٔ بازِ زیرمجموعهٔ A را درون A می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^\circ = \bigcup_{O \subseteq A \text{ , باز } O} O.$$

لم ۶۱. x متعلق به A° است اگر و تنها اگر یک مجموعهٔ بازِ شامل x و زیرمجموعهٔ A وجود داشته باشد.

مثال ۶۲. $[1, 2)^\circ = (1, 2)$.

تعریف ۶۳. مرزِ A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\partial A = \overline{A} - A^\circ.$$

به بیان دیگر x متعلق به ∂A است اگر و تنها اگر $x \in \overline{A}$ و $x \notin A^\circ$، اگر و تنها اگر هر همسایگی x، A را قطع کند و هر همسایگی x خارج از A را قطع کند اگر و تنها اگر هر همسایگی x، هم A و هم A^c را قطع کند.

تعریف ۶۴. فرض کنید $(X, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. همچنین فرض کنید $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از اعضای X باشد و a عنصری از X باشد. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ هرگاه برای هر همسایگی بازِ U شامل a، یک عدد طبیعی N_U موجود باشد به طوری که

$$\forall n > N_U \ , \ x_n \in U.$$

یادآوری ۶۵. فرض کنید $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ همگرا در اعداد حقیقی باشد و

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

در این صورت حد این دنباله یکتاست.

مثال ۶۶. $X = \{a, b, c\}$ و $\mathscr{T} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$ و دنبالهٔ ثابتِ $x_n = b$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که $\lim_{n\to\infty} x_n = b$، $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ و $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.

تعریف ۶۷. **(فضای هاسدورف** [8]**)** فضای توپولوژیک $(X, \mathscr{T})$ را یک فضای توپولوژیک هاسدورف می‌نامیم هرگاه برای هر دو نقطهٔ دلخواهِ $x \neq y$ در X، یک بازِ U_x شامل x و یک بازِ U_y شامل y موجود باشند به طوری که $U_x \cap U_y = \emptyset$.

نکته ۶۸. فضای توپولوژیکی که در مثال ۶۶ معرفی شد، هاسدورف نیست زیرا هیچ دو بازی یافت نمی‌شوند که با هم اشتراک نداشته باشند و یکی شامل a و دیگری شامل b باشد.

لم ۶۹. فرض کنید x_n یک دنبالهٔ همگرا در فضای هاسدورفِ $(X, \mathscr{T})$ باشد. در این صورت حدِ این دنباله یکتاست.

اثبات. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} = a$، $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ و $a \neq b$. همچنین فرض کنید U_a و U_b مانند تعریف بالا باشند. در این صورت باید دنبالهٔ x_n از جایی به بعد هم در U_a و هم در U_b باشد ولی این دو با هم اشتراک ندارند. $\square$

لم ۷۰. فرض کنید $(X, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد. در این صورت هر مجموعهٔ تک‌عضویِ $\{a\}$ بسته است. (زیرا هر نقطه‌ای که خارج از $\{a\}$ در نظر بگیریم، یک همسایگی آن مانند U_b وجود دارد که شامل a نیست.)

[8] Housdorff

مثال ۷۱. در فضای توپولوژیک معرفی شده در مثال ۶۶، $\{b\}$ بسته نیست زیرا

$$\{b\}^c = \{a, c\} \notin \mathscr{T}.$$

تعریف ۷۲. نقاطی که هر همسایگی آن‌ها، A را قطع کند، ممکن است در A نباشند. به چنین نقطه‌ای یک نقطهٔ حدی خارج از A گفته می‌شود. در این صورت

$$\overline{A} = A \cup \text{نقاط حدی خارج از } A.$$

لم ۷۳. در یک فضای هاسدورف هر همسایگی هر نقطه‌ی حدی مجموعهٔ A، A را در نامتناهی نقطه قطع می‌کند.

تعریف ۷۴. فضای توپولوژیک $(X, \mathscr{T})$ را هاسدورف می‌نامیم، هرگاه برای هر دو نقطهٔ $a, b \in X$، بازهای U_a و U_b موجود باشند به طوری که $a \in U_a$، $b \in U_b$ و $U_a \cap U_b = \emptyset$.

لم ۷۵. اگر $(X, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک هاسدورف باشد، آنگاه هر مجموعهٔ تک‌عضوی $\{a\}$ که $a \in X$، یک مجموعهٔ بسته است.

نتیجه ۷۶. در یک فضای هاسدورف، مجموعه‌های متناهی بسته هستند (زیرا اجتماعی متناهی از تک‌عضوی‌هاست).

نتیجه ۷۷. فرض کنید $(X, \mathscr{T})$ یک فضای هاسدورف باشد و $A \subseteq X$، همچنین b یک نقطهٔ حدی باشد. در این صورت هر همسایگی U_b از b، مجموعهٔ A را در نامتناهی نقطه قطع می‌کند.

اثبات. فرض کنید b یک نقطهٔ حدی برای A باشد و U یک همسایگی b باشد کهA را در متناهی نقطه قطع کند. به عبارتی فرض کنید

$$U \cap A = \{b_۱, b_۲, \dots, b_n\}.$$

از آنجایی که فضا هاسدورف است، این مجموعه بسته است. پس مجموعهٔ $U - \{b_۱, \dots b_n\}$ باز است اما با A اشتراکی ندارد و این متناقض با نقطهٔ حدی بودن b است. □

سوال ۷۸. فرض کنید U باز و C بسته باشد. نشان دهید $U - C$ باز است.

نتیجه ۷۹. فرض کنید $(X, \mathscr{T})$ یک فضای هاسدورف باشد. در این صورت اگر دنبالهٔ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ همگرا باشد، آنگاه حد آن یکتاست.

اثبات. فرض کنید $\lim_{n\to\infty} x_n = a$، $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ و $a \neq b$. همچنین فرض کنید U_a و U_b به ترتیب دو همسایگی از a و b باشند به طوری که $U_a \cap U_b = \emptyset$. از آنجایی که دنبالهٔ x_n به a همگراست، عدد طبیعی N_a موجود است به طوری که

$$\forall n > N_a \ , \ x_n \in U_a.$$

مشابهاً از آنجایی که x_n به b همگراست، عدد طبیعی N_b موجود است به طوری که

$$\forall n > N_b \ , \ x_n \in U_b.$$

بنابراین

$$\forall n > \max\{N_a, N_b\} \ , \ x_n \in (U_a \cap U_b) = \emptyset.$$

که این تناقض است و حکم ثابت می‌شود. □

تمرین ۳. روی خط حقیقی، توپولوژی فرشه را در نظر بگیرید. (توپولوژی متمم متناهی)

الف) آیا این توپولوژی، هاسدورف است؟ خیر

ب) دنبالهٔ $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ به چه نقاطی میل می‌کند؟

۱.۵ فضاهای متریک (توپولوژی متریک)

تعریف ۸۰. فرض کنید X یک مجموعهٔ دلخواه باشد. تابع $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ را یک متر روی X می‌نامیم، هرگاه

۱- برای هر دو نقطهٔ $x, y \in X$، $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$.

۲- نامساوی مثلثی برقرار باشد. به عبارتی برای هر x، y و z متعلق به X،

$$\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y).$$

۳- برای هر $x, y \in X$، $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

قضیه ۸۱. (متر منجر به توپولوژی می‌شود.)

فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. آنگاه گردایهٔ زیر یک پایه برای یک توپولوژی روی X است که به آن توپولوژی متریک d گفته می‌شود.

$$B = \{B_r(a) \mid a \in X, r \in \mathbb{R}^{\geq 0}\} \ , \ B_r(a) = \{x \in X \mid \mathrm{d}(x,a) < r\}.$$

(به بیان دیگر در توپولوژی متریک d، مجموعهٔ U باز است اگر و تنها اگر برای هر $a \in U$ یک گوی $B_r(a)$ موجود باشد به طوری که $a \in B_r(a) \subseteq U$.)

اثبات. فرض کنید $x \in X$ یک نقطهٔ دلخواه باشد. به راحتی یک گوی باز شامل x پیدا می‌شود.

ویژگی دوم: فرض کنید $B_{r_1}(a)$ و $B_{r_2}(b)$ دو گوی حول a و b باشند و x متعلق به $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(b)$ باشد. قرار دهید

$$r'_1 = r_1 - \mathrm{d}(a,x)\ ,\ r'_2 = r_2 - \mathrm{d}(b,x)\ ,\ r'_3 = \min\{r'_1, r'_2\}.$$

حول x یک گوی به شعاع r'_3 بزنید.

ادعا ۱. $B_{r'_3}(x) \subseteq B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(b)$.

یعنی اگر c نقطهٔ دلخواهی باشد به طوری که $\mathrm{d}(c,x) < r'_3$، آنگاه $\mathrm{d}(c,a) < r_1$ و $\mathrm{d}(c,b) < r_2$. فرض کنید c چنین باشد،

$$\mathrm{d}(c,a) \leq \mathrm{d}(c,x) + \mathrm{d}(x,a) < r_1 - \mathrm{d}(x,a) + \mathrm{d}(x,a) = r_1.$$

مشابهاً برای b ثابت می‌شود $\mathrm{d}(c,b) < r_2$. $\square$

مثال ۸۲. در $\mathbb{R}^2$ متر زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathrm{d}_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که ویژگی‌های متر در آن صدق می‌کند. به وضوح توپولوژی ایجادشده توسط این متر همان توپولوژی دایره‌ای است.

مثال ۸۳. متر متفاوت زیر را برای $\mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید.

$$\mathrm{d}_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

با این متر، گوی $B_r(0) = \{(x,y) \mid |x| + |y| < r\}$ را در نظر بگیرید. همچنین داریم $B_r((a,b)) = \{(x,y) \mid d_2((x,y),(a,b)) < r\}$. توپولوژی ایجادشده با این متر با توپولوژی ایجادشده توسط متر مثال قبل برابر است.

سوال ۸۴. ثابت کنید d_2 یک متریک است.

مثال ۸۵. در $\mathbb{R}^۲$ متر زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathrm{d}(A,B) = \max\{|x_۱ - x_۲|, |y_۱ - y_۲|\}.$$

داریم

$$B_r(۰) = \{(x,y) \mid \max\{|x|,|y|\} < r\}.$$

توپولوژی ایجادشده توسط این متر همان توپولوژی مربعی است که با توپولوژی‌های ایجادشده در دو مثال قبل برابر است.

تعریف ۸۶. فرض کنید $(X,\mathscr{T})$ یک مجموعهٔ مرتب خطّی باشد (برای هر x,y متعلق به X، $x<y$ یا $x>y$ یا $x=y$). در این صورت گردایهٔ زیر تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی روی X می‌دهد:

$$\mathscr{B} = \{(a,b) \mid a<b\}\ ,\ (a,b) = \{x \in X \mid a<x<b\}$$

.

مثال ۸۷. مجموعهٔ $(\mathbb{R},<)$ را در نظر بگیرید.

مثال ۸۸. در مجموعهٔ مرتب خطّی $(\mathbb{Q},<)$، یک بازهٔ (a,b) که $a,b\in\mathbb{Q}$ و $a<b$ مثالی از یک مجموعهٔ باز است.

سوال ۸۹. آیا مجموعهٔ زیر باز است؟

$$A = (\sqrt{۲},\pi)\cap\mathbb{Q} = \{x\in\mathbb{Q} \mid \sqrt{2}<x<\pi\}.$$

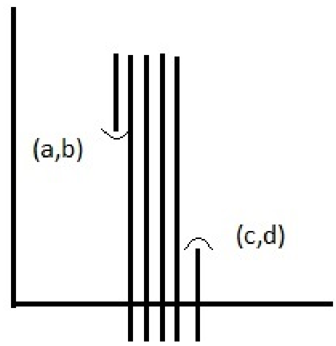
پاسخ. فرض کنید $a_i \to \sqrt{۲}^+$ و $b_i \to \pi^-$ و a_i و b_i دنباله‌هایی از اعداد گویا باشند. در این صورت $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(a_i,b_i) = (\sqrt{۲},\pi)\cap\mathbb{Q}$ و این یعنی اجتماع شمارا از بازهاست.

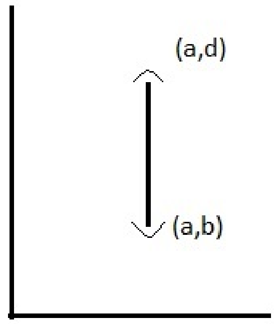
سوال ۹۰. آیا توپولوژی فوق هم از متر ناشی می‌شود؟

مثال ۹۱. مجموعهٔ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ را با ترتیب قاموسی در نظر می‌گیریم.

ترتیب قاموسی برای دو عضو (a,b) و (a',b'):

$$(a,b) <_{\text{قاموسی}} (a',b') \Leftrightarrow (a<a') \vee ((a=a') \wedge (b<b')).$$





مجموعهٔ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ بزرگترین و کوچکترین عضو ندارد، بنابراین توپولوژی ترتیبی آن دارای پایه‌ای است متشکل از گردایهٔ همهٔ بازه‌های باز به صورت

$$((a,b),(a',b')) = \{(x,y) \mid (a,b) <_{\text{قاموسی}} <_{\text{قاموسی}} (a',b')\}$$

است. در شکل زیر این بازه‌ها را نمایش داده‌ایم.

تمرین ۴. نشان دهید توپولوژی ترتیبی قاموسیِ $\mathbb{R}^{۲}$ از یک متر ناشی می‌شود.

توجه ۹۲. اگر $(X,<)$ یک مجموعهٔ مرتب خطی دارای مینیمم باشد، علاوه بر بازهای (a,b) بازهای به صورت $[\min X, b)$ (برای $b > \min X$) را جزوبازهای پایه‌ای می‌گیریم.

$$\mathscr{B} = \{(a,b) \mid a < b\} \cup \{[\min X, b) \mid b \in X \ , \ b > \min X\}$$

. مشابها اگر X دارای ماکسیمم باشد، علاوه بر بازهای (a,b) بازهای به صورت $[b, \max S]$ را در پایه قرار می‌دهیم.

مثال ۹۳. مجموعهٔ مرتب $(\mathbb{N},<)$ را در نظر بگیرید. در این توپولوژی تک‌عضوی‌ها باز هستند:

$$\{n\} = (n-۱, n+۱) \ , \ \{۰\} = [۰,۱) = \{x \in \mathbb{N} \mid ۰ \leq x < ۱\}.$$

بنابراین توپولوژی گسسته است.

سوال ۹۴. مجموعهٔ $(\{۰,۱\} \times \mathbb{N}, <_{\text{قاموسی}})$ را در نظر بگیرید. آیا این توپولوژی گسسته است؟

ادعا ۲. $\{(۱,۰)\}$ باز نیست.

هر بازهٔ شامل $(۱,۰)$ نامتناهی است. در واقع کوچک‌ترین عنصر قبل از $(۱,۰)$ وجود ندارد.

۶.۱ توابع پیوسته

مرور درس ۹۵. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ را در نقطهٔ $x_\circ\in\mathbb{R}$ پیوسته می‌خوانیم هرگاه برای هر بازهٔ $(f(x_\circ)-\epsilon, f(x_\circ)+\epsilon)$ یک بازهٔ $(x_\circ-\delta, x_\circ+\delta)$ حول $x_\circ$ موجود باشد به طوری که برای هر x اگر $x\in(x_\circ-\delta, x_\circ+\delta)$ آنگاه $f(x)\in(f(x_\circ)-\epsilon, f(x_\circ)+\epsilon)$. به بیان دیگر $f\big((x_\circ-\delta, x_\circ+\delta)\big)\subseteq\big(f(x_\circ)-\epsilon, f(x_\circ)+\epsilon\big)$.

به عنوان مثال دیگر، تابع $f:\mathbb{R}^۲\longrightarrow\mathbb{R}^۲$ در نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ پیوسته است هرگاه برای هر همسایگی $(f(x_\circ, y_\circ)-\epsilon, f(x_\circ, y_\circ)+\epsilon)$ یک گوی به شعاع δ حول $(x_\circ, y_\circ)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$f(B_\delta((x_\circ, y_\circ)))\subseteq(f(x_\circ, y_\circ)-\epsilon, f(x_\circ, y_\circ)+\epsilon).$$

تعریف ۹۶. فرض کنید $(X, \mathscr{T}_X)$ و $(Y, \mathscr{T}_Y)$ دو فضای توپولوژیک باشند.

تابع $f:X\to Y$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته است هرگاه برای هر بازِ $U_{f(x_\circ)}\in\mathscr{T}_Y$ حول نقطهٔ $f(x_\circ)$ یک بازِ $U_{x_\circ}\in\mathscr{T}_X$ موجود باشد به طوری که برای هر $x\in U_{x_\circ}$، $f(x)\in U_{f(x_\circ)}$. به بیان دیگر $f(U_{x_\circ})\subseteq U_{f(x_\circ)}$.

تعریف ۹۷. تابع $f:X\longrightarrow Y$ پیوسته است هرگاه در تمامی نقاط $x_\circ\in X$ پیوسته باشد.

قضیه ۹۸. تابع $f:X\longrightarrow Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر بازِ $V\in\mathscr{T}_Y$ مجموعهٔ

$$f^{-۱}(V)=\{x\in X\mid f(x)\in V\}$$

در $\mathscr{T}_X$ باز باشد.

اثبات. فرض کنید برای هر $V\in\mathscr{T}_Y$، $f^{-۱}(V)$ متعلق به $\mathscr{T}_X$ باشد.

فرض کنید $x_\circ\in X$ یک نقطهٔ دلخواه باشد. ادعا می‌کنیم f در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته است. فرض کنید V یک همسایگی حول $f(x_\circ)$ باشد، در این صورت $f^{-۱}(V)$ یک همسایگی حول $x_\circ$ است به طوری که $f(f^{-۱}(V))\subseteq V$.

برعکس، فرض کنید f در تمام نقاط $x_\circ\in X$ پیوسته باشد. نشان می‌دهیم برای هر بازِ $V\in\mathscr{T}_Y$، $f^{-۱}(V)$ در توپولوژی $\mathscr{T}_X$ باز است. فرض کنید $V\in\mathscr{T}_Y$ یک بازِ دلخواه باشد و $x_\circ\in f^{-۱}(V)$. در این صورت $f(x_\circ)\in V$. از آنجا که f در $x_\circ$ پیوسته است، یک بازِ $U\in\mathscr{T}_X$ حول $x_\circ$ موجود است به طوری که $U\subseteq f^{-۱}(V)$. □

یادآوری ۹۹. تابع $f : X \to Y$ پیوسته است هرگاه برای هر بازِ V متعلق به $\mathscr{T}_Y$ مجموعهٔ زیر در $\mathscr{T}_X$ باز باشد:

$$f^{-1}(V) : \{x \in X \mid f(x) \in V\}.$$

قضیه ۱۰۰. تابع $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر مجموعهٔ $A \subseteq X$ داشته باشیم، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. به بیان دیگر اگر x یک نقطهٔ حدی A باشد، $f(x)$ یک نقطهٔ حدی برای $f(A)$ باشد ($x \in \overline{A} \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$).

اثبات. فرض کنید $f : X \to Y$ پیوسته باشد، $A \subseteq X$ و $x \in \overline{A}$ (هر همسایگی x، A را قطع کند). نشان می‌دهیم $f(x)$ در $\overline{f(A)}$ است (هر همسایگی $f(x)$، $f(A)$ را قطع می‌کند). فرض کنید V یک همسایگی $f(x)$ باشد. بنا به پیوستگی تابع f، یک همسایگی U حول x موجود است به طوری که $f(U) \subseteq V$. از آنجایی که x یک نقطهٔ حدی A است، نقطه‌ای مانند $t \in U \cap A$ موجود است. بنابراین $f(t) \in V \cap f(A)$.

برعکس، فرض کنید $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. نشان می‌دهیم f پیوسته است. فرض کنید V یک بازِ حول $f(x)$ باشد. نشان می‌دهیم $f^{-1}(V)$ در X باز است. فرض می‌کنیم $f^{-1}(V)$ باز نباشد. در این صورت یک نقطهٔ $t \in f^{-1}(V)$ وجود دارد که درونی نیست، یعنی هر همسایگی t، $X - f^{-1}(V)$ ($(f^{-1}(V))^c$) را قطع می‌کند. پس t یک نقطهٔ حدی برای $X - f^{-1}(V)$ است. بنا به فرض $f(t)$ یک نقطهٔ حدی برای $f(X - f^{-1}(V)) \subseteq V^c$ است. پس $f(t)$ یک نقطهٔ حدی برای V^c است (V باز است و $f(t) \in V$ باید نقطهٔ درونی باشد). □

تمرین تحویلی ۴. نشان دهید تابعِ $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر مجموعهٔ بستهٔ $C \subseteq Y$، مجموعهٔ $f^{-1}(C) \subseteq X$ بسته باشد.

لم ۱۰۱. فرض کنید دنباله‌ای در مجموعهٔ A مانند $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ وجود داشته باشد به طوری که $x_n \to x$. در این صورت $x \in \overline{A}$.

اثبات. چون هر همسایگی x دنباله را قطع می‌کند و دنباله در A قرار دارد، پس هر همسایگی x، A را قطع می‌کند و $x \in \overline{A}$. □

سوال ۱۰۲. آیا $x \in \overline{A}$ نتیجه می‌دهد که دنباله‌ای مانند x_n از عناصر A وجود دارد که به x میل می‌کند؟

نتیجه ۱۰۳. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. در این صورت $x \in \overline{A}$ اگر و تنها اگر x حد یک دنبالهٔ x_n از اعضای A باشد.

اثبات. فرض کنید $x \in \overline{A}$. در این صورت هر همسایگی x، A را قطع می‌کند. بنابراین $B_1(x)$، A را قطع می‌کند. فرض کنید $x_1 \in A \cap B_1(x)$. حال $B_{\frac{1}{2}}(x)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $x_2 \in A \cap B_{\frac{1}{2}}(x)$. به طریق مشابه از هر گوی $B_{\frac{1}{n}}(x)$ یک نقطهٔ x_n انتخاب کنید. ادعا می‌کنیم $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$. فرض کنید $B_r(x)$ یک همسایگی دلخواه از x باشد. بنا به ویژگی ارشمیدسی اعداد حقیقی، یک عدد $r > \frac{1}{n}$ موجود است. پس $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq B_r(x)$. □

نتیجه ۱۰۴. فرض کنید X و Y فضاهای متریک باشند. در این صورت $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از اعضای X، اگر $x_n \to a$ آنگاه دنبالهٔ $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ به گونه‌ای باشد که $f(x_n) \to f(a)$.

سوال ۱۰۵. آیا لازم است Y متریک باشد؟

سوال ۱۰۶. آیا هر فضای توپولوژیک، متریک‌پذیر است؟

تعریف ۱۰۷. فضای توپولوژیک $(X, \mathscr{T})$ را متریک‌پذیر می‌نامیم، هرگاه یک متریک $d : X \times X \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\{B_r(x) \mid x \in X, r \in \mathbb{R}^+\}$$

پایه‌ای برای توپولوژی $\mathscr{T}$ باشد.

۷.۱ توپولوژی حاصلضربی

فرض کنید $(X, \mathscr{T}_X)$ و $(Y, \mathscr{T}_Y)$ دو فضای توپولوژیک باشند. هدف ما تبدیل ضرب دکارتیِ $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ به یک فضای توپولوژیک است.

سوال ۱۰۸. یک مجموعهٔ $O \subseteq X \times Y$ را چه زمانی باز می‌نامیم؟

قضیه ۱۰۹. مجموعهٔ زیر یک پایه برای یک توپولوژی روی $X \times Y$ است. مجموعهٔ متشکل از تمام مجموعه‌های به شکل $U \times V$ که U در X و V در Y باز است.

$$U \times V = \{(x,y) \mid x \in U, y \in V\}.$$

اثبات. توجه می‌کنیم که هر عنصر $(x,y) \in X \times Y$ در یک باز پایه‌ای واقع می‌شود و شرط اول برقرار است. برای نشان دادن شرط دوم پایه بودن، فرض کنید (x,y) متعلق به $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$ باشد. بنابراین $(x,y) \in U_1 \times V_1$ و $(x,y) \in U_2 \times V_2$، پس $x \in U_1 \cap U_2$ و $y \in V_1 \cap V_2$. در نتیجه

$$(x,y) \in (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2) \subseteq (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2).$$

□

مثال ۱۱۰. یک باز در $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\text{ترتیبی}})$ به صورت یک بازه مانند (a,b) است. پس بازهای $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ با توپولوژی ترتیبی، زوج مرتب‌هایی مانند (x,y) هستند که $x \in (a,b) = U$ و $y \in (c,d) = V$.

مثال ۱۱۱. $\mathbb{R}_{\text{ترتیبی}} \times \mathbb{R}_{\text{گسسته}}$ همان توپولوژی ایجادشده با ترتیب قاموسی است.

مثال ۱۱۲. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (با توپولوژی ترتیبی) برابر با توپولوژی دایره‌ای است.

قضیه ۱۱۳. تابع $f : A \to X \times Y$ را در نظر بگیرید. در این صورت برای هر $a \in A$ داریم $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$ که $f_1 : A \to X$ و $f_2 : A \to Y$. آنگاه f پیوسته است اگر و تنها اگر f_1 و f_2 هر دو پیوسته باشند.

اثبات. فرض کنید f پیوسته باشد. ادعا می‌کنیم f_1 پیوسته است. فرض کنید $U \subseteq X$ باز باشد. همچنین ادعا می‌کنیم $f_1^{-1}(U) \subseteq A$ باز است. توجه کنید $U \times Y$ در $X \times Y$ باز است. بنا به پیوستگی f، $f^{-1}(U \times Y)$ در A باز است.

$$f_1^{-1}(U) = \{x \mid f_1(x) \in U\} = \{x \in A \mid f_1(x) \in U, f_2(x) \in Y\}$$

$$= \{x \in A \mid f(x) \in U \times Y\} = f^{-1}(U \times Y).$$

مشابها f_2 هم پیوسته خواهد بود. برعکس، فرض کنید $f_1 : A \to X$ و $f_2 : A \to Y$ دو تابع پیوسته باشند. ادعا می‌کنیم $f : A \to X \times Y$ پیوسته است. برای اثبات ادعا، فرض کنید $U \times V$ یک باز پایه‌ای برای $X \times Y$ باشد، آنگاه

$$f^{-1}(U \times V) = \{x \in A \mid f(x) \in U \times V\} = \{x \in A \mid f_1(x) \in U, f_2(x) \in V\}$$

$$= f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V).$$

به دلیل اشتراک متناهی از بازها، این مجموعه باز است. □

تمرین تحویلی ۵. فرض کنید $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای در $X \times Y$ باشد. نشان دهید $(a_n, b_n) \mapsto (a, b)$ اگر و تنها اگر $a_n \mapsto a$ و $b_n \mapsto b$.

تعریف ۱۱۴. هر عنصر در $\mathbb{R}^\omega$ یک دنباله از عناصر $\mathbb{R}$ است ($\overline{x} \in \mathbb{R}^\omega$, $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots)$ که $x_i \in \mathbb{R}$). بازهای پایه‌ای $\mathbb{R}^\omega$ به صورت زیر است:

$$\prod_{U_i \subseteq \mathbb{R}\ ,\ \text{باز } U} U_i = U_1 \times U_2 \times \cdots .$$

مجموعهٔ $\mathscr{B}$ متشکل از $\prod_{i\in\omega} U_i$ها تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی روی $\prod_{i\in\omega} \mathbb{R}_i$ می‌دهد. به این توپولوژی، توپولوژی جعبه‌ای[9] گفته می‌شود.

قضیه ۱۱۵. $\mathbb{R}^\omega$ با توپولوژی جعبه‌ای متریک‌پذیر نیست.

اثبات. مجموعهٔ $A \subseteq \mathbb{R}^\omega$ متشکل از همهٔ عناصر $\overline{x} = (x_i)_{i\in\omega}$ به طوری که $x_i > 0$ را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم نقطهٔ $\overline{0} = (0, 0, \dots)$ یک نقطهٔ متعلق به $\overline{A}$ است. فرض کنید $\prod_{i\in\omega} U_i = U_1 \times U_2 \times \cdots$ یک باز حولِ $\overline{0}$ باشد. هر U_i شامل یک عنصر $y_i > 0$ است، پس $(y_i)_{i\in\omega} \in A \cap \prod U_i$.

ادعا ۳. هیچ دنباله‌ای از عناصر A به $\overline{0}$ میل نمی‌کند (بنابراین $\mathbb{R}^\omega$ متریک‌پذیر نیست).

فرض کنید $(\overline{a_n})$ دنباله‌ای در $\mathbb{R}^\omega$ باشد که به $\overline{0}$ میل می‌کند ($\overline{a_n} \to a$).

$$\overline{a_1} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots)\ ,\ \overline{a_2} = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots)\ \ \overset{\dots}{\longrightarrow} \overline{0} = (0, 0, 0, \dots).$$

$$\prod U_i = (-a_{ii}, a_{ii}) = (-a_{11}, a_{11}) \times (-a_{22}, a_{22}) \times \cdots \subseteq \mathbb{R}^\omega$$

یک باز پایه‌ای است. ادعا می‌کنیم هیچ عدد N وجود ندارد که از جملهٔ $\overline{a_N}$ به بعد دنباله در بازِ بالا واقع شود. می‌بینیم که $\overline{a_1}$ در این بازِ پایه‌ای قرار نمی‌گیرد چون a_{11} در $(-a_{11}, a_{11})$ قرار نمی‌گیرید و همچنین a_{22} در این بازِ پایه‌ای نیست چون در $(-a_{22}, a_{22})$ قرار ندارد و به طور کلی هیچ $\overline{a_n}$ در این باز قرار نمی‌گیرد. □

تمرین تحویلی ۶. فرض کنید $(\overline{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از اعضای $\mathbb{R}^\omega$ باشد. آیا درست است که $(\overline{a_n}) \to \overline{a}$ ($\overline{a_n} = (a_{n1}, a_{n2}, \dots)$, $\overline{a} = (a_1, a_2, \dots)$) اگر و تنها اگر هر دنبالهٔ $(a_{ni})_{i\in\mathbb{N}}$ به a_n میل کند؟

---

[9] Box topology

مشاهده ۱۱۶. فرض کنید $f : A \longrightarrow \prod_{i\in\omega} \mathbb{R}_i$ $(f(a) = (f_1(a), f_2(a)))$ که $f_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$. در این صورت اینگونه نیست که اگر تک‌تک f_iها پیوسته باشند، f پیوسته است.

فرض کنیم بخواهیم نشان دهیم f پیوسته است. یک بازِ پایه‌ای $\prod_{i\in\omega} U_i$ را در نظر بگیرید.

$$f^{-1}(U_1 \times U_2 \times \cdots) = \{x \in A \mid f_1(x) \in U_1, f_2(x) \in U_2, \ldots\}$$

$$= f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2) \cap \cdots .$$

می‌دانیم که اشتراک شمارا تا مجموعهٔ باز، لزوما باز نیست.

تمرین ۵. توپولوژی $\mathscr{T}_X$ هاسدورف است اگر و تنها اگر مجموعهٔ $A = \{(x, x) \mid x \in X\}$ در $X \times X$ (حاصلضربی) باز باشد.

یادآوری ۱۱۷. توپولوژی جعبه‌ای، توپولوژی ظریفی است و بازهای زیادی دارد.

یکی از نکاتی که بررسی کردیم، این بود که $(\mathbb{R}^\omega, \mathscr{T}_{\text{جعبه‌ای}})$ متریک‌پذیر نیست. مجموعهٔ $A = \{\overline{x} \mid x_i > 0\} = (\mathbb{R}^+)^\omega$ را در نظر بگیرید. $\overline{0} = (0, 0, \ldots) \in \overline{A}$ اما از طرفی این نقطه حد هیچ دنباله‌ای از اعضای $\overline{A}$ نیست، چون اگر دنباله‌ای از اعضای $\overline{A}$ مانند

$$\overline{a_1} = (a_{11}, a_{12}, \ldots) \ , \ \overline{a_2} = (a_{21}, a_{22}, \ldots) \ , \ \overline{a_3} \ , \ldots$$

و همسایگی $\Big((-a_{11}, a_{11}), (-a_{22}, a_{22}), \ldots\Big)$ از صفر را در نظر بگیرید، از هیچ جا به بعد دنباله در این همسایگی قرار نمی‌گیرد.

حالت کلی توپولوژی جعبه‌ای

فرض کنید $(X_i, \mathscr{T}_i)_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک باشند.

$$\overline{x} \in \prod_{i\in I} X_i \Longleftrightarrow \overline{x} = (x_i)_{i\in I} \ , \ x_i \in X_i.$$

در واقع هر عنصر در $\prod_{i\in I} X_i$ به صورت یک دنبالهٔ $(x_i)_{i\in I}$ است که $x_i \in X_i$ یا به بیان دیگر به صورت یک تابع $I \longrightarrow \bigcup X_i$ است.

یک بازِ پایه‌ای توپولوژی جعبه‌ای روی $\prod X_i$ به صورت

$$\prod_{i\in I,\ U_i\in\mathscr{T}_{X_i}} U_i$$

است.

مثال ۱۱۸. تابع $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{\omega}$ که $t\mapsto(t,t,t,\dots)$ را در نظر بگیرید. تک‌تک توابع $f_i:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_i=\mathbb{R}$ که $t\mapsto t$ پیوسته هستند.

سوال ۱۱۹. آیا f در ۰ پیوسته است؟

پاسخ. واضح است که $f(۰)=(۰,۰,\dots)$. همسایگی

$$V=(-۱,۱)\times(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})\times(-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})\times\cdots$$

از $(۰,۰,\dots)$ را در نظر بگیرید. مشاهده می‌شود

$$f^{-۱}(V)=\{t\mid f(t)\in V\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{۱}{n},\frac{۱}{n})\xlongequal[\text{اعداد حقیقی}]{\text{خاصیت ارشمیدسی}}۰.$$

با توجه به اینکه تصویر وارون یک تابعِ باز، باز نشد پس f در صفر پیوسته نیست.

تعریف ۱۲۰. (توپولوژی حاصلضربی) فرض کنید $(X_i,\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک باشند. هدف، تعریف یک توپولوژی دیگر روی $\prod_{i\in I}Xi$ به نام توپولوژی حاصلضربی است. بازهای پایه‌ای به صورت

$$\Big\{\prod_{i\in I}U_i\mid \text{متناهی باشد.}\ \{i\mid U_i\neq X_i\}\Big\}$$

خواهد بود.

به طور خاص روی $\mathbb{R}^{\omega}$ توپولوژی حاصلضربی را در نظر بگیرید. به عبارتی بازهای پایه‌ای بصورت $\prod_{i\in I}U_i$ هستند به طوری که از جایی متناهی به بعد $U_i=X_i$.

مثال ۱۲۱. $f:A\longrightarrow\prod_{i\in I}X_i$ را در نظر بگیرید که $a\mapsto(f_ia)_{i\in I}$. تابع f پیوسته است اگر و تنها اگر تک‌تک f_iها پیوسته باشند.

اثبات. فرض کنید تک‌تک f_iها پیوسته باشند. ادعا می‌کنیم f پیوسته است. فرض کنید $\prod_{i\in I}U_i$ یک بازِ پایه‌ای در $\prod_{i\in I}X_i$ باشد. اگر $I'=\{i\in I\mid U_i\neq X_i\}$،

$$f^{-۱}(\prod_{i\in I}U_i)=\{x\in A\mid f_i(x)\in U_i\}=\bigcap_{i\in I}f_i^{-۱}(U_i)=\bigcap_{j\in I'\subseteq I}f_j^{-۱}(U_j)$$

و می‌دانیم اشتراک تعداد متناهی مجموعهٔ باز، باز است. $\square$

تمرین ۶. در $\mathbb{R}^{\omega}$ دنبالهٔ $\overline{a_n}=(a_{n۱},a_{n۲},\dots)$ همگرا به $\overline{a}=(a_۱,a_۲,\dots)$ است اگر و تنها اگر $(a_{ni})_{i\in\mathbb{N}}\to a_i$.

لم ۱۲۲. $\mathbb{R}^\omega$ با توپولوژی حاصلضربی متریک‌پذیر است.

$$U_1 \times U_2 \times U_N \times \cdots \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$$

یک بازِ پایه‌ای است.

یک قدم عقب‌تر: روی $\mathbb{R}$ متریک زیر را در نظر بگیرید.

$$d(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} |x-y| & |x-y| < 1 \\ 1 & |x-y| \geq 1 \end{array} \right\} \tag{1}$$

تمرین ۷. نشان دهید $d(x,y)$ یک متریک است (ویژگی‌های متر را بررسی کنید).

روی $\mathbb{R}^\omega$ متریک زیر را در نظر بگیرید.

$$D(\overline{x},\overline{y}) = \sup(\{\frac{d(x_i,y_i)}{i} \mid i \in \omega\}) = \sup\{\frac{d(x_1,y_1)}{1}, \frac{d(x_2,y_2)}{2}, \ldots\}$$

که $(x_i)_{i\in\omega} = (x_1, x_2, \ldots)$ و $(y_i)_{i\in\omega} = (y_1, y_2, \ldots)$ متعلق به $\mathbb{R}^\omega$ هستند. ادعا می‌کنیم متریک D توپولوژی حاصلضربی را ایجاد می‌کند. در قدم اول به وضوح

$$D(\overline{x},\overline{y}) = r \Longleftrightarrow \frac{d(x_i,y_i)}{i} \leq r.$$

اکنون فرض کنید $\frac{1}{N} < r$. در این صورت

$$D(\overline{x},\overline{y}) = \max\{\frac{d(x_i,y_i)}{i}\}_{i<N}.$$

به عنوان مثال

$$B_r(\overline{a}) = \{\overline{x} \mid D(\overline{x},\overline{a}) < r\} = \{(x_i)_{i\in\omega} \mid d(x_i,a_i) < ir \ , \ i < N(\overline{x},\overline{a})\}.$$

مثال ۱۲۳. $\mathbb{R}^J = \prod_{j\in J}\mathbb{R}_j$ را با توپولوژی حاصلضربی در نظر بگیرید که J ناشماراست. بازهای پایه‌ای به صورت

$$\prod_{\{i \mid U_i\neq\mathbb{R}\} \text{ متناهی است. } , \ U_i\subseteq\mathbb{R} \text{ باز}} U_i$$

هستند. ادعا می‌کنیم $\mathbb{R}_J$ متریک‌پذیر نیست. $A \subseteq \prod_{j\in J}\mathbb{R}_j$ را در نظر بگیرید.

$(x_j)_{j\in J} \in A \Longleftrightarrow$ x_j ها تقریبا همه‌جا یک هستند.

به بیان دیگر $\{j \mid x_j \neq 1\}$ متناهی باشد. ادعا می‌کنیم $\overline{0} = \{(0_j)_{j\in J}\}$ در $\overline{A}$ است. فرض کنید $U_{j1},\dots U_{jN}$ تعداد متناهی همسایگی صفر باشند. در A عناصری وجود دارند که در مکان‌های $j_1,\dots j_N$ نایِک هستند و در بقیهٔ جاها یک هستند. همچنین ادعا می‌کنیم هیچ دنباله‌ای از عناصر A به $(\overline{0})$ میل نمی‌کند. تعداد عناصر مخالف یک در تمام اجزای دنبالهٔ مذکور، شماراست. اندیس $\beta \in J$ موجود است به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_{n\beta} = 1$. $U_\beta = (-1, 1)$ در نظر بگیرید و برای $i \neq \beta$، $U_i = \mathbb{R}$. از جایی به بعد دنباله در $\prod_{i\in J} U_i$ قرار نمی‌گیرد.

۸.۱ فشردگی

[10]

یادآوری ۱۲۴. فرض کنید $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد. در این صورت f در این بازه هم دارای ماکزیمم مطلق و هم دارای مینیمم مطلق است.

$$\forall x \in [a, b]\ f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2).$$

اگر سعی کنید نامتناهی نقطه در بازهٔ $[a, b]$ را انتخاب کنید، به عبارتی دنباله‌ای نامتناهی در این بازه بسازید، این دنباله حتما یک زیردنبالهٔ همگرا دارد. این ویژگی بنیادی بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ است.

اکنون برای اثبات اینکه f دارای ماکزیمم مطلق است، فرض کنید f ماکزیمم ندارد، بنابراین اگر a_1 را در این بازه در نظر بگرید، $f(a_1)$ ماکزیمم نیست و a_2 موجود است که $f(a_2)$ بیشتر است و این کار را می‌توان بینهایت بار تکرار کرد. به همین صورت دنباله‌ای ساخته می‌شود که باید به نقطه‌ای مانند d همگرا شود و در نتیجه f این نقاط به $f(d)$ همگرا می‌شود و این یعنی $f(d)$ همان ماکزیمم مورد نظر است، مشابها برای مینیمم.

چرا هر دنباله‌ای که در بازهٔ $[a, b]$ در نظر بگیریم، زیردنباله‌ای همگرا دارد؟ زیرا اگر دنباله‌ای دلخواه در نظر بگیریم، این دنباله حتما یک زیردنبالهٔ صعودی یا نزولی دارد. از طرفی یک دنبالهٔ صعودیِ از بالا کراندار در $\mathbb{R}$، همگراست. زیرا هر زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ دارای سوپریمم (کوچکترین کران بالا) است و این به سوپریممش میل می‌کند.

[10]Compactness

تعریف ۱۲۵. فرض کنید $(X, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و A زیرمجموعهٔ دلخواهی از X باشد. می‌گوییم A یک مجموعهٔ فشرده است هرگاه هر پوشش بازِ مجموعهٔ A دارای یک زیرپوشش متناهی باشد.

توضیح: فرض کنید C گردایه‌ای از حباب‌ها (مجموعه‌های باز) باشد که A را می‌پوشانند ($A \subseteq \bigcup C$). در این صورت بازهای $O_۱, O_۲, \dots, O_n \in C$ موجودند به طوری که $A \subseteq O_۱ \cup _۲ \cup \dots \cup O_n$.

مثال ۱۲۶. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ فشرده نیست زیرا $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n, n+۲) = \mathbb{R}$ پوششی از $\mathbb{R}$ است که زیرپوشش متناهی ندارد.

مثال ۱۲۷. $A = \{۰\} \cup \{\frac{۱}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید C گردایه‌ای از بازها باشد که A را پوشانده است. یکی از این بازها مانند O شامل ۰ است. O شامل تمام $\frac{۱}{n}$ها برای $n > N$ است. اکنون $\{\frac{۱}{n}\}_{n\leq N}$ توسط متناهی باز پوشیده می‌شوند.

مثال ۱۲۸. آیا $[۰, ۱)$ فشرده است؟

بازهای $\{(\frac{۱}{n}, ۱)\}_{n\in\mathbb{N}}$ را در نظر بگیرید. پس $(\frac{۱}{۲}, ۱) \cup \{(\frac{۱}{n}, ۱)\}_{n\in\mathbb{N}}$ پوششی برای $[۰, ۱)$ است که زیرپوشش متناهی ندارد.

لم ۱۲۹. فرض کنید $A \subseteq X$ فشرده باشد و $B \subseteq A$ بسته باشد. در این صورت B هم فشرده است.

اثبات. فرض کنید C یک پوششِ باز برای B باشد. در این صورت $\{B^c\} \cup C$ پوششی باز برای A است. از آنجا که A فشرده است، تعداد متناهی بازِ $O_۱, \dots, O_n \in C$ موجودند که به همراه B^c مجموعهٔ A را می‌پوشانند. واضح است که $B \subseteq O_۱ \cup \dots \cup O_n$. $\square$

قضیه ۱۳۰. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع پیوسته باشد. همچنین فرض کنید $A \subseteq X$ فشرده باشد. در این صورت

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y$$

فشرده است.

اثبات. فرض کنید گردایهٔ C پوششی باز برای مجموعهٔ $f(A)$ در Y باشد. گردایهٔ $\{f^{-۱}(O)\}_{O\in C}$ پوششی برای A است. از آنجا که A فشرده است،

$$A \subseteq f^{-۱}(O_۱) \cup f^{-۱}(O_۲) \cup \dots \cup f^{-۱}(O_n).$$

بنابراین $O_1 \cup \dots \cup O_n$ مجموعهٔ $f(A)$ را می‌پوشانند. $\square$

قضیه ۱۳۱. فرض کنید $f : X \to Y$ پیوسته باشد و Y یک فضا با توپولوژی ترتیبی باشد. X یک فضای توپولوژی دلخواه است. همچنین فرض کنید $A \subseteq X$ فشرده است. در این صورت f در A دارای ماکزیمم و مینی‌موم مطلق است. یعنی نقاط c_1 و c_2 در A موجودند به طوری که

$$\forall x \in A \ : \ f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2).$$

اثبات. از آنجا که A فشرده است، بنا به قضیه قبل $f(A)$ نیز فشرده است. ادعا می‌کنیم که $f(A)$ دارای ماکزیمم است. (برهان خلف)، فرض کنید $f(A)$ ماکزیمم نداشته باشد. بازه‌های $\{(-\infty, a)\}_{a \in f(A)}$ مجموعهٔ $f(A)$ را می‌پوشانند. اگر $f(A)$ ماکزیمم نداشته باشد، پوشش یادشده دارای زیرپوششِ متناهی نیست و این در تناقض با فشردگیِ $f(A)$ است. $\square$

قضیه ۱۳۲. $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ فشرده است.

اثبات. فرض کنید C یک پوششِ باز برای $[a,b]$ باشد. ادعا می‌کنیم C دارای یک زیرپوششِ متناهی است. قرار دهید

$$\mathscr{A} = \{c \in [a,b] \mid \text{پوشیده می‌شود.}\ C\ \text{توسط متناهی باز در}\ [a,c]\}$$

اولا $\mathscr{A} \neq \emptyset$. از آنجا که C پوششی برای $[a,b]$ است، بازِ $O \in C$ موجود است به طوری که یک بازهٔ بازِ $O \supseteq (a-\epsilon, a+\epsilon)$ موجود است. پس $[a, a+\epsilon] \subseteq O$. به طور کامل‌تر برای هر $x \in [a,b]$ یک بازهٔ $[x, x+\epsilon]$ موجود است که پوششی متناهی دارد. پس مجموعهٔ $\mathscr{A}$ ناتهی است. $\mathscr{A}$ یک مجموعهٔ ناتهیِ از بالا کراندار است، پس دارای کوچکترین کران بالاست. فرض کنید c_1 کوچکترین کران بالا برای $\mathscr{A}$ باشد. ادعا می‌کنیم $[a, c_1]$ پوششی متناهی دارد. فرض کنید c_1 توسط بازِ O_1 در C پوشیده شده باشد. بنابراین $[c_1 - \epsilon, c_1 + \epsilon]$ پوشش متناهی دارد. از طرفی $[a, c_1 - \epsilon]$ هم پوششِ متناهی دارد. پس $[a, c_1]$ پوشش متناهی دارد. اکنون ادعا می‌کنیم $b = c_1$. اگر $c_1 \neq b$، آنگاه کران بالا بودن c_1 نقض می‌شود. چون ϵ یافت می‌شود به طوری که $[c_1, c_1, \epsilon]$ پوشش متناهی دارد. بنابراین $c_1 = b$. $\square$

قضیه ۱۳۳. فرض کنید $A \subseteq X$ یک مجموعهٔ فشرده باشد. همچنین فرض کنید $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از اعضای A باشد. در این صورت $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ دارای یک زیردنبالهٔ همگرا به یک عنصر $a \in A$ است.

اثبات. فرض کنید هیچ کدام از نقاط $a \in A$ حد یک زیردنباله از دنبالهٔ $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ نباشند. در این صورت برای هر $a \in A$ یک همسایگی U_a موجود است که شامل هیچ یک از نقاط دنبالهٔ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نیست. همسایگی‌های U_a مجموعهٔ A را می‌پوشانند. از آنجا که A فشرده است،

$$A \subseteq U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_k}$$

و این چون هر U_{a_i} فقط شامل احتمالا نقطهٔ a_i از دنبالهٔ مورد نظر است، این موجب متناهی بودن دنباله می‌شود و این تناقض است. $\square$

تعریف ۱۳۴. مجموعهٔ A را فشردهٔ دنباله‌ای [11] می‌نامیم هرگاه هر دنباله از اعضای A یک زیردنبالهٔ همگرا به یک عنصر در A داشته باشد. بنا به قضیهٔ قبل، هر مجموعهٔ فشرده، فشردهٔ دنباله‌ای است.

قضیه ۱۳۵. فرض کنید X یک فضای متریک باشد. همچنین فرض کنید $A \subseteq X$ به گونه‌ای باشد که هر دنبالهٔ نامتناهی در A دارای یک زیردنبالهٔ همگرا به عنصری در A باشد. در این صورت A فشرده است.

اثبات. ۱- ادعای اول: با فرض اینکه A دنباله‌ای فشرده است، برای هر $\epsilon > 0$ می‌توان A را با متناهی گوی به شعاع ϵ پوشاند.

(برهان خلف)، فرض کنید نشود A را با متناهی گوی به شعاع ϵ پوشاند. یک $\epsilon > 0$ و یک عنصر دلخواه $x_1 \in A$ را در نظر بگیرید. در این صورت

$$x_2 \in A - B(x_1, \epsilon)\ ,\ A \nsubseteq B(x_1, \epsilon).$$

در این صورت

$$A \nsubseteq B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon).$$

پس

$$x_3 \in A - B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon)$$

[11] Sequentially compact

را در نظر بگیرید و به این ترتیب یک دنبالهٔ (x_n) بسازید.

$$x_n \notin B(x_1, \epsilon) \cup B(x_2, \epsilon) \cup \cdots \cup B(x_{n-1}, \epsilon).$$

به طور خاص فاصلهٔ x_n از تمام جملات قبل از خود بیش از ϵ است. بنابراین (x_n) هیچ زیردنبالهٔ همگرایی ندارد.

۲- ادعای دوم: فرض کنید X یک فضای متریک باشد و A فشردهٔ دنباله‌ای است. همچنین فرض کنید C یک پوششِ باز برای A باشد. در این صورت شعاع $\epsilon > 0$ موجود است به طوری که هر گوی به مرکز در A و شعاع ϵ در یکی از بازهای پوشش C قرار می‌گیرد. فرض کنید هر $\epsilon = \frac{1}{n}$ خواستهٔ بالا را برآورده نکند. از هر کدام از گوی‌های بالا یک نقطهٔ x_i انتخاب کنید. یک زیردنباله از دنبالهٔ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ به یک نقطهٔ $a \in A$ میل می‌کند. بنابراین جملات (x_{n_k}) از جایی به بعد در اطراف a هستند. فرض کنید یک همسایگی a به شعاع δ در یک بازِ U در پوشش C قرار بگیرد. یک x_{n_k} و یک گوی به شعاع $\frac{1}{x_{n_k}}$ در U قرار می‌گیرد.

فرض کنید C یک پوشش باز برای A باشد. همچنین فرض کنید ϵ عدد لبگ این پوشش باشد (یعنی هر گوی به شعاع ϵ در یکی از بازهای پوشش قرار بگیرد). متناهی گوی به شعاع ϵ، A را می‌پوشانند که هر کدام از این گوی‌ها زیر یک باز قرار دارد، $A \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_\epsilon$ بنابراین تعداد متناهی باز هستند که A را می‌پوشانند. $\square$

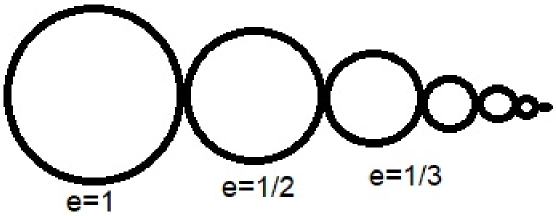
لم ۱۳۶. فرض کنید $(X, \mathscr{T})$ یک فضای هاسدورف باشد. در این صورت هر مجموعهٔ فشردهٔ $A \subseteq X$ بسته است.

اثبات. فرض کنید $x \notin A$. ادعا می‌کنیم یک همسایگی U از x وجود دارد که با A اشتراکی ندارد. برای هر نقطهٔ $y \in A$ همسایگی $U_{(xy)}$ حولِ x و $V_{(xy)}$ حولِ y موجودند به طوری که $U_{(xy)} \cap V_{(xy)} = \emptyset$. تعداد متناهی بازِ $V_{xy_1}, V_{xy_2}, \ldots, V_{xy_n}$، A را می‌پوشانند. می‌دانیم که برای $i = 1, \ldots n$، $V_{xy_i} \cap U_{xy_i} = \emptyset$. همچنین از آنجایی که اشتراک تعداد متناهی باز، باز است،

$$U_{xy_1} \cap U_{xy_2} \cap \cdots \cap U_{xy_n}$$

حولِ x باز است که با A اشتراکی ندارد. $\square$

یادآوری ۱۳۷. گفته شد که فشردگی، به طور دنباله‌ای فشرده بودن را نتیجه می‌دهد. برای اثبات، فرض کنید A فشرده باشد و دنبالهٔ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ به گونه‌ای باشد که هیچ زیردنباله‌ای از آن



به نقطه‌ای در A همگرا نباشد. بنابراین هر نقطه‌ای در A در نظر بگیرید حد هیچ زیردنباله‌ای از a_n نیست، به عبارتی هر نقطه‌ای در A همسایگیی دارد که هیچ کدام از جملات دنباله در آن قرار نمی‌گیرد. تعداد متناهی از این همسایگی‌ها A را می‌پوشانند و این نشان می‌دهد دنباله متناهی است.

همچنین به طور دنباله‌ای فشرده بودن، داشتن عدد لبگ را نتیجه می‌دهد. یعنی اگر مجموعه‌ای داشته باشید که به طور دنباله‌ای فشرده باشد و $(C = \{A_i\}_{i \in I})$ یک پوششِ باز از آن باشد، آنگاه بازه‌هایی که در پوشاندن A استفاده شده‌اند دارای یک بازه با طول مشخص هستند. به عبارتی یک $\epsilon > ۰$ مشخص وجود دارد که بازهٔ $(-\epsilon, \epsilon)$ در همهٔ بازهای پوششی قرار می‌گیرد.

نتیجه ۱۳۸. به طور دنباله‌ای فشرده بودن، داشتن عدد لبگ را نتیجه می‌دهد.

اثبات. فرض کنید A فشردهٔ دنباله‌ای است [۱۲] و C یک پوششِ باز برای آن است. همچنین فرض کنید هیچ $\epsilon > ۰$ عدد لبگ این پوشش نباشد. (به شکل ۸.۱ توجه کنید) یعنی گویی به شعاع ۱ وجود دارد که کاملا توسط عناصر A پوشیده نمی‌شود پس $\epsilon = ۱$ عدد لبگ این پوشش نیست. همچنین گویی به شعاع $\frac{۱}{۲}$ وجود دارد که عدد لبگ این پوشش نیست. با ادامهٔ این روند به هر شعاعِ $\frac{۱}{n}$ یک گوی وجود دارد که پوشیده نمی‌شود. برای $i = ۱, \ldots, n$، از هر گوی با شعاعِ $\frac{۱}{i}$ یک نقطهٔ x_i را در نظر می‌گیریم. این دنباله یک زیردنبالهٔ همگرا دارد. بدون کاستن از کلیت فرض کنید دنباله به عنصرِ $a \in A$ همگرا باشد. در این صورت اگر یک گویِ کوچک حول a در نظر بگیرید از جایی به بعد همهٔ عناصر دنباله در آن قرار می‌گیرند. اکنون یک گوی حولِ a در نظر بگیرید که توسط یکی از بازهای پایه‌ای مانند $U \in C$ پوشیده شده است. x_n از دنباله که در این گوی قرار بگیرد و n بسیار بزرگ باشد را پیدا می‌کنیم، آنگاه ویژگی مورد نظر ما حاصل می‌شود. □

[12] Sequentially compact

نتیجه ۱۳۹. فرض کنید X, Y فضای متریک باشند و $A \subseteq X$ فشرده باشد. همچنین فرض کنید تابع $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته باشد (به طور خاص f در نقاط A پیوسته است). در این صورت f در A به طور یکنواخت پیوسته است.

پیوسته بودن f در هر نقطهٔ x متعلق به A یعنی

$$\forall \epsilon > ۰ \ \ \forall x \in A \ \ \exists \delta_x : \ \ \forall y \in B_{\delta_x}(x) \ \ d(y, x) < \epsilon.$$

و پیوسته بودن یکنواخت f در A یعنی

$$\forall \epsilon > ۰ \ \ \exists \delta : \ \ \Big(d(x, y) < \delta \longrightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon\Big).$$

اثبات. می‌دانیم که f در هر $x \in A$ پیوسته است. فرض کنید $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. برای هر $x \in A$ بنا به پیوستگی یک δ_x موجود است به طوری که اگر $y \in B_{\delta_x}(x)$، آنگاه $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. گوی‌های $B_{\delta_x}(x)$ مجموعهٔ A را می‌پوشانند. این پوشش دارای یک عددِ لبگ است. یعنی یک شعاعِ δ موجود است به طوری که هر گوی به شعاعِ δ در یکی از این بازهای $B_{\delta_x}(x)$ قرار می‌گیرد. در این صورت

$$d(x, y) < \delta \longrightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

□

قضیه ۱۴۰. فرض کنید $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ فشرده باشد.در این صورت $A \times B \subseteq X \times Y$ فشرده است.

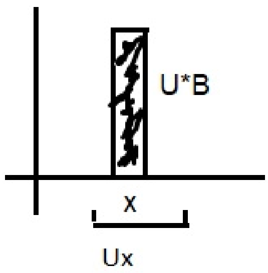
اثبات. فرض کنید C یک پوششِ [13] باز برای $A \times B$ باشد. همچنین فرض کنید x متعلق به A عنصری دلخواه باشد. به طور خاص $\{x\} \times B$ توسط C پوشیده شده است. توجه کنید $\{x\} \times B \subseteq A \times B$ فشرده است (زیرا اگر یک پوششِ باز مانند $U \times V$ را در نظر بگیرید، کافی است با تعداد متناهی V، B را بپوشانید و $\{x\}$ هم در U قرار می‌گیرد). تعداد متناهی بازِ

$$U_۱ \times V_۱, U_۲ \times V_۲, \ldots, U_n \times V_n$$

موجودند که $\{x\} \times B$ را پوشش می‌دهند. پس

$$\{x\} \times B \subseteq (U_۱ \times V_۱) \cup \cdots \cup (U_n \times V_n).$$

[13] Cover



قرار دهید $U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$، در این صورت $U \times B$ دارای پوششِ متناهی است

$$\Big((U_1 \cap \cdots \cap U_n) \times V_1\Big) \cup \Big((U_1 \cap \cdots \cap U_n) \times V_2\Big) \cup \cdots \cup \Big((U_1 \cap \cdots \cap U_n) \times V_n\Big).$$

برای هر $x \in A$ یک تیوب $U \times B$ موجود است که پوشش متناهی دارد. به شکل ۸.۱ توجه کنید.

چون A فشرده است، تعدادی متناهی U_x مجموعهٔ A را می‌پوشانند. بنابراین $A \times B$ با تعدادی متناهی تیوب پوشیده می‌شود. هر تیوب، پوشش متناهی دارد و بنابراین $A \times B$ دارای یک پوششِ متناهی است. $\square$

لم ۱۴۱. فرض کنید $A \subseteq X$ فشرده باشد و $B \subseteq A$ بسته باشد. در این صورت B نیز فشرده است.

اثبات. فرض کنید C یک پوششِ باز برای B باشد. در این صورت $\{B^c\} \cup C$ یک پوشش برای A است که بنابه فشرده بودن A دارای زیرپوشش متناهی است، یعنی

$$A \subseteq B^c \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

پس

$$B \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

$\square$

قضیه ۱۴۲. [۱۴] یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}^n$ فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کراندار (با متر اقلیدسی) باشد.

[14] Heine-Borel theorem

اثبات. فرض کنید $C \subseteq \mathbb{R}^n$ بسته و کراندار باشد. در این صورت یک بازهٔ $[-a,a]^n$ موجود است به طوری که $C \subseteq [-a,a]^n$. از طرفی $[-a,a]^n$ فشرده است و C بسته است، بنابراین C فشرده است. برعکس، فرض کنید $C \subseteq \mathbb{R}^n$ فشرده باشد، با توجه به اینکه $\mathbb{R}^n$ هاسدورف است، C بسته است. برای $x \in C$ گوی باز $B(x,n)$ را می‌پوشانند، پس تعداد متناهی از آن‌ها C را می‌پوشانند و این تعداد متناهی زیرمجموعهٔ یک گوی $B(x,n)$ به شعاع به اندازهٔ کافی بزرگ است. □

۹.۱ حل تمرین

تمرین ۸. ۱- (ویژگی اشتراک متناهی) مجموعهٔ $A \subseteq X$ فشرده است اگر و تنها اگر اتفاق زیر رخ دهد:

هرگاه $\{C_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های بسته باشد که هر تعداد متناهی از C_i ها در A اشتراک دارند، آنگاه x متعلق به A وجود دارد که $x \in \bigcap_{i\in I} C_i$.

پاسخ. می‌خواهیم فشرده بودن را با استفاده از بسته‌ها وصف کنیم.

فرض کنید C و D دو مجموعهٔ بسته باشند. اینکه C و D در A اشتراک دارند یعنی x متعلق به A وجود دارد به طوری که $x \in C \cap D$. در واقع یعنی $A \nsubseteq C^c \cup D^c$. بنابراین اینکه هر تعداد متناهی از C_iها $(i = ۱,\ldots,n)$ در A اشتراک دارند یعنی

$$A \nsubseteq C_۱ \cup C_۲ \cup \cdots \cup C_n.$$

گردایهٔ $\{C_i^c\}_{i\in I}$ را در نظر بگیرید. پس $\bigcup_{i\in I} C_i^c$، A را نمی‌پوشاند، یعنی $A \nsubseteq \bigcup_{i\in I} C_i^c$.

تمرین ۹. ۲-[15] فرض کنید A فشرده باشد و $\cdots \subseteq C_۳ \subseteq C_۲ \subseteq C_۱$ دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های بسته باشد به طوری که هر C_i با A اشتراک دارد. در این صورت نشان دهید که x متعلق به A وجود دارد به طوری که $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$.

تمرین ۱۰. ۳- فرض کنید $\mathscr{T}_۱$ و $\mathscr{T}_۲$ دو توپولوژی روی X باشند. همچنین فرض کنید X با هر دوی این توپولوژی‌ها هاسدورف و فشرده باشد. نشان دهید که در این صورت $\mathscr{T}_۱ = \mathscr{T}_۲$ یا $\mathscr{T}_۱$ و $\mathscr{T}_۲$ قابل مقایسه نیستند (به طور خلاصه یعنی $\mathscr{T}_۱ \subseteq \mathscr{T}_۲$ اتفاق نمی‌افتد.)

پاسخ. فرض کنید $\mathscr{T}_۱ \subseteq \mathscr{T}_۲$ و $\mathscr{T}_۱ \neq \mathscr{T}_۲$. همچنین فرض کنید $O_۲ \in \mathscr{T}_۲$ و $O_۲ \notin \mathscr{T}_۱$. X فشرده و $O_۲$ باز است. پس $O_۲^c$ در $\mathscr{T}_۲$ بسته است. بنابراین $O_۲^c$ در $\mathscr{T}_۲$

[15] Nested sequence

فشرده است. اکنون ثابت می‌کنیم O_2^c در $\mathscr{T}_1$ نیز فشرده است. یک پوششِ باز برای O_2^c در $\mathscr{T}_1$ در نظر می‌گیریم. پس یکسری باز در $\mathscr{T}_2$ موجودند که O_2^c را می‌پوشانند. با توجه به اینکه در $\mathscr{T}_2$ فشرده است، تعداد متناهی از این بازها O_2^c را پوشانده‌اند. پس O_2^c در $\mathscr{T}_1$ بسته است (چون در $\mathscr{T}_1$ فشرده است). بنابراین O_2 در $\mathscr{T}_1$ باز است.

تمرین ۱۱. ۴- روی $\mathbb{R}$ توپولوژی فِرِشه را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید مجموعه‌های بسته دقیقا مجموعه‌های متناهی هستند.

ب) همهٔ مجموعه‌ها فشرده هستند.

پاسخ. الف) فرض کنید A بسته است. نشان می‌دهیم متناهی است.

ب) یک مجموعهٔ دلخواهِ $A \subseteq \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\{C_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های بسته باشد که هر تعداد متناهی از آن‌ها در A اشتراک دارند.

تمرین ۱۲. ۵- فرض کنید X هاسدورف باشد. همچنین A و B دو مجموعهٔ فشرده هستند به طوری که $A \cap B = \emptyset$. نشان دهید بازهای $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$ موجودند به طوری که $U \cap V = \emptyset$.

برای هر x متعلق به A و هر y متعلق به B، بازهای U_x و U_y موجودند به طوری که $U_x \cap U_y = \emptyset$. x_0 را ثابت در نظر بگیرید. برای هر $y \in B$ بازهای U_{x_0} و U_y موجودند به طوری که $U_{x_0} \cap U_y = \emptyset$. تعداد متناهی U_y مجموعهٔ B را می‌پوشانند. U_{x_0}های مربوطه را نیز در نظر بگیرید. فرض کنید

$$B \subseteq U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \cdots \cup U_{y_n}.$$

پس $x \in U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \cdots \cap U_{x_n}$ (این اشتراک باز است). بنابراین دو باز یافتیم که x_0 را از B جدا می‌کنند.

تمرین ۱۳. ۶- یک فضای متریک مثال بزنید که در آن، یک مجموعهٔ بسته و کراندار غیرفشرده وجود داشته باشد.

روی $\mathbb{R}$ متر زیر را در نظر بگیرید

$$d(x,y) = \min\{|x-y|, 1\}.$$

الف) نشان دهید d یک متر است.

ب) نشان دهید متر d توپولوژی یکسانی با متر عادی ایجاد می‌کند.

ج) با متر فوق همهٔ مجموعه‌ها کراندارند.

مجموعه‌ای مثال بزنید که بسته است ولی فشرده نیست.

تمرین ۱۴. ۷- نشان دهید اجتماع یک تعداد متناهی مجموعهٔ فشرده، یک مجموعهٔ فشرده است.

تمرین ۱۵. ۸- فرض کنید Y فشرده و هاسدورف باشد و X یک فضای توپولوژیک دلخواه باشد. همچنین $f : X \to Y$ یک تابع است. نشان دهید f پیوسته است اگر و تنها اگر گراف f به عنوانِ زیرمجموعهٔ $X \times Y$ با توپولوژی حاصلضربی بسته باشد.

(گراف f یعنی $Gr(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$)

اثبات. فرض کنید f پیوسته است. نقطهٔ $(x, y) \notin Gr(f)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم نشان دهیم $Gr(f)$ بسته است. از آنجا که Y هاسدورف است، بازهای $V_{f(x)}$ و V_y موجودند که y و $f(x)$ را از هم جدا می‌کنند. $f^{-1}(V_{f(x)})$ یک باز حولِ x است. نشان دهید $f^{-1}(V_{f(x)}) \times V_y$ یک بازِ حولِ (x, y) است که Gr را قطع نمی‌کند.

در این قسمت از فشردگی استفاده نشد. □

۱۰.۱ همبندی

قضیه ۱۴۳. (قضیه مقدار میانی) اگر $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $f(a) < f(b)$، آنگاه

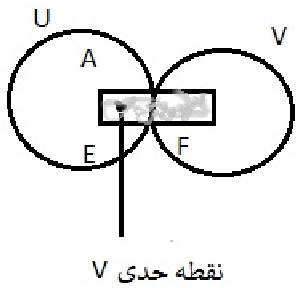
$$\forall k \ \ f(a) < k < f(b) \ \ \exists c \in [a, b] : \ f(c) = k.$$

اثبات. دو مجموعهٔ $A = \{x \mid f(x) \geq k\}$ و $B = \{x \mid f(x) < k\}$ را در نظر بگیرید. مجموعهٔ A، بزرگ‌ترین کران پایین و B، کوچک‌ترین کران بالا دارد. باید نشان دهیم هر دو کران برابر هستند و برابر مقدار c هستند که $f(c) = k$. □

تعریف ۱۴۴. فضای توپولوژی X را همبند [16] می‌نامیم هرگاه بازهای ناتهی U و V وجود نداشته باشند به نحوی که $X = U \cup V$ و $U \cap V = \emptyset$. به بیان دیگر تنها مجموعه‌هایی در X که هم باز و هم بسته هستند، X و $\emptyset$ باشند.

تمرین ۱۶. نشان دهید یک مجموعه زمانی همبند است که تنها مجموعه‌هایی در X که هم باز و هم بسته هستند، X و $\emptyset$ باشند.

[16] Connected



تعریف ۱۴۵. مجموعهٔ $A \subseteq X$ را همبند می‌نامیم هرگاه هیچ دو بازِ U و V وجود نداشته باشند به طوری که $A \subseteq U \cup V$، $U \cap V$ در A عنصری نداشته باشد، $A \cap U \neq \emptyset$ و $A \cap V \neq \emptyset$.

لم ۱۴۶. $A \subseteq X$ هم‌بند است هرگاه دو بستهٔ C و D وجود نداشته باشند به طوری که $A \subseteq C \cup D$، $C \cap D$ در A اشتراک نداشته باشد، $A \cap C \neq \emptyset$ و $A \cap D \neq \emptyset$.

اثبات. ادعا می‌کنیم C^c و D^c یک جداسازی باز برای A می‌شوند.

به وضوح $A \subseteq C^c \cup D^c$، زیرا اگر عنصری داخل A باشد، یا در C نیست و یا در D. همچنین C^c و D^c باز هستند. از آنجایی که هر x متعلق به A، در C یا D قرار دارد، پس $\nexists x \in A \;\; x \in C^c \cap D^c$. □

لم ۱۴۷. $A \subseteq X$ هم‌بند است هرگاه دو مجموعهٔ E و F که $E \cap F \neq \emptyset$ وجود نداشته باشند به طوری که $A = E \cup F$، E نقاط حدی F (در A) را در بر نداشته باشد و F نیز نقاط حدی E (در A) را در بر نداشته باشد.

اثبات. فرض کنید چنان E و F وجود داشته باشند. ادعا می‌کنیم A ناهم‌بند است. واضح است که $A \subseteq \overline{E} \cup \overline{F}$. همچنین

$$\nexists x \in A \;\; (x \in \overline{E} \cap \overline{F})$$

زیرا هر عنصر A در E یا F است که اگر در E باشد در $\overline{F}$ نیست و بالعکس.

برعکس، فرض کنید A ناهم‌بند باشد. در این صورت مجموعه‌های بازِ U و V وجود دارند به طوری که $A \subseteq U \cup V$ و $A \cap U \cap V = \emptyset$.

ادعا می‌کنیم دو مجموعهٔ E و F با شرایط لم وجود دارند. قرار دهید $E = U \cap A$ و $F = V \cap A$. نشان می‌دهیم E هیچ نقطهٔ حدی از F را در بر ندارد. زیرا U یک بازِ شامل آن نقطه است که با V اشتراک ندارد. (به شکل ۱۰.۱ توجه کنید) $\square$

قضیه ۱۴۸. فرض کنید A و B دو مجموعهٔ هم بند باشند به طوری که $A \cap B \neq \emptyset$. در این صورت $A \cup B$ هم‌بند است.

اثبات. فرض کنید $A \cup B$ ناهم‌بند باشد. در این صورت جداسازی $U \cup V$ برای $A \cup B$ وجود دارد. به طور خاص $A \subseteq U \cup V$. در این صورت $A \subseteq U$ یا $A \subseteq V$. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $A \subseteq U$. پس $B \subseteq V$. یعنی $A \cap B = \emptyset$ و این تناقض است. $\square$

قضیه ۱۴۹. فرض کنید A هم‌بند باشد. در این صورت هر چقدر نقاط حدی A را به A اضافه کنیم، مجموعهٔ حاصل، هم‌بند باقی می‌ماند.

به بیان دیگر فرض کنید A هم‌بند باشد و $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. در این صورت B هم‌بند است.

اثبات. فرض کنید $U \cup V$ یک جداسازی برای

$$A \cup (\text{یک‌سری نقاط حدی } A)$$

باشد. در این صورت $A \subseteq U$ و حداقل یک نقطهٔ حدی در V قرار می‌گیرد. اما V با A اشتراک ندارد و این نقطهٔ حدی بودنِ آن نقطه را نقض می‌کند. $\square$

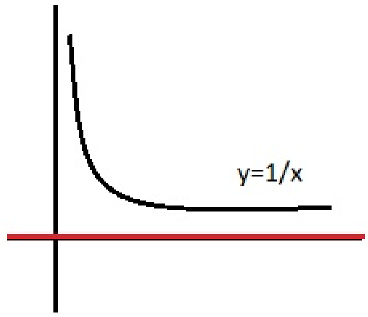
قضیه ۱۵۰. فرض کنید $f : X \to Y$ پیوسته باشد و $A \subseteq X$ هم‌بند باشد. در این صورت

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

هم‌بند است.

اثبات. فرض کنید $f(A)$ ناهم‌بند باشد. در این صورت یک جداسازیِ $f(A) \subseteq U \cup V$ وجود دارد. ادعا می‌کنیم $f^{-1}(U)$ و $f^{-1}(V)$ یک جداسازی برای A هستند.

$$A \subseteq f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$$



زیرا برای هر x متعلق به A، $f(x) \in f(U)$ یا $f(x) \in f(V)$. همچنین

$$A \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset.$$

زیرا اگر $x \in A$، $x \in f^{-1}(U)$ و $x \in f^{-1}(V)$، یعنی $f(x) \in f(A)$، $f(x) \in U$ و $f(x) \in V$ و این جداسازی بودن U و V را نقض می‌کند. □

مثال ۱۵۱. $[-۱, ۲] \cup (۳, ۴)$ هم‌بند نیست.

یادآوری ۱۵۲. اگر A هم‌بند و f پیوسته باشد، آنگاه $f(A)$ هم بند است.

مثال ۱۵۳. در شکل ۱۵۳ محور اجتماعِ محور xها با $y = \frac{۱}{x}$ ناهم‌بند است.

قضیه ۱۵۴. زیرمجموعه‌های هم‌بند $\mathbb{R}$ دقیقا بازه‌ها هستند.

$$(a, b), [a, b], [a, b), (a, +\infty), (-\infty, a), [a, +\infty), (-\infty, a].$$

اثبات. اثبات می‌کنیم (a, b) هم‌بند است. (برهان خلف)، اگر (a, b) هم‌بند نباشد. بازهای جداکننده‌ی U و V برای آن پیدا می‌شوند. بنابراین

$$(a, b) \subseteq U \cup V.$$

مجموعهٔ $(a, b) \cap U$ یک زیرمجموعهٔ از بالا کراندار $\mathbb{R}$ است. بنابراین دارای کوچکترین کران بالاست. فرض کنید $x = \sup((a, b) \cap U)$. واضح است که $x \in U$ یا $x \in V$. فرض کنید x متعلق به V باشد. همچنین فرض کنید I یک همسایگی از x باشد که زیرمجموعهٔ V است و این سوپریمم بودنِ x را نقض می‌کند. پس فرض کنید $x \in U$. از آنجا که

$(a,b)\cap U$ باز است، یک همسایگی x زیرمجموعهٔ آن است و این سوپریمم بودن x را نقض می‌کند.

برعکس، نشان می‌دهیم هر زیرمجموعهٔ همبندِ $\mathbb{R}$ بازه است. (بازه بودن X در $\mathbb{R}$ یعنی محدب بودن، به عبارتی یعنی اگر a و b در X باشند، آنگاه $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \subseteq X$. فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}$ همبند باشد. فرض کنید $a, b \in X$ و $a < t < b$ به گونه‌ای باشد که بازه‌های $(-\infty, t)$ و $(t, +\infty)$، X را از هم جدا می‌کنند و این در تناقض با همبندی X است.

توجه ۱۵۵. اگر $x = \sup\Big((a,b)\cap U\Big)$، آنگاه برای هر $\epsilon > ۰$، یک عنصرِ $t \in (a,b)\cap U$ موجود است که $x - \epsilon < t \leq x$.

□

نکته ۱۵۶. ویژگی بالا برای هر مجموعهٔ مرتب خطی که در اصل کمال صدق کند، برقرار است.

قضیه ۱۵۷. فرض کنید $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. در این صورت برای هر $f(a) < d < f(b)$، یک $c \in (a,b)$ موجود است به طوری که $f(c) = d$.

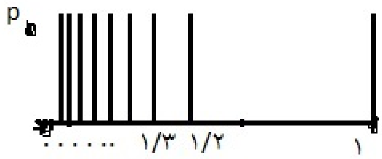
اثبات. $f\big([a,b]\big) \subseteq \mathbb{R}$ همبند است. فرض کنید $f(a) < d < f(b)$. اگر d متعلق به $f\big([a,b]\big)$ نباشد، در این صورت $(-\infty, d)$ و $(d, +\infty)$ افرازی برای تصویر f خواهد بود و این تناقض است. □

تعریف ۱۵۸. مجموعهٔ A را همبند مسیری[۱۷] می‌نامیم هرگاه برای هر دو نقطهٔ a و b متعلق به A، تابعِ پیوستهٔ $f : [۰,۱] \subseteq \mathbb{R} \to X$ $(f([۰,۱]) \subseteq A)$ موجود باشد به طوری که $f(۰) = a$ و $f(۱) = b$.

قضیه ۱۵۹. اگر A همبند مسیری باشد، آنگاه A همبند است.

اثبات. فرض کنید U و V یافت شوند به طوری که A را از هم جدا کنند. همچنین فرض کنید $a \in U$ و $b \in V$. باید یک مسیر بین a و b وجود داشته باشد. قرار دهید $f : [۰,۱] \to A$. دقت کنید که $f\big([۰,۱]\big)$ یک زیرمجموعهٔ همبند از X است. از طرفی تصویر f هم توسط U و V از هم جدا شده است. □

[17] Path connected



توجه ۱۶۰. هم‌بندیِ مسیری لزوما معادل با هم‌بندی نیست. در ادامه مثال‌هایی خواهیم زد.

قضیه ۱۶۱. اگر $X \subseteq \mathbb{R}^۲$ هم‌بند و باز باشد، آنگاه هم‌بندِ مسیری است.

اثبات. فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^۲$ باز و هم بند باشد. همچنین فرض کنید x و y متعلق به X باشند و بین x و y مسیری وجود نداشته باشد. مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$U = \{t \in X \mid \text{بین } t \text{ و } x \text{ مسیر وجود دارد.}\}.$$

$$V = \{t \in X \mid \text{بین } t \text{ و } x \text{ مسیر وجود ندارد.}\}.$$

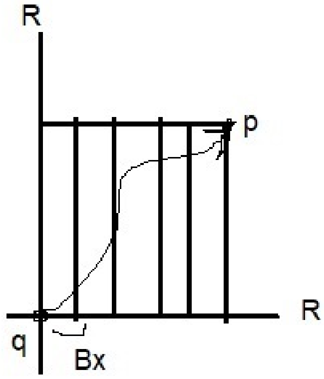
ادعا می‌کنیم U و V باز هستند. فرض کنید $t \in U$. در این صورت از t به x یک مسیر وجود دارد. باید نشان دهیم که یک همسایگی از t موجود است که کلا زیرمجموعهٔ U است. یعنی باید نشان دهیم که در یک همسایگیِ t همهٔ عناصر به x راه دارند. از آنجا که X باز است، یک همسایگیِ t زیرمجموعهٔ X است. تمامِ عناصر این همسایگی از طریقِ t به x می‌رسند. $\square$

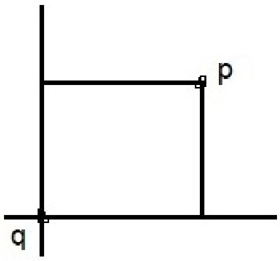
مثال ۱۶۲. (شانه محذوف) مجموعهٔ

$$[۰,۱] \times \{۰\} \cup \{p\} \cup \{\frac{۱}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \times [۰,۱]$$

را در نظر بگیرید که شکل آن به صورت ۱۰.۱ است. ادعا می‌کنیم شانهٔ محذوف هم‌بند است اما هم‌بندِ مسیری نیست.

اثباتِ هم‌بندی: شانهٔ محذوف بدون p هم بند مسیری است، پس هم‌بند است. از طرفی p نقطهٔ حدی است، بنابه قضایای قبل شانهٔ محذوف هم‌بند است و p هم‌بندی را بر هم نمی‌زند.





اکنون ادعا می‌کنیم شانهٔ محذوف هم بندِ مسیری نیست. باید نشان دهیم از p به نقاط دیگر مسیری وجود ندارد.

اثبات: فرض کنید از p به A مسیر وجود داشته باشد. یعنی $f : [۰, ۱] \to$ شانهٔ محذوف موجود باشد به طوری که $f(۰) = p$ و $f(۱) = A$. یک همسایگیِ p مانند V را در نظر بگیرید که در شکل، محورِ پایین را قطع نکند. فرض کنید U زیرمجموعهٔ $[۰, ۱]$ که $f(U) \subseteq V$. پس $f(U)$ هم‌بند است. اما این امکان‌پذیر نیست و تناقض است.

یادآوری ۱۶۳. یک مجموعه را زمانی می‌گوییم هم بند مسیری که برای هر دو نقطه x و y متعلق به A، یک تابع پیوستهٔ $f : [۰, ۱] \to A$ پیدا می‌شود به طوری که $f(۰) = x$ و $f(۱) = y$.

ثابت کردیم هم بند مسیری بودن، هم‌بند بودن را نتیجه می‌دهد. همچنین نشان دادیم در $\mathbb{R}^n$، هم‌بند و باز، هم‌بند مسیری را نتیجه می‌دهد.

مثال ۱۶۴. مجموعهٔ $A = [۰, ۱] \times [۰, ۱]$ را با توپولوژی ترتیبِ قاموسی در نظر بگیرید. اگر قرار دهیم $A = [۰, ۱] \times [۰, ۱]$، آنگاه می‌توان گفت، $A = [p, q]$. ادعا می‌کنیم $(\mathbb{R}^۲, <_{\text{قاموسی}})$ ویژگیِ کوچک‌ترین کران بالا را داراست. در این صورت A یک بازه‌ای در $\mathbb{R}^۲$ با ترتیب قاموسی است. یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}^۲$ مانند B را در نظر می‌گیریم. مؤلفه x نقاطی که x آن‌ها بین x نقطه ابتدای B و انتهای B است را در نظر بگیرید.

$$B_۱ = \{x \mid \exists y \ (x, y \in B)\}.$$

$B_۱$ دارای کوچکترین کران بالاست. آن را $x_۱$ بنامید. اگر $x_۱ \notin B_۱$، آنگاه $(x_۱, ۰)$ سوپریمم

B است. اگر $x_۱ \in B_۱$، آنگاه

$$B_۲ = \{y \mid (x_۱, y) \in B\}.$$

قرار دهید $x_۲ = \sup B_۲$. در این صورت $(x_۱, x_۲)$ سوپریمم B است. بنا به ادعا هر بازه به خصوص بازهٔ $[p, q]$ مجموعهٔ هم‌بند است.

اکنون ادعا می‌کنیم A هم‌بندِ مسیری نیست. فرض کنید $f : [۰, ۱] \to A = [p, q]$ پیوسته باشد. همچنین فرض کنید $f(۰) = p$ و $f(۱) = q$. می‌خواهیم نشان دهیم بین p و q مسیری نیست. f پیوسته است پس ویژگیِ مقدار میانی برقرار است. بازه‌های B_x را مطابق شکل در نظر بگیرید. این بازه‌ها دو به دو مجزا هستند. بنا به ویژگی مقدار میانی، f تمام این بازه‌ها را می‌پوشاند. $\{f^{-۱}(B_x) \mid x \in [۰, ۱]\}$ را در نظر بگیرید. به وضوح $f^{-۱}(B_x)$ها نیز مجزا هستند.

I گردایه‌ای از ناشمارا بازهٔ مجزا در $[۰, ۱]$ است و این در تناقض با شمارا بودن اعداد گویاست.

تمرین ۱۷. قرار دهید $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \mid y = \sin \frac{۱}{x},\ x \in (۰, \infty)\}$.

الف) $\overline{A}$ را محاسبه کنید.

ب) نشان دهید $\overline{A}$ هم‌بند است ولی هم‌بندِ مسیری نیست.

تمرین ۱۸. نشان دهید $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^۲$ هومئومرف نیستند.

راهنمایی: $\mathbb{R} - \{۰\}$ هم‌بند نیست.

$\mathbb{R}^۲ - \{(۰, ۰)\}$ هم‌بند است.

تعریف ۱۶۵. دو فضای توپولوژیک X و Y را هومئومرف [18] می‌نامیم هرگاه یک تابعِ پیوسته، یک به یک و پوشا از X به Y موجود باشد.

توابعِ هومئومرفیسم حافظ ویژگی‌های توپولوژیک هستند.

سوال ۱۶۶. درمورد $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ فکر کنید.

تعریف ۱۶۷. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و $x, y \in X$. رابطهٔ زیر را در نظر بگیرید.

$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in A$ که به طوری که $A \subseteq X$ موجود باشد به طوری که. یک زیرمجموعهٔ همبند

[18] Homeomorphism

رابطهٔ فوق، یک رابطهٔ هم‌ارزی است. به وضوح x با خودش در رابطه است. همچنین واضح است که اگر $x \sim y$، آنگاه $y \sim x$. حال فرض کنید $y \sim x$ یعنی $A \subseteq X$ موجود باشد به طوری که $x, y \in A$ و $z \sim y$ یعنی $B \subseteq X$ موجود باشد به طوری که $y, z \in B$، به سادگی مشاهده می‌شود A و B در y اشتراک دارند و هر دو هم‌بند هستند پس مجموعهٔ $A \cup B$ یک مجموعهٔ هم‌بند است که x و z به آن تعلق دارند.

به هر کلاس هم ارزیِ $[x]$ یک مؤلفهٔ هم‌بندی [19] X گفته می‌شود. مؤلفه‌های هم‌بندی، مجموعهٔ X را به مجموعه‌های هم‌بند افراز می‌کنند.

تمرین ۱۹. نشان دهید هر زیرمجموعهٔ هم‌بند از X در یکی از مؤلفه‌های هم‌بندی قرار می‌گیرد.

توجه ۱۶۸. اگر X هم‌بند باشد آنگاه X تنها یک مؤلفهٔ هم‌بندی دارد.

۱۱.۱ فشردگی موضعی

تعریف ۱۶۹. فضای توپولوژیک $(X, \mathscr{T})$ را موضعا فشرده [20] می‌نامیم هرگاه حول هر نقطهٔ $x \in X$ یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ $C \subseteq X$ و یک بازِ $x \in U$ موجود باشند به طوری که $x \in U \subseteq C$.

قضیه ۱۷۰. X موضعا فشرده است اگر و تنها اگر فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف Y موجود باشد به طوری که X هومئومرف با یک زیرمجموعهٔ بازِ آن باشد.

تعریف ۱۷۱. تابع $f : X \to Y$ را یک هومئومرفیسم می‌نامیم هرگاه

۱- f پیوسته باشد.

۲- f^{-1} پیوسته باشد.

۳- f یک به یک و پوشا باشد.

تمرین ۲۰. اگر f هومئومرفیسم باشد آنگاه یک $U \subseteq X$ باز است اگر و تنها اگر $f(U) \subseteq Y$ باز باشد.

توجه ۱۷۲. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و $O \subseteq X$ یک مجموعهٔ باز باشد، آنگاه O با بازهای X که زیرمجموعهٔ O هستند تشکیل یک فضای توپولوژیک می‌دهد.

[19] Connected component

[20] Locally compact

اثبات. فرض کنید X موضعا فشرده باشد. مجموعهٔ $X \cup \{\infty\}$ را در نظر بگیرید. روی $X \cup \{\infty\}$ توپولوژی زیر را در نظر بگیرید.

بازها: ۱- بازهای X

۲- مجموعه‌های به صورت $(X - C) \cup \{\infty\}$ که C زیرمجموعهٔ فشردهٔ X باشد.

ادعا می‌کنیم $X \cup \{\infty\}$ یک فضای توپولوژیک است. $\emptyset$ باز از نوعِ اول است. $X \cup \{\infty\}$ نیز باز از نوعِ دوم با انتخاب $C = \emptyset$ است. همچنین اگر بازها از نوع اول باشند، اجتماع و اشتراک آن‌ها به وضوح باز هستند. حال اگر بازها از نوعِ دوم باشند، فرض کنید C_1و C_2 دو زیرمجموعهٔ فشردهٔ X باشند، پس

$$((X - C_1) \cup \{\infty\}) \cup ((X - C_2) \cup \{\infty\}) = (X - (C_1 \cap C_2)) \cup \{\infty\}.$$

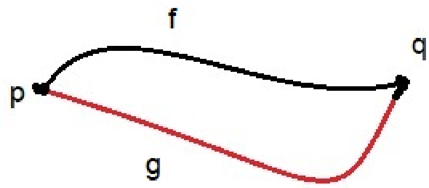
با توجه به اینکه $C_1 \cap C_2$ یک زیرمجموعهٔ بسته از مجموعهٔ فشرده است، پس فشرده است و اجتماع دو باز از نوع دو، باز است. با کمک استقرا می‌توان برای تعداد نامتناهی اثبات کرد.

اکنون ادعا می‌کنیم Y فشرده است. فرض کنید $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک پوششِ باز برای $X \cup \{\infty\}$ باشد. بنابراین یکی از U_α شامل ∞ است. این U_α به شکل $(X - C) \cup \{\infty\}$ است که C زیرمجموعه‌ای فشرده از X است. $X - U_\alpha$ فشرده است و پوشش متناهی $U_{\alpha_1}, \ldots U_{\alpha_n}$، $X - U_\alpha$ را می‌پوشاند. بنابراین زیرپوشش متناهی مورد نظر ما برای Y، $U_{\alpha_1}, \ldots U_{\alpha_n}$ است.

توجه کنید X از بازهای نوع اول فضاست.

برعکس، اگر X هومئومرف با یک زیرمجموعهٔ بازِ یک فضای فشردهٔ هاسدورف باشد آنگاه X موضعا فشرده است. از آنجا که X باز است، $Y - X$ بسته است. با توجه به اینکه Y فشرده است و زیرمجموعهٔ بسته از فضای فشرده، فشرده است، پس $Y - X$ فشرده است. از آنجا که Y هاسدورف است، بازهای U و V موجودند به طوری که $x \in U$، $Y - X \subseteq V$ و $U \cap V = \emptyset$. ادعا می‌کنیم U و $\overline{U}$ مجموعه‌های مورد نظر ما هستند. در واقع U همان بازِ مورد نظر و $\overline{U}$ زیرمجموعهٔ فشردهٔ مد نظر ماست. کافی است نشان دهیم $\overline{U} \subseteq X$ یعنی نقاط حدی U داخل X است. هر نقطهٔ $Y - X$، نقطهٔ حدیِ U نیست زیرا V یک همسایگیِ آن است که با U اشتراک ندارد. $\square$

تمرین ۲۱. $(Q, <)$ موضعا فشرده نیست.



۲ توپولوژی جبری

۱.۲ هوموتوپی

تعریف ۱۷۳. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد، $p,q \in X$ و $g,f : [0,1] \to X$ دو مسیر بین p و q باشند. می‌گوییم f و g از لحاظ هوموتوپیک [21] با هم معادلند هرگاه تابعِ پیوستهٔ $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ وجود داشته باشد به طوری که برای $0 \leq x \leq 1$،

$$F(x,0) = f(x)\ ,\ F(x,1) = g(x).$$

همچنین

$$F(0,t) = p\ ,\ F(1,t) = q.$$

توجه کنید که تابع F هم به زمان و هم به متغیر دیگری وابسته است.

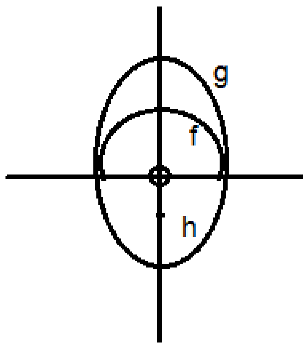
یادآوری ۱۷۴. فرض کنید p و q دو نقطه متعلق به فضای توپولوژیک X باشند. همچنین فرض کنید $f,g : [0,1] \to X$ دو مسیر بین p و q در فضای توپولوژیک X باشند. می‌گوییم f و g هم‌ارزِ هوموتوپیک هستند هرگاه یک تابعِ پیوسته $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ موجود باشد به طوری که

$$F(x,0) = f(x)\ ,\ F(x,1) = g(x)\ ,\ F(0,t) = p\ ,\ F(1,t) = q.$$

F را یک هوموتوپی [22] می‌نامیم.

مثال ۱۷۵. فرض کنید f و g دو مسیر دلخواه بین p و q در $\mathbb{R}^2$ باشند. ادعا می‌کنیم این دو مسیر هم‌ارزِ هوموتوپیک هستند (در واقع هر دو مسیری بین دو نقطه مشخصِ دلخواه در $\mathbb{R}^2$ هم‌ارزِ هوموتوپیک هستند).

[21] Homotopic
[22] Homotopy



$F(x,t) = f(x)t + g(x)(۱-t)$ در نظر بگیرید.

مثال ۱۷۶. فرض کنید $X = \mathbb{R}^۲ - \{۰\}$. نگاشت $f(t) : (\cos t, \sin t)$ را در نظر بگیرید. اگر f در بازهٔ $[۰, \pi]$ تغییر کند، شکل ۱۷۶ حاصل می‌شود. اگر بخواهیم در بازهٔ $[۰, ۱]$ تغییر کند، از تغییر پارامتر $(\cos \pi t, \sin \pi t)$ استفاده می‌کنیم. همچنین در بازهٔ $[۰, ۱]$، $g(t) = (\cos \pi t, ۲ \sin \pi t)$ و $h(t) = (\cos(\pi t), -۲ \sin(\pi t))$ را در نظر بگیرید. آیا f و h هم‌ارزِ هوموتوپیک هستند؟ به شکل ۱۷۶ توجه کنید.

لم ۱۷۷. رابطهٔ هم‌ارزیِ هوموتوپیک، یک رابطهٔ هم‌ارزی بین مسیرهای میان p و q است.

اثبات. به سادگی مشاهده می‌شود اگر بتوان از f به g و از g به h رسید، می‌توان از f به h رسید. همچنین اگر بتوان از f به g رسید با کمی تغییر جهت نگاشت می‌توان از g به f رسید. □

تعریف ۱۷۸. کلاس هم‌ارزی f را با $[f]$ نشان دهید. (در واقع تمام مسیرهای میان p و q که هوموتوپیک هستند را در یک کلاس هم‌ارزی قرار می‌دهیم.)

مشاهده ۱۷۹. فرض کنید f یک مسیر از p به q باشد و g یک مسیر از q به r باشد. در این صورت ترکیب این دو مسیر را با gof نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۸۰. فرض کنید $[f]$ و $[g]$ دو مسیر باشند (دو کلاس هوموتوپیک). تعریف کنید

$$[f] * [g] = [gof].$$

تعریف ۱۸۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. به مسیر $f:[\text{۰},\text{۱}]\to X$ به گونه‌ای که $f(\text{۰})=p$ و $f(\text{۱})=xp$ یک دور گفته می‌شود.

به طور خاص روی مجموعهٔ همهٔ دورهای روی p رابطهٔ هم‌ارزیِ هوموتوپیک را می‌توان در نظر گرفت. یعنی اگر f یک دور روی p باشد، $[f]$ همهٔ دورهای هوموتوپیک با f را نشان می‌دهد.

تعریف ۱۸۲. مجموعهٔ متشکل از این کلاس‌های هم‌ارزی با عملِ $*$ تشکیل یک گروه می‌دهد.

$$\{[f]\mid \text{است. } p \text{ یک دور حول } f\}.$$

ترکیب دو دور به این صورت است که ابتدا یکی از دورها را طی می‌کنیم و سپس دور دیگر را طی می‌کنیم، بنابراین ترکیب دو دور نیز یک دور است.

عنصر همانی نیز به شکل $e:[\text{۰},\text{۱}]\to X$ است که $e(x)=p$. همچنین $[f]^{-\text{۱}}$ برعکس $[f]$ خواهد بود. در واقع اگر $f:[\text{۰},\text{۱}]\to X$ باشد، در این صورت $f^{-\text{۱}}:[\text{۰},\text{۱}]\to X$ به صورت $f^{-\text{۱}}(x)=f(\text{۱}-x)$ است.

این گروه را گروه بنیادی[23] X در نقطهٔ p می‌نامیم و با $\Pi_\text{۱}(X,p)$ نشان می‌دهیم.

مشاهده ۱۸۳. فرض کنید $p\in\mathbb{R}^\text{۲}$ نقطهٔ دلخواهی باشد. $\Pi_\text{۱}(\mathbb{R}^\text{۲},p)$ یک گروه بدیهی است.

لم ۱۸۴. اگر فضای X هم‌بندِ مسیری باشد و $p,q\in X$ در این صورت $\Pi_\text{۱}(X,p)$ و $\Pi_\text{۱}(X,q)$ با هم ایزومرف هستند.

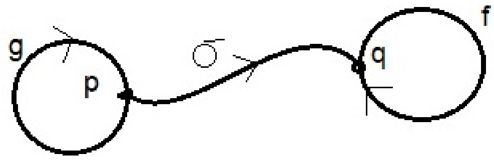
اثبات. فرض کنید f یک مسیر بین p و q باشد (با توجه به اینکه فضا هم‌بندِ مسیری است، چنین مسیری وجود دارد). باید Hای تعریف کنیم به طوری که

$$\Pi_\text{۱}(X,p)\to\Pi_\text{۱}(X,q).$$

$[f]\mapsto[\sigma^{-\text{۱}}f\sigma]$ دوری حول p است. به شکل ۱.۲ توجه کنید. □

تعریف ۱۸۵. فرض کنید $p:E\to B$ یک نگاشتِ پیوستهٔ پوشا باشد و $U\subseteq B$ یک مجموعهٔ باز باشد. می‌گوییم U به طور یکنواخت توسط نگاشتِ p پوشیده می‌شود هرگاه $p^{-\text{۱}}(U)=\bigcup_{\alpha\in U}V_\alpha$ که $V_\alpha\subseteq E$ باز باشد، $V_\alpha\cap V_{\alpha'}=\emptyset$ و $p:V_\alpha\to U$ یک هومئومرفیسم باشد.

[23] Fundamental group of space X at p



۲.۲ فضای پوشاننده

لم ۱۸۶. فرض کنید $X \overset{\sigma}{\approx} Y$ (هومئومرف). در این صورت

$$\Pi_۱(X, x_۰) \approx \Pi_۱(Y, \sigma(x_۰)).$$

به عبارتی اگر X و Y از لحاظ توپولوژیک کاملا شبیه باشند، از لحاظ توپولوژیک نگاشتی از X به Y وجود دارد که $x_۰$ را به $\sigma(x_۰)$ می‌برد. در این صورت گروهی که حول $x_۰$ در X می‌سازیم با گروهی که حول $\sigma(x_۰)$ در Y می‌سازیم، ایزومرف است.

اثبات. می‌دانیم $\Pi(X, x_۰)$ شامل کلاس دورهای حول $x_۰$ و $\Pi_۱(Y, \sigma(x_۰))$ شامل کلاسِ دورهای حولِ $\sigma(x_۰)$ هستند. یک دور حولِ $x_۰$ به نامِ f را در نظر می‌گیریم. تصویر این دور در Y، $\sigma(f)$ خواهد بود. $\square$

تعریف ۱۸۷. الف) فرض کنید $p : E \to B$ یک نگاشتِ پیوستهٔ پوشا و $U \subseteq B$ باز باشد. می‌گوییم p به طور هموار U[۲۴] را می‌پوشاند هرگاه $p^{-۱}(U)$ برابر با اجتماعی از بازهای دوبه‌دو مجزا باشد (یعنی به صورت $\bigcup V_\alpha$ باشد که $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$) به گونه‌ای که $p : V_\alpha \to U$ یک هومئومرفیسم باشد.

ب) می‌گوییم E یک فضای پوشانندهٔ B[۲۵] هرگاه نگاشت p مانند (الف) وجود داشته باشد به طوری که حولِ هر نقطهٔ $x \in B$ یک بازِ $U_x \subseteq B$ موجود باشد که به طور هموار توسط p پوشیده می‌شود.

مثال ۱۸۸. $S^۱$ را به عنوان یک فضای توپولوژیک در نظر بگیرید (منظور دایره به شعاعِ یک در فضای $\mathbb{R}^۲$ است). با توجه به نکتهٔ زیر، بازهای $S^۱$، اشتراکِ بازهای $\mathbb{R}^۲$ با دیسک $S^۱$ است.

[24]Evenly covers
[25]Covering space

هدف، معرفی یک فضای پوشاننده است. می‌دانیم که هر نقطه‌ای روی دایره به صورت $(\cos\theta, \sin\theta)$ که $\theta \in [۰, ۲\pi]$ است. یعنی $S^۱$ به این صورت به دست می‌آید:

$$[۰, ۲\pi] \xrightarrow{f} S^۱$$

$$f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta).$$

اکنون نگاشت را به صورتی در نظر می‌گیریم که از بازهٔ $[۰, ۱]$ به $S^۱$ برویم،

$$f : [۰, ۱] \to S^۱$$

$$f(t) = (\cos(۲\pi t), \sin(۲\pi t)).$$

ادعا می‌کنیم $\mathbb{R}$ یک فضای پوشاننده برای $S^۱$ است. در واقع $p : \mathbb{R} \to S^۱$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که $t \overset{p}{\mapsto} (\cos(۲\pi t), \sin(۲\pi t))$.

توجه ۱۸۹. فرض کنید $(X, \mathscr{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و Y زیرمجموعه‌ای از X باشد. در این صورت Y نیز دارای یک توپولوژی به نامِ توپولوژی زیرفضایی است. بازهای این فضا به صورت $O \cap Y$ هستند که در آن O یک باز در X است.

مثال ۱۹۰. فضای $\mathbb{R}^۲ - \{۰\}$ را در نظر بگیرید. ادعا می‌کنیم نگاشتی به صورت

$$\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^۲ - \{۰\}$$

داریم که

$$(\theta, t) \overset{\sigma}{\mapsto} (t\cos(۲\pi\theta), t\sin(۲\pi\theta)).$$

با کمک این نگاشت، می‌توانیم $\mathbb{R}^۲ - \{۰\}$ را با $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ پوشش دهیم.

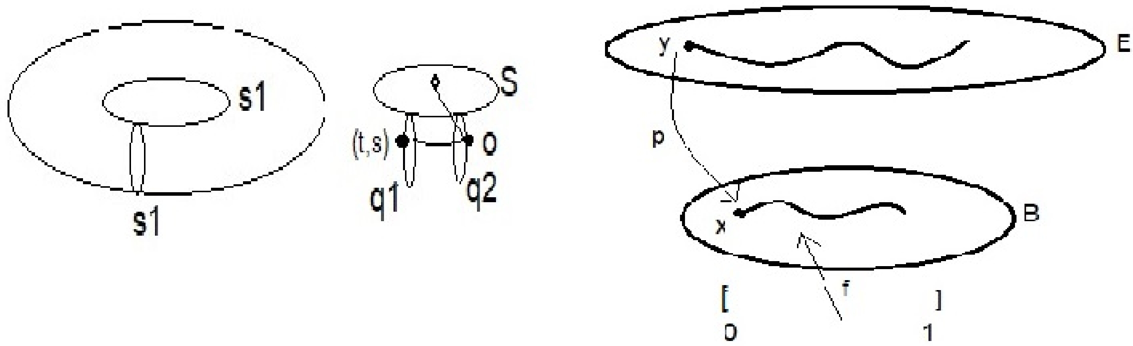
سوال ۱۹۱. $\Pi(\mathbb{R}^۲ - \{۰\}, x)$ چیست؟ توجه کنید که این گروه همان $\mathbb{Z}$ است.

مثال ۱۹۲. فضای $S^۱ \times S^۱ \subseteq \mathbb{R}^۴$ [۲۶] را در نظر بگیرید. به شکل ۲.۲ توجه کنید.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ می‌تواند این فضا را پوشش دهد. در واقع نگاشت $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^۱ \times S^۱$ را خواهیم داشت که

$$(t, s) \overset{p}{\mapsto} \Big(\big(\cos(۲\pi t), \sin(۲\pi t)\big), \big(\cos(۲\pi s), \sin(۲\pi s)\big)\Big).$$

[26] Torus



اگر بخواهیم از لحاظ هندسی تشریح کنیم، تصویر نقطهٔ (t,s) در شکل ۲.۲، نقطهٔ o خواهد بود. در واقع یک دور روی دایرهٔ $q_۱$ طی می‌کنیم برای نقطهٔ t و سپس یک مسیر روی دایرهٔ S متناسب با نقطهٔ s طی می‌کنیم. یعنی هر نقطه که روی چنبره در نظر می‌گیریم، از یک (t,s) نتیجه می‌شود. به این صورت که t مقدار حرکت روی دایرهٔ مثلا $q_۱$ و s مقدار حرکت روی دایرهٔ S را نشان می‌دهند.

حدس ما این است که گروه $\Pi(S^۱\times S^۱,x)$، همان $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ است.

مثال ۱۹۳. نگاشت $p:S^۱\to S^۱$ را در نظر بگیرید که برای یک z مختلط، $z\overset{p}{\mapsto}z^۲$. در واقع اگر $z=\exp(i\theta)$ را در نظر بگیریم، $z^۲=\exp(۲i\theta)$ خواهد بود.

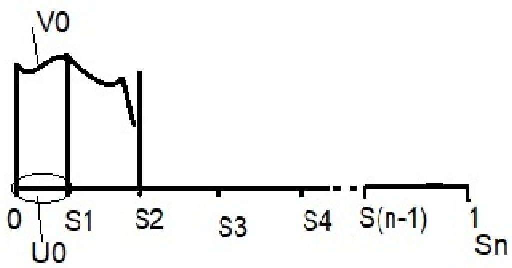
قضیه ۱۹۴. فرض کنید $f:[۰,۱]\to B$ یک مسیر در B باشد. همچنین فرض کنید E یک فضای پوشانندهٔ B باشد و $p(y)=x$. در این صورت یک مسیرِ یکتای $\hat{f}:[۰,۱]\to E$ موجود است که از y شروع می‌شود. به شکل ۲.۲ توجه کنید.

۳.۲ نگاشت‌های پوشا و محاسبه برخی گروه‌های بنیادی

یادآوری ۱۹۵. برای فضای $\mathbb{R}^۲$، $\Pi(\mathbb{R}^۲,(x_۰,y_۰))=0$.

تعریف ۱۹۶. فرض کنید $p:E\to B$، E و B دو فضای توپولوژیک هستند، یک نگاشتِ پیوستهٔ پوشا باشد.

الف) می‌گوییم p به طور هموار بازِ $U\subseteq B$ را می‌پوشاند هرگاه $p^{-۱}(U)=\bigcap_{\alpha\in I}V_\alpha$ که V_α دوبه‌دو مجزا هستند، $V_\alpha\cap V_\beta=\emptyset$ و $p|_{V_\alpha}:V_\alpha\to U$ یک هومئومرفیسم است.



ب) می‌گوییم E یک فضای پوشانندهٔ B است هرگاه برای هر نقطه در E یک بازِ U موجود باشد که به طور هموار توسط p پوشیده می‌شود.

قضیه ۱۹۷. فرض کنید $p : E \to B$ یک نگاشت پوشاننده باشد. همچنین فرض کنید $f : [0,1] \to B$ یک مسیر در B باشد به طوری که $f(0) = x_0$ (x_0 نقطه شروع این مسیر است). فرض کنید $p(y_0) = x_0$. در این صورت یک مسیر یکتای $\hat{f} : [0,1] \to E$ موجود است که از نقطهٔ y_0 شروع می‌شود و $p(\hat{f}) = f$.

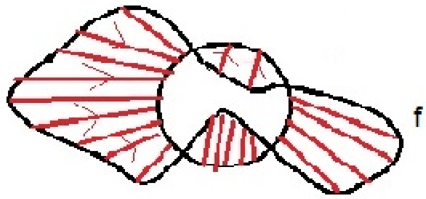
اثبات. به شکل ۳.۲ توجه کنید.

حول هر نقطه در مسیر f یک مجموعهٔ باز وجود دارد که به طور هموار توسط p پوشانده می‌شود. بنابراین یک پوششِ باز برای بازهٔ $[0,1]$ توسط تصویرواورن این بازها وجود دارد. پس تعداد متناهی از آن‌ها $[0,1]$ را می‌پوشانند. پس می‌توان فرض کرد که $[0,1] = \bigcup(S_i, S_{i+1})$ به طوری که $f([S_i, S_{i+1}]) \subseteq U_i$ (U_i یکی از بازهاست). زیرا پوشش فوق یک عدد لبگ دارد.

توجه کنید $p(y_0) = x_0$. فرض کنید $x_0 \in U_0$ و $p^{-1}(U_0) = \bigcup V_\alpha$. همچنین فرض کنید $y_0 \in V_0$. می‌بینیم که $f([0, S_1]) \subseteq U_0$، همچنین $p^{-1}(U_0) = \bigcup V_\alpha$ و $y_0 \in V_0$. پس $f|_{[0,S_1]}$ دارای یک تصویر به نام $\hat{f}$ در باز V_0 است. $\hat{f}$ به $p^{-1}(f(S_1))$ می‌رسد که خود در یک باز V_1 واقع است. همین کار را برای بازهٔ U_1 تکرار می‌کنیم. با ادامهٔ این روش به نگاشت $\hat{f}$ می‌رسیم. چک کنید $\hat{f} : [0,1] \to E$ پیوسته است. □

نکته ۱۹۸. گفته شد $\Pi(\mathbb{R}^2, x_0)$ یک گروه بدیهی است. طبیعتا $\Pi(\mathbb{R}^n, x_0) = 0$.

نکته ۱۹۹. اکنون می‌خواهیم $\Pi(S^1, b)$ را محاسبه کنیم که در آن، S^1 محیط دایرهٔ واحد در $\mathbb{R}^2$ است. اگر f یک مسیر بسته حول b باشد، آنگاه ترفیع $\hat{f}$ در $\mathbb{R}$ برای f وجود دارد.



ادعا می‌کنیم $\Pi(S^1, b) \cong (\mathbb{Z}, +)$. یعنی $\Pi(S^1, b)$ با $(\mathbb{Z}, +)$ ایزومرف است. زیرا اگر $[f]$ که f یک دور است را در نظر بگیرید، $[f] \mapsto \hat{f}(1)$. توجه کنید که باید نشان دهید این نگاشت یک‌به‌یک است و $[f * g] \mapsto m + n$ که $[f] \mapsto m$ و $[g] \mapsto n$.

مثال ۲۰۰. محاسبهٔ گروه بنیادی $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. ادعا می‌کنیم $\Pi(\mathbb{R}^2 - \{0\}, q) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

ابتدا به تعریف انقباض برای یک منحنی می‌پردازیم. در واقع اگر یک مسیر مانند $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ را در نظر بگیرید ۳.۲. در این صورت $\dfrac{f(x)}{|f(x)|}$ این مسیر روی دایره قرار می‌گیردو به این کار انقباض [27] می‌گویند.

نتیجه ۲۰۱. $\Pi(S^1) \cong \Pi(\mathbb{R}^2 - \{0\})$. به طور کلی $\Pi(S^n) \cong \Pi(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$.

توجه ۲۰۲. گروه بنیادی S^n برای $n > 1$ برابر با $(\mathbb{Z}, +)$ نیست.

نتیجه ۲۰۳. $\mathbb{R}^3$ با $\mathbb{R}^2$ هومئومرف نیست.

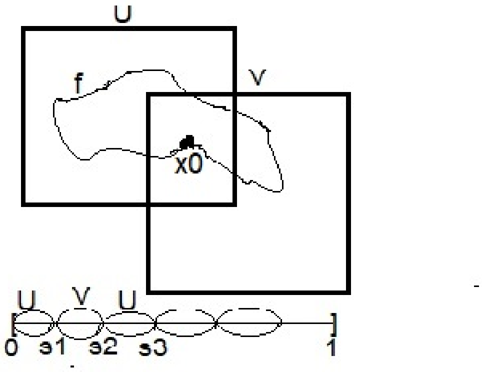
اثبات. اگر $\mathbb{R}^3$ با $\mathbb{R}^2$ هومئومرف باشد، آنگاه $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ با $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ هومئومرف است. پس $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ با $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ گروه‌های بنیادی یکسانی خواهند داشت. اما گروه بنیادی $\mathbb{R}^2 - \{0\}$، $\mathbb{Z}$ است ولی گروه بنیادی $\mathbb{R}^3 - \{0\}$، $\mathbb{Z}$ نیست.

نتیجه ۲۰۴. $\mathbb{R}^n$ برای $n > 2$ با $\mathbb{R}^2$ هومئومرف نیست.

اکنون هدف ما محاسبهٔ گروه بنیادی S^2 است. می‌دانیم که یک هومئومرفیسم بین S^2 و $\mathbb{R}^3$ وجود دارد.

قضیه ۲۰۵. [28] فرض کنید فضای توپولوژیک X به صورت $X = U \cup V$ باشد که U و V باز هستند. همچنین فرض کنید $\Pi(U, x_0) = 0$ و $\Pi(V, x_0) = 0$ که $x_0 \in U \cap V$. فرض کنید که $U \cap V$ هم بندِ مسیری است. در این صورت $\Pi(X, x_0) = 0$.

[27] Retraction
[28] van Kampen theorem



اثبات. مسیر بسته‌ای در $U\cup V$ حولِ x_0 در نظر بگیرید و f بنامید. ادعا می‌کنیم f هوموتوپ با یک مسیر در U حولِ x_0 است. $f:[0,1]\to U\cup V$ مسیر مورد نظر ماست. $f^{-1}(U)$ و $f^{-1}(V)$ باز هستند. f بخش‌هایی از $[0,1]$ در U و بخش‌هایی در V قرار می‌گیرد و این‌ها مجموعه‌های باز تشکیل می‌دهند. این مجموعه‌های باز $[0,1]$ را پوشش می‌دهند. به دلیل وجود عدد لبگ می‌توانیم $[0,1]$ را به بازه‌هایی به شکلِ ۳.۲ تقسیم‌بندی کنیم. فرض کنید $[0,1]=\bigcup[S_i,S_{i+1}]$ که $f([S_i,S_{i+1}])\subseteq U$ یا $f([S_i,S_{i+1}])\subseteq V$. فرض کنید $f([0,S_1])\subseteq U$. می‌دانیم که $U\cap V$ همبندِ مسیری است. فرض کنید g و h به ترتیب مسیرهایی از x_0 به $f(S_1)$ و $f(S_2)$ باشند. هدف ما، جایگزین کردن مسیر k با ترکیب g و h است. می‌دانیم که $\Pi_1(V,x_0)$ گروهِ بدیهی است، یعنی هر دوری که در این در نظر می‌گیریم هوموتوپ با دور ثابت حولِ x_0 باشد. بنابراین دوری که در V از ترکیب k، g و h ایجاد می‌شود، دورِ بدیهی است. بنابراین k با ترکیب g و h هوموتوپ است. $\square$

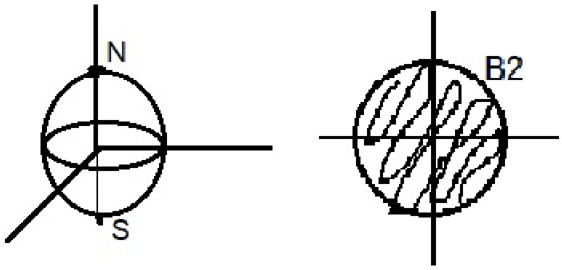
۴.۲ قضیه اساسی جبر

۱.۴.۲ محاسبهٔ گروه بنیادی S^2

$S^2-\{N\}$ که $\mathbb{R}^2 \underset{\text{هومئومرف}}{\sim} S^2-\{N\}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم $\Pi_1(\mathbb{R}^2)=0$. پس $S^2=U\cup V$ که $\Pi(U),\Pi(V)=0$. همچنین $U\cap V=S^2-\{N,S\}$ که همبندِ مسیری است. بنا به قضیه فن کمپن، گروه بنیادی S^2 بدیهی است ($\Pi(S^2)=0$).

نتیجه ۲۰۶. مشابها گروه بنیادی S^n برای $n>1$ بدیهی است.

نتیجه ۲۰۷. گروه بنیادی $\mathbb{R}^3-\{0\}$ و $\mathbb{R}^4-\{0\}$ و به طور کلی $\mathbb{R}^n-\{0\}$ بدیهی هستند.



نتیجه ۲۰۸. $\mathbb{R}^2$ با $\mathbb{R}^n$ برای $n > 3$ هومئومرف نیست. زیرا اگر هومئومرف باشد، آنگاه $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ با $\mathbb{R}^3$ هومئومرف خواهد بود. در حالی که گروه بنیادی $\mathbb{R}^2 - \{0\}$، $\mathbb{Z}$ است و گروه بنیادی $\mathbb{R}^3 - \{0\}$، بدیهی است.

قضیه ۲۰۹. [29] هر معادلهٔ

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

با ضرایب در $\mathbb{C}$ دارای ریشه در $\mathbb{C}$ است.

اثبات. نشان می‌دهیم که هر معادلهٔ به صورت

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

که در آن $|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_1| + |a_0| < 1$، در B^2 دارای ریشه است.

یادآوری ۲۱۰. فرض کنید $f, g : X \to Y$، گوییم $f \underset{\text{هوموتوپیک}}{\sim} g$ هرگاه f با تغییراتِ پیوسته‌ای به g تبدیل شود. که یعنی $F : X \times [0, 1] \to Y$ موجود باشد به طوری که $F(x, 0) = f(x)$، $F(x, 1) = g(x)$ و $F(x, y)$ پیوسته باشد.

اگر f هیچ ریشه‌ای در $\mathbb{C}$ نداشته باشد، آنگاه $f|_{S_1}$ را در نظر بگیرید. نشان خواهیم داد از طرفی $f|_{S_1}$ با $g(z) = z^n|_{S_1}$ هوموتوپ است و از طرفی با یک تابع ثابت هوموتوپ است. از سوی دیگر z^n با تابع ثابت هوموتوپ نیست و این تناقض است. ابتدا ثابت می‌کنیم $f : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ با تابع ثابت هوموتوپیک است. برای اثبات به لم ۲۱۱ مراجعه کنید. اکنون به اثبات اینکه $f : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ با $g(z) = z^n : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ هوموتوپیک است، می‌پردازیم. نگاشت هوموتوپی

$$F(z, t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0) \quad 0 \leq t \leq 1$$

[29]Fundamental theorem of algebra

را در نظر بگیرید. توجه کنید $F(z,t) \neq ۰$، زیرا

$$|F(z,t)|$$

$$\geq |z^n| - t|a_{n-۱}z^{n-۱} + \cdots + a_۱z + a_۰| \geq ۱ - t(|a_{n-۱}| + \cdots + |a_۱| + |a_۰|) > ۰.$$

در نهایت ثابت می‌کنیم z^n با نگاشت ثابت هوموتوپیک نیست. برای این منظور از این نکته استفاده می‌کنیم که z^n گروه بنیادی را تغییر می‌دهد و مولد آن را n برابر می‌کند، در حالی که اگر قرار بود z^n با نگاشت ثابت هوموتوپیک باشد باید گروه بنیادی را به گروه بدیهی تبدیل می‌کرد. معادلهٔ $f(z) = z^n + a_{n-۱}z^{n-۱} + \cdots + a_۱z + a_۰$ را در نظر بگیرید. فرض کنید f ریشه‌ای مانند x داشته باشد. قرار دهید $x = cy$ که $c \in \mathbb{R}$. بنابراین $c^ny^n + a_{n-۱}c^{n-۱}y^{n-۱} + \cdots + a_۱cy + a_۰ = ۰$. طرفین را تقسیم بر c^n کنید،

$$y^n + \frac{a_{n-۱}y^{n-۱}}{c} + \cdots + \frac{a_۱y}{c^{n-۱}} + \frac{a_۰}{c^n} = ۰.$$

c را به اندازهٔ کافی بزرگ در نظر بگیرید به طوری که

$$|\frac{a_{n-۱}}{c}| + \cdots + |\frac{a_۱}{c^{n-۱}}| + |\frac{a_۰}{c^n}| < ۱.$$

□

لم ۲۱۱. فرض کنید $h : B^۲ \to X$ یک تابع باشد که پیوسته است. آنگاه $h|_{S_۱}$ با یک نگاشت ثابت هوموتوپیک است.

اثبات. نگاشت هوموتوپی زیر را در نظر بگیرید،

$$F(z,t) = h((۱-t)z).$$

□

نتیجه ۲۱۲. $f : S^۱ \to \mathbb{R}^۲ - \{۰\}$ با یک نگاشت ثابت هوموتوپیک است.

سوال ۲۱۳. آیا یک منحنی $f : [۰,۱] \to [۰,۱]^۲$ وجود دارد به طوری که تمام $[۰,۱]^۲$ را بپوشاند؟ (به چنین منحنی، منحنی فضاپرکن [30] می‌گویند.)

[30] Space-filling curve

۵.۲ فضاهای متریک کامل

تعریف ۲۱۴. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. دنبالهٔ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را دنبالهٔ کشی[۳۱] می‌نامیم هرگاه

$$\forall\epsilon \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall m,n>N \quad d(x_n,x_m)<\epsilon.$$

تعریف ۲۱۵. فضای متریک (X,d) را کامل می‌نامیم هرگاه هر دنبالهٔ کشی در آن همگرا باشد.

مثال ۲۱۶. $(\mathbb{Q},<)$ کامل نیست، زیرا دنباله‌ای از اعضای آن داریم که کشی است (به این معنی که به چیزی همگرا هستند) اما این حد در $\mathbb{Q}$ نیست.

$$۳ \quad ۳۱ \quad ۳۱۴\ldots.$$

توجه ۲۱۷. $(۰,۱)$ هومئومرفیک با $\mathbb{R}$ است اما کامل نیست، یعنی کامل بودن یک ویژگی توپولوژیک نیست.

لم ۲۱۸. فرض کنید (X,d) ک فضای متریک باشد. همچنین فرض کنید $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ کشی باشد. اگر $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک زیردنبالهٔ همگرا به a داشته باشد آنگاه (x_n) همگراست.

اثبات. فرض کنید (x_{n_k}) یک زیردنبالهٔ (x_n) باشد که به $a\in X$ همگراست. ادعا می‌کنیم دنبالهٔ (x_n) به a همگراست. فرض کنید $\epsilon>۰$ داده شده است، باید $N\in\mathbb{N}$ را بیابیم به طوری که برای هر $n>N$، $d(x_n,a)<\epsilon$. اولا از آنجا که زیردنباله همگراست، $N_۱\in\mathbb{N}$ موجود است به طوری که برای $n_k>N_۱$، $d(x_{n_k},a)<\epsilon$. ثانیا با توجه به اینکه دنباله کشی است، $N_۲\in\mathbb{N}$ موجود است که برای $m,n>N_۲$، $d(x_n,x_m)<\epsilon$. اگر $n,n_k>\max\{N_۱,N_۲\}$ آنگاه

$$d(x_n,a)\le d(x_n,x_{n_k})+d(x_{n_k},a)<\epsilon.$$

□

قضیه ۲۱۹. $\mathbb{R}^n$ با متر اقلیدسی کامل است.

[31] Cauchy

اثبات. فرض کنید $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ کشی در $\mathbb{R}^n$ باشد. ادعا می‌کنیم $\{x_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ یک مجموعهٔ کراندار است (به این معنی که یک گوی وجود دارد که کل دنباله در این گوی قرار می‌گیرد). $N\in\mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که برای هر $i,j>N$، $d(x_i,x_j)<1$. بنابراین

$$\forall i>N \quad d(x,\vec{0})<d(x_N,\vec{0})+d(x_i,x_N)<\max d(x_j,\vec{0})+1.$$

تعداد جملات قبل از X_N نیز متناهی است و کافی است شعاع به اندازهٔ کافی بزرگ باشد. بنابراین یک مکعب $[-M,M]^n$ موجود است که دنباله (X_i) در داخل آن قرار دارد. از طرفی $[-M,M]^n$ یک مجموعهٔ فشرده است. همچنین می‌دانیم $\{x_i \mid i\in\mathbb{N}\}\subseteq[-M,M]^n$. بنابراین دنبالهٔ فوق دارای یک زیردنبالهٔ همگراست و بنا به لم قبل این دنباله همگرا خواهد بود. □

تمرین ۲۲. نشان دهید $\mathbb{R}^\omega$ (با متری که توپولوژی حاصلضربی از آن ناشی می‌شود) کامل است.

مشاهده ۲۲۰. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل باشد و $Y\subseteq X$ یک زیرمجموعهٔ بسته باشد. در این صورت (Y,d) هم کامل است.

اثبات. فرض کنید $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ کشی در Y باشد. آنگاه (x_n) یک دنبالهٔ کشی در X است. از طرفی X کامل است، پس (x_n) به یک عنصر $a\in X$ همگراست. از آنجا که Y بسته است و a یک نقطهٔ حدی آن است، $a\in Y$. □

یادآوری ۲۲۱. برای دو مجموعهٔ Y و J تعریف می‌کنیم

$$Y^J=\{f \mid f:J\to Y \text{ تابع است.}\}.$$

پس هر عنصر $f\in Y^J$ یک تابعِ $f:J\to Y$ است. از طرفی عناصر Y^J را می‌توان به صورت $(a_\alpha)_{\alpha\in J}$ که $a_\alpha\in Y$ در نظر گرفت.

مثلا اگر $f\in Y^\omega$، آنگاه f تابعی از ω به Y است. اما می‌توان f را به صورت $(a_i)_{i\in\omega}$ نشان داد.

تعریف ۲۲۲. فرض کنید (Y,d) یک فضای متریک باشد. $\overline{d}$ را روی Y در نظر بگیرید:

$$\overline{d}(x,y)=\min\{d(x,y),1\}.$$

روی Y^J متر زیر را تعریف کنید، فرض کنید f و g دو عنصر متعلق به Y^J باشند،

$$d^*(f,g) = \sup\{\overline{d}(f(\alpha), g(\alpha))_{\alpha\in J}\}.$$

چک شود که d^* یک متریک است.

قضیه ۲۲۳. اگر (Y, d) کامل باشد، آنگاه Y^J نیز کامل است.

اثبات. فرض کنید $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ کشی از عناصر Y^J باشد. (یعنی یک دنباله از توابعِ از J به Y) کشی بودن (f_n) یعنی برای هر $\epsilon > ۰$ یک عدد $N \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که اگر $m, n > N$،

$$\sup\big(d(f_m(\alpha), f_n(\alpha))\big) < \epsilon.$$

یعنی اگر $m, n > N$،

$$\forall\alpha \quad \overline{d}(f_m(\alpha), f_n(\alpha)) < \epsilon.$$

هدف، یافتن یک تابع از J به Y به نام F به طوری که $f_n \to F$ است. $F(\alpha)$ به صورت زیر تعریف کنید،

اولا دقت کنید که $(f_n(\alpha))$ کشی است، ثانیا قرار دهید $F(\alpha) = \lim(f_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$.

ادعا می‌کنیم دنبالهٔ f_n با متر d^* به F میل می‌کند. یعنی برای هر $\epsilon > ۰$ عدد طبیعی N موجود است به طوری که اگر $n > N$ آنگاه

$$\sup \overline{d}\big(f_n(\alpha), F(\alpha)\big)_{\alpha\in J} < \epsilon.$$

برای هر $\alpha \in J$، یک $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که اگر $n > N$، آنگاه $d(f_n(\alpha), F(\alpha))$.

از طرفی N^* موجود است به طوری که برای $m, n > N^*$،

$$\sup \overline{d}\big(f_n(\alpha), f_m(\alpha)\big)_{\alpha\in J} < \epsilon.$$

فرض کنید $n > N^*$،برای هر α یک N_α موجود است که $d(f_{N_\alpha}(\alpha), F(\alpha)) < \epsilon$. بنابراین

$$\overline{d}(f_N(\alpha), F(\alpha)) < d^*(f_N(\alpha), f_{N_\alpha}(\alpha)) + d(f_{N_\alpha}(\alpha), F(\alpha)) < \epsilon + \epsilon = ۲\epsilon.$$

□

۶.۲ منحنی فضاپرکن

یادآوری ۲۲۴. (Y,d) یک فضای متریک است. در این صورت

$$Y^J = \{(a_j)_{j\in J}\} = \{f \mid f : J \to Y\}.$$

قضیه: اگر (Y,d) یک فضای متریک کامل باشد، آنگاه Y^J با متر تعریف‌شده یک فضای متریک کامل است.

تعریف ۲۲۵. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و (Y,d) یک فضای متریک باشد. در این صورت

تمامی توابع از X به Y : $Y^X \supseteq$ تمامی توابع پیوسته از X به Y : $C(X,Y)$.

توجه کنید که $C(X,Y)$ متر Y^X را به ارث می‌برد.

قضیه ۲۲۶. $C(X,Y)$ نیز یک فضای متریکِ کامل است (در صورتی که Y یک فضای متریک کامل باشد).

اثبات. فرض کنید $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنبالهٔ کشی در $C(X,Y)$ باشد. به طور خاص این دنباله در Y^X است. پس بنا به کامل بودنِ Y^X این دنباله از توابع همگرا به یک تابع F است. ادعا می‌کنیم F پیوسته است (یعنی $F \in C(X,Y)$). نقطهٔ $F(\alpha)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید V یک همسایگی حولِ $F(\alpha)$ باشد. نشان می‌دهیم که یک همسایگیِ U حول α موجود است که $F(U) \subseteq V$. توجه کنید $f_n \to F$. هدف این است که نشان دهیم در همسایگیِ U، $d(F(x),F(\alpha)) < \epsilon$ $\forall x$.

$$d(F(x),F(\alpha)) < d(F(x),f_N(x)) + d(f_N(x),f_N(\alpha)) + d(f_N(\alpha),F(\alpha)).$$

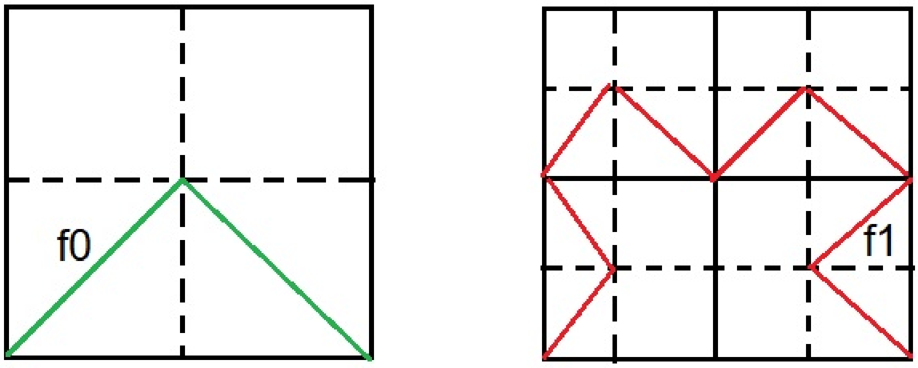
از طرفی

$$d(f_N(x),F(x)) < \epsilon$$

و

$$d(f_N(\alpha),F(\alpha)) < \epsilon.$$

اولا بنا به کشی بودن f_N فاصلهٔ کمی با F دارد. ثانیا بنا به پیوسته بودن f_N همسایگیِ U یافت می‌شود. □



نتیجه ۲۲۷. یک منحنی پیوسته $f : I \to I^{۲}$ که $I = [۰, ۱]$ موجود است که پوشاست.
به این منحنی، منحنی فضاپرکن [۳۲] می‌گویند.

اثبات. تابع $f_{۰} : I \to I^{۲}$ و $f_{۱} : I \to I^{۲}$ را مانند شکلِ ۶.۲ در نظر بگیرید. دنبالهٔ توابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از I به $I^{۲}$ را به صورتی که ذکر شد (به کمک استقرا) بسازید. مشاهده می‌شود که

$$d^*(f_{۰}, f_{۱}) < ۱$$

$$d^*(f_{۱}, f_{۲}) < \frac{۱}{۲}$$

$$d^*(f_{۲}, f_{۳}) < \frac{۱}{۲^{۲}}.$$

بنابراین با ادامه روند داریم $d^*(f_N, f_{N+۱}) < \frac{۱}{۲^N}$. ادعا می‌کنیم دنبالهٔ $f_n : I \to I^{۲}$ یک دنبالهٔ کشی است.

$$d^*(f_N, f_{N+M}) \leq d^*(f_N, f_{N+۱}) + d^*(f_{N+۱}, f_{N+۲}) + \cdots d^*(f_{N+M-۱}, f_{N+M}).$$

$$\leq (\frac{۱}{۲})^N + (\frac{۱}{۲})^{N+۱} + \cdots (\frac{۱}{۲})^{N+M-۱} \leq (\frac{۱}{۲})^N . \frac{۱ - (\frac{۱}{۲})^M}{۱ - \frac{۱}{۲}} = (\frac{۱}{۲})^N \times s۲$$

فرض کنید $\epsilon > ۰$ داده شده باشد. N را به گونه‌ای بگیرید که

$$d^*(f_N, f_{N+۱}) < (\frac{۱}{۲})^N < \frac{\epsilon}{۲}.$$

[32]Space filling curve

در این صورت برای هر M،

$$d^*(f_N, f_{N+M}) < \epsilon.$$

پس دنبالهٔ f_n در $C(I, I^۲)$ کشی است. از طرفی $I^۲$ یک فضای متریک کامل است ($\mathbb{R}^۲$ کامل است و هر دنبالهٔ کشی در $I^۲$ در $\mathbb{R}^۲$ است پس در $\mathbb{R}^۲$ همگراست. چون $I^۲$ بسته است حد دنباله در $I^۲$ است). پس $C(I, I^۲)$ کامل است، پس یک تابع پیوسته $F : I \to I^۲$ موجود است به طوری که $f_n \to f$. ادعا می‌کنیم F پوشاست ($I^۲$ را می‌پوشاند). برای اثبات ادعا باید نشان دهیم که هر نقطهٔ $x \in I^۲$ در $F(I)$ واقع می‌شود. برای این منظور نشان می‌دهیم هر نقطهٔ $x \in I^۲$ در بستار $F(I)$ قرار می‌گیرد زیرا $F(I)$ بسته است و $\overline{F(I)} = F(I)$. چرا که I فشرده است و $F(I)$ فشرده است، پس $F(I)$ بسته است. ادعا می‌کنیم $\overline{F(I)} = I^۲$. فرض کنید x یک نقطه در $I^۲$ باشد. $\epsilon > ۰$ را در نظر بگیرید. یک تابع f_N (برای یک N به اندازه کافی بزرگ) پیدا می‌شود که مقادیر آن در فاصلهٔ $(\frac{۱}{۲})^N < \epsilon$ از x قرار بگیرد. بنابراین t وجود دارد که $d^*(f_N(t), x) < \frac{\epsilon}{۲}$. از طرفی $d^*(f_N(t), F(t)) < \frac{\epsilon}{۲}$. بنابراین

$$d^*(F(t), x) \leq d^*(F(t), f_N(t)) + d^*(f_N(t), x) < \epsilon.$$

□

یادآوری ۲۲۸. دو نوع فضای توپولوژیک اهمیت خاصی دارند:

۱- فضاهای فشرده و هاسدورف (و موضعا فشرده).

۲- فضاهای متریک کامل.

فضای فشرده: X فشرده است هرگاه هر پوشش بازی از X دارای یک زیرپوششِ متناهی باشد.

معادلا، اگر یک خانواده از مجموعه‌های باز داشته باشیم که هیچ تعداد متناهیِ آن‌ها X را نپوشاند ($\{O_i\}_{i \in I}\ ,\ \forall i_۱, \ldots i_n\ \ X \nsubseteq O_{i_۱} \cup \cdots \cup O_{i_n}$). در این صورت $\bigcup O_i$ نیز X را نمی‌پوشاند.

معادلا، اگر یک خانواده $\{C_i\}_{i \in I}$ از مجموعه‌های بسته داشته باشیم به طوری که هر تعداد متناهی از آن‌ها با هم اشتراک دارند ($\forall i_۱, \ldots i_n\ \ C_{i_۱} \cap \cdots \cap C_{i_n} \neq \emptyset$) آنگاه $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$.

نتیجه ۲۲۹. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده باشد و $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots$ یک دنبالهٔ نزولی از مجموعه‌های بسته باشند. در این صورت $\bigcap C_i \neq \emptyset$.

قضیه ۲۳۰. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل باشد و $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \cdots$ یک دنبالهٔ نزولی از مجموعه‌های بسته باشد به طوری که $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(\mathrm{C_n}) = 0$ $(\mathrm{diam\ C = sup_{x,y\in C}\, d(x,y)})$. در این صورت $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i \neq \emptyset$.

اثبات. فرض کنید $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از اعضای X باشد به گونه‌ای که برای هر $i \in \mathbb{N}$، $x_i \in C_i$. ادعا می‌کنیم دنبالهٔ (x_i) یک دنبالهٔ کشی است.

تمرین ۲۳. ادعای بالا را ثابت کنید. (راهنمایی: فرض کنید ϵ داده شده باشد. $N \in \mathbb{N}$ موجود است به طوری که $\forall n > N \ \ \mathrm{diam\ C_n} > \epsilon$. از طرفی از x_N به بعد همهٔ جملات دنباله در C_N قرار می‌گیرند).

فرض کنید $x_n \to x$. ادعا می‌کنیم $x \in \bigcap C_n$. با توجه به کامل بودن فضا x موجود است. با توجه به اینکه $x_1 \in C_1$ و دنبالهٔ C_iها نزولی است پس کل دنبالهٔ (x_i) در C_1 واقع می‌شود. بنابراین $x \in C_1$. دنبالهٔ $\ldots\ x_3\ x_2$ نیز در C_2 واقع است، بنابراین $x \in C_2$. با ادامه این روند، x متعلق به همهٔ C_iها خواهد بود. پس $x \in \bigcap C_i$. □

قضیه ۲۳۱. فرض کنید X یک فضای فشرده و هاسدورف باشد و A و B دو مجموعهٔ بسته باشند به طوری که $A \cap B = \emptyset$. در این صورت بازهای U_A و U_B وجود دارند به طوری که $A \subseteq U_A$، $B \subseteq U_B$ و $U_A \cap U_B = \emptyset$.

بیان دیگر قضیه: هر فضای فشردهٔ هاسدورف، نرمال است.

اثبات. یادآوری: اگر $x \in B$، ادعا می‌کنیم یک بازِ U'_A شامل A و یک بازِ U'_x شامل x موجود هستند به طوری که $U'_A \cap U'_x = \emptyset$. بنا به هاسدورف بودن برای هر نقطهٔ $y \in A$ بازهای U_{xy} و V_{xy} موجودند به طوری که $x \in U_{xy}$، $y \in V_{xy}$ و $U_{xy} \cap V_{xy} = \emptyset$. A یک زیرمجموعهٔ بستهٔ X است و X فشرده است، پس A فشرده است. پس A با تعداد متناهی $A \subseteq V = V_{xy_1} \cup V_{xy_2} \cup \cdots \cup V_{xy_n}$. از طرفی $U_{xy_1} \cap U_{xy_2} \cap \cdots \cup U_{xy_n}$ یک بازِ حولِ x است که با V اشتراکی ندارد. پس هر نقطه در B یک همسایگی دارد که آن را از یک همسایگی شامل کل A جدا می‌کند. به عبارتی برای هر $x \in B$ بازهای $U'_{A,x}$ و U'_x موجودند. مشابها B فشرده است، بنابراین $B \subseteq U = U'_{x_1} \cup U'_{x_2} \cup \cdots \cup U'_{x_n}$.

همچنین $U'_{A,x_1} \cup U'_{A,x_2} \cup \cdots \cup U'_{A,x_n}$ $A \subseteq V =$. توجه کنید که $U \cap V = \emptyset$ و حکم ثابت می‌شود. $\square$

تعریف ۲۳۲. فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ نرمال است هرگاه برای هر دو مجموعهٔ بستهٔ A و B که $A \cap B = \emptyset$، بازهای U_A شامل A و U_B شامل B موجود باشند به گونه‌ای که $U_A \cap U_B = \emptyset$.

قضیه ۲۳۳. هر فضای متریک کامل نرمال است.

اثبات. فرض کنید A و B دو مجموعهٔ بسته باشند به طوری که $A \cap B = \emptyset$. فرض کنید $x \in B$. از آنجا که A بسته است همسایگی ϵ_x از x موجود است که با A هیچ اشتراکی ندارد. (مشابها برای هر x متعلق به B.) مشابها برای هر $y \in A$ یک همسایگی ϵ_y از y موجود است که با B اشتراک ندارد. قرار دهید $U = \bigcup B_{\frac{\epsilon_x}{2}}(x)$ و $U = \bigcup B_{\frac{\epsilon_y}{2}}(y)$. به وضوح U، B و V، A را می‌پوشانند. ادعا می‌کنیم $U \cap V = \emptyset$. فرض کنید $a \in U \cap V$. در این صورت $x \in B$ موجود است به طوری که $d(a, x) < \epsilon_{\frac{x}{2}}$. مشابها $y \in B$ موجود است که $d(a, y) < \epsilon_{\frac{y}{2}}$. بنابراین

$$d(x, y) \leq \epsilon_{\frac{x}{2}} + \epsilon_{\frac{y}{2}} < \epsilon_{\frac{x}{2}} + \epsilon_{\frac{x}{2}} = \epsilon_x.$$

یعنی $y \in B_{\epsilon_x}(x) \cap A$ و این تناقض است. $\square$

۷.۲ فضاهای بئر و تابع هیچ‌جامشتق‌پذیر

تعریف ۲۳۴. می‌گوییم فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ یک فضای بئر [33] است هرگاه اتفاق زیر رخ دهد:

اگر $C_1, C_2, \ldots$ شمارا مجموعهٔ بسته باشند به طوری که هیچ کدام از C_iها شامل هیچ مجموعهٔ بازی نیست. در این صورت $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ شامل هیچ مجموعهٔ بازی نباشد.

مثال ۲۳۵. $(\mathbb{Q}, <)$ را به عنوان یک فضای توپولوژیک در نظر بگیرید. $(۲, ۳)$ یک بازِ پایه‌ای است ولی $(\sqrt{2}, \pi)$ یک بازِ غیرپایه‌ای است. هر تک‌عضوی در $\mathbb{Q}$ بسته است و شامل هیچ بازی نیست اما اجتماع تک‌عضوی‌ها برابر خود $\mathbb{Q}$ است و این ویژگی بئر را نقض می‌کند. $\mathbb{Q}$ باز است و زیرمجموعهٔ این اجتماع است.

[33] Baire

تمرین ۲۴. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و A و B دو زیرمجموعهٔ X باشند که هیچکدام نقطهٔ درونی ندارند $(\mathrm{Int(A)}=\mathrm{Int(B)}=\emptyset)$. آنگاه

$$\mathrm{Int(A\cup B)}=\emptyset.$$

توجه ۲۳۶. فرمول‌بندی ویژگی بئر برحسب بازها:

فرض کنید C یک مجموعهٔ بسته باشد که شامل هیچ بازی نیست. در این صورت C^c یک مجموعهٔ باز است که هر بازی آن را قطع می‌کند.

تعریف ۲۳۷. مجموعهٔ A را چگال [34] می‌نامیم هرگاه برای هر بازِ $U\in\mathcal{T}$، $A\cap U\neq\emptyset$.

فرمول‌بندی دیگر ویژگی بئر: اگر $\{U_i\}_{i\in\omega}$ یک خانوادهٔ شمارا از مجموعه‌های بازِ چگال باشد، $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}U_i$ نیز چگال است.

قضیه ۲۳۸. فضاهای فشردهٔ هاسدورف، بئر هستند.

اثبات. فرض کنید $A_1,A_2,\ldots$ گردایه‌ای از مجموعه‌های بسته باشد که شامل هیچ بازی نیست. ادعا می‌کنیم $\bigcup A_i$ شامل هیچ بازی نیست. فرض کنید U یک بازِ دلخواه باشد. همچنین ادعا می‌کنیم نقطه‌ای در U هست که در $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i$ نیست. می‌دانیم که $U\nsubseteq A_1$. ادعا می‌کنیم بازِ U_1 پیدا می‌شود به طوری که

$$\overline{U_1}\subseteq U,\ \ \overline{U_1}\cap A_1=\emptyset.$$

به کمک لم ۲۳۹ و نرمال بودن، ادعا ثابت می‌شود. همین کار را با U_1 و $A_1\cup A_2$ نیز انجام دهید.

$$\overline{U_2}\cap(A_1\cup A_2)=\emptyset,\ \ \overline{U_2}\subseteq U_1.$$

به این ترتیب به مجموعه‌های زیر برسید،

$$\cdots\subseteq\overline{U_3}\subseteq\overline{U_2}\subseteq\overline{U_1}\subseteq U.$$

بنا به فشرده بودن X، $\bigcap U_i\neq\emptyset$. فرض کنید $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\overline{U_i}$. ادعا می‌کنیم x در $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i$ نیست. □

[34] Dense

لم ۲۳۹. فرض کنید X یک فضای فشردهٔ (حتی موضعا فشرده) هاسدورف باشد و U یک مجموعهٔ باز باشد و $x \in U$. در این صورت یک مجموعهٔ بازِ $x \in U_1 \subseteq U$ پیدا می‌شود به طوری که $\overline{U_1} \subseteq U$.

قضیه ۲۴۰. فضاهای متریک کامل، بئر هستند.

قضیه ۲۴۱. یک تابعِ پیوستهٔ $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ موجود است که در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

فرض کنید $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ پیوسته باشد. در این صورت برای هر ϵ یک تابعِ f موجود است که پیوسته و هیچ‌جامشتق‌پذیر است و $d^*(f, h) < \epsilon$.

اثبات. فضای $C(I, \mathbb{R})$ یک فضای متریک کامل است. بنابراین بئر است.

خلاصه: یک گردایه $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ از بازهای چگال معرفی می‌کنیم. هر تابعی که در $\bigcap U_n$ها باشد، هیچ‌جامشتق‌پذیر است. تعریف کنید

$$f \in U_n \Leftrightarrow \exists h < \frac{1}{n}, \ \exists \alpha > n \ \ \forall x \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| > \alpha.$$

ادعا می‌کنیم: ۱- هر U_n باز است. ۲- U_n چگال است. ۳- $\bigcap U_n \neq \emptyset$.

توجه ۲۴۲. فرض کنید $f \in \bigcap U_n$. در این صورت f در هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست.

ادعای سوم بنا به ویژگی بئر ثابت می‌شود. برای اثبات ادعای دوم، فرض کنید g یک تابعِ پیوستهٔ دلخواه باشد. ادعا می‌کنیم در هر شعاع ϵ یک تابع در U_n وجود دارد.

یادآوری: هر تابعِ پیوسته در یک مجموعهٔ فشرده، پیوستهٔ یکنواخت است یعنی

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x, y \ \ d(x, y) < \delta \to d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

برای اثبات ادعای اول، فرض کنید $f \in U_n$. ادعا می‌کنیم $\epsilon > 0$ موجود است به طوری که $B_\epsilon(f) \subseteq U_n$. اینکه یک تابع در فاصلهٔ ϵ از f قرار دارد یعنی اینکه

$$\max\{g(x) - f(x)\} < \epsilon.$$

می‌خواهیم ثابت کنیم $\left|\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right| > \alpha' > n$ (یعنی $g \in U_n$).

$$\left|\frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| = \left|\frac{f(x+h) - g(x+h)}{h} - \frac{f(x) - g(x)}{h}\right|$$
$$\leq \frac{\epsilon}{h} + \frac{\epsilon}{h} = \frac{2\epsilon}{h}.$$

□

۸.۲ قضیه تیخونوف و یک کاربرد

قضیه تیخونوف در واقع معادل با اصول اولیه مبانی ریاضی (لم زرن و اصل انتخاب) است.

یادآوری ۲۴۳. مجموعهٔ X را فشرده گوییم هرگاه هر پوششِ بازِ آن دارای زیرپوشش متناهی باشد.

X فشرده است اگر و تنها اگر $\{C_i\}_{i\in I}$ یک گردایه از مجموعه‌های بسته با ویژگی اشتراک متناهی [۳۵] باشد، آنگاه $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.

لم ۲۴۴. X فشرده است اگر و تنها اگر اتفاق زیر رخ دهد:

اگر $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های X با ویژگی اشتراک متناهی باشد، آنگاه $\bigcap_{i\in I} \overline{A_i} \neq \emptyset$.

قضیه ۲۴۵. اگر $(X,\mathscr{T}_X)$ و $(Y,\mathscr{T}_Y)$ فشرده باشند، آنگاه $X\times Y$ نیز فشرده است ($\mathscr{T}_{X\times Y}=\{U\times V | U\in\mathscr{T}_X, V\in\mathscr{T}_Y\}$).

توجه ۲۴۶. فرض کنید $A\times B\subseteq X\times Y$. در این صورت $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$.

توجه ۲۴۷. فرض کنید $C\subseteq X\times Y$. $\overline{C}$ چگونه محاسبه می‌شود؟

توجه کنید $C\neq \pi_X(C)\times\pi_Y(C)$.

اثبات. فرض کنید $\{C_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های $X\times Y$ با ویژگی اشتراک متناهی باشد. هدف، نشان دادن این است که $\bigcap_{i\in I}\overline{C_i}\neq\emptyset$. نخست، توجه کنید که خانوادهٔ $\{\pi_X(C_i)\}_{i\in I}$ و $\{\pi_Y(C_i)\}_{i\in I}$ ویژگی اشتراک متناهی را دارا هستند. از آنجا که X فشرده است، $x_\circ\in\bigcap\overline{\pi_X(C_i)}$ و $y_\circ\in\bigcap\overline{\pi_Y(C_i)}$ ناتهی هستند، پس $(x_\circ,y_\circ)\in\bigcap_{i\in I} C_i$ (توجه کنید که این استدلال غلط است). □

یادآوری ۲۴۸. فرض کنید $(X_i,\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک باشند. اصل انتخاب بیان می‌کند که $\prod_{i\in I} X_i=\{(x_i)_{i\in I} | \forall i\in I \;\; x_i\in X_i\}\neq\emptyset$.

توجه ۲۴۹. $\prod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\pi_\alpha} X_\alpha$. در واقع $\pi_\alpha\big((x_i)_{i\in I}\big)=x_\alpha$.

فرض کنید $U_\alpha\subseteq X_\alpha$ باز باشد. در این صورت

$$\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)=\prod_{i\in I,\ \forall i\neq\alpha \;\; X_i=U_i} U_i.$$

[35] FIP

در واقع هر بازِ پایه‌ای در $\prod_{i\in I} X_i$ به صورت زیر است:

$$\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\cap\pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2})\cap\cdots\cap\pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}).$$

سوال ۲۵۰. $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)\cap\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ چیست؟

توجه کنید که به شکل زیر خواد بود:

$$(-,-,\cdots,U_\alpha,-,\cdots,U_\beta,\cdots).$$

لم ۲۵۱. فرض کنید X یک مجموعهٔ دلخواه باشد و C یک خانواده از ریرمجموعه‌های X با ویژگی اشتراک متناهی باشد. در این صورت یک مجموعهٔ $C\subseteq C'$ موجود است به طوری که C' دارای ویژگی اشتراک متناهی است و همچنین هیچ $C'\subset C''$ دارای ویژگی اشتراک متناهی نیست (به بیان دیگر C' یک گردایهٔ ماکزیمال با ویژگی اشتراک متناهی است).

اثبات. فرض کنید

$$\mathscr{A}=\{D|C\subseteq D,\ \text{اشتراک متناهی دارد.}\ D\}.$$

$(\mathscr{A},\subseteq)$ یک مجموعهٔ مرتب جزئی است. فرض کنید $\{D_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر از اعضای $\mathscr{A}$ باشد. این زنجیر دارای یک کران بالاست (زیرا $\bigcup_{i\in I} D_i$ دارای ویژگی اشتراک متناهی است). بنابراین دارای یک عنصر ماکزیمال است. □

لم ۲۵۲. فرض کنید C' یک خانواده ماکزیمال از زیرمجموعه‌های X با ویژگی اشتراک متناهی باشد. همچنین فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ دلخواه از X باشد به نحوی که

$$\forall D\in C'\ \ A\cap D\neq\emptyset.$$

آنگاه $A\in C'$.

اثبات. در غیر این صورت $C\cup A$ ویژگی اشتراک متناهی دارد که در تناقض با ماکزیمال بودن C' است. □

لم ۲۵۳. X فشرده است اگر و تنها اگر اتفاق زیر رخ دهد:

هرگاه C یک خانوادهٔ ماکزیمال با ویژگی اشتراک متناهی باشد، آنگاه $\bigcap_{D\in C}\overline{D}\neq\emptyset$.

قضیه ۲۵۴. (قضیه تیخونوف) اگر $(X_i)_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های فشرده باشد، $\prod_{i\in I} X_i$ یک فضای توپولوژیک فشرده است.

اثبات. نخست قرار دهید $X=\prod_{i\in I} X_i$. فرض کنید C یک خانواده از زیرمجموعه‌های X با ویژگی اشتراک متناهی باشد. هدف این است که نشان دهیم $\bigcap_{D\in C}\overline{D}\neq\emptyset$. ابتدا توجه کنید که برای هر $\alpha\in I$، $\{\pi_\alpha(D)|D\in C\}$ یک خانواده از مجموعه‌های X_α است که ویژگی اشتراک متناهی دارد. بنابراین یک عنصر $x_\alpha\in\bigcap_{D\in C}\overline{\pi_\alpha(D)}$ موجود است. $\square$

سوال ۲۵۵. آیا $(x_\alpha)_{\alpha\in I}\in\bigcap_{D\in C}\overline{D}$؟ بله. فرض کنید $D\in C$ دلخواه باشد. ادعا می‌کنیم $(x_\alpha)_{\alpha\in I}\in\overline{D}$، یعنی هر همسایگی $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$، D را قطع می‌کند. توجه کنید که یک همسایگی $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ به صورت

$$\pi_{\alpha_۱}^{-۱}(U_{\alpha_۱})\cap\pi_{\alpha_۲}^{-۱}(U_{\alpha_۲})\cap\cdots\cap\pi_{\alpha_n}^{-۱}(U_{\alpha_n})$$

است. ادعا می‌کنیم همسایگی فوق D را قطع می‌کند.

یک همسایگی به صورت $\pi_\beta^{-۱}U_\beta$ را در نظر بگیرید.

ادعا: $\pi_\beta^{-۱}U_\beta\in C$.

برای اثبات ادعای فوق، کافی است نشان دهیم که برای هر $D\in C$، $D\cap\pi_\beta^{-۱}U_\beta\neq\emptyset$.

۱.۸.۲ یک کاربرد از قضیه تیخونوف

یادآوری ۲۵۶. در منطق گزاره‌ها یک خانوادهٔ شمارا از گزاره‌های اتمی داریم: $\{P_۱,P_۲,P_۳,\ldots\}$.
منظور از یک تابعِ ارزش به کلیه توابع،

$$\mu:\{P_۱,P_۲,P_۳,\ldots\}\to\{۰,۱\}$$

است. در منطق گزاره‌ها، گزاره‌های پیچیده‌تر با استفاده از گزاره‌های اتمی و علائم $\sim$، $\wedge$، $\vee$، به دست می‌آیند. پس هر گزاره در منطق گزاره‌ها به صورت $f(P_۱,P_۲,\ldots,Pn)$ است که در آن P_iها گزارهٔ اتمی هستند. در این منطق برای یک گزارهٔ $f(P_۱,\ldots,P_n)$ یک جدول ارزش کشیده می‌شود.

تعریف ۲۵۷. گزارهٔ $f(P_1, \ldots, P_n)$ را ارضاشدنی می‌نامیم هرگاه حداقل یک ۱ در جدول ارزش آن موجود باشد. به بیان دقیق‌تر گزارهٔ $f(P_1, \ldots, P_n)$ هرگاه حداقل یک تابع ارزش‌دهیِ

$$\mu : \{P_1, P_2, P_3, \ldots\} \to \{0, 1\}$$

موجود باشد که تحت آن ارزش‌دهی، ارزشِ $f(P_1, \ldots, P_n)$ برابر ۱ باشد.

قضیه ۲۵۸. (قضیه فشردگی در منطق گزاره‌ها) فرض کنید Σ یک مجموعه از گزاره‌ها در منطق گزاره‌ها باشد به طوری که هر تعداد متناهی از این گزاره‌ها هم‌زمان با هم ارضاپذیر باشند. در این صورت یک ارزش‌دهیِ μ به گزاره‌ها موجود است که تحت آن، همهٔ گزاره‌های موجود در Σ ارزش ۱ دارند.

اثبات. فضای $\{0, 1\}^\omega$ متشکل از توابعِ ارزش‌دهی را در نظر بگیرید. هر $\{0, 1\}$ را با توپولوژی گسسته در نظر بگیرید. به وضوح $\{0, 1\}$ فشرده است. بنابراین $\{0, 1\}^\omega$ فشرده است. فرض کنید ϕ یک گزارهٔ دلخواه باشد. قرار دهید

$$F_\phi = \{\text{تمام توابع ارزش‌دهی } \mu \text{ که } \phi \text{ تحت آن‌ها درست است.}\}$$

اینکه هر تعداد متناهی با هم ارضاپذیرند یعنی

$$F_{\phi_1} \cap F_{\phi_2} \cap \cdots \cap F_{\phi_n} \neq \emptyset.$$

اینکه یک ارزش‌دهی برای همه موجود است یعنی

$$\bigcap_{\phi \in \Sigma} F_\phi \neq \emptyset$$

و حکم به کمک قضیه تیخونوف اثبات می‌شود. $\square$

تمرین ۲۵. نشان دهید F_ϕ هم باز و هم بسته است.

سوال ۲۵۹.

- تعریف توپولوژی (با استفاده از مجموعه‌های باز و بسته)، مقایسهٔ دو توپولوژی، نشان دادن این که دو توپولوژی هاسدوفِ فشرده روی یک مجموعهٔ X یا غیرقابل مقایسه و یا مساوی‌اند.
- تعریف یک پایه برای توپولوژی، توپولوژی تولید شده توسط یک پایه.
- معرفی چند پایه برای توپولوژی روی مجموعهٔ اعداد حقیقی و توانهای آن.

سوال ۲۶۰. Xموضعاً فشرده است اگر و تنها اگر یک فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف Y موجود باشد به طوری کهX هومئومورف با یک زیرمجموعهٔ باز آن باشد.

سوال ۲۶۱. اگر $X \subseteq \mathbb{R}^2$ هم‌بند و باز باشد آنگاه X هم‌بند مسیری است.

سوال ۲۶۲. اگر A هم‌بند مسیری باشد، هم‌بند است.

سوال ۲۶۳. اگر $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد آنگاه برای هر $f(a) < d < f(b)$ یک $a < c < b$ موجود است که $f(c) = d$. قضیهٔ مقدار میانی را در کلی‌ترین حالت بیان کنید.

سوال ۲۶۴. زیرمجموعه‌های هم‌بند $\mathbb{R}$ دقیقاً بازه‌ها هستند.

سوال ۲۶۵. فرض کنید $f : X \to Y$ پیوسته باشد و $A \subseteq X$ هم‌بند باشد. در این صورت $f(A)$ هم‌بند است.

سوال ۲۶۶. اگر A هم‌بند باشد و $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ آنگاه B هم‌بند است.

سوال ۲۶۷. فرض کنید A و B دو مجموعهٔ هم‌بند باشند و $A \cap B \neq \emptyset$ در این صورت $A \cup B$ هم‌بند است.

سوال ۲۶۸. مجموعه‌های فشرده در فضاهای هاسدوف بسته‌اند. زیرمجموعه‌های بستهٔ یک مجموعهٔ فشرده، همواره فشرده‌اند.

سوال ۲۶۹. یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}^n$ فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کراندار باشد.

سوال ۲۷۰. فرض کنید $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ فشرده باشند. در این صورت $A \times B \subseteq X \times Y$ فشرده است.

سوال ۲۷۱. فرض کنید X یک فضای متریک باشد. همچنین فرض کنید $A \subseteq X$ به گونه‌ای باشد که هر دنبالهٔ نامتناهی در A دارای یک زیردنبالهٔ همگرا به عنصری در A باشد. در این صورت A فشرده است.

سوال ۲۷۲. فرض کنید $A \subseteq X$ یک مجموعهٔ فشرده باشد. همچنین فرض کنید $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ یک دنباله از اعضای A باشد. در این صورت $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ دارای یک زیردنبالهٔ همگرا به یک عنصر $a \in A$ است.

سوال ۲۷۳. فرض کنید $f : X \to Y$ پیوسته باشد و Y یک فضا با توپولوژی ترتیبی باشد. X یک فضای توپولوژی دلخواه است. همچنین فرض کنید $A \subseteq X$ فشرده است. در این صورت f در A دارای ماکزیمم و مینی‌موم مطلق است. یعنی نقاط $c_۱$ و $c_۲$ در A موجودند به طوری که

$$\forall x \in A \ : \ f(c_۱) \leq f(x) \leq f(c_۲).$$

سوال ۲۷۴. کنید $f : X \to Y$ یک تابع پیوسته باشد. همچنین فرض کنید $A \subseteq X$ فشرده باشد. در این صورت

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq Y$$

فشرده است.

سوال ۲۷۵. $\mathbb{R}^\omega$ با توپولوژی جعبه‌ای متریک‌پذیر نیست. $\mathbb{R}^\omega$ با توپولوژی حاصلضربی متریک‌پذیر است. در مورد $\mathbb{R}^J$ که در آن J ناشماراست چطور؟

سوال ۲۷۶. تابع $f : A \to X \times Y$ را در نظر بگیرید. در این صورت برای هر $a \in A$ داریم $f(a) = (f_۱(a), f_۲(a))$ که $f_۱ : A \to X$ و $f_۲ : A \to Y$. آنگاه f پیوسته است اگر و تنها اگر $f_۱$ و $f_۲$ هر دو پیوسته باشند.

سوال ۲۷۷. $\mathbb{R}^۲ = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (با توپولوژی ترتیبی) برابر با توپولوژی دایره‌ای است. $\mathbb{R}_{\text{گسسته}} \times \mathbb{R}_{\text{ترتیبی}}$ همان توپولوژی ایجادشده با ترتیب قاموسی است.

سوال ۲۷۸. تابع $f : X \to Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر مجموعهٔ $A \subseteq X$ داشته باشیم، $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. به بیان دیگر اگر x یک نقطهٔ حدی A باشد، $f(x)$ یک نقطهٔ حدی برای $f(A)$ باشد ($x \in \overline{A} \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$).

سوال ۲۷۹. در فضای هاسدورف، حد یک دنبالهٔ همگرا، یکتاست.

سوال ۲۸۰. منظور از مؤلفهٔ همبندی یک مجموعه چیست؟ نشان دهید هر مجموعهٔ هم‌بند، زیرمجموعهٔ یک مؤلفهٔ همبندی است.

سوال ۲۸۱. منظور از عددِ لبگ یک پوشش باز چیست؟

سوال ۲۸۲. فرض کنید X فشره و هاسدوف و $A, B \subseteq X$ دو مجموعهٔ بسته باشند. نشان دهید که بازهای U_1, U_2 موجودند به طوری که $A \subseteq U_1, B \subseteq U_2$ و $U_1 \cap U_2 \emptyset$.

سوال ۲۸۳. نشان دهید که $[0, 1]^2$ با ترتیب قاموسی همبند است اما همبند مسیری نیست.

سوال ۲۸۴. نشان دهید که «شانهٔ محذوف» همبند است اما همبند مسیری نیست.

دانشگاه صنعتی اصفهان

امتحان پایان‌ترم درس توپولوژی

نسخهٔ یک

نیمسال اول ۱۴۰۱

مدرس: محسن خانی

سوال ۲۸۵.

آ) توپولوژی حاصل‌ضربی را در کلی‌ترین حالت تعریف کنید.

ب) قضیهٔ تیخونوف را به دقیق‌ترین صورت بیان کنید.

ج) فرض $X = \prod_{i\in I}\{X_i\}$ حاصل‌ضرب یک خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد. همچنین فرض کنید که $\mathcal{F}$ **یک خانوادهٔ ماکزیمال** از زیرمجموعه‌های X با ویژگی اشتراک متناهی باشد. نشان دهید

$$\bigcap_{D\in\mathcal{F}} \overline{D} \neq \emptyset.$$

سوال ۲۸۶.

۱. ویژگی بئر را برای یک فضای توپولوژیک به طور دقیق و به دو صورت (یک بار با استفاده از بازها و یک بار با استفاده از بسته‌ها) تعریف کنید.

۲. فرض کنید A, B دو مجموعهٔ بسته باشند به طوری که هیچکدام نقطهٔ درونی ندارند. نشان دهید $A\cup B$ نقطهٔ درونی ندارد.

۳. نشان دهید فضاهای توپولوژیک فشردهٔ هاسدورف ویژگی بئر دارند.

سوال ۲۸۷. فرض کنید $h : [0,1] \to [0,1]$ یک تابع پیوسته باشد. نشان دهید که در هر فاصلهٔ دلخواه از این تابع، یک تابعِ همه‌جاپیوستهٔ هیچ‌جامشتق‌پذیر وجود دارد. مراحل اثبات در زیر نوشته شده است:

۱. روی فضای توابع پیوسته از $[0,1]$ به $[0,1]$ یک متریک مناسب تعریف‌کنید.

۲. نشان دهید هر مجموعهٔ

$$U_n = \{f : [0,1] \to [0,1] : \exists\alpha > n \, \exists h < \frac{1}{n} \, \forall x \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| > \alpha\}$$

هم باز است و هم چگال.

۳. توجیه کنید که $\bigcap U_n$ ناتهی است و نیز توجیه کنید که هر تابعی که در این مجموعه باشد، همه‌جاپیوسته و هیچ‌جا مشتق‌پذیر است.

سوال ۲۸۸. نشان دهید $\mathbb{R}^n$ با متر اقلیدسی یک فضای متریک کامل است.

سوال ۲۸۹. یک نگاشت پوشاننده برای صفحهٔ پنجرشده، $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ معرفی کنید.

سوال ۲۹۰. منظور از گروه بنیادی یک فضای توپولوژیک در یک نقطه چیست؟ به طور کامل، هر چه می‌دانید توضیح دهید (شامل توضیح هوموتوپی و غیره)

سوال ۲۹۱. فرض کنید X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده است. یک نقطهٔ $\{\infty\}$ به X اضافه کنید و یک توپولوژی روی $Y = X \cup \{\infty\}$ تعریف کنید. نشان دهید Y با توپولوژی‌ای که شما تعریف کرده‌اید، فشرده و هاسدورف است.

سوال ۲۹۲. فرض کنید $p : E \to B$ یک نگاشت پوشاننده باشد و $f : [0,1] \to B$ یک مسیر پیوسته باشد. به طوری که $f(0) = x_0$. با فرض این که $p(y_0) = x_0$ نشان دهید که یک مسیرِ $\hat{f} : [0,1] \to E$ موجود است که از y_0 آغاز می شود و تصویر آن تحت p همان مسیر f است .

دانشگاه صنعتی اصفهان

امتحان پایان‌ترم درس توپولوژی

نسخهٔ دو

نیمسال اول ۱۴۰۱

مدرس: محسن خانی

سوال ۲۹۳.

آ) توپولوژی حاصل‌ضربی را در کلی‌ترین حالت تعریف کنید.

ب) قضیهٔ تیخونوف را به دقیق‌ترین صورت بیان کنید.

ج) فرض $X = \prod_{i\in I}\{X_i\}$ حاصل‌ضرب یک خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد. همچنین فرض کنید که $\mathcal{F}$ **یک خانوادهٔ ماکزیمال** از زیرمجموعه‌های X با ویژگی اشتراک متناهی باشد. نشان دهید

$$\bigcap_{D\in\mathcal{F}} \overline{D} \neq \emptyset.$$

سوال ۲۹۴.

۱. ویژگی بئر را برای یک فضای توپولوژیک به طور دقیق و به دو صورت (یک بار با استفاده از بازها و یک بار با استفاده از بسته‌ها) تعریف کنید.

۲. فرض کنید A, B دو مجموعهٔ بسته باشند به طوری که هیچکدام نقطهٔ درونی ندارند. نشان دهید $A \cup B$ نقطهٔ درونی ندارد.

۳. نشان دهید فضاهای متریک کامل ویژگیِ بئر دارند.

سوال ۲۹۵. فرض کنید (Y, d) یک فضای متریک کامل باشد.

۱. فرض کنید J یک مجموعهٔ دلخواه باشد. روی Y^J یک متریک مناسب تعریف کنید و نشان دهید این مجموعه، با متری که شما تعریف کرده‌اید، یک فضای متریک کامل است.

۲. نشان دهید که $C(X, Y)$ با یک متر مناسب، یک فضای متریک کامل است.

سوال ۲۹۶.

۱. منظور از یک منحنی فضا پرکن چیست؟

۲. نشان دهید که یک منحنی فضاپرکن وجود دارد.

راهنمایی: فضاهای متریک کامل، حد یک دنباله از توابع

سوال ۲۹۷. فرض کنید X یک زیرمجموعهٔ باز از فضای توپولوژیِ هاسدورف و فشردهٔ Y باشد. نشان دهید که X فشردهٔ موضعی است.

سوال ۲۹۸. فرض کنید X, Y دو فضای توپولوژیک و $h : X \to Y$ یک هومئومرفیسم باشد به طوری که $h(p) = q$. نشان دهید که دو گروه $\pi_1(X, p)$ و $p_1(Y, q)$ با هم ایزومرف هستند.

سوال ۲۹۹. قضیهٔ فن کمپن را بیان و اثبات کنید.

سوال ۳۰۰. گروه بنیادی کرهٔ S^2 را محاسبه کنید.

دانشگاه صنعتی اصفهان

امتحان پایان‌ترم درس توپولوژی

نسخهٔ سوم

نیمسال اول ۱۴۰۱

مدرس: محسن خانی

سوال ۳۰۱.

آ) توپولوژی حاصل‌ضربی را در کلی‌ترین حالت تعریف کنید.

ب) قضیهٔ تیخونوف را به دقیق‌ترین صورت بیان کنید.

ج) فرض $X = \prod_{i\in I}\{X_i\}$ حاصل‌ضرب یک خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد. همچنین فرض کنید که $\mathcal{F}$ **یک خانوادهٔ ماکزیمال** از زیرمجموعه‌های X با ویژگی اشتراک متناهی باشد. نشان دهید

$$\bigcap_{D\in\mathcal{F}} \overline{D} \neq \emptyset.$$

سوال ۳۰۲.

۱. ویژگی بئر را برای یک فضای توپولوژیک به طور دقیق و به دو صورت (یک بار با استفاده از بازها و یک بار با استفاده از بسته‌ها) تعریف کنید.

۲. فرض کنید A, B دو مجموعهٔ بسته باشند به طوری که هیچکدام نقطهٔ درونی ندارند. نشان دهید $A\cup B$ نقطهٔ درونی ندارد.

۳. نشان دهید فضاهای توپولوژیک فشردهٔ هاسدورف ویژگی بئر دارند.

سوال ۳۰۳. فرض کنید $h : [0,1] \to [0,1]$ یک تابع پیوسته باشد. نشان دهید که در هر فاصلهٔ دلخواه از این تابع، یک تابعِ همه‌جاپیوستهٔ هیچ‌جامشتق‌پذیر وجود دارد. مراحل اثبات در زیر نوشته شده است:

۱. روی فضای توابع پیوسته از $[0,1]$ به $[0,1]$ یک متریک مناسب تعریف‌کنید.

۲. نشان دهید هر مجموعهٔ

$$U_n = \{f : [0,1] \to [0,1] : \exists \alpha > n\, \exists h < \frac{1}{n}\, \forall x\, \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| > \alpha\}$$

هم باز است و هم چگال.

۳. توجیه کنید که $\bigcap U_n$ ناتهی است و نیز توجیه کنید که هر تابعی که در این مجموعه باشد، همه‌جاپیوسته و هیچ‌جا مشتق‌پذیر است.

سوال ۳۰۴. فرض کنید X یک زیرمجموعهٔ باز از فضای توپولوژیِ هاسدورف و فشردهٔ Y باشد. نشان دهید که X فشردهٔ موضعی است.

سوال ۳۰۵. نشان دهید که اگر X هم‌بند مسیری باشد، آنگاه گروه بنیادیِ $\pi(X,p)$ مستقل از انتخابِ نقطهٔ p است.

سوال ۳۰۶. نشان دهید گروه بنیادی دایرهٔ S^1 و گروه بنیادیِ $\mathbb{R}^2-\{0\}$ برابر با $(\mathbb{Z},+,0)$ است.

سوال ۳۰۷. یک نگاشت پوشاننده برای چنبره معرفی کنید.

سوال ۳۰۸. قضیهٔ فن کمپن را بیان و اثبات کنید.

دانشگاه صنعتی اصفهان

امتحان پایان‌ترم درس توپولوژی

نسخهٔ چهار

نیمسال اول ۱۴۰۱

مدرس: محسن خانی

سوال ۳۰۹.

آ) توپولوژی حاصل‌ضربی را در کلی‌ترین حالت تعریف کنید.

ب) قضیهٔ تیخونوف را به دقیق‌ترین صورت بیان کنید.

ج) فرض $X = \prod_{i \in I} \{X_i\}$ حاصل‌ضرب یک خانواده از فضاهای توپولوژیک باشد. همچنین فرض کنید که $\mathcal{F}$ **یک خانوادهٔ ماکزیمال** از زیرمجموعه‌های X با ویژگی اشتراک متناهی باشد. نشان دهید

$$\bigcap_{D \in \mathcal{F}} \overline{D} \neq \emptyset.$$

سوال ۳۱۰.

۱. ویژگی بئر را برای یک فضای توپولوژیک به طور دقیق و به دو صورت (یک بار با استفاده از بازها و یک بار با استفاده از بسته‌ها) تعریف کنید.

۲. فرض کنید A, B دو مجموعهٔ بسته باشند به طوری که هیچکدام نقطهٔ درونی ندارند. نشان دهید $A \cup B$ نقطهٔ درونی ندارد.

۳. نشان دهید فضاهای متریک کامل ویژگیِ بئر دارند.

سوال ۳۱۱. فرض کنید (Y, d) یک فضای متریک کامل باشد.

۱. فرض کنید J یک مجموعهٔ دلخواه باشد. روی Y^J یک متریک مناسب تعریف کنید و نشان دهید این مجموعه، با متری که شما تعریف کرده‌اید،یک فضای متریک کامل است.

۲. نشان دهید که $C(X, Y)$ با یک متر مناسب، یک فضای متریک کامل است.

سوال ۳۱۲.

۱. منظور از یک منحنی فضا پرکن چیست؟

۲. نشان دهید که یک منحنی فضاپرکن وجود دارد.

راهنمایی: فضاهای متریک کامل، حد یک دنباله از توابع

سوال ۳۱۳.

۱. نگاشت پوشاننده را به طور دقیق تعریف کنید.

۲. فرض کنید $p : E \to B$ یک نگاشت پوشاننده باشد و $f : [0,1] \to B$ یک مسیر پیوسته باشد. به طوری که $x_0 = f(0)$. با فرض این که $p(y_0) = x_0$ نشان دهید که یک مسیرِ $\hat{f} : [0,1] \to E$ موجود است که از y_0 آغاز می شود و تصویر آن تحت p همان مسیر f است .

سوال ۳۱۴.

۱. نشان دهید که $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^2$ با متریک اقلیدسی با هم هومئومرف نیستند.

۲. نشان دهید که $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ با متریک اقلیدسی با هم هومئومرف نیستند.

سوال ۳۱۵. منظور از گروه بنیادی یک فضای توپولوژیک در یک نقطه چیست؟ به طور کامل، هر چه می‌دانید توضیح دهید (شامل توضیح هوموتوپی و غیره)

سوال ۳۱۶. نشان دهید که $[a,b]$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ فشرده است.